КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра математической статистики

ОЧЕРКИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Не лекциями едиными.
(В помощь начинающему учебу)

Казань – 2011

ПЕЧАТАЕТСЯ ПО РЕШЕНИЮ СЕКЦИИ НАУЧНО-
МЕТОДИЧЕСКОГО СОВЕТА КАЗАНСКОГО УНИЕРСИТЕТА

Автор: доцент каф. матем. статистики И.С .Григорьева

Обычно математический анализ рассказывают на лекциях в виде логически выверенного курса, в котором изложение постепенно переходит от основных понятий к аксиомам и теоремам. Однако для него, как и для любого раздела науки, есть другие ракурсы: исторический, прикладной, даже занимательный. Именно им посвящено данное пособие.

В книге выделяется две части. В главе 1 приводятся разные математические и прикладные задачи, для решения которых нужно исчисление бесконечно малых, дифференциальное и интегральное исчисление.

В других главах рассматривается универсальный язык, основные понятия которого (число, множество, функция) используются в любых разделах математики. Да и не только математики!

Расположенное в конце пособия Дополнение можно назвать «кунсткамерой» математических и логических парадоксов, связанных с этими основными понятиями.

Пособие предназначено для самостоятельной работы студентов.

Оглавление

Введение

Каждый лектор, наверное, слышал от студентов вопрос: «А зачем нам нужен этот предмет?» Конечно, если человек учится в вузе «ради диплома», то ни один конкретный курс ему не нужен. Если же все-таки Вы пришли в университет, чтобы получить математическое образование, то обойтись без базовых курсов и, в частности, математического анализа, Вам не удастся.

Почему же возникают такие вопросы? Отчасти потому, что им уделяется недостаточно места в самом курсе. Принято излагать математический анализ в виде логически связной конструкции, причем в первом семестре много времени занимают «абстрактные» вопросы непрерывности, предела, топологии числовой прямой. И только к его концу появляются более прикладные задачи исследования функции и построения графиков.

Между тем, исторически порядок был как раз обратным: сначала перед научным сообществом вставала проблема, потом находился метод, а обоснование иногда откладывалось на большой срок (в случае матанализа – на 2 века!)

В книге, которую Вы держите в руках, этот порядок отчасти восстановлен. В 1 главе приведены математические и даже практические задачи, для решения которых нужны методы исчисления бесконечно малых (это еще одно название математического анализа).

В процессе их обсуждения выявляются "узкие места", требующие обоснования. Далее изложение идет в классическом порядке: множество, число, вещественная прямая, отображение.

Элементарные понятия теории множеств и теории соотношений представлены в этом пособии шире, чем требуется для нужд собственно математического анализа. Умение видеть математические структуры в самых простых окружающих нас понятиях весьма полезно как для общего развития, так и для понимания прикладного аспекта этих структур.

Пособие содержит также Дополнения, в которых привычные понятия обсуждаются в новом ракурсе.

В тексте пособия приведены задачи, а в конце каждой главы – упражнения. Задачи даны с решениями, а упражнения – без. Решения вынесены в конец книги. Значок ☒ показывает конец связного куска текста: реплики, замечания или доказательства.

1. Постановка проблем

> В решеньи задачи, по общему мнению,
> Вся соль, но я полагаю иначе:
> Все дело в том, чтобы, зная решение,
> Найти подходящую задачу.
>
> Пит Хейн, "Груки"

Приближенное решение уравнений

Как известно, мы умеем решать точно только небольшое число уравнений. Даже поиск корней многочленов – трудная задача. Вместе с тем точное значение корня нам нужно не всегда. Да и что значит "точное"? Если мы выясним, что корень уравнения равен $\sqrt{3}$, можем ли мы считать, что знаем его? Надо ведь еще научиться вычислять этот радикал!

Поэтому приближенное решение уравнений – важная и полезная задача. Самый первый ее этап – выяснить, существуют ли корни? В каких границах они находятся? Сколько их?

Рассмотрим, например, кубическое уравнение $x^3 - 3x - 1 = 0$. Для его решения изучим поведение функции $f(x) = x^3 - 3x - 1$. Найдем некоторые ее значения. Имеем $f(-1) = 3$, $f(0) = 1$, $f(1) = -1$. В точках 0 и 1 функция имеет разные знаки. Значит, где-то в промежутке между этими числами она должна быть равна 0.

Попробуем найти приближенно этот корень. Разделим отрезок [0; 1] пополам. В средней точке имеем $f(0{,}5) = -0{,}375 < 0$. Значит, функция меняет знак в левой половине отрезка. Тогда корень лежит в промежутке [0; 0,5]. Поделим и этот отрезок пополам. С учетом неравенства $f(0{,}25) = 0{,}265625 > 0$, получим, что корень лежит в промежутке [0,25; 0,5].

Этот процесс можно продолжать и далее, в результате мы построим систему вложенных отрезков, длины которых стремятся к 0. Естественно предположить, что отрезки при этом стянутся в одну точку, которая и будет решением уравнения.

Вместо деления пополам можно использовать на каждом шаге деление на 10. Вычисляя значения функции $f(x)$ с шагом 0,1, заметим, что она меняет знак между 0,3 и 0,4, т.е. корень лежит в промежутке [0,3; 0,4]:

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4
$f(x)$	1	0,701	0,408	0,127	–0,136

Уменьшая шаг до 0,01, находим, что корень лежит в промежутке [0,34; 0,35], с шагом 0,001 получаем промежуток [0,347; 0,348], потом [0,3472;

0,3473] и т.д. Опять мы получаем систему вложенных отрезков, длины которых стремятся к 0.

Левые концы отрезков получаются добавлением новой цифры к десятичной записи числа. Поэтому корень можно изобразить в виде бесконечной десятичной дроби 0,3472…. Такие числа называют вещественными (или действительными).

Будет ли записанное таким образом число рациональным? Известно, что рациональные числа представляются в виде периодических десятичных дробей: $\frac{3}{11}$ = 0,27 27… Значит, все остальные десятичные дроби являются какими-то другими числами, т.е. множество вещественных чисел шире, чем множество рациональных.

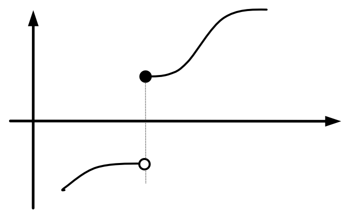
Итак, мы заметили следующие факты.

1. Если функция принимает значения разных знаков в точках a и b, то в некоторой промежуточной точке ее значение равно 0.

2. Для отыскания корня можно применить метод деления пополам или деления на десять. Тогда мы получим систему вложенных отрезков или десятичную дробь.

3. Любая система вложенных промежутков имеет общую точку. Если длины промежутков стремятся к 0, то такая точка единственна.

4. Общая точка отрезков, построенных ранее, и есть корень уравнения.



Эти факты пока не доказаны. Более того, они не всегда и верны. Например, на рисунке справа функция не проходит через 0. Правда, она терпит разрыв в некоторой точке внутри отрезка. Можно предположить, что свойство 1 верно только для непрерывных функций.

Свойство 3 верно для отрезков, но неверно для интервалов. Например, рассмотрим интервалы (0; 1); $(0; \frac{1}{2})$; …; $(0; \frac{1}{n})$; … (бесконечное количество). Предположим, что некоторое число x принадлежит им всем. Тогда $0 < x < 1/n$ для любого n. Из этих соотношений следует, что $1/x > n$, т.е. число $1/x$ больше любого натурального числа n. Этого, конечно, быть не может!

Более того, свойство 3 неверно и для отрезков, если считать числами только дроби (рациональные числа).

Этот факт впервые был обнаружен еще в Древней Греции, когда математики доказали несоизмеримость диагонали квадрата с его стороной. В современной терминологии это означает, что число $\sqrt{2}$ (именно ему равна диагональ единичного квадрата) иррационально.

Заметим, что для решения задачи нам понадобились как свойства функций (непрерывность), так и свойства чисел. Полученные нашим способом решения не являются, вообще говоря, рациональными числами. Для их описания нужны числа новой природы.

Множество значений функции

Что труднее – найти область определения функции или множество ее значений? Первая задача для элементарных функций обычно сводится к решению некоторых уравнений и неравенств. Вторая же не имеет общего алгоритма решения.

Число a является значением функции f, если уравнение $f(x) = a$ имеет хотя бы один корень.

З а д а ч а 1. Рассмотрим функцию $f(x) = x + 1/x$. Найдите все ее значения, используя только данное выше определение. Можно ли применить этот метод для функции $g(x) = x^4 + 4x$?

Попробуйте решить эту задачу сами. Если не сможете – загляните в конец пособия. Там приведены решения всех задач, приведенных в тексте. Упражнения в конце каждой главы даны без решений.

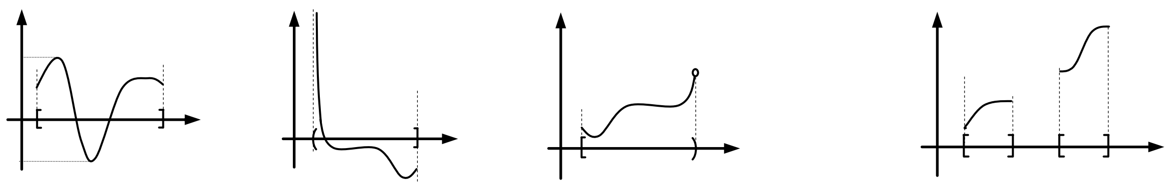
Как мы видим, прямой способ исследования подходит далеко не ко всякой функции: приходится решать уравнение с параметром. Это всегда трудно, а в данном случае и чрезмерно. Мы получаем лишнюю информацию: не только значения a, но и то, для каких x эти значения принимаются. В то же время интуитивно ясно, что значения функции пробегают п р о м е ж у т к и между минимумом и максимумом.

Найдем, например, множество значений $g(x)$ на отрезке $[–2, 2]$. Крайние значения функция принимает либо на конце отрезка, либо в критической точке, определяемой уравнением $g'(x) = 0$. В нашем примере это уравнение приобретает вид $4x^3 + 4 = 0$, откуда $x = –1$. Имеем $g(–1) = –3$, $g(–2) = 8$, $g(2) = 24$. Значит, $\min g(x) = –3$, $\max g(x) = 24$.

Что можно сказать про остальные значения, между –3 и 24? Интуитивно ясно, что все они принимаются. Однако это верно не для всех функций.

З а д а ч а 2. Найти множество значений функции $f(x) = x + 1/x$ на отрезке $[–1; 1]$.

Даже непрерывная функция может не обладать некоторыми "естественными" свойствами, как показывает рис. 1. "Наилучшим" можно признать случай а), различные же отклонения от него представлены на трех остальных рисунках. В каждом случае нарушение происходит на конце того промежутка, на котором задана функция.



