КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ им. Н.Г. ЧЕБОТАРЕВА

КАЗАНСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

УДК 517.958 : 535.4

Е. К. Липачёв

Краевые задачи для уравнения Гельмгольца в областях с бесконечной кусочно–гладкой границей

Препринт ПМФ–05–01

Казань — 2005

Печатается по решению Редакционно–издательского совета Казанского математического общества

Научный редактор — проф., д.ф.–м.н. Н. Б. Плещинский

Исследованы краевые задачи для уравнения Гельмгольца с условиями Дирихле и Неймана на границе. Краевые задачи поставлены в областях, которые только на конечном участке границы отличаются от полуплоскости. Такие области иногда называют областями с "неровной" границей. Предполагается, что "неровный" участок описывается кусочно–гладкой кривой и точки нарушения гладкости имеют особенность типа ребер. Эти задачи можно рассматривать как математическую модель задачи дифракции электромагнитных волн на дифракционных решетках с конечной "нарезанной" частью.

Доказаны теоремы существования и единственности решения краевых задач. Получены интегральные уравнения второго рода, эквивалентные поставленным краевым задачам. Предложен алгоритм приближенного решения задач дифракции, основанный на методе сплайн–подобластей решения интегральных уравнений. Проведено обоснование алгоритма приближенного решения краевых задач.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 03–01–96184).

Введение

В работах [14]–[19] исследованы краевые задачи дифракции на областях с неровной границей в случае, когда граница принадлежит классу $C^{(2)}$ или $C^{(1,\nu)}$, $0 < \nu \leq 1$. Этот случай будем называть случаем с гладкой границей или просто гладким случаем. Для этого случая в работах [14, 18, 19] доказано существование и единственность классических решений краевых задач, найдено представление решений в виде обобщенных потенциалов простого и двойного слоев, плотности которых находятся как решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода.

Если граница области содержит точки нарушения гладкости, то постановка краевых задач дифракции должна учитывать это обстоятельство в виде дополнительных условий, например, условия на ребре ([9, 22]). Исследование разрешимости краевых задач также имеет ряд существенных особенностей.

В этой работе рассматривается задача нахождения электромагнитного поля, возникающего в результате рассеяния плоской поляризованной электромагнитной волны, падающей на бесконечную решётку с конечной нарезанной частью. Нарезанная часть решётки может иметь конечное число точек нарушения гладкости. Будем предполагать, что точки нарушения гладкости являются рёбрами. Отметим, что это один из случаев в классификации особых точек (см., напр., [13, 23]). Вообще говоря, профиль решётки (нарезанный участок) произволен, с одним лишь ограничением, что размеры элементов решётки соизмеримы с длиной падающей волны. Задача дифракции сформулирована в виде краевой задачи для уравнения Гельмгольца с граничными условиями типа Дирихле или Неймана, условием на ребре в точках нарушения гладкости и условиями излучения на бесконечности.

Опираясь на исследования в гладком случае [14] – [19], в данной работе доказано существование и единственность обобщённого по Винеру решения краевой задачи. Доказано, что полученное решение является классическим. Решение представлено в виде обобщённого потенциала и доказана теорема эквивалентности краевой задачи интегральному уравнению второго рода. На основе метода сплайн–подобластей решения интегральных уравнений построен алгоритм приближённого решения краевой задачи. Для теоретического обоснования вычислительной схемы привлечён аппарат, разработанный Б.Г. Габдулхаевым (см., напр., [5]), а также использованы результаты Ю. Р. Агачева [1].

Постановка краевых задач

Рассматривается следующая дифракционная задача. На решётку под углом θ падает плоская электромагнитная волна длины λ. Схематично геометрия дифракционной задачи представлена на рис. 1. Считаем, что угол θ $\left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ отсчитывается от положительного направления оси z к направлению падения волны.

В области над решёткой среда однородна и характеризуется параметрами ε и μ (подробности см., напр., [2, 9]). Колебания совершаются в гармоническом режиме, и зависимость от времени t имеет вид $e^{-i\omega t}$. Требуется найти рассеянное решёткой электромагнитное поле.

Падающее поле можем записать в виде (см., напр., [7, 28])

$$u_0(x,z) \;=\; e^{i\,k\,(\alpha\,x-\beta\,z)}\cdot e^{-i\,\omega\,t},$$

где $\alpha = \sin\theta$, $\beta = \cos\theta$ — составляющие волнового вектора, а $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$ — волновое число. В дальнейшем временной множитель будем опускать.

Согласно основным законам электродинамики (см., напр., [7, 9, 28, 29]) электромагнитное поле характеризуется напряженностью электромагнитного поля $\vec{E}$ и напряженностью магнитного поля $\vec{H}$. При изучении дифракционных явлений, вызванных падением плоской электромагнитной волны на гра-

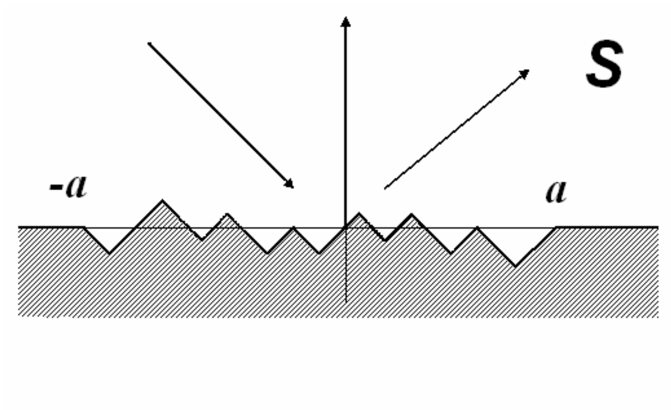

Рис. 1: **Геометрия задачи.**

ницу раздела двух сред, выделяют два случая поляризации, которые принято называть TE (от transverse electric) поляризацией и TM (от transverse magnetic) поляризацией, последний случай обозначают также как TH–поляризацию. В TE–случае электрическое поле перпендикулярно плоскости падения волны, т.е. $\vec{E} = u(x,z) \cdot \vec{y}_0$, и задача сводится к нахождению единственной составляющей электрического вектора

$$u(x,z) = E_y(x,z).$$

Остальные составляющие электромагнитного поля определяются из уравнений Максвелла через E_y:

$$H_x = -\frac{i}{\omega\mu}\frac{\partial E_y}{\partial z}, \quad H_z = \frac{i}{\omega\mu}\frac{\partial E_y}{\partial x}.$$

В случае TH–поляризации, вектор магнитного поля $\vec{H}$ перпендикулярен плоскости падения волны, т.е. $\vec{H} = u(x,z) \cdot \vec{y}_0$ и достаточно найти компоненту магнитного поля

$$u(x,z) = H_y(x,z),$$

через которую из уравнений Максвелла вычисляются остальные компоненты электромагнитного поля:

$$E_x = \frac{i}{\omega\varepsilon}\frac{\partial H_y}{\partial z}, \quad E_z = -\frac{i}{\omega\varepsilon}\frac{\partial H_y}{\partial x}.$$

С математической точки зрения, эти случаи соответствуют краевыми задачам с различными граничными условиями, а именно, случаю TE–поляризации отвечает краевая задача с условием Дирихле на границе, а в случае TM–поляризации исследуется краевая задача с условием Неймана (подробности, см., напр., [7, 9, 24, 28]).

