1. Площади фигур, заданных в полярной системе координат

Полярная система координат рассматривалась в начале первого семестра и мы рисовали большинство из тех фигур, площади которых требуется найти в этом разделе. Рекомендуется также посмотреть соответствующий раздел лекций.

Основная формула: Площадь фигуры $\Omega = \{(r,\varphi) : \alpha \le \varphi \le \beta,\ r_1(\varphi) \le r \le r_2(\varphi)\}$ вычисляеся по формуле

$$S(\Omega) = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} (r_2^2(\varphi) - r_1^2(\varphi))\, d\varphi.$$

№2420. Начинаем с того, что выясняем, при каких значениях φ имеем $r(\varphi) = a\sin 3\varphi \ge 0$. Убеждаемся, что это так при $\frac{2\pi k}{3} \le \varphi \le \frac{2\pi k}{3} + \frac{\pi}{3}$ $(k \in \mathbb{Z})$. Нарисовав кривую, видим, что фигура, площадь которой требуется найти, состоит из трёх одинаковых лепестков, поэтому

$$S = 3\ \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} a^2 \sin^2 3\varphi\, d\varphi = \frac{3}{2}a^2 \int_0^{\pi/3} \frac{1-\cos 6\varphi}{2}\, d\varphi = \frac{\pi a^2}{4}.$$

№2419.

№2423. В этом примере фигура, площадь которой требуется найти есть пересечение двух кругов. Указано, что точка $r = a/2$, $\varphi = 0$ лежит в этой фигуре. Вычисление площади S сводится к сумме двух площадей $S = S_1 + S_2$, где $S_1 = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi/4}^{0} a^2(\cos\varphi + \sin\varphi)^2\, d\varphi$, а S_2 — площадь полукруга радиуса $a/2$.

А. (Условие задачи смотри ниже.) В этой задаче фигура состоит из двух кусков. Необходимо найти точки пересечения кривой $r^2 = 2\sin 2\varphi$ и окружности $r = 1$, т.е. решить уравнение $2\sin 2\varphi = 1$.

№2424. Функция $f(r) = r \operatorname{arctg} r$ монотонно возрастает, поэтому, удаляясь от начала координат, мы одновременно поворачиваемся против часовой стрелки. Полярный центр лежит на рассматриваемой кривой, значение $\varphi = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$ получается при $r = \sqrt{3}$. Для монотонной функции $\varphi = f(r)$ определена обратная функция $r = f^{-1}(\varphi)$. Таким образом, площадь фигуры, которую требуется найти, выражается интегралом

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/\sqrt{3}} (f^{-1}(\varphi))^2\, d\varphi.$$

В этом интеграле произведём замену переменной $\varphi = f(r)$ и вычислим получившийся интеграл:

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{3}} (f^{-1}(f(r))^2\, df(r) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{3}} r^2(\operatorname{arctg} r + \frac{r}{1+r^2})\, dr = \frac{\sqrt{3}\pi}{6} + \frac{1}{6}(3 - 2\ln 2).$$

Замечание. Приведенный ответ немного отличается от ответа в учебнике Демидовича, и вам нужно выяснить, какой же из них правильный.

№2425 б).

№2427.

A) Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $r^2 = 2\sin 2\varphi$, $r = 1$ $(r \geq 1)$. (Ответ: $(3\sqrt{3} - \pi)/3$).)

B) Найти площадь фигуры, ограниченной

а) первым витком спирали $r = e^{\varphi} - 1$ и отрезком полярной оси;

б) первым витком этой спирали, вторым витком и отрезком полярной оси.

C) Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $r^2 = a^2(1 - 2\cos 2\varphi)$, $r = a$ $(r \leq a)$. (Ответ: $a^2(2\pi + 3\sqrt{3} - 6)/3$).)

Задание по теме состоит в решении задач №№ 2418, 2419, 2422 б), 2423, 2424, 2425 а), б), в), 2427 и задач A, B, C.

Замечание. Данный текст, возможно, будет дополнен в ближайшее время.