а) непрерывна на отрезке | б) не ограничена | в) не достигает верхней грани | г) принимает не все значения между мин. и макс.

Рис. 1

Если же непрерывность наблюдается на всем отрезке, то таких отклонений быть не может. В этом случае выполняются так называемые глобальные свойства непрерывных функций:

Теорема 1. Если функция непрерывна на отрезке, то она ограничена на нем.

Теорема 2. Если функция непрерывна на отрезке, то она имеет на нем минимум и максимум[1].

Теорема 3. Если функция непрерывна на отрезке, то она принимает на нем все промежуточные значения между минимумом и максимумом.

Чтобы доказать эти теоремы, надо исследовать не только свойства непрерывной функции, но и свойства отрезка как множества точек вещественной прямой. Неплохо знать свойства и других множеств, особенно – связанных с понятием "близких" точек. Все вместе это называется топологической структурой прямой.

Как исследовать функцию, если непрерывность выполняется не на отрезке, а, скажем, на интервале? Или функция терпит разрыв в какой-нибудь точке? Как мы видим на рис. 1, даже если функция не определена в точке x_0, ее значения в соседних точках могут приближаться к некоторому числу (хотя бы с одной стороны от x_0). В этом случае говорят, что она имеет предел (возможно, односторонний). В частности, предел может оказаться равным бесконечности.

Задача 3. Исследуйте с помощью таблицы синусов поведение функции $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ вблизи точки разрыва $x_0 = 0$.

Задача о сложных процентах

Задача 4. В некотором банке проценты выплачиваются из расчета $p \cdot 100\%$ годовых. Во сколько раз увеличится вклад через n лет, если проценты не снимались?

Ответ. В $(1 + p)^n$ раз.

---

1 Или по-другому: функция достигает свои точные верхнюю и нижнюю грани (определение см. на стр. 42).

При решении этой задачи мы учитывали, что проценты по вкладу капитализируются, т.е. сами начинают приносить прибыль (это так называемые сложные проценты). Сравним размер вклада для случая обычных и сложных процентов при ставке 10% годовых, т.е. при p = 0,1 (данные округлены до двух знаков после запятой).

Год:	1	2	3	4	5	10	20	30
Без капитализации	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	2	3	4
Сложные проценты	1,1	1,21	1,33	1,46	1,61	2,59	6,73	17,45

Как мы видим, при небольших сроках нижняя строка мало отличается от верхней, но с ростом n это отличие становится разительным. Этот пример показывает, что геометрическая прогрессия даже при небольшом значении q растет гораздо быстрее арифметической. Обе величины стремятся к бесконечности, но по-разному.

То же можно сказать и о функциях, обратных к ним: величины $\frac{1}{n}$ и q^n (при $q < 1$) обе стремятся к нулю, но геометрическая прогрессия делает это намного быстрее!

Исследуем теперь другой случай, когда проценты начисляются n раз, но в течение одного года. Тогда при каждом начислении прибавляется $\frac{p}{n}\cdot 100\%$, так что к концу года вклад увеличится в $\left(1+\frac{p}{n}\right)^n$ раз.

Возьмем для простоты p = 1. Тогда, размер вклада будет определяться только числом n. Его можно обозначить через a_n, т.е. рассматривать n как номер числа a в некоторой последовательности чисел. Вычислим значения $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ для небольших значений номера n.

$$a_1 = (1+1)^1 = 2;\ a_2 = \left(1+\tfrac{1}{2}\right)^2 = 2{,}25;\quad a_3 = \left(1+\tfrac{1}{3}\right)^3 \approx 2{,}3704;$$

$$a_4 = \left(1+\tfrac{1}{4}\right)^4 \approx 2{,}4414;\ a_5 = \left(1+\tfrac{1}{5}\right)^5 \approx 2{,}4883;\qquad a_6 = \left(1+\tfrac{1}{6}\right)^6 \approx 2{,}5216.$$

Как мы видим, члены последовательности растут с ростом n (хотя рост постепенно замедляется). Этот факт можно объяснить исходя из смысла a_n: чем чаще начисляются проценты, тем раньше они капитализируются (становятся капиталом) и начинают приносить прибыль.

Строгое алгебраическое доказательство возрастания a_n можно найти в любом пособии по математическому анализу. Там же доказывается, что значения этой последовательности не превосходят 3 (поэтому не уходят в бесконечность). Интуитивно ясно, что они приближаются к некоторому числу. Точное его значение нам неизвестно, но мы можем вычислить его приближенно, выбрав a_n с достаточно большим номером n.

Это число называют *пределом* последовательности. В данной задаче пределом будет некоторое иррациональное число. Как известно, этот предел называется e (в честь Эйлера). Приблизительно e ≈ 2,71828.

Чтобы обосновать сказанное выше, нам надо:

1. Дать определение понятия "последовательность".

2. Определить понятие предела последовательности (и выяснить его свойства).

3. Сформулировать условия, при которых предел существует. Одно из них такое: если последовательность возрастает и ограничена сверху, она имеет предел.

4. Доказать строго свойства последовательности a_n.

Погрешности

Телефонный звонок:
– Алло, это квартира Ивана Петровича?
– Нет, Абрама Исааковича.
– Простите, это 333-45-18?
– Нет, это 333-45-19.
– Надо же! Ошибка в седьмом знаке, а какой эффект!

Математики тоже шутят.

Хотя математика работает с точными числовыми значениями, в жизни они встречаются редко. И экспериментальные данные, и вычисленные на их основе значения содержат в себе некоторую *погрешность*.

Различают два вида погрешностей: абсолютную и относительную. Если точное значение равно a, а приблизительное x, то абсолютная погрешность есть $\Delta = = x - a$, а относительная – это $\Delta/|a|$. Последнее выражение имеет смысл, только если $a \neq 0$.

Точное значение a мы обычно не знаем, так что и погрешности точно вычислить невозможно. Однако из некоторых соображений можно бывает вычислить *оценку* для погрешности. Например, если известно, что $|\Delta| < \delta$, то для a справедливо неравенство $x - \delta < a < x + \delta$. Далее будем называть погрешностью именно число δ.

Задача 5. Пусть значения a и b заданы с погрешностями δ_1 и δ_2. С какой погрешностью можно найти а) сумму $a + b$; б) разность $a - b$?

Попробуем вывести формулы также для погрешностей произведения и дроби. Имеем $x = a + \Delta_1$, $y = b + \Delta_2$. Тогда $xy = ab + \Delta_1 b + \Delta_2 a + \Delta_1\Delta_2$. Значит, Δ

$= \Delta_1 b + \Delta_2 a + \Delta_1\Delta_2$.

Обычно предполагается, что значения Δ_1 и Δ_2 малы по сравнению с измеряемыми величинами a и b. Тогда последнее слагаемое в этой сумме гораздо меньше первых двух. Отбросив его, получаем приближенную формулу $\Delta \approx \Delta_1 b + \Delta_2 a$. Такая же операция «отбрасывания» используется при введении понятия «дифференциал». В частности, $d(ab) = b\,da + a\,db$.

Еще одно интересное соотношение получим для относительных погрешностей. Для их вычисления равенство надо разделить на $|ab|$. Получим соотношение $\frac{\Delta}{|ab|} = \frac{\Delta_1}{|a|} + \frac{\Delta_2}{|b|} + \frac{\Delta_1}{|a|} \cdot \frac{\Delta_2}{|b|}$. Оно связывает относительную погрешность произведения с относительными погрешностями сомножителей. Эту формулу можно упростить, как и исходную, если считать относительные погрешности малыми. Тогда последнее слагаемое, как произведение двух малых чисел, будет значительно меньше первых.

Приближенно можно считать, что относительная погрешность произведения равна сумме относительных погрешностей сомножителей. Как ни странно, погрешности в этом случае также складываются! Более того, то же верно и для дроби: относительная погрешность частного примерно равна сумме относительных погрешностей делимого и делителя.

Задача 6. С какой относительной погрешностью надо измерить сторону квадрата, чтобы найти его площадь с точностью 1%?

Мы видим, что относительная точность ε, с которой заданы сторона и площадь квадрата, связаны линейным соотношением, $\varepsilon_S = 2\varepsilon_a$. Можно показать, что для объема соотношение аналогичное, $\varepsilon_V = 3\varepsilon_a$. Смысл коэффициентов 2 и 3 проясняется при изучении производной.

Понятие погрешности тесно смыкается с понятием «приращение», которое играет большую роль в математическом анализе. Заметьте, что в разобранных задачах нам важно что-то знать не только об абсолютной, но и об относительной погрешности. Иногда мы требуем, чтобы относительная погрешность была мала, т.е. чтобы δ было мало по сравнению с a. Развитие этой идеи приводит к понятию «сравнение бесконечно малых» и к асимптотическим равенствам.

Приближенные формулы

Кроме арифметических действий, к величинам можно применить и разнообразные функции. Точное вычисление большинства функций невозможно даже при рациональных значениях аргумента. Да этого обычно и не нужно, тем более что исходные данные часто содержат в себе погрешность.

Поэтому желательно вывести приближенные формулы для основных функций, использующие в вычислениях только арифметические действия. А еще лучше – иметь для каждой функции не одну, а сразу несколько формул разной точности.

Пусть, например, нужно вычислить величину a^3 для значений a, близких к единице. Обозначим $a = 1 + x$, где x – малая величина (она может быть и отрицательной). Имеем $a^3 = (1 + x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$. При малых x основной вклад в сумму будут давать первые слагаемые. Отбрасывая остальные, мы получим из точной формулы три приближенных:

$(1 + x)^3 \approx 1$;

$(1 + x)^3 \approx 1 + 3x$;

$(1 + x)^3 \approx 1 + 3x + 3x^2$.

Например,

$0{,}98^3 \approx 1$;

$0{,}98^3 \approx 1 - 3\cdot 0{,}02 = 0{,}94$;

$0{,}98^3 \approx 1 - 3\cdot 0{,}02 + 3\cdot 0{,}02^2 = 0{,}9412$.

Точное значение: $0{,}98^3 = 0{,}941192$.

Ясно, что каждая последующая формула точнее предыдущих. Кроме того, в каждой из них правая часть является многочленом, т.е. функцией, запись которой одновременно является инструкцией для вычисления.