Пусть a — положительное вещественное число. Обозначим через $f(x)$ — кусочно–гладкую функцию, такую, что $\operatorname{supp} f \subset [-a, a]$ и рассмотрим в плоскости $\mathbb{R}^2$ с координатами x и z область

$$S = \{(x, z) \ : \ z > f(x), \ -\infty < x < \infty\}.$$

Для границы этой области справедливо представление

$$\partial S \ \equiv \ \gamma \ = \ \gamma^* \cup \{ (x, 0) \ : \ x \notin [-a, \, a] \},$$

где через γ^* обозначен неровный участок границы, который можно записать в виде

$$\gamma^* = \{(x, f(x)) \ : \ x \in [-a, a]\}.$$

Предполагаем, что граница области кусочно–гладкая и каждый гладкий участок описывается функцией из класса $C^{(2)}$. Обозначим через $\Omega = \{w_j\}_{j=1}^m \subset \gamma^*$ множество точек нарушения гладкости.

Заметим, что структуры с рассматриваемой здесь геометрией включают в себя широкий класс дифракционных решёток (см., напр., [28]), типичные примеры которых приведены на рис. 2.

Обозначим через $\vec{n}_P$ вектор единичной нормали в точке P границы, а через $\dfrac{\partial}{\partial \vec{n}_P}$ — правильную нормальную производную в точке P (см., напр., [3]). Эта производная определена

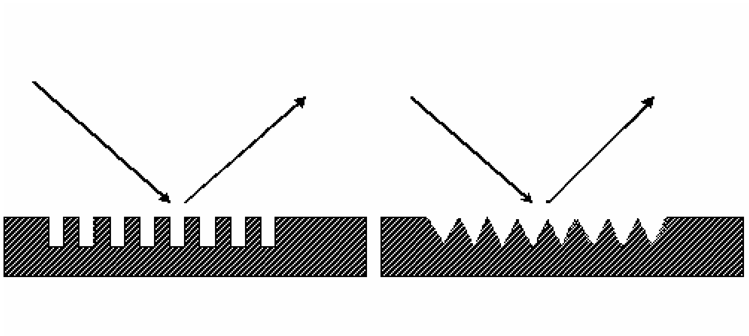

Рис. 2: **Типичные примеры дифракционных решёток.**

во всех точках границы, за исключением конечного числа точек нарушения гладкости (рёбер).

Сформулируем задачу рассеяния в следующем виде.

Найти функцию $u(x,z)$, такую, что

$$\triangle u(x,z) \,+\, k^2\, u(x,z) \,=\, 0, \qquad (x,z) \,\in\, S, \tag{1}$$

$$u(x,z) \,=\, h(x), \quad (x,z) \in \gamma \backslash \Omega \tag{2}$$

(задача Дирихле) или

$$\frac{\partial u(x,z)}{\partial \vec{n}_P} \,=\, g(x), \quad P = (x,z) \in \gamma \backslash \Omega \tag{3}$$

(задача Неймана).

Предполагаем, что в точках нарушения гладкости $w_j \in \Omega$ функция $u(x,z)$ удовлетворяет условию на ребре следующего вида (см., напр., [9, 20, 22]):

$$\lim_{\rho \to 0} \mathrm{Im} \int\limits_{C_\rho \cap S} u\, \frac{\partial \bar{u}}{\partial \vec{n}}\, d\ell \,=\, 0, \tag{4}$$

где C_ρ — окружность радиуса ρ с центром в точке $w \in \Omega$.

Кроме того, требуем выполнения условий излучения

$$u^* = e^{ikr} O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right),$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial r} - iku^* = e^{ikr} o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad r \to \infty, \tag{5}$$

$$r = \sqrt{x^2 + z^2} \to \infty,$$

где

$$u^*(x,z) = u(x,z) - \widetilde{u}(x,z), \tag{6}$$

через $\widetilde{u}(x,z)$ *обозначено решение краевой задачи для полуплоскости [25].*

Задача дифракции плоской электромагнитной волны

$$e^{ik(\alpha x - \beta z)} \cdot e^{-i\omega t}, \quad \alpha = \cos\theta, \quad \beta = \sin\theta \tag{7}$$

в случае TE–поляризации соответствует краевой задаче (1)–(5) с краевым условием (2), в котором

$$h(x) = -u_0\left(x, f(x)\right), \quad x \in [-a, a].$$

Случаю TM–поляризованной волны отвечает краевая задача с условием (3), в котором

$$g(x) = -\frac{\partial u_0}{\partial \vec{n}_P}\left(x, f(x)\right), \quad x \in [-a, a].$$

Здесь $u_0(x,z) = e^{ik(\alpha x - \beta z)}$ и

$$\widetilde{u}(x,z) = \begin{cases} -e^{ik(\alpha x + \beta z)}, & \textit{в случае } TE\textit{–поляризации,} \\ \\ e^{ik(\alpha x + \beta z)}, & \textit{в случае } TM\textit{–поляризации.} \end{cases} \tag{8}$$

Определение 1. *Классическим решением краевой задачи (1) – (5) назовем функцию* $u(P) \in C^2(S) \cap C\left(\overline{S \setminus \Omega_\delta}\right)$, *удовлетворяющую в области S уравнению Гельмгольца, одному из граничных условий (2) или (3), условию излучения (5) и условию на ребре (4) в точках нарушения гладкости. Здесь через Ω_δ обозначено объединение произвольно малых δ – окрестностей точек $w_q \in \Omega$, $q = 1, \ldots, m$.*

Такое определение классического решения возможно только в случае конечного числа точек нарушения гладкости и является общепринятым (см., напр., [26]). Вместо термина классическое решение в кусочно–гладком случае используется также термин квазиклассическое решение (см., напр., [10]).

Единственность решения

Аналогично методу выметания (см., напр., [8]) введём области S_j с границами $\gamma_j \in C^{(2)}$, так что

$$S_j \subset S_{j+1} \subset S, \quad j = 1, 2, \ldots, \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j \;=\; S.$$

Области S_j ($j \in \mathbb{N}$) можем выбрать, например, следующим образом. Пусть $M = \max\limits_{-a \le x \le a} f(x)$ и $0 < \delta < M/2$, обозначим через $\widetilde{C}_{\rho,\ell}$ — круг радиуса $\rho = \delta/j$ с центром в точке $w_\ell \in \Omega$, $\ell = 1, \ldots, m$. Положим

$$S_j \;=\; \widetilde{S}_j \bigcup \left(\bigcup_{\ell=1}^{m} (\widetilde{C}_{\rho,\ell} \cap S) \right),$$

где $\widetilde{S}_j \;=\; S \backslash \left(\bigcup_{\ell=1}^{m} (\widetilde{C}_{\rho,\ell}) \right)$ и $C_{\rho,\ell}$ — окружность радиуса ρ с центром в w_ℓ, $\ell = 1, \ldots, m$.

Рассмотрим также ограниченные области $S_{j,R}$, определённые для вещественных $R > a$ (см. рис. 3):

$$S_{j,R} = \{(x, z) \,:\, x^2 + z^2 \le R^2, z > f_j(x)\},$$

где $f_j(x)$ — функции, определяющие границы областей S_j (т.е. $\partial S_j = (x, f_j(x))$), $j \in \mathbb{N}$.

Этот пример показывает, что последовательность областей $\{S_j\}_1^\infty$ можем выбрать так, что границы ∂S_j областей S_j принадлежат $\gamma \equiv \partial S$, за исключением участка $\gamma'_j \equiv \gamma \setminus (\partial S_j \cap \gamma)$, длина которого стремится к 0 при $j \to \infty$. Кроме того, аппроксимирующие области можно выбрать так, что $\gamma'_j \subset S_{j+1}$, $j \in \mathbb{N}$.

Определение 2. *Пусть краевая задача (1) – (5) разрешима в областях S_j $(j = 1, 2, \ldots)$ и $\{u_j(P)\}_1^\infty$ — последовательность решений. Обобщённым по Винеру решением краевой задачи назовем функцию*

$$u(P) = \lim_{j\to\infty} u_j(P), \quad P \in S,$$

если предел существует и не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности областей.

Более подробную информацию о обобщённых решениях по Винеру можно найти в [13, 21].

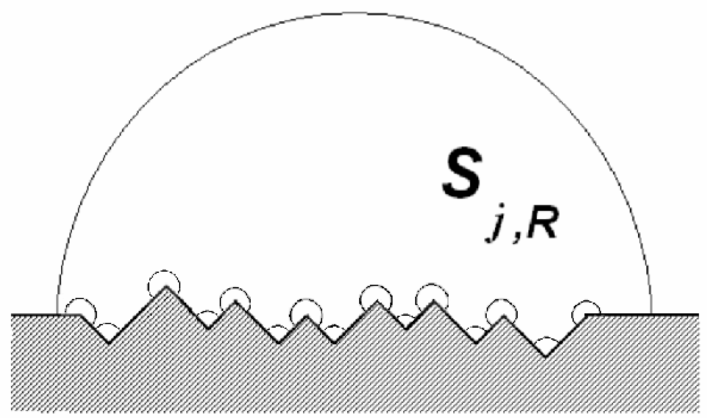

Рис. 3: **Аппроксимация гладкими областями.**

Лемма 1. *Если функция* $u(P) \in L_2(S)$ *удовлетворяет условиям краевой задачи (1) – (5) и* $\operatorname{Im} k \ge 0$, $\operatorname{Re} k \ne 0$, *то*

$$\int\limits_{\Sigma_R^+} u(P)\, \frac{\partial \bar{u}(P)}{\partial \vec{n}_P}\, ds_P \to 0, \quad \text{при } R \to \infty.$$

Здесь через Σ_R^+ *обозначен лежащий в* S *участок окружности радиуса* R *с центром в начале координат.*

Доказательство. Для фиксированных вещественного числа $R > a$ и натурального j рассмотрим область $S_{j,R}$. Известно, что $C^\infty(S_{j,R})$ плотно в $L_2(S_{j,R})$. Пусть $\{u_\ell\}$ — представитель класса u. Применим к функциям $u_\ell(x,z)$ и $\bar{u}_\ell(x,z)$ вторую формулу Грина в области $S_{j,R}$:

$$\int\limits_{S_{j,R}}\int (u_\ell \triangle \bar{u}_\ell - \bar{u}_\ell \triangle u_\ell)\, d\sigma = \int\limits_{\partial S_{j,R}} \left(u_\ell \frac{\partial \bar{u}_\ell}{\partial \vec{n}_P} - \bar{u}_\ell \frac{\partial u_\ell}{\partial \vec{n}_P} \right) ds_P.$$

Переходя к пределу при $\ell \to \infty$, получим формулу Грина для функций u и $\bar{u}$:

$$\int\limits_{S_{j,R}}\int (u \triangle \bar{u} - \bar{u} \triangle u)\, d\sigma = \int\limits_{\partial S_{j,R}} \left(u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \vec{n}_P} - \bar{u} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_P} \right) ds_P. \quad (9)$$

Интегралы в данном случае понимаются в смысле Лебега.

Пусть $k = \nu + i\rho$, тогда, учитывая, что $\triangle \bar{u} = -\bar{k}^2 \bar{u}$ и $\triangle u = -k^2 u$, получаем, что интеграл в левой части (9) равен

$$i\,(4\,\nu\,\rho) \int\limits_{S_{j,R}}\int u\,\bar{u}\, d\sigma.$$

Интеграл в правой части (9) можно записать как интеграл по участку границы $\partial S_j \cap S_R$ и интеграл по Σ_R^+, здесь

$$S_R = \Big\{ (x,z) : x^2 + z^2 \le R^2 \Big\} \cap \overline{S}.$$

Из граничных условий следует, что интеграл по участку границы $\partial S_j \cap S_R$ в пределе по $j \to \infty$ стремится к нулю. Из условий излучения получаем, что интеграл по Σ_R^+ равен

$$-2i\nu \int\limits_{\Sigma_R^+} |u|^2 \, ds_P \; + \; o(\frac{1}{R}) \, R.$$

Таким образом, в соотношении (9) в пределе при $R \to \infty$ получаем

$$i \, (4 \, \nu \, \rho) \int\limits_{S_R}\int |u|^2 \, d\sigma \; + \; i(2 \, \nu) \int\limits_{\Sigma_R^+} |u|^2 \, ds \; \to \; 0. \qquad (10)$$

По условиям леммы $\nu = \mathrm{Re}\ k \neq 0$, $\rho = \mathrm{Im}\ k > 0$, поэтому оба члена в последнем соотношении положительны и, следовательно, в пределе при $R \to \infty$, каждый из них стремится к 0.

Из условий излучения для функций u и $\bar{u}$ получаем

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial r} = -i\bar{k}\bar{u} + o(\frac{1}{\sqrt{r}})e^{-i\bar{k}r}, \quad \frac{\partial u}{\partial r} = iku + o(\frac{1}{\sqrt{r}})e^{ikr}.$$

Поэтому в пределе $R \to \infty$ интеграл

$$J = \int\limits_{\Sigma_R^+} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \vec{n}_P} \, ds_P = \int\limits_{\Sigma_R^+} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \, ds_P$$

равен

$$J = -i\bar{k} \int\limits_{\Sigma_R^+} |u|^2 ds_P + e^{-i\bar{k}R} o(\frac{1}{\sqrt{R}}) \int\limits_{\Sigma_R^+} u \, ds_P.$$

Учитывая, что при $R \to \infty$

$$u = e^{ikR} \, O(\frac{1}{\sqrt{R}}), \quad \bar{u} = e^{-i\bar{k}R} \, O(\frac{1}{\sqrt{R}}),$$

получаем

$$J = -i\bar{k} \int\limits_{\Sigma_R^+} |u|^2 \, ds_P + o(\frac{1}{R})R.$$

Следовательно, при $R \to \infty$

$$\int\limits_{\Sigma_R^+} u(P)\frac{\partial \bar{u}(P)}{\partial \vec{n}_P}\, ds_P \to 0.$$

Теорема 1. *При условии* $\mathrm{Im}\, k \geq 0$ *(и, дополнительно,* $\mathrm{Re}\, k \neq 0$ *в случае граничного условия (3)) краевые задачи (1) – (5) могут иметь не более одного решения в классе квадратично–суммируемых в смысле Лебега функций.*

Доказательство. Предположим, от противного, что существуют два решения $v_1(x,z)$ и $v_2(x,z)$ краевой задачи (1) — (5), принадлежащих пространству $L_2(S)$. Пусть $u(x,z) = v_1(x,z) - v_2(x,z)$, $(x,z) \in S$.