Оказывается, такие приближенные формулы можно построить не только для многочленов, но и для других элементарных функций. Например, рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{1+x}$. Ясно, что при малых x

$$\sqrt{1+x} \approx 1 = g_1(x).$$

Посмотрим, насколько отличается $f(x)$ от этого приближенного значения. Имеем $f(x) - g_1(x) = \sqrt{1+x} - 1$ = (умножим числитель и знаменатель на $\sqrt{1+x} + 1$) $= \frac{x}{\sqrt{1+x}+1} \approx \frac{x}{2}$. В последнем равенстве мы использовали тот факт, что $\sqrt{1+x} \approx 1$. Итак,

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} = g_2(x).$$

Продолжаем процесс: $f(x) - g_2(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}+1} - \frac{x}{2} = x\frac{1-\sqrt{1+x}}{2(\sqrt{1+x}+1)}$. Числитель только знаком отличается от $f(x) - g_1(x)$, а скобку в знаменателе, как и раньше, можно заменить числом 2. Итак,

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} = g_3(x).$$

Ясно, что этот процесс можно продолжать сколь угодно долго, получая все более точные формулы.

Для многочлена и радикала при выводе мы использовали алгебраические свойства функций. В других случаях это невозможно. Например, как выглядят аналогичные формулы для функций $f(x) = \sin x$ и $g(x) = \cos x$?

З а д а ч а 7. Докажите, что $|x|\cdot|\cos x| < |\sin x| < |x|$ для $|x| < \frac{\pi}{2}$.

При малых x величина $\cos x$ примерно равна 1. Значит, левая часть выведенного неравенства примерно равна $|x|$. Кроме того, x и $\sin x$ имеют одинаковые знаки. Поэтому при малых x

$$\cos x \approx 1, \quad \sin x \approx x.$$

Уточнение легче провести для первого соотношения, т.к. в тригонометрии есть формулы, связывающие $\cos x$ и 1, но нет формул для $\sin x$ и x.

Имеем $\cos x - 1 = -2\sin^2\frac{x}{2}$. По приближенной формуле для синуса величину $\sin\frac{x}{2}$ можно заменить на $\frac{x}{2}$. Тогда $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$.

Заметим, что в формулу для косинуса входят четные степени x. Это связано с четностью функции cos. Можно предположить, что все многочлены для sin будут содержать только нечетные степени. Например, $\sin x \approx x + ax^3$. Для двойного угла имеем $\sin 2x \approx 2x + 8ax^3$. С другой стороны, $\sin 2x = 2\sin x\cdot\cos x \approx 2(x + ax^3)(1 - \frac{1}{2}x^2) = 2x + (2a - 1)x^3 - ax^5$. Сравнивая две приближенные формулы, получаем $2a - 1 = 8a$, т.е. $a = -\frac{1}{6}$. Итак,

$$\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2, \quad \sin x \approx x - \frac{1}{6}x^3.$$

Заметим, что последнюю формулу мы получили в предположении, что нужный нам коэффициент a с у щ е с т в у е т.

Мы получили "букет" приближенных формул разной точности. Более того, точность каждой формулы растет при стремлении x к 0.

Рассмотрим, например, формулу $(1 + x)^3 \approx 1 + 3x$. Ее погрешность равна $3x^2 + x^3$. Эта величина стремится к 0 при малых x, причем довольно быстро (быстрее, чем сам x).

Такие формулы называют а с и м п т о т и ч е с к и м и   р а в е н с т в а м и. Вместо знака $\approx$ в них используют $\sim$ (эквивалентно).

Осталось, однако, много вопросов, требующих уточнения и обоснования. Асимптотические равенства по своей природе не совпадают с приближенными. Например, имеем $\sqrt{1+x} - 1 \approx 0$, при малых x, но мы не считаем, что $\sqrt{1+x} - 1 \sim 0$! Вместо этого мы показали, что $\sqrt{1+x} - 1 \sim x/2$. Поэтому возникают следующие задачи:

1. Сформулировать строго понятие асимптотического равенства.

2. Указать причину, по которой мы можем отбросить старшие степени многочленов и оставить младшие (понятие "o-малое").

3. Выяснить, когда одно асимптотическое равенство можно считать более

точным, чем другое.

4. Доказать, что для достаточно широкого класса функций существуют асимптотические равенства с многочленами в правой части (такие многочлены называются многочленами Тейлора).

5. Найти удобный способ вычисления коэффициентов многочленов Тейлора.

Опасная очевидность

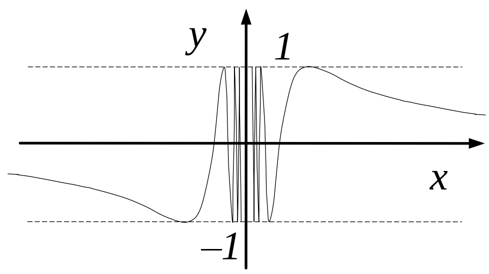
Графики, которые приведены на этих страницах (а также на многих других страницах многих других учебников) порождают некоторое интуитивное представление о функции. Чаще всего они выглядят как набор монотонных кусков, либо совмещенных на концах (непрерывная функция), либо нет (разрыв). Однако среди функций есть такие, которые невозможно изобразить карандашом на бумаге или мелом на доске.

Приведенные ниже примеры (или подобные им) можно найти в прекрасной научно-популярной книге Н.Я.Виленкина "Рассказы о множествах", которая по изложению доступна школьникам старших классов.

Бесконечное число экстремумов

Построим график функции $\sin\frac{1}{x}$. Она определена для всех $x \neq 0$. При очень больших x число $1/x$ мало и, соответственно, мал и его синус. Если же x приближается к 0, то величина $1/x$ растет неограниченно. При этом синус колеблется между -1 и 1 бесконечное число раз, и все это на промежутке от 0 до $2/\pi$.

Получается, что эта функция имеет в окрестности нуля бесконечное число точек максимума и минимума. Действительно, $\sin\frac{1}{x} = 1$ при $\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, т.е. при $x = \frac{2}{\pi(1+4k)}$. Эти числа приближаются к нулю с ростом k.



То же верно для минимумов.

З а д а ч а 8. Приведенная выше функция имеет разрыв в точке 0. Постройте функцию с тем же свойством, непрерывную на всей прямой (используйте интуитивное представление о непрерывности).

З а д а ч а 9. Иногда студенты определяют локальный экстремум так: "Говорят, что в точке a функция имеет максимум, если в некоторой окрестности слева от a функция возрастает, а справа – убывает". В чем ошибка?

Нигде не монотонная функция

В предыдущем разделе функция не имела монотонного куска, прилегающего к точке 0, однако ее график состоял из монотонных кусков (хотя их и было бесконечное количество). Но может ли так случиться, что функция не монотонна ни на каком, самом маленьком промежутке?! Представить и, тем более, изобразить такое невозможно! Но, тем не менее, такие функции существуют.

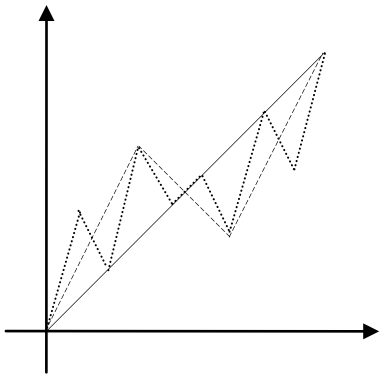
Построим функцию, не монотонную ни на каком промежутке своей области определения. Построение проведем рекуррентно.

1. $f_1(x) = x$ при $x \in [0; 1]$.

2. Разделим график функции $f_1(x)$ на 3 равные части и "перевернем" среднюю часть. Концевые точки соединим с концами "перевернутого" отрезка. Получим функцию $f_2(x)$.

3. С каждым монотонным куском $f_2(x)$ проделаем ту же операцию.

4. Продолжая этот процесс, получим последовательность функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, … которая сходится к некоторой функции $f(x)$. Эта последняя непрерывна, но не имеет ни одного монотонного "куска".



Чтобы доказать сходимость последовательности и непрерывность предельной функции, надо использовать довольно «продвинутые» части математического анализа (теорию функциональных рядов).

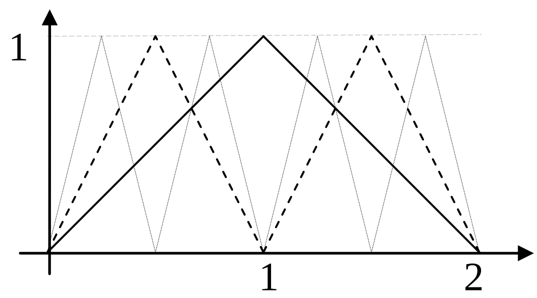
Задача 10. Докажите, что функция $f(x)$ не монотонна ни на каком промежутке $(a, b) \in [0, 1]$.

Сильно меняющаяся функция

Изменим немного пример предыдущего пункта. Нельзя ли каждый отрезок ломаной проводить от $y = 0$ до $y = 1$?

Поступим так: рассмотрим "пилообразную" функцию $g(x)$:

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{при } 0 \le x \le 1 \\ 2 - x & \text{при } 1 \le x \le 2 \end{cases}, \qquad \text{далее с периодом 2.}$$



На рисунке график этой функции нарисован сплошной линией.

1. $f_1(x) = g(2x)$. Эта функция сжата в два раза по сравнению с $g(x)$. На месте каждого "пика" функции g образуются два "пика" функции $f_1(x)$.

2. $f_2(x) = f_1(2x) = g(4x)$. Пики становятся еще в два раза гуще.

Процесс продолжаем до бесконечности. К чему стремятся функции $f_n(x)$ с ростом n? Вычислим некоторые их значения.

Функция $f_n(x)$ обращается в 0 в точках $\frac{i}{2^{n-1}}$, $i \in \mathbb{Z}$, как и все функции с б′ольшими номерами. Значит, и предельная функция $f(x)$ обращается в 0 в этих точках.

Кроме того,

$f_1(\frac{2}{3}) = g(\frac{4}{3}) = \frac{2}{3}$, т.к. $1 \le \frac{4}{3} \le 2$;

$f_2(\frac{2}{3}) = g(\frac{8}{3}) = g(\frac{2}{3}) = \frac{2}{3}$, т.к. $\frac{8}{3} = \frac{2}{3} + 2$;

$f_3(\frac{2}{3}) = g(\frac{16}{3}) = g(6 - \frac{2}{3}) = \frac{2}{3}$ и т.д.

Можно показать, что $f_n(\frac{2}{3}) = \frac{2}{3}$ для всех n. Но тогда и $f(\frac{2}{3}) = \frac{2}{3}$.

С другой стороны, имеем:

$f_1(\frac{4}{5}) = g(\frac{8}{5}) = \frac{2}{5}$, т.к. $1 \le \frac{4}{5} \le 2$;

$f_2(\frac{4}{5}) = g(\frac{16}{5}) = g(\frac{4}{5}) = \frac{4}{5}$, т.к. $\frac{16}{5} = 4 - \frac{4}{5}$;

$f_3(\frac{4}{5}) = g(\frac{32}{5}) = g(6 + \frac{2}{5}) = \frac{2}{5}$ и т.д.