Рассмотрим функции $u_j(x,z)$, $j = 1, 2, \ldots$, определённые в областях S_j следующим образом:

$$u_j(x,z) = \begin{cases} u(x,z), & (x,z) \in S_j \cup (\gamma_j \cap \gamma)\,, \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

т.е. значения функции $u_j(x,z)$ совпадают со значениями функции $u(x,z)$ в области S_j и на общих участках границ γ и γ_j, а на оставшейся части границы доопределены нулём. Очевидно, что $u_j \in L_2(S)$.

Поскольку функции из $C^\infty(S_{j,R})$ плотны в $L_2(S_{j,R})$, существует последовательность непрерывных функций $\{u_{j,\ell}\}_{\ell=1}^{\infty}$, сходящихся к u_j по норме пространства $L_2(S_{j,R})$.

Для фиксированных целого j и $R > a$ применим в области $S_{j,R}$ первую формулу Грина к функциям $u_{j,\ell}$ и $\overline{u}_{j,\ell}$ и перейдем к пределу при $\ell \to \infty$, в результате получим

$$\int\limits_{S_{j,R}} u_j\, \Delta \overline{u}_j\, d\sigma \;+ \int\limits_{S_{j,R}} |\,\nabla u_j|^2\, d\sigma \;= \int\limits_{\partial S_{j,R}} u_j\; \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial \vec{n}_P}\, ds_P. \qquad (11)$$

Интеграл в правой части (11) представим в виде суммы интегралов по составляющим границы $\partial S_{j,R} = \gamma_j \cup \Sigma_R^+$. Согласно определению функций $u_j(x,z)$, справедливо утверждение леммы 1 (поскольку в области S функция $u_j(x,z)$ совпадает с $u(x,z)$, удовлетворяет на границе γ_j условию Дирихле или Неймана, а на бесконечности — условиям излучения), поэтому в пределе при $R \to \infty$ формула (11) переходит в

$$\int\limits_{S_j} u_j\, \Delta \overline{u}_j\, d\sigma \;+\; \int\limits_{S_j} |\, \nabla u_j|^2\, d\sigma \;=\; \int\limits_{\gamma_j} u_j\; \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial \vec{n}_P}\, ds_P. \qquad (12)$$

В силу граничных условий правая часть формулы (12) равна нулю. Следовательно, $u_j(x,z) = 0$ при $(x,z) \in S_j$. В пределе при $j \to \infty$ приходим к равенству $u(x,z) = 0$ для $(x,z) \in S$. Таким образом, решение краевой задачи единственно.

Существование решения

Выберем последовательность областей S_j $(j = 1, 2, \ldots)$, аппроксимирующих область S и обладающих свойствами:

$$\ldots \subset S_j \subset S_{j+1} \subset \ldots \subset S, \quad \gamma_j \equiv \partial S_j \in C^{(2)}. \qquad (13)$$

Как было замечено ранее, последовательность областей можем выбрать так, что

$$\emptyset \neq \partial S_j \cap \gamma \quad j \in \mathbb{N} \qquad (14)$$

и длина участка $\gamma_j' \equiv \gamma \setminus (\partial S_j \cap \gamma)$ стремится к 0 при $j \to \infty$, т.е. границы областей S_j совпадают за исключением участка γ_j'. Более того, можем считать, что этот участок содержится в S_{j+1}. Будем обозначать через $\widetilde{\gamma}_j$ участок границы ∂S_j, лежащий в $\overline{S}$, т.е.

$$\widetilde{\gamma}_j = \gamma \cap \partial S_j, \quad j = 1, 2, \ldots. \qquad (15)$$

Для каждого $j \in \mathbb{N}$ рассмотрим краевую задачу (1) – (5) в области S_j (т.е. при $\gamma = \gamma_j$ и $\Omega = \emptyset$). Согласно результатам работ [14, 18, 19], краевая задача в области S_j имеет единственное решение $u_j(x,z)$, принадлежащее классу $C^2(S_j) \cap C\,(S_j \cup \gamma_j)$ (в случае граничного условия (3) к определению класса добавлено условие существования правильной нормальной производной на границе). В случае задачи Дирихле функция $u_j(x,z)$ представима в виде комбинации вспомогательного решения $\widetilde{u}$ для случая полуплоскости и обобщённого потенциала двойного слоя $W_{\{\gamma_j^*,\psi\}}$:

$$u\,(M) \;=\; \widetilde{u}\,(M) \;+\; W_{\{\gamma_j^*,\psi\}}(M), \quad M \in S, \tag{16}$$

$$W_{\{\gamma_j^*,\psi\}}(M) \;\equiv\; \int\limits_{\gamma_j^*} \frac{\partial\, G_1\,(M,\,P)}{\partial\, \vec{n}_P}\,\psi(\tau)\,ds_P. \tag{17}$$

Решение краевой задачи Неймана представимо в виде

$$u\,(M) \;=\; \widetilde{u}\,(M) \;+\; V_{\{\gamma_j^*,\psi\}}(M), \tag{18}$$

где

$$V_{\{\gamma_j^*,\varphi\}}(M) \;\equiv\; \int\limits_{\gamma_j^*} G_2\,(M,\,P)\,\varphi(\tau)\,ds_P, \tag{19}$$

обобщённый потенциал простого слоя. Здесь

$$G_m(M,P) = \frac{\pi\, i}{2}\,\left\{H_0^{(1)}\,(k\,r) + (-1)^m\, H_0^{(1)}\,(k\,r^*)\right\}, \tag{20}$$

$m = 1, 2$ и $\varphi, \psi \in \dot{C}[-a, a]$. Через $H_0^{(1)}\,(z)$ обозначена функция Ганкеля первого рода нулевого порядка (см., напр., [7, 24]),

$$M = (x, z)\,, \quad P = (\tau, \zeta)\,,$$

$$r = \sqrt{(x\,-\,\tau)^2 + (z\,-\,\zeta)^2}, \quad r^* = \sqrt{(x\,-\,\tau)^2 + (z\,+\,\zeta)^2}.$$

Плотности потенциалов определяются как решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода

$$\pi\,\psi(x) + \int\limits_{\gamma_j^*} \frac{\partial\, G_1\,(M,\,P)}{\partial\, \vec{n}_P}\,\psi(\tau)\,ds_P = \rho\,(M), \tag{21}$$

$$-\pi\,\varphi(x) + \int\limits_{\gamma_j^*} \frac{\partial\, G_2\,(M,P)}{\partial\, \vec{n}_M}\,\varphi(\tau)\,ds_P = \chi(M). \tag{22}$$

Здесь $\rho(M) = h(x) - \widetilde{u}(M)$, $\chi(M) = g(x) - \widetilde{u}(M)$, $M = (x, f(x)) \in \gamma^*$, $P = (\tau, f(\tau))$, а $\gamma_j^* \equiv \gamma_j \setminus (\partial S \setminus \gamma^*)$ — неровный участок границы γ_j ($j \in \mathbb{N}$). Эти уравнения получены из теоремы о скачке значений обобщенных потенциалов (см., напр., [12, 27]).

Таким образом, получаем последовательность функций $\{u_j(x,z)\}_{j=1}^{\infty}$, являющихся классическими решениями краевой задачи в областях S_j ($j \in \mathbb{N}$). Для каждого $j \in \mathbb{N}$ обозначим через (S_j, u_j) пару, состоящую из области S_j и функции $u_j(x,z)$, являющейся решением одной из краевых задач (1) – (5) в области S_j, $j \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим теперь пары (S_j, u_j) и (S_{j+1}, u_{j+1}) для некоторого фиксированного номера j. Согласно выбору аппроксимирующей последовательности областей имеем

$$S_j \subset S_{j+1}, \quad \gamma_j \cap \gamma_{j+1} \subset \gamma, \quad \gamma_j' \equiv \gamma_j \setminus (\gamma_j \cap \gamma_{j+1}) \subset S_{j+1}. \quad (23)$$

На общем участке границы областей S_j и S_{j+1} выполнено условие

$$u_j\big|_{\gamma_j \cap \gamma_{j+1}} = u_{j+1}\big|_{\gamma_j \cap \gamma_{j+1}} = h\big|_{\gamma_j \cap \gamma_{j+1}}. \quad (24)$$

На участке γ' функция u_{j+1}, в силу (23), определена и непрерывна (как решение краевой задачи в области S_{j+1}). Рассмотрим теперь в области S_j краевую задачу, состоящую из уравнения

$$\triangle u + k^2 u = 0, \quad (25)$$

граничного условия

$$u\big|_{\gamma_j} = u_{j+1}\big|_{\gamma_j} \quad (26)$$

и условия излучения на бесконечности вида (5).

Приведённая краевая задача, вследствие результатов для случая гладкой границы, имеет единственное классическое решение. Обозначим решение этой краевой задачи через $\dot{u}_j(x,z)$. Таким образом, исходя из последовательности пар $\{(S_j, u_j)\}_1^{\infty}$ получили последовательность функций $\{\dot{u}_j(x,z)\}_1^{\infty}$.

Заметим, что для каждого $j \in \mathbb{N}$, функция $u_{j+1}\big|_{S_j}$ также удовлетворяет условиям краевой задачи (25), (26), (5). В силу единственности решения этой краевой задачи заключаем, что

$$\dot{u}_j(x,z) = u_{j+1}(x,z), \quad (x,z) \in S_j, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{27}$$

Как следствие последнего соотношения, получаем при $k \leq j$, $j, k \in \mathbb{N}$

$$\dot{u}_k(x,z) = u_{j+1}(x,z), \quad (x,z) \in S_k, \tag{28}$$

т.е.

$$\dot{u}_k \equiv u_{j+1}\big|_{S_k} \quad \text{при } k \leq j.$$

Рассмотрим теперь отрезок последовательности

$$\{\dot{u}_1(x,z), \ldots, \dot{u}_j(x,z), \dot{u}_{j+1}(x,z)\}$$

при фиксированном $j \in \mathbb{N}$. Заменим функцию $\dot{u}_j(x,z)$ на решение краевой задачи (25), (26), (5), в которой граничное условие изменено следующим образом

$$u\big|_{\gamma_j} \;=\; \dot{u}_{j+1}\big|_{\gamma_j}. \tag{29}$$

Полученное решение по–прежнему будем обозначать через $\dot{u}_j(x,z)$. Точно так же поступим с функцией $\dot{u}_{j-1}(x,z)$ и далее, вплоть до начала отрезка. Из соотношения (28) следует, что

$$\dot{u}_k \equiv \dot{u}_j\big|_{S_k}, \quad k < j, \quad k,j \in \mathbb{N}. \tag{30}$$

Аналогично строится последовательность $\{\dot{u}_j(x,z)\}_1^\infty$ для краевой задачи с условием Неймана на границе.

Полученные утверждения сформулируем в виде следующей леммы.

Лемма 2. *Последовательность $\{\dot{u}_j\}_{j=1}^\infty$ обладает следующими свойствами*:

1) $\dot{u}_k(x,z) \;=\; \dot{u}_j(x,z), \quad (x,z) \in S_k, \quad k < j, \quad k,j \in \mathbb{N}$;

2) $\dot{u}_j\big|_{\gamma_j \cap \gamma_{j+1}} = \dot{u}_{j+1}\big|_{\gamma_j \cap \gamma_{j+1}} = -\,u_0\big|_{\gamma_j \cap \gamma_{j+1}}, \quad j \in \mathbb{N}$.

Из утверждений о эквивалентности интегральных уравнений и краевых задач дифракции в гладких областях (см. [14, 18, 19]) следует, что каждая функция $\dot{u}_j(x,z)$ $(j \in \mathbb{N})$ представима в виде

$$\dot{u}_j\,(x,z) \;=\; \widetilde{u}\,(x,z) \;+\; W_{\left\{\gamma_j^*,\dot{\varphi}_j\right\}}(x,z) \tag{31}$$

в случае краевой задачи Дирихле и

$$\dot{u}_j\,(x,z) \;=\; \widetilde{u}\,(x,z) \;+\; V_{\left\{\gamma_j^*,\dot{\varphi}_j\right\}}(x,z) \tag{32}$$

в случае краевой задачи Неймана. Плотности $\dot{\varphi}_j(x)$ $(j \in \mathbb{N})$ обобщённых потенциалов (17) и (19) получены как решения интегральных уравнений (21) и (22), при этом функция $f(x)$, определяющая неровный участок границы ∂S заменена на функцию $f_j(x)$, определяющую неровный участок границы ∂S_j $(j \in \mathbb{N})$.

Таким образом, наряду с последовательностью пар $\{(S_j, \dot{u}_j)\}$ имеем последовательность функций $\{\dot{\varphi}_j(x)\}$.

Теорема 2. *При условии* $\operatorname{Im} k \geq 0$, *последовательность* $\{\psi_j(x,z)\}_1^\infty$ *решений интегральных уравнений (21) сходится в пространстве* $L_2[-a,a]$ *к функции* $\psi(x,z)$, *такой, что функция*

$$u\,(x,z) \;=\; \widetilde{u}\,(x,z) \;+\; W_{\{\gamma^*,\psi\}}(x,z) \tag{33}$$

является решением краевой задачи (1) – (5) с условием Дирихле на границе.

Теорема 3. *При условиях* $\operatorname{Im} k \geq 0$ *и* $\operatorname{Re} k \neq 0$ *последовательность* $\{\varphi_j(x,z)\}_1^\infty$ *решений интегральных уравнений (22) сходится в пространстве* $L_2[-a,a]$ *к функции* $\varphi(x,z)$, *такой, что потенциал*

$$u\,(x,z) \;=\; \widetilde{u}\,(x,z) \;+\; V_{\{\gamma^*,\varphi\}}(x,z) \tag{34}$$

является решением краевой задачи (1) – (5) с условием Неймана на границе.

Доказательство. Рассмотрим последовательность функций $\{\dot{u}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, построенную по указанной ранее схеме. Каждая из функций $\dot{u}_j(x,z)$ этой последовательности является решением краевой задачи дифракции в области с достаточно гладкой границей и, следовательно, как показано ранее, представима в виде обобщённого потенциала, вычисленного по формулам (31) или (32) в зависимости от поляризации задачи.

Покажем, что предел последовательности функций $\{\dot{u}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ существует и является решением краевой задачи (1) – (5).