С ростом n значения $\frac{2}{5}$ и $\frac{4}{5}$ будут чередоваться, поэтому они не приближаются ни к какому числу.

Итак, даже для рациональных аргументов предел может как существовать, так и нет. Будет ли функция f непрерывна хотя бы в тех точках, где она существует? Предположим, что это так. Как мы видели, во всех точках вида $\frac{i}{2^n}$ функция f равна 0. Но эти точки можно найти на любом малом промежутке отрезка [0; 1]. Если мы проставим на координатной плоскости все точки ($\frac{i}{2^n}$; 0) самым острым карандашом, то вся ось Ox будет закрашена.

Конечно, если заменить карандашные точки истинными, не имеющими размеров, на оси окажется много незакрашенных точек. Тем не менее, по точкам вида $\frac{i}{2^n}$ можно п р и б л и з и т ь с я к любому числу a. Естественно ожидать, что и значения функции в этих точках будут приближаться к $f(a)$. Значит, придется требовать, чтобы $f(a)$ было равно 0, что не всегда верно.

Покажем это для точки $a = \frac{2}{3}$. Имеем $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \ldots$[1], т.е. сумме геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{1}{4}$.

Рассмотрим числа $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$, $x_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32}$ … Значения x_n с ростом n приближаются к $\frac{2}{3}$, а значения $f(x_n)$, равные 0, н е п р и б л и ж а ю т с я к $f(\frac{2}{3}) = \frac{2}{3}$. Значит, функция не является непрерывной в точке $\frac{2}{3}$.

То, что функция $f(x)$ будет определена не во всех точках прямой, можно было предположить, посмотрев на рисунок. Действительно, с ростом n, отрезки ломаных становятся все более и более "крутыми", так что в пределе они превращаются в вертикальные. Но график функции не может содержать в себе вертикальных отрезков!

Почти всюду постоянная возрастающая функция

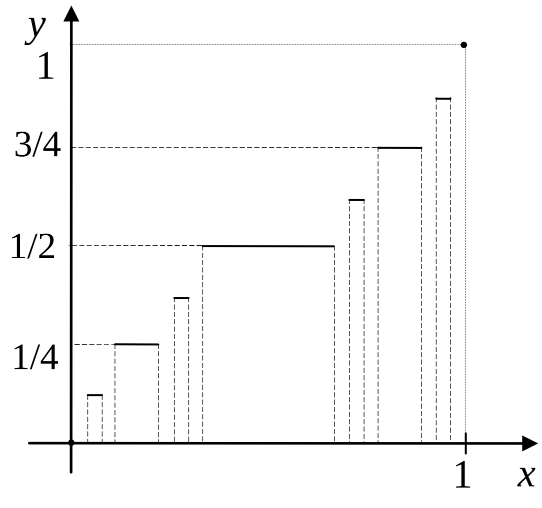
Построим непрерывную функцию, которая постоянна почти на всем отрезке [0; 1] и в то же время растет на этом отрезке от 0 до 1.

1. Положим $f(0) = 0$; $f(1) = 1$.

2. Разделим отрезок [0; 1] на 3 равные части, в средней трети $f(x) = ½$.

3. Два других отрезка также поделим на три равные части (каждый). В средней части первого отрезка положим $f(x) = \frac{1}{4}$, а второго $f(x) = \frac{3}{4}$.

4. Продолжим этот процесс, каждый раз придавая функции значение, являющееся полусуммой значений "слева" и "справа".



[1] Выражение можно получить из записи в двоичной системе: $\frac{2}{3} = 0{,}10101\ldots_{(2)}$.

В пределе получим функцию, которая постоянна на бесконечном множестве отрезков. Вычислим их общую длину. Первый отрезок имеет длину $\frac{1}{3}$, два отрезка второго этапа – длину $2\cdot\frac{1}{9}$, четыре отрезка третьего этапа – длину $4\cdot\frac{1}{27}$ и т.д. Всего получаем $\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}+\ldots=\frac{b_1}{1-q}=\frac{1/3}{1-2/3}=1$. То есть длину «области постоянства» совпадает с длиной всей области определения функции.

Значит, функция изменяется только на множестве K, имеющем длину 0! Это множество называется канторовым, в честь Георга Кантора, создателя теории множеств. При нулевой длине оно имеет, однако, довольно "много" точек. Чтобы объяснить смысл этого "много", нужно сначала понять, как сравнивают между собой бесконечные множества (см. Дополнение "Каких чисел больше?") и что такое вещественное число (глава "Какие бывают числа").

Задача 11. Опишите элементы множества K в троичной системе счисления.

Будет ли построенная таким образом функция непрерывна? Конечно, она непрерывна везде, где она задана (как кусочно-постоянная). Интуитивно ясно, что можно доопределить ее и на K так, чтобы не нарушалась монотонность. По-видимому, построенная таким образом функция станет непрерывной, однако для доказательства этого нам пока не хватает знаний.

Процесс "продолжения по непрерывности" – очень важная операция. Именно он позволяет основные элементарные функции (степенную, показательную, логарифм) задать для вещественных значений аргумента. Об этом говорится также в Дополнении "Продолжение по непрерывности".

Всюду разрывная функция

Понятие "функция" прошло за время развития математики долгий путь. Последним его шагом был отказ от попытки задать функцию формулой. Современное определение функции как числового отображения (см. определение 16 на с. 49) дал Дирихле[1]. Именем этого математика названа функция

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x \text{ рационально}\\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально}\end{cases}.$$

Ясно, что она разрывна в каждой точке числовой прямой, так как сколь угодно близко к рациональным числам есть иррациональные, и наоборот. Значит, сколь угодно близко к единице есть ноль и сколь угодно близко к нулю – единица.

[1] Дирихле (*P. G. Lejeune-Dirichlet*) – немецкий математик, основные работы – по рядам Фурье. Практически одновременно с Н.И.Лобачевским предложил современное определение функции.

Выводы

Рассмотрев различные "экзотические" функции, мы можем прийти к следующим выводам.

1. Понятие "очевидно" не может служить доказательством в математике, т.к. наши наглядные представления неполны и условны.

2. Непрерывную функцию нельзя считать монотонной и даже кусочно-монотонной (т.е. состоящей из монотонных кусков).

3. Непрерывность функции можно проверять, используя последовательность ее значений. Более того, таким же образом можно задать само определение непрерывности.

4. Если функция задана (и непрерывна) не на всем отрезке, а на некотором множестве A, можно, вообще говоря, продолжить ее на весь отрезок так, чтобы она осталась непрерывной. Надо только, чтобы точки множества A присутствовали в каждом промежутке отрезка (или, как говорят в топологии, A было всюду плотно на отрезке). Правда, для такого продолжения функция должна удовлетворять некоторым условиям (например, не изменяться слишком быстро[1]).

Своенравные суммы

> В магазин заходит бесконечное число математиков. Первый просит килограмм картошки, второй – полкило, третий – четверть и так далее. «Понял», – говорит продавец и кладет на прилавок два килограмма.
>
> «Ученые шутят»

Сложение – простейшее арифметическое действие, которое нам известно с раннего детства. В школе мы узнаем его свойства: сочетательный закон (ассоциативность) и переместительный (коммутативность).

Как можно обобщить это понятие? С помощью введения бесконечности. Если слагаемые образуют последовательность a_1, a_2, …, a_n, …, то их сумму называют рядом: $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ или $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Будут ли для ряда выполняться те же свойства, что и для суммы?

Пусть $a_n = (-1)^{n-1}$. Тогда ряд принимает вид $1 - 1 + 1 - 1 + 1 \ldots$ Расставим скобки двумя способами:

$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots = 0 + 0 + 0 + \ldots = 0.$

$1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \ldots = 1 + 0 + 0 + \ldots = 1.$

---

[1] Это требование формулируют в виде свойства равномерной непрерывности. Всякая непрерывная на отрезке функция и равномерно непрерывна на нем.

Результаты получились разные. А что будет, если сложить ряд как он есть, без скобок? Когда теория рядов еще не была создана, ученые по-разному отвечали на этот вопрос. Кто предлагал в качестве суммы 1, кто 0, а некоторые вообще ½ (это, пожалуй, наиболее удачное предложение).

По современным представлениям, чтобы "сложить" ряд, надо брать конечное, но все возрастающее число его слагаемых: $S_1 = a_1$; $S_2 = a_1 + a_2$; …; $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Таким образом мы получим для каждого ряда последовательность частичных сумм. Если она имеет предел, то он и называется суммой ряда.

Например, для геометрической прогрессии $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\ldots$ получаем такие частичные суммы:

$S_1 = \frac{1}{2}$;

$S_2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$;

$S_3 = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$;

$S_3 = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{15}{16}\ldots$

Можно заметить, что выписанные числа приближаются к 1.

В примере с единицами получаем $S_1 = 1$; $S_2 = 1 - 1 = 0$; $S_3 = 1$; $S_4 = 0$; … Как мы видим, значения суммы чередуются и не приближаются ни к какому числу. Значит, этот ряд суммы не имеет.

Проверим теперь переместительный закон. Рассмотрим ряд

$$1 - 1 + \frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n}+\ldots \qquad (1)$$

Его частичная сумма с четным номером равна 0, а с нечетным – числу $\frac{1}{n}$. С ростом n числа такого вида приближаются к 0. Значит, сумма ряда равна 0.

Переставим теперь члены этого ряда следующим образом:

$$1+\left(\frac{1}{2}-1\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{3}\right)+\ldots,$$

т.е. в каждой группе соберем 1 (2, 4, 8, …) положительных слагаемых и 1 отрицательное. Проверим, велики или малы суммы в скобках. Имеем

$1 = 1$

$\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$

$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\geq\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$

$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{3}\geq\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$

$\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{16}-\frac{1}{3}\geq\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{16}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$

$\ldots,$

Для получения оценки мы заменили каждое положительное слагаемое наименьшим (последним) из них. Таким образом, каждую скобку можно оценить снизу числом $\frac{1}{2}-\frac{1}{n}$, которое больше 1/6 при $n > 3$. Но количество таких групп в сумме бесконечно, так что и сумма ряда неограничена.

Итак, переставив члены ряда, сумма которого равна 0, мы получили ряд, сумма которого равна бесконечности! Переставляя члены этого ряда более осторожно, можно получить и другие суммы.

Попробуем таким же образом переставить члены ряда

$$1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^n}+\ldots \qquad (2)$$

сумма которого, очевидно, равна 0. Заметим, что "положительная" часть ряда представляет собой сумму бесконечной геометрической прогрессии

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots \qquad (3)$$

со знаменателем ½, равную 2. Переставим слагаемые, как ранее:

$$1+\left(\frac{1}{2}-1\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}-\frac{1}{4}\right)+\ldots,$$

Рассмотрим некоторую частичную сумму этого ряда. Она состоит из *конечного* числа членов, так что можно спокойно переставлять их местами. В результате получим как "с плюсом", так и "с минусом" начальные отрезки прогрессии (3). Каждый из них с ростом n стремится к 2, так что их разность стремится к 0.

Можно показать, что и при других перестановках членов ряда (2) сумма останется равной нулю.

Почему для этих двух рядов результаты перестановки различны? Заметим, что сходимость рядов (1) и (2) – разная.

Задача 12. Сходятся ли ряды а) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$, б) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n}+\ldots$?

Итак, у ряда (2) сходятся его "положительная" и "отрицательная" части, а у ряда (1) эти составляющие равны $+\infty$. Сходимость по первому типу называется *абсолютной*[1], а по второму – *условной*.

Мы заметили, что члены абсолютно сходящегося ряда можно переставлять местами, а условно сходящегося – нет!`

То, что геометрическая прогрессия дает более быструю сходимость, не является неожиданным (ср. с задачей о сложных процентах).

Конечно, все сказанное требует строгого обоснования. Для этого, в частности, нужно:

1. Найти критерии, необходимые условия и признаки сходимости число-

---

[1] От термина "абсолютная величина", т.е. модуль.

вых рядов.

2. Строго определить абсолютную и условную сходимость.

3. Исследовать свойства сходящихся (в частности, абсолютно или условно сходящихся) рядов.

Суммирование на отрезке

Ряды – не единственный представитель бесконечных сумм. На практике часто встает задача "просуммировать" все значения некоторой функции. Эта задача не равносильна суммированию рядов, т.к. на отрезке гораздо больше точек, чем в последовательности (см. Дополнение "Каких чисел больше?").

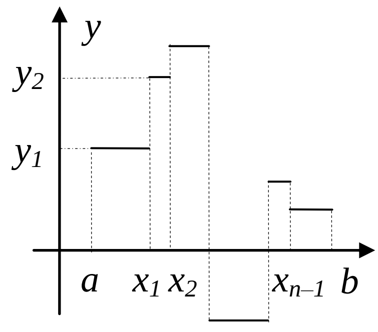
Чтобы построить обобщение суммы, исследуем сначала подробнее конечный случай. Пусть задан набор чисел 1, 2, 5, 2, 4, 5, 5, 1, 4, 2, 5, 1, 5, 2. Как лучше их сложить? Ясно, что складывать по одному – долго. Удобнее сгруппировать между собой одинаковые значения. Получим:

$$S = 1\cdot 3 + 2\cdot 4 + 4\cdot 2 + 5\cdot 5.$$

Здесь первый сомножитель – значение, а второй – количество таких значений в списке, $S = \Sigma\, x_i\cdot n_i$.

Случай ступенчатой функции

Пусть $f(x)$ принимает на отрезке $[a, b]$ конечное число значений $y_1, y_2, \ldots y_n$, каждое – на некотором отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ (считаем, что $x_0 = a, x_n = b$).



Тогда сумму можно записать в виде $S = \Sigma\, y_i\cdot ?_i$, где знаком вопроса помечена некоторая величина, обозначающая "количество" значений y_i. Эту величину мы можем выбрать по своему желанию, однако наиболее естественный вариант – длина отрезка $[x_{i-1}; x_i]$. Обозначим ее $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Итак, для ступенчатой функции получаем, что $S = \Sigma y_i\cdot\Delta x_i$.

Для положительных значений y_i эта величина имеет смысл площади под графиком. В общем же случае слагаемые могут быть и отрицательными.

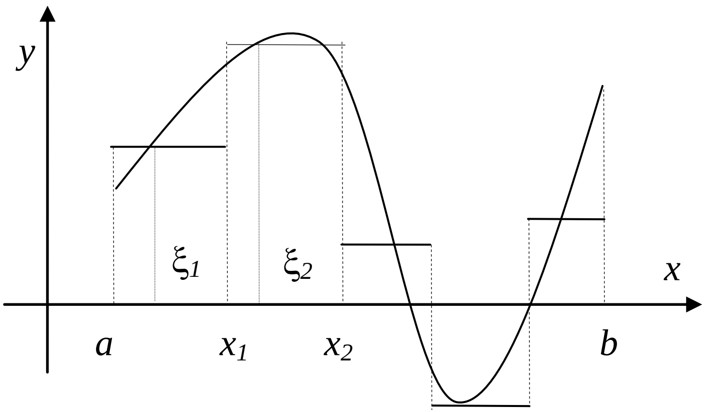
Приближение общего случая ступенчатым

Для произвольной функции построим ступенчатую, похожую на нее. Существуют два метода такого построения. Можно выбрать сначала ширину ступенек (а потом высоту) или наоборот. Первый способ порождает интеграл Римана, а второй – Лебега (от латинского "*integer*" – целый).

Интеграл Римана

Сначала выберем точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$ так, что $a = x_0 \le x_1 \le \ldots \le x_n = b$. Такой набор точек называют разбиением отрезка.

Разбиение задает нам ширину ступенек. Чтобы найти их высоту, выберем на каждом отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ точку ξ_i. Тогда в качестве высоты ступеньки можно выбрать значение функции в этой точке. Итак, мы построили ступенчатую функцию, для которой $S = \Sigma f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$. Такая сумма называется интегральной.



Конечно, ступенчатая функция не совпадает с исходной. Чтобы сделать разницу между ними как можно меньше, надо уменьшить ширину ступенек. В пределе, когда ширина ступенек "превратится" в 0, сумма перейдет в интеграл,

$$\lim_{\sigma\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx.$$

Здесь σ – максимальная длина отрезка разбиения.

Мы видим, что обозначение интеграла перекликается с видом интегральной суммы. Значок $\int$ соответствует сумме Σ, пределы суммирования 1 и n переходят в пределы интегрирования a и b, величине Δx соответствует dx.

Для чего нужен сомножитель dx? Ведь интеграл вполне определяется отрезком $[a, b]$ и функцией f, так что можно обозначать его через $\int_a^b f(x)$. Для обычного интеграла можно использовать и то, и другое обозначение, считая аргументом интеграла либо функцию $f(x)$, либо дифференциальную форму $f(x)dx$.

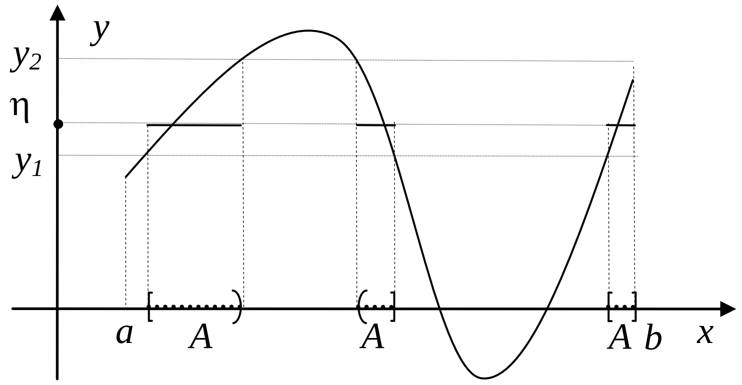
Однако при обобщении понятия "интеграл" эти два подхода приводят к появлению интегралов двух видов (первого и второго рода).

Задача 13. Некоторые говорят, что значок интеграла $\int$ (вытянутое S) происходит от понятия "площадь". И действительно интеграл используют для вычисления площади, которую обычно обозначают через S. Приведите аргументы того, что $\int$ все же происходит от латинского *Summa*.

Интеграл Лебега

Рассмотрим некоторый промежуток $[y_1; y_2)$ на оси Oy. Значения из этого промежутка функция $f(x)$ принимает на множестве A. На рисунке это множество разбилось на три промежутка (два полуинтервала и один отрезок).

Выбрав какое-нибудь значение $\eta \in [y_1; y_2)$, получим "ступеньку" с высотой η и основанием A. Ее вклад в сумму будет равен $\eta\cdot\Delta(A)$, где через $\Delta(A)$[1] обозначена общая длина множества A. Суммируя эти величины по всем промежуткам $[y_1; y_2)$, получим интегральную сумму, пределом которой будет интеграл.



Какие вопросы возникают в связи с этими определениями?

1. Что понимать под пределом интегральной суммы, ведь эта величина зависит от многих параметров?

2. Для каких функций существует тот или иной интеграл?

3. Можно ли вычислить интеграл не по определению?

4. Как связаны между собой интегралы обоих типов?

5. Что такое длина и для каких множеств ее можно вводить?

6. Какие еще "размеры", кроме длины, можно использовать при определении интегралов?

Последние два вопроса подводят нас к теории меры, которая позволяет задавать интегралы как Римана, так и Лебега довольно общего вида (в частности, на плоскостях, на поверхностях, в пространстве и т.п.). Частным случаем меры является также вероятность.

Задача 14. Для конечного набора чисел x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, можно задать различные средние:

Тип	арифметическое	квадратичное	взвешенное
Формула	$\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$	$\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}}$	$\dfrac{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}$

Запишите аналогичные величины для сгруппированного набора чисел; для функции.

[1] Обычно вместо $\Delta(A)$ используют обозначение mA, где m – некоторая мера (в частности, длина). В интеграле Лебега используют меру также Лебега.

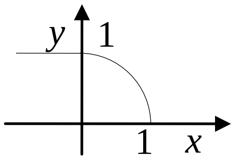
Трамвай сошел с рельсов

Видели ли вы когда-нибудь, чтобы трамвай сошел с рельсов? Теперь этого практически не бывает, но раньше, если и происходило, то только в точке стыка прямого и закругленного рельса.

Что служило этому причиной и как этого можно избежать? С точки зрения физики, изменение движения объекта происходит под действием силы, которая придает ему некоторое ускорение. На круговом участке ускорение направлено по радиусу, т.е. перпендикулярно к пути. На прямом же участке такого бокового ускорения нет.

Значит, в точке стыка резко возникает боковое ускорение, что и может привести к сходу с рельсов. Можно сказать, что ускорение не является непрерывным, оно терпит разрыв в точке стыка.

Что является этому математической причиной? Изобразим рельс в виде графика функции:



$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \le 0 \\ \sqrt{1-x^2}, & \text{при } 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

Как известно, ускорение является второй производной пути. Рассмотрим вторую же производную от функции f. Для $x \le 0$ имеем

$$f'(x) = 0, \qquad f''(x) = 0,$$

С другой стороны, при $x \ge 0$ получаем[1]

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\bigg|_{x=0} = 0, \qquad f''(x) = -\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\bigg|_{x=0} = -1.$$

Мы видим, что первая производная функции f в нуле одна и та же слева и справа. Но вторая производная претерпевает скачок: слева она равна 0, а справа (–1). Таким образом, стык оказывается хотя и гладким на вид, но гладким недостаточно. Математики говорят, что его гладкость – первой степени (по числу непрерывных производных).