Пусть i,j — натуральные числа, $k=\min\{i,j\}$ и $R>a$ — вещественное число. Рассмотрим в области S_R функции $\dot{u}_i(x,z)$ и $\dot{u}_j(x,z)$. Согласно лемме 2 имеем

$$\dot{u}_i(x,z)=\dot{u}_j(x,z),\quad \text{при } (x,z)\in S_k. \tag{35}$$

Пусть для определённости $i>j$, тогда

$$(\dot{u}_i-\dot{u}_j)\big|_{S_i}=(\dot{u}_i-\dot{u}_j)\big|_{S_{i,R}}=U_{\{\gamma_{j,R},\varphi_j\}}-U_{\{\gamma_{i,R},\varphi_i\}}, \tag{36}$$

где

$$U_{\{\gamma_{j,R},\varphi_j\}}=W_{\{\gamma_{j,R},\varphi_j\}}$$

в случае задачи Дирихле и

$$U_{\{\gamma_{j,R},\varphi_j\}}=V_{\{\gamma_{j,R},\varphi_j\}}$$

— в случае задачи Неймана.

Из соотношения (36) получаем

$$(\dot{u}_i-\dot{u}_j)\big|_{S_i}=U_{\{\gamma_{i,R},\varphi_j\}}-U_{\{\gamma_{i,R},\varphi_i\}}+U_{\{\partial S_i\setminus\partial S_j,\varphi_i\}}.$$

Откуда приходим к равенству

$$U_{\{\gamma_{i,R},\varphi_i-\varphi_j\}}\ =\ (u_i-u_j)\big|_{S_i}\ +\ U_{\{\partial S_i\setminus\partial S_j,\varphi_i\}}. \tag{37}$$

Первое слагаемое в правой части соотношения (37) равно нулю согласно (35), а второе слагаемое стремится к 0 при $j\to\infty$ в силу того, что $S_{j,R}\to S_R$ и $\partial S_{j,R}\to\partial S_R$ при $j\to\infty$.

Таким образом, последовательность функций $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ фундаментальна.

В пространстве $L_2\,(\partial S_R)$ существует предел этой последовательности функций, который обозначим через

$$\varphi^* = \lim_{j\to\infty} \varphi_j.$$

Рассмотрим функцию

$$u^*(x,z) \;=\; \widetilde{u}(x,z) \;+\; U_{\{\partial S_R,\varphi^*\}}(x,z). \tag{38}$$

Поскольку функция $u^*(x,z)$ является обобщённым потенциалом, она удовлетворяет уравнению Гельмгольца, и для неё выполнены условия излучения на бесконечности.

Выполнение условия на ребре в точках множества Ω следует из соотношения

$$U_{\{\cup C_{\delta,j},\varphi^*\}} \;=\; U_{\{\partial S_{j,R},\varphi^*\}} \;-\; U_{\{\partial S_R,\varphi^*\}}$$

и из того, что $S_{j,R} \to S_R$ при $j\to\infty$.

Таким образом, найдено ненулевое решение краевой задачи (1) – (5), причём решение представимо в виде, указанном в формулировке теорем.

Для каждого $j\in\mathbb{N}$ запишем интегральные уравнения (21), (22) в едином виде

$$\varphi_j(x) + \int\limits_{\gamma^*} \widetilde{K}_j(x,\tau)\varphi_j(\tau)\,ds_P = y(x), \quad -a<x<a. \tag{39}$$

Из теоремы об уравнениях с близкими ядрами (см. [11, стр. 157]) и теорем 1 – 3 следует

Теорема 4. *Существует последовательность $\{\widetilde{\varphi}_j(x)\}$ решений интегрального уравнения (39), которая сходится в пространстве $L_2[-a,a]$ к такой функции $\varphi(x)$, что обобщённый потенциал двойного слоя (в случае задачи Дирихле) или обобщённый потенциал простого слоя (в случае задачи Неймана) с плотностью $\varphi(x)$ является решением краевой* *задачи дифракции (1) – (5). При этом функция $\varphi(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению*

$$\varphi(x) + \int\limits_{\gamma^*} \widetilde{K}(x,\tau)\varphi(\tau)\, ds_P = y(x), \tag{40}$$

где $P = (\tau, f(\tau))$, $M = (x, f(x))$, ядро вычислено по формулам

$$\widetilde{K}(x,\tau) = \frac{1}{\pi}\frac{\partial G_1(M,P)}{\partial \vec{n}_P}$$

в TE–случае,

$$\widetilde{K}(x,\tau) = -\frac{1}{\pi}\frac{\partial G_2(M,P)}{\partial \vec{n}_M}$$

в TM–случае, $\widetilde{K}(x,\tau) = 0$, если $M \in \Omega$, а при совпадении аргументов значение ядра равно половине кривизны гладкого участка границы. Правая часть интегрального уравнения вычисляется по формулам
$y(x) = \frac{1}{\pi}\left[h(x) - \widetilde{u}\,(x, f(x))\right]$ *в TE–случае и*
$y(x) = -\frac{1}{\pi}\left[g(x) - \widetilde{u}\right](x, f(x))$ *в TM–случае.*

Непосредственным следствием теорем $1-4$, а также свойств обобщённых потенциалов является следующее утверждение.

Теорема 5. *В условиях теоремы 1, решение краевой задачи (1) – (5), построенное согласно схеме, указанной в формулировке теоремы 4, является классическим.*

Приближённое решение краевой задачи

Будем решать интегральное уравнение

$$\mathcal{K}\varphi \equiv \varphi(x) + \int\limits_{-a}^{a} \widetilde{K}(x,\tau)\varphi(\tau)\, d\tau = y(x), \quad x \in [-a,a], \tag{41}$$

эквивалентное краевой задаче, методом сплайн–подобластей. Ядро интегрального уравнения (41) в TE – случае вычисляется с помощью соотношений

$$\widetilde{K}(x,\tau) = \frac{ik}{2}\Big[\ \frac{H_1^{(1)}(kr)}{r}\left\{(x-\tau)\, f'(\tau) + (f(\tau) - f(x))\right\} + $$

$$+\frac{H_1^{(1)}(kr^*)}{r^*}\left\{(\tau - x)f'(x) - (f(x) + f(\tau))\right\}\Big], \qquad (42)$$

$\widetilde{K}(x,\tau) = 0$, если точка $M = (\tau, f(\tau))$ принадлежит множеству Ω (т.е. является ребром). При совпадении аргументов значение ядра доопределяется значением

$$\frac{f''(\tau)}{2\pi\left[1 + (f'(\tau))^2\right]}.$$

Правая часть интегрального уравнения (41) в TE – случае вычисляется по формуле

$$y(x) = \frac{1}{\pi}\left[h(x) - \widetilde{u}\,(x, f(x))\right]. \qquad (43)$$

В TM – случае, ядро и правая часть интегрального уравнения (41) определяются по формулам

$$\begin{gathered}\widetilde{K}(x,\tau) = \frac{ik}{2}\sqrt{\frac{1 + (f'(\tau))^2}{1 + (f'(x))^2}}\times \\ \times\Big[\ \frac{H_1^{(1)}(kr)}{r}\left\{(x-\tau)\, f'(x) + (f(\tau) - f(x))\right\} + \\ +\frac{H_1^{(1)}(kr^*)}{r^*}\left\{(x-\tau)f'(x) - (f(x) + f(\tau))\right\}\Big],\end{gathered} \qquad (44)$$

$$y(x) = -\frac{1}{\pi}\left[g(x) - \widetilde{u}\,(x, f(x))\right]. \qquad (45)$$

При совпадении аргументов значение ядра доопределяется значением

$$-\frac{f''(x)}{2\pi\left[1 + (f'(x))^2\right]}$$

и полагается равным 0, если точка $M = (\tau, f(\tau))$ принадлежат множеству Ω.