Наглядно это можно представить, например, с помощью понятия "радиус кривизны". Ясно, что правая часть линии есть окружность с радиусом 1, а левая – с бесконечным радиусом!

Радиус кривизны можно найти и для произвольной кривой. В каждой точке он определяется окружностью, которая наилучшим образом вписывается в малую дугу кривой. Такой радиус будет, конечно, переменной величиной. Чтобы движение трамвая происходило плавно, кривизна рельса должна нарастать не скачком, а постепенно. Именно так делают хорошие современные рельсы.

[1] Вертикальная черта – это знак подстановки, справа от нее переменная заменяется числовым значением.

Упражнения

1.1. Сколько корней у уравнения $x^3 - 6x - 6 = 0$? Найдите их с точностью до второго знака после запятой.

1.2. Найдите множество значений функции $f(x) = \sin x + \cos x$.

1.3. Как связано понятие вещественного числа с процессом измерения длины отрезка?

1.4. Последовательность $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ возрастает. А как ведет себя последовательность $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$?

1.5. Чему равен предел $\left(1+\frac{p}{n}\right)^n$ для произвольного p? Какие свойства предела надо использовать, чтобы выразить его через e?

1.6. Какой вид примет равенство $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$, если заменить $\frac{1}{n}$ на x? Если прологарифмировать полученное равенство? Какое асимптотическое равенство можно получить таким способом?

1.7. Какие свойства пределов надо использовать, чтобы обосновать действия предыдущего задания?

1.8. Найдите более точные формулы для $\cos x$ и $\sin x$.

1.9. Какова степень гладкости функции $f(x) = \sqrt{x^3}$ в точке $x = 0$?

1.10. Найдите приближенные формулы для функции $\mathrm{tg}\, x$ в виде многочленов степени до 3-ей включительно.

1.11. Какие суммы можно получить при перестановке ряда (1), стр. 20?

1.12. Покажите, что интеграл от ступенчатой функции совпадает с ее интегральной суммой.

1.13. Найдите по определению интеграл от $f(x) = 1$ по отрезку $[a, b]$.

1.14. Почему разбиение функции по высоте (см. интеграл Лебега) порождает "ступеньки" более сложной формы, чем разбиение по ширине (см. интеграл Римана)?

1.15. Почему математический анализ, т.е. дифференциальное и интегральное исчисление, называют еще *исчислением бесконечно малых*[1]?

1.16. Что такое бесконечность ∞? Как можно задать это понятие с помощью предела?

---

[1] ☺Император Наполеон назначил знаменитого математика Лапласа министром внутренних дел. Однако через полтора месяца его пришлось отстранить от должности, так как, вникая в любую мелочь, он проглядел большой государственный заговор. В указе Наполеона по этому поводу было сказано: "Уволить за привнесение духа бесконечно малых величин в государственные дела".

2. Дом, который построил Георг[1]

Множества

Множество (совокупность, семейство, набор, ансамбль и т.п.) состоит из своих элементов. Обычно множества обозначаются прописными буквами, например, $A, B, X, Y, \ldots$, а их элементы – строчными $a, b, x, y, \ldots$

☝ Главное свойство множества: каждый элемент либо принадлежит данному множеству, либо нет. Принадлежность элемента множеству обозначается как $a \in A$ или $A \ni a$.

Больше ничего от множества (в математическом смысле) не требуется[2]. Его элементы не должны быть одной природы, не обязаны быть связаны общим свойством и т.д. Нужна только четкость: принадлежит или нет?

Как вам кажется, это понятное свойство? Для проверки ответьте на такие вопросы.

Задача 15. Можно ли считать множеством

а) всех студентов вашей группы;

б) совокупность больших городов;

в) семейство летающих слонов?

Распространенные ответы таковы: да, да, нет. Два последних – неверны! Действительно, проверим основное свойство для пункта б). Про какой город вы можете точно сказать, что он большой? В котором 100.000 населения? 500.000? Миллион?

Пусть даже вы выбрали в качестве границы какое–то число, например, 2.000.000. Все города, где больше двух миллионов населения – большие, меньше – небольшие. И что произойдет, когда из двухмиллионного города уедет один житель? Он перестанет быть большим? Это уж слишком экзотичная точка зрения. Итак, точно сказать, является ли город большим, очень трудно и даже невозможно.

☝ Это наблюдение касается большинства понятий естественного языка: умный, красивый, важный … – где граница с глупым, уродливым, несущественным? Даже такое простое понятие как «стол» может пониматься по-разному. У Цветаевой: «Но лучше всего, всех стойче – ты, – мой наколенный стол». ☒

---

[1] Георг Кантор, 1845 – 1918, – создатель теории множеств.

[2] Даже не требуется, чтобы его элементы были "математическими объектами", как это будет видно далее из примеров.

Что касается вопроса в), возражение бывает такое: таких слонов нет!

Определение 1. Множество, не содержащее элементов, называется пустым и обозначается специальным символом $\varnothing$.

Это определение не противоречит основному свойству множеств. Действительно, про каждый объект точно известно, принадлежит ли он пустому множеству: не принадлежит!

Пустое множество существует только одно.

Есть ли у крокодила крылья? Есть, только их количество равно нулю.

☝ Неправильное восприятие термина «множество» связано отчасти с тем, что это – слово обычного языка и имеет в нем свой смысл: «большое количество». В других же языках восприятие его будет иным. Например, соответствующий английский термин «*set*» означает просто «набор», «комплект», а также «конфигурация», «строение» и многое другое. Если вам трудно избавиться от фоновых смыслов, порождаемых привычным словом, попробуйте использовать вместо него иностранное слово или просто символ. Выражение «пустой сет» (empty set) звучит совсем не так противоречиво, как «пустое множество».

Способы описания множеств

С помощью списка элементов,

которые перечисляются через запятую в фигурных скобках. Например,

A = {стол, стул, диван, картина, кашель};

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ – множество натуральных чисел;

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ – множество целых чисел.

Иногда такой способ описания неудобен или невозможен. Например, если элементов слишком много (тем более – бесконечное количество) или мы не знаем их все. Тогда используется задание множества

С помощью характерного свойства элементов.

Запись $\{x \mid$ высказывание об $x\}$ обозначает множество всех тех элементов x, для которых высказывание в скобках является верным. В этом случае вертикальная черта читается: “таких, что”. Например,

B = {студент | каждая оценка студента равна 5}

задает множество всех отличников.

Множество всех рациональных чисел (обыкновенных дробей) задается так: $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$;

т.е. рациональным числом является любая дробь, числитель которой целый, а знаменатель – натуральный (в частности, не обращается в нуль). Конечно, некоторые из этих дробей обозначают на самом деле не дробные, а целые числа, например, $\frac{-6}{2} = -3$.

Задача 16. Заданы два множества:

а) группа людей, пришедших на концерт;

б) группа людей, которые могут перенести рояль.

Какое из этих описаний является описанием при помощи характерного свойства элементов?

☝ Если в фигурных скобках какой-то элемент повторяется, это не значит, что в множестве присутствуют два экземпляра этого элемента. Например, множестве рациональных чисел есть дроби $\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}$, однако все они обозначают один и тот же элемент – единицу. Повторные элементы можно отбросить. Кроме того, список предполагает какой–то порядок следования элементов, для множества же это безразлично.

Замечание. Вообще говоря, между понятиями «рациональное число» и «дробь» есть некоторая разница. Она обсуждается ниже на стр. 37 в главе «Какие бывают числа».

Сравнение множеств

Множества можно сравнивать друг с другом и применять к ним операции, в чем-то схожие с арифметическими.

Например, числа мы можем сравнивать, выясняя, какое из них больше, а какое меньше. А как сравнивать множества? Аналогом отношения “меньше” является отношение “входит”:

Определение 2. Если все элементы множества A входят в множество B, то первое множество называют подмножеством второго. Символическая запись $A \subset B$ читается “A является подмножеством B” или “A входит в B”.

Примеры:

$\{1; 3; 4\} \subset \{1; 2; 3; 4; 5\}$; $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$;

{брат, сестра, мать} $\subset$ {слово | обозначает родственное отношение}

и т.д.

Каждое множество является подмножеством себя самого, $A \subset A$. Кроме того, каждое множество содержит в качестве подмножества пустое множество, $\varnothing \subset A$. Таким образом, у всякого множества существует несколько подмножеств. Если рассмотреть их все, то получим множество подмножеств данного множества. Оно обозначается через 2^A.

Формально: $2^A = \{B \mid B \subset A\}$. Например, если $A = \{1; 2\}$, то $2^A = \{\varnothing; \{1\};$

$\{2\}; \{1; 2\}\}$. Это множество содержит 4 элемента.

В последнем примере мы видим двойные фигурные скобки, т.е. элементы множества сами являются множествами. Такой вариант возможен и даже типичен. Дело в том, что большинство объектов, если к ним присмотреться повнимательней, обнаруживают собственную структуру. Например, факультет делится на курсы, курс состоит из групп, группа – из студентов. Или, как говаривал Козьма Прутков, «Во всех частях земного шара имеются свои, даже иногда очень любопытные, другие части».

☝ Хотя сравнение множеств в чем-то похоже на сравнение чисел, есть и отличия. Дело в том, что про каждые два числа можно сказать, какое из них больше, в противном случае они равны друг другу. Но для множеств это неверно. Например, какое из множеств больше: $A = \{1; 2; 3\}$ или $B = \{2; 4\}$? На первый взгляд кажется, что больше первое, потому что в нем 3 элемента, а во втором – только 2. Но такой ответ неверен. По размеру (количеству элементов) A больше, но сами множества – несравнимы, так как ни A не входит в B, ни B не входит в A.

Операции над множествами

Множества можно объединять, пересекать, вычитать друг из друга.

Определение 3. Объединением $A \bigcup B$ множеств A и B называется множество, содержащее все элементы как первого, так и второго. Пересечением $A \bigcap B$ множеств A и B называется множество, состоящее из их общих элементов. Разность множеств $A \setminus B$ состоит из элементов, входящих в A и не входящих в B.