В соотношениях (42) и (44) использованы обозначения

$$r = \sqrt{(x-\tau)^2 + (f(x) - f(\tau))^2},\ r^* = \sqrt{(x-\tau)^2 + (f(x) + f(\tau))^2}.$$

На отрезке $[-a, a]$ рассмотрим произвольную сетку узлов

$$\Delta_n:\ -a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_n \le a, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{46}$$

удовлетворяющую условию

$$\delta_n = \max_{1 \le j \le n} (x_j - x_{j-1}) \to 0, \quad n \to \infty. \tag{47}$$

Приближённое решение интегрального уравнения (41) ищем в виде сплайна

$$\varphi_n^l(x) \ = \ \sum_{j=0^l}^{n} c_j s_j^l(x), \quad 0^0 = 1, \tag{48}$$

где $s_j^l(x)$ — фундаментальные сплайны степени l.

Приближённое решение в случае $l = 0$ отыскивается в виде ступенчатой функции

$$\varphi_n^0(x) \ = \ \sum_{j=1}^{n} c_j s_j^0(x), \tag{49}$$

где

$$s_1^0(x) = \begin{cases} 1, & -a \le x \le x_1, \\ 0, & x_1 < x \le a, \end{cases}$$

$$s_j^0(x) = \begin{cases} 1, & x_{j-1} < x \le x_j, \\ 0, & x \notin (x_{j-1}, x_j), \end{cases} \qquad j = \overline{2, n}.$$

Неизвестные коэффициенты $c_j \ \ (j = 1, \ldots, n)$ определяем, согласно методу подобластей, из системы линейных алгебраических уравнений

$$c_j \ + \ \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} c_k \ = \ \Phi_j(y), \quad j = \overline{1, n}, \tag{50}$$

где

$$\Phi_j(y) \;=\; \frac{1}{x_j - x_{j-1}} \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} y(x)\,dx, \quad j = \overline{1,n}, \tag{51}$$

$$\begin{aligned} &\alpha_{jk} = \Phi_j\left(\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \widetilde{K}(x,\tau)\,d\tau\right) = \\ &= \frac{1}{x_j - x_{j-1}} \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \widetilde{K}(x,\tau)\,d\tau\,dx, \quad j,k = 1,\ldots,n. \end{aligned} \tag{52}$$

Вычислительную схему (41), (46) — (52) называют (см., напр., [6]) ступенчатым методом подобластей.

В случае $l = 1$ при построении приближённого решения используются фундаментальные сплайны первого порядка, определённые соотношениями

$$s_0^1(x) \;=\; \begin{cases} \dfrac{x_1 - x}{x_1 - x_0}, & x_0 < x \le x_1 \\ \qquad 0, & x \ge x_1, \end{cases}$$

$$s_j^1(x) \;=\; \begin{cases} 0, & x \le x_{j-1}, \\ \dfrac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}, & x_{j-1} \le x \le x_j \\ \dfrac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j}, & x_j \le x \le x_{j+1} \\ 0, & x \ge x_{j+1}, \qquad i = \overline{1, n-1}, \end{cases} \tag{53}$$

$$s_n^1(x) \;=\; \begin{cases} 0, & x \le x_{n-1}, \\ \dfrac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}, & x_{n-1} \le x \le x_n. \end{cases}$$

Приближённое решение находим виде полигонального сплайна

$$\varphi_n^1(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j s_j^1(x). \tag{54}$$

Неизвестные коэффициенты $c_j \quad (j = 0, \ldots, n)$ находим из условий

$$\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \left[\left(\mathcal{K} \varphi_n^1 \right)(x) - y(x) \right] dx = 0, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{55}$$

С помощью функционалов Φ_j условия (55) перепишем в виде системы линейных алгебраических уравнений

$$\frac{c_{j-1} + c_j}{2} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} c_k \; = \; \Phi_j(y), \quad j = \overline{1, n}, \quad (c_0 = c_n), \tag{56}$$

где

$$\alpha_{jk} = \Phi_j \left(\int\limits_{x_{k-1}}^{a} \widetilde{K}(x, \tau) \, d\tau \right). \tag{57}$$

Вычислительную схему (41), (46), (54) — (57) называют (см., напр., [6]) полигональным методом подобластей.

Соотношения (57) можно конкретизировать:

$$\alpha_{j1} = \frac{1}{x_j - x_{j-1}} \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} \int\limits_{x_0}^{x_1} \widetilde{K}(x, \tau) \, d\tau \, dx \; + \\ + \frac{1}{(x_j - x_{j-1})(x_2 - x_1)} \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} \int\limits_{x_1}^{x_2} \widetilde{K}(x, \tau) \, (x_2 - \tau) \; d\tau \, dx,$$

при $j = 1, \ldots, n$,

$$\alpha_{jk} = \frac{1}{(x_j - x_{j-1})(x_k - x_{k-1})} \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \widetilde{K}(x, \tau) \, (\tau - x_{k-1}) \; d\tau \, dx + \\ + \frac{1}{(x_j - x_{j-1})(x_2 - x_1)} \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} \int\limits_{x_1}^{x_2} \widetilde{K}(x, \tau) \, (x_{k+1} - \tau) \; d\tau \, dx, \tag{58}$$

при $j = 1, \ldots, n, k = 2, \ldots, n-1$,

$$\alpha_{jn} = \frac{1}{(x_j - x_{j-1})(x_n - x_{n-1})} \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} \int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} \widetilde{K}(x, \tau) \, (\tau - x_{n-1}) \; d\tau \, dx,$$

при $j = 1, \ldots, n$.

В матричном виде системы линейных уравнений (50), (56) можно записать в виде

$$A \cdot c \;=\; b, \tag{59}$$

где

$$A = [a_{jk}], \quad a_{jk} \;=\; \alpha_{jk} + \delta_{j,k}, \quad j,\, k = \overline{1,\, n},$$
$$c = [c_k]', \quad b \;=\; [b_k]', \quad b_k = y(x_k), \quad k \;=\; \overline{1,\, n}.$$

Обоснование вычислительной схемы

Для обоснования предложенной вычислительной схемы воспользуемся результатами Б. Г. Габдулхаева [5] и Ю. Р. Агачева [1].

Как только что показано, интегральное уравнение (41) однозначно разрешимо. Для ядра уравнения (41) выполнены условия, приведенные в работе [1]. В случае ступенчатого метода подобластей воспользуемся теоремой 1 работы [1], а в случае полигонального метода подобластей теоремой 3 из этой же работы. Следовательно, системы линейных алгебраических уравнений (50), (56) однозначно разрешимы начиная с некоторого n. Таким образом, сплайны нулевого и первого порядка, определяемые по методу подобластей, существуют и единственны при всех n, начиная с некоторого.