Например,

$$\{1, 2, 4\} \bigcup \{2, 4, 6\} = \{1, 2, 4, 6\}; \quad \{1, 2, 4\} \bigcap \{2, 4, 6\} = \{2, 4\}.$$

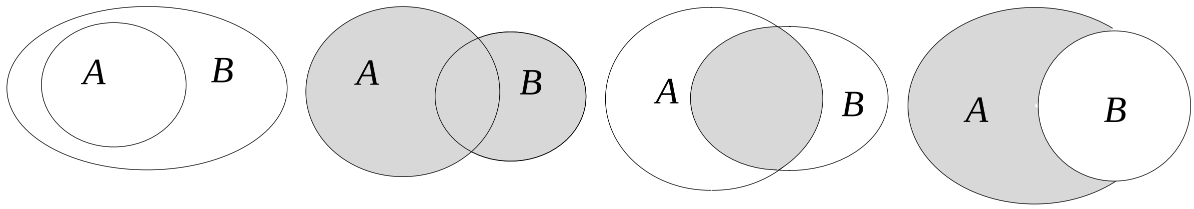
$$\{1, 2, 4\} \setminus \{2, 4, 6\} = \{1\}, \qquad \{2, 4, 6\} \setminus \{1, 2, 4\} = \{6\}.$$

В некоторых задачах можно выбрать универсальное множество E, в котором представлены все нужные нам элементы. Например, понятия "береза", "дуб", "вяз" входят в множество деревьев. В численных задачах универсальным множеством служит числовая прямая $\mathbb{R}$. При наличии такого множества можно ввести понятие дополнения множества A:

Определение 4. Дополнением A^C множества A до универсального множества E называют разность $E \setminus A$.

Задача 17. Почему универсальное множество называют еще единичным?

Для того чтобы представить все введенные понятия наглядно, удобно воспользоваться так называемыми диаграммами Венна. В них отдельные множества изображаются в виде овалов или других геометрических фигур на плоскости. На картинках ниже результирующие множества обозначены затемнением:



$A \subset B$ $\quad$ $A \cup B$ $\quad$ $A \cap B$ $\quad$ $A \setminus B$

Задача 18. Из логики известно, что многие понятия можно представить в виде множеств[1], например "отец" $\rightarrow$ "множество всех мужчин, являющихся отцами". Изобразите с помощью диаграмм Венна соотношение между множествами-понятиями "отец", "дед", "сын", "внук", "брат".

Заметим, что операции над множествами соответствуют логическим связкам "и", "или", "не". Действительно, элемент входит в объединение $A \cup B$, если он входит в A или входит в B. Аналогично пересечение порождается союзом "и", а дополнение – союзом "не". Понятие "входит" связано с логическим следствием: $A \subset B$, если из $a \in A$ следует, что $a \in B$.

Впрочем, словесное выражение операций над множествами может быть весьма разнообразным:

Задача 19. Сравните две фразы:

а) Поздравляем с праздником 8 марта и матерей и жен.

б) Многие женщины являются и матерями и женами.

Какие действия с множествами М (матерей) и Ж (жен) определяются этими фразами?

Декартово умножение

Еще одна операция, применимая к множествам – декартово умножение. Его результат обозначается косым крестом: $A \times B$ и состоит из всех пар вида (a, b),[2] где первый элемент взят из A, а второй – из B.

Примером может служить нотация шахматных полей. “Колонки” нумеруются буквами, составляющими множество $A = \{a, b, \ldots, h\}$, а “ряды” – цифрами из множества $B = \{1, 2, \ldots, 8\}$. Декартово произведение этих множеств

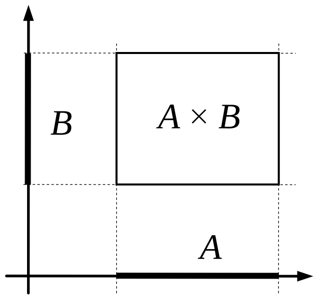
---

[1] Точнее, множество задает объем понятия. Само понятие не совпадает со своим объемом.

[2] Если a и b – числа, то это обозначение можно перепутать с обозначением интервала на числовой прямой. Что именно имеется в виду, обычно можно понять из контекста. В спорных случаях следует явно указывать смысл обозначения.

состоит из всех пар (a, 1); (a, 2); …; (h, 8), которые позволяют различать поля доски. Правда, шахматисты для краткости опускают скобки и запятые и пишут просто b5, g2 и т.п.

Определение «декартовы» встречается также, как вы знаете, в названии системы координат. И это не случайно: в этой системе точки плоскости обозначаются парами чисел (x, y), т.е. изображаются как элементы декартова произведения двух числовых прямых. На координатной плоскости можно изобразить декартово произведение наглядно: например, произведением двух отрезков осей будет прямоугольник.



Задача 20. Пусть $A = \{1; \{1; 2\}\}$, $B = \{1; 2\}$. Какой вид имеет множество $(A \times B) \cap A$? Может ли множество $(A \times B) \cap A$ быть непустым?

Перемножить в декартовом смысле можно не только два, но и любое число множеств. Элементом декартова произведения $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ будет упорядоченный набор ("n-ка"[1], список) элементов (a_1, a_2, …, a_n). Здесь $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, …, $a_n \in A_n$. Для краткости это записывается так: $a_i \in A_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ или $a_i \in A_i$, $i = \overline{1, n}$.

Списки и последовательности

Новый объект – список – интересен и без связи с декартовым произведением. Он чем-то очень похож на множество, недаром его даже используют как один из способов описания множества. Но все же это другой объект. Отличия два: в списке важен порядок элементов и повторяющиеся элементы рассматриваются как разные. Например, что представляет собой набор чисел 90, 60, 90? Ответ, конечно, зависит от смысла этих чисел. Если понимать их так, как вы уже догадались – как обхватные размеры фигуры – то это, безусловно, список и его надо заключить в круглые скобки: (90, 60, 90). Другой набор (60, 90, 90) будет описывать совсем другую фигуру и вряд ли удовлетворит строгое жюри конкурса красоты. Также очевидно, что (90, 60, 90) ≠ (90, 60).

Если же считать набор чисел множеством, то скобки должны быть фигурными и {90, 60, 90} = {60, 90, 90} = {90, 60}.

Задача 21. Чем считать алфавит: множеством или списком? От чего зависит ответ?

---

[1] Читается “энка”.

Как мы видим, существуют списки не только из двух, но и большего числа элементов. Можно число компонент списка и уменьшить. Например, математику ничто не мешает рассматривать списки из одного элемента[1] (a); (b); и т.д. При этом все три объекта a, (a) и $\{a\}$ имеют разный смысл, хотя иногда их путают.

Например, неверно говорить, что пересечением двух прямых является точка, $l \cap m = A$, ведь пересечение множеств – снова множество. Правильная запись выглядит так: $l \cap m = \{A\}$, но в школьном курсе геометрии такими тонкостями пренебрегают.

Другой пример: ясно, что слово «а» и буква "а" – не одно и то же. Как же их различить? Математически запись каждого слова можно рассматривать как список букв, тогда слово «а» будет списком из одного элемента: «слово» = (с, л, о, в, о); «а» = (а).

Можно, вообще говоря, рассматривать и список из 0 элементов, т.е. пустой список. Он используется, например, в программировании для организации работы со строками символов. Напротив, увеличивая размер списка, можно сделать его бесконечным.

В силу того, что список выстроен по порядку, его элементы можно пронумеровать. Такой список называют еще последовательностью.

Последовательностью можно считать любой набор пронумерованных объектов: последовательность дней в месяце, пунктов в анкете, футболистов в команде и т. п.

Ясно, что последовательность может быть и бесконечной, как бесконечно само множество номеров $\mathbb{N}$. Далее мы будем рассматривать только бесконечные последовательности, не оговаривая этого специально.

Аналогом подмножества является подпоследовательность.

Определение 5. Для всякого набора натуральных чисел $n_1, n_2, \ldots n_k, \ldots$, такого, что $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ последовательность $b_k = a_{n_k}$ называется подпоследовательностью последовательности a_n.

Вообще говоря, приведенное выше определение «последовательности» не совсем строгое. Более точное определение требует введения понятия «отображение», что будет сделано в следующей главе.

Упражнения

2.1. Почему фраза «Множество есть то, что состоит из элементов» не является определением? Какое правило логики здесь нарушено?

---

[1] Говорят, англичанин на автобусной остановке выстраивается в аккуратную очередь из одного человека.

2.2. Данте в “Божественной комедии” помещает в 4 круг ада растратчиков и скупцов: "Все те, кого здесь видит взгляд, \\ умом настолько в жизни были кривы, \\ что в меру не умели делать трат". (Ад, Песнь 7). Что могло не понравиться математику в этой идее?

2.3. Какие из перечисленных совокупностей не являются множествами?

а) добрых людей; б) говорящих слонов; в) книг в библиотеке; г) стульев в здании; д) живых динозавров; е) интересных книг; ж) вузов г. Казани.

2.4. Какие из приведенных ниже объектов являются множествами? Можно ли считать их описание описанием через характерное свойство элементов?

а) алфавит; б) все красивые девушки; в) набор из шести чисел, сумма которых равна 20.

2.5. Почему совокупность "больших городов" не является множеством, а "городов" – является? Почему является множеством студенческая группа, но не компания друзей?

2.6. Может ли существовать множество, элементы которого сами являются множествами? Приведите примеры.

2.7. Попробуйте придумать общее свойство, которое могло бы объединять элементы множества A, описанного на с. 28.

2.8. Сколько элементов в множестве $\{1, 4, 2, 1, 6\}$?

2.9. Сколько элементов в множестве $\{\varnothing\}$? А в множестве $\{\{\varnothing\}, \varnothing\}$?

2.10. Даны множества $A = \{x \in Z \mid x^2 < 10\}$ и $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Найти $A \bigcap B$, $A \bigcup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$. Найти также B^C, если за универсальное множество взято множество всех однозначных чисел.

2.11. Можно ли в предыдущем задании заменить слова "всех однозначных чисел" на слова "всех цифр"? Сохранится ли при этом смысл?

2.12. Пусть X – произвольное множество. Чему равны $X \bigcup X$, $X \bigcap X$?

2.13. Докажите по определению, что $(A \bigcup B)^C = A^C \bigcap B^C$.

2.14. Запишите символически высказывание “Множества A и B не пересекаются”.

2.15. Какое из трех множеств $A = \{a, d, a\}$; $B = \{a, b\}$ и $C = \{a, c, b\}$ наибольшее?

2.16. Перечислите все подмножества множества $\{a, b, c\}$. Сколько их? Как вы думаете, почему множество всех подмножеств данного множества A обозначается через 2^A?

2.17. Перечислите все подмножества множества $A=\{1, \{2, 3\}\}$.

2.18. Какие из записей $\{\}$; $()$; $\{\varnothing\}$; $(\varnothing)$; $2^{\varnothing}$ не обозначают пустое множество? Есть среди записанных объектов равные?

2.19. Пусть $A = \{1; \{1; 2\}\}$, $B = \{1; 2\}$. Записать множество $A \cap 2^B$.

2.20. Чем отличается список элементов от множества тех же элементов? Сколько элементов в списке (a, c, b, a) и в множестве $\{a, c, b, a\}$? Верны ли равенства $(a, c, b) = (a, b, c)$ и $\{a, c, b\} = \{a, b, c\}$?