Из оценок (2.12) и (3.3) работы [1] получаем следующие оценки погрешности метода подобластей:

$$\begin{aligned} \|\varphi^* - \varphi_n^0\|_2 = O\left(\omega_x\left(\widetilde{K};\delta_n\right)_2 + \omega(y;\delta_n)_2\right) = \\ = O\left(\omega_x\left(\widetilde{K};\delta_n\right)_2 + \delta_n\right), \end{aligned} \tag{60}$$

$$\begin{aligned} \|\varphi^* - \varphi_n^1\|_2 = O\left(\omega_x\left(\widetilde{K};\delta_n\right)_2 + \omega(y;\delta_n)_2\right) = \\ = O\left(\omega_x\left(\widetilde{K};\delta_n\right)_2 + \delta_n\right), \end{aligned} \tag{61}$$

где через $\varphi^*(x)$ обозначено точное решение уравнения (41) и

$$\omega(y;\delta)_2 = \sup_{0<\eta\leq\delta} \left\{ \int\limits_{-a}^{a-\eta} |y(t) - y(t+\eta)|^2 \, dt \right\}^{1/2},$$

$$\omega_x(\widetilde{K};\delta)_2 = \sup_{0<\eta\leq\delta} \left\{ \int\limits_{-a}^{a-\eta} \int\limits_{-a}^{a} \left|\widetilde{K}(x+\delta,\tau) - \widetilde{K}(x,\tau)\right|^2 \, dx\, d\tau \right\}^{1/2}.$$

Из соотношений (60), (61) следует сходимость ступенчатого метода подобластей и полигонального метода подобластей.

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 6. *В условиях теоремы 1 при достаточно больших n сплайн–функции $\varphi_n^l(x)$, определяемые ступенчатым и полигональным методами сплайн–подобластей, существуют, единственны и сходятся к точному решению $\varphi^*(x)$ со скоростью*

$$\|\varphi^* - \varphi_n^l\|_2 \;=\; O\left(\omega_x(\widetilde{K};\delta_n)_2 \;+\; \delta_n\right).$$

Список литературы

[1] Агачев Ю. Р. *О сходимости метода сплайн–подобластей для интегральных уравнений* // Изв. вузов. Математика, 1981. № 6 (229). — С. 3 — 10.

[2] Басс Ф. Г., Фукс И.М. *Рассеяние волн на статистически неровной поверхности.* — М.: Наука, 1972. — 424 с.

[3] Владимиров В. С. *Уравнения математической физики.* — М.: Наука, 1976. — 528 с.

[4] Габдулхаев Б. Г. *Аппроксимация полиномами и сплайнами решений слабо сингулярных интегральных уравнений* // Теория приближения функций. — М.: Наука, 1977. — С. 89 – 93.

[5] Габдулхаев Б. Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* — Казань: Изд–во Казан. ун–та, 1980. — 232 с.

[6] Габдулхаев Б. Г. *Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода.* — Казань: Изд–во Казан. ун–та, 1994. — 288 с.

[7] Галишникова Т. Н., Ильинский А. С. *Численные методы в задачах дифракции.* — М.: Изд–во Моск. ун–та, 1987. — 208 с.

[8] Егоров Ю. В., Шубин М. А. *Линейные дифференциальные уравнения с частными производными. Основы классической теории.* // Итоги науки и техники. Совр. проблемы математики. Фундам. направления. Т. 30. — М.: ВИНИТИ АН СССР, 1987. — С. 1 – 262.

[9] Ильинский А. С., Кравцов В. В., Свешников А. Г. *Математические модели электродинамики.* — М.: Высш. шк., 1991. — 224 с.

[10] Ильинский А. С., Смирнов Ю. Г. *Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах (Псевдодифференциальные операторы в задачах дифракции).* — М.: ИПРЖР, 1996. — 176 с.

[11] Канторович Л. В., Крылов В. И. *Приближённые методы высшего анализа.* — Л.: Физматгиз, 1962. — 708 с.

[12] Колтон Д., Кресс Р. *Методы интегральных уравнений в теории рассеяния:* Пер. с англ. — М.: Мир, 1987. — 311 с.

[13] Кондратьев В. А., Олейник О. А. *Краевые задачи для уравнений с частными производными в негладких областях* // Успехи матем. наук, 1983. — Т. 38, № 2. — С. 3 – 76.

[14] Липачёв Е. К. *О разрешимости задачи рассеяния на бесконечной решетке с конечной нарезкой* // "Алгебра и анализ", Казань, 16–22 июня 1997. — Казань: Казан. матем. общество, 1997. – С. 135–136.

[15] Липачёв Е. К. *Решение дифракционных задач в области с кусочно–гладкой границей* //"Алгебра и анализ", Казань, 16–22 июня 1997. — Казань: Казан. матем. общество, 1997. — С. 137.

[16] Липачёв Е. К. *Разрешимость краевой задачи дифракции волн на областях с кусочно–гладкой границей* // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы. — Казань: Казан. матем. общество, 1999. — С. 136 – 138.

[17] Липачёв Е. К. *Об обобщенных по Винеру решениях краевой задачи дифракции волн на областях с негладкой границей* //Тр. Матем. центра имени Н.И. Лобачевского. Т. 6. Задачи дифракции и сопряжение электромагнитных полей в волноводных структурах. — Казань: НИИММ им. Н.Г. Чеботарева, 2000. – С. 199 – 202.

[18] Липачёв Е. К. *К приближенному решению краевой задачи дифракции волн на областях с бесконечной границей* // Изв. Вузов. Математика, 2001. — № 4 (467). — С. 69 – 72.

[19] Липачёв Е.К. *О краевых задачах для уравнения Гельмгольца в областях с "неровной" границей* // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 17. Задачи дифракции и сопряжение электромагнитных полей в волноводных структурах. – Казань: Казан. матем. общество, 2002. – С. 79–89.

[20] Лифанов И. К. *Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент (в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн).* — М.: ТОО "Янус", 1995. — 520 с.

[21] Миранда К. *Уравнения с частными производными эллиптического типа.* — М.: ИЛ, 1957. — 256 с.

[22] Миттра Р., Ли С. *Аналитические методы теории волноводов.* — М.: Мир, 1974. — 328 с.

[23] Назаров С. А., Пламеневский Б. А. *Эллиптические задачи с кусочно–гладкой границей.* — М.: Наука, 1991. — 336 с.

[24] Панасюк В. В., Саврук М. П., Назарчук З. Т. *Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах теории дифракции.* — Киев: Наук. думка, 1984. — 344 с.

[25] Плещинский Н. Б. *Метод преобразования Фурье в задачах сопряжения электромагнитных полей* // Тр. Матем. центра имени Н.И. Лобачевского. Т. 6. Задачи дифракции и сопряжение электромагнитных полей в волноводных структурах. — Казань: НИИММ им. Н.Г. Чеботарева, 2000. — С. 153 – 185.

[26] Смирнов Ю. Г. *О полноте системы собственных и присоединенных волн частично заполненного волновода с нерегулярной границей* // ДАН СССР, 1987. — 297, № 4. — С. 829 – 832.

[27] Шестопалов Ю. В. *Применение метода обобщённых потенциалов для решения некоторых задач теории дифракции и распространения волн* // Журн. выч. матем. и мат. физики, 1990. — 30, № 7. — С. 1081 – 1092.

[28] *Electromagnetic Theory of Gratings.* / Ed. by R. Petit, — Berlin – Heidelberg, New York, 1980. — 284 p.

[29] Tsang L., Ding K. H., Ao C.A. *Scattering of Electromagnetic waves. Numerical Simulations.* — New York: Wiley–Interscience, 2001. — 705 p.