2.21. Даны три множества: $\{a, c, b, a\}$, $\{a, b, c, b\}$ и $\{a, c, b, c\}$. Сколько среди них различных?

2.22. Запишите декартово произведение $A \times B$ множеств $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{1, 2, 3\}$. Сколько в нем элементов?

2.23. Почему в нотации шахматных полей можно опустить скобки и запятую, а в произвольном декартовом произведении – нет?

2.24. Каковы заслуги Декарта перед театром?

2.25. Последовательность задана формулой $a_n = \frac{(-1)^n n}{2n-1}$. Выпишите несколько ее первых членов.

2.26. Предложите общие формулы для членов последовательностей

а) 1, 3, 5, 7, …

б) 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, …

в) 0, 2, 6, 12, 20, …

г) $\frac{2}{3}, \frac{5}{9}, \frac{8}{27}, \frac{11}{81}, \ldots$

д) $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \ldots$ (используйте разложение на множители)

2.27. Продолжите последовательности

а) 1, 2, 4, 8, 16, 22, 24, …

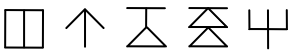
б) 1, 2, 4, 8, 16, 23, 28, …

в) 2, 3, 5, 8, 12, …

г) 1, 2, 3, 5, 8, 13, …

д) 3, 4, 6, 7, 12, 10, 24, 13, …

е)* 1, 11, 21, 1112, 3112, 211213, 312213, …

2.28. Продолжите ряд из рисунков:  …

3. Какие бывают числа

Диалог в студенческой столовой.
– Мне три вторых, пожалуйста.
– А корень из минус двух не хочешь?

Ученые шутят.

В предыдущих разделах мы пользовались термином "число", но не уточняли, что это такое. Между тем это понятие значительно изменилось за последние несколько тысяч лет.

Развитие понятия числа порождалось необходимостью, а именно, расширением круга задач, решаемых с помощью чисел. Если какую-то операцию нельзя было выполнить с имеющимися числами, то математики изобретали новые.

Ясно, что сначала числа использовались для счета, т.е. измерения конечных множеств. Близкая к этому задача – нумерация (первый, второй, третий, …), которая позволяла учесть и обозначить некоторый порядок.

Развитие хозяйства (особенно общественного, как в Древнем Египте), привело к потребностям деления как вещей (зерна, воды, земли), так и соответствующих чисел.

Итак, хронологически первыми возникли натуральнее числа (причем не очень большие), затем дробные положительные.

Задача 22.☺ Какие натуральные числа можно считать "большими" с точки зрения грамматики русского языка? Что означало старинное слово "полтретья"?

Дальнейшее развития понятия "число" – заслуга профессиональных ученых. Через большой промежуток времени появились отрицательные числа[1], потом – вещественные (действительные) и комплексные.

Даже издавна известные понятия обрели в математике несколько другой смысл. Скажем, дробные числа. Что такое, например, 2/3? Это просто значок, так сказать, обозначение нашей неудачи. Ведь выполнить это деление мы не можем! Числом этот значок становится, когда мы научимся действовать с ним, как с единым объектом. И в первую очередь – сравнивать такие объекты.

Действительно, 2/3 – это решение уравнения $3x = 2$. Но такое же решение имеют, очевидно, и уравнения $6x = 4$; $9x = 6$ и т.д. Значит, надо признать,

[1] Еще в XIV веке Кардано, получая отрицательные корни уравнения, осторожно называл их “менее чистыми корнями”.

что $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \ldots$ И вообще, $\frac{m}{n} = \frac{k}{l}$ тогда и только тогда, когда $ml = kn$. Итак, по сути, числом является не отношение $\frac{m}{n}$, а вся совокупность таких отношений, связанных между собой свойством пропорции.

Математики говорят, что соотношение $ml = kn$ задает эквивалентность на множестве пар $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, а рациональные числа получаются как элементы фактор-множества по этому отношению эквивалентности.

Описанная выше разница между числом и дробью (парой чисел) иногда становится весьма важной. Дело в том, что все операции с рациональными числами определяются через их «представителей» в виде m/n. Но тогда мы должны все время отслеживать корректность наших определений. Это значит, что высказывание, верное для дроби m/n, должно быть также верно для всех равных ей (эквивалентных) дробей k/l.

Например, надо научиться складывать, вычитать, умножать, делить дробные числа. Как сложить числа $\frac{m}{n}$ и $\frac{k}{l}$? Приводя к общему знаменателю, получаем $\frac{m}{n} + \frac{k}{l} = \frac{ml+kn}{nl}$. Но ведь $\frac{m}{n}$ – это только "представитель" рационального числа. Изменится ли ответ, если мы заменим его другим? [1]

Пусть $\frac{m}{n} = \frac{m_1}{n_1}$, т.е. $mn_1 = m_1n$. Имеем $\frac{m_1}{n_1} + \frac{k}{l} = \frac{m_1l+kn_1}{n_1l}$. Умножим и разделим это выражение на n, получим

$$\frac{m_1l+kn_1}{n_1l} = \frac{m_1nl+kn_1n}{n_1nl} = \frac{mn_1l+kn_1n}{n_1nl} = \frac{ml+kn}{nl} = \frac{m}{n} + \frac{k}{l}.$$

Итак, для другого представления рационального числа результат сложения оказался тем же. Мы проделаем аналогичную проверку в Дополнении «Продолжение по непрерывности», см. стр. 64.

Замечание. В определении рационального числа мы считаем, что знаменатель дроби n – натуральное число, в частности, не обращается в 0. Но в пропорции $ml = kn$ ничто не мешает считать какое-нибудь из чисел равным 0.

Можно ли распространить отношение эквивалентности и на случай $n = 0$? Пара $(m, 0)$, $m \neq 0$ будет эквивалентна паре $(k, 0)$, $k \neq 0$. Можно считать, что все эти пары задают одно "число" – бесконечность, ∞.

К сожалению, $(m, 0)$ "эквивалентно" также паре $(0, 0)$, которая, в свою очередь "эквивалентна" любой паре (m, n). Поэтому дробь $\frac{0}{0}$ называют "неопределенностью". Это понятие играет важную роль в математическом анализе.

[1] В терминах факторизации: результат действия с классами объектов не должен зависеть от выбора конкретного представителя каждого класса.

Подобный способ порождения математических понятий (с помощью факторизации) применяется в математике довольно часто. Соответственно, для всех таких понятий приходится проверять корректность формул и определений.

Рациональные числа хорошо приспособлены для арифметических операций, однако более сложные действия оказались им недоступны.

Задачи, порождающие вещественные числа

> Вот на экране вы видите, что ширина полосы уменьшилась в корень из двух раз.
>
> “Физики все еще шутят”

Хотя вещественные числа позволяют решать самые разные задачи, основной областью их применения можно считать задачу измерения.

Измерение начинается там, где существует единица измерения или эталон. Эталон можно некоторым образом “прикладывать” к самому себе и сравнивать с объектом.

Если в объекте уместилось целое (натуральное или 0) число эталонов, то это количество и принимается за числовое значение размера. Если же эталон не уложился целое число раз, его делят на части – половинки, трети, десятые и т.д. Доли эталона снова “прикладывают” к измеряемому объекту. Если удалось уложить в объект целое число измельченных долей, то его можно описать дробным (рациональным) числом. Например, два целых эталона, одна половинка и три одиннадцатых доли дают число $2 + \frac{1}{2} + \frac{3}{11} = \frac{61}{22}$.

Возникает вопрос – всегда ли можно подобрать доли эталона так, чтобы измерить объект точно? Оказывается, не всегда. Этот феномен открыли еще древние греки, когда они попытались измерить диагональ единичного квадрата. Было доказано, что отношение диагонали к стороне (мы бы назвали его $\sqrt{2}$) не является рациональным числом.

Это открытие произвело большое впечатление на тогдашних математиков. С тех пор было найдено много нерациональных чисел, но только в конце XIX века была построена соответствующая математическая теория.

Определение 6. Все числа, получающиеся как результат процесса измерения длин отрезков, называются положительными действительными (вещественными) числами. Множество таких чисел обозначается через $\mathbb{R}^+$.

Для определенности будем в процессе измерения делить эталон на 10. Тогда на первом шаге мы найдем измеряемую величину с точностью до целых, на втором – с точностью до десятых, потом до сотых, тысячных и т.д. Например, для диагонали единичного квадрата получим соотношения

$1 < \sqrt{2} < 2$; $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$; $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$; $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$ и т.д. Этот процесс никогда не закончится, поэтому $\sqrt{2}$ можно изобразить только в виде бесконечной десятичной дроби: $\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots$ В таком виде можно представить любое вещественное число.

Конечную десятичную дробь тоже можно считать бесконечной, если дополнить ее нулями.

Ясно, что различные вещественные числа порождают различные десятичные дроби. А наоборот?

Задача 23. Покажите, что две различные бесконечные десятичные дроби могут изображать одно и то же вещественное число, только если все цифры одной из них, начиная с некоторой, равны 9.

Другой подход к построению вещественных чисел основан на наличии в множестве $\mathbb{Q}$ порядка. Между любыми двумя рациональными числами можно вставить еще хотя бы одно рациональное число, потом еще одно и т.д. Но такая картина сохранится, только если мы будем производить вставку конечное число раз. Если же элементов бесконечное число, то могут возникнуть сложности. Допустим, мы хотим найти число c, которое находится между числами a_n и b_m, такими, что $a_n < b_m$, для всех натуральных m и n. Всегда ли оно существует? Оказывается, не всегда. Можно сказать, что множество рациональных чисел “дырявое”: в том месте, где мы ожидаем найти нужное нам число, никакого рационального числа нет.

Например, рассмотрим все отрезки с рациональными длинами, которые короче диагонали единичного квадрата, а также все те, что длиннее ее. Какой отрезок больше любого из первой группы, но меньше любого из второй?[1] Ясно, что это сама диагональ. Но ее длину, как уже было сказано, невозможно записать рациональным числом.

Значит, на этом месте нужно поставить вещественное число. При таком построении можно получить как положительные, так и отрицательные вещественные числа.

В процессе измерения также можно использовать отрицательные числа, если различать направление, в котором откладывается эталон.

Это приводит нас к геометрической интерпретации множества $\mathbb{R}$. Наглядно множество действительных чисел можно представить в виде так называемой вещественной прямой. Она получается из обычной, если

---

[1] Эта идея лежит в основе представления вещественных чисел в виде "сечений" – теории, предложенной Дедекиндом.

зафиксировать на ней две точки, причем первая будет играть роль нуля, а вторая – единицы. Отрезок с концами в этих точках будет эталоном. Если откладывать его и его доли от 0, мы пометим каждую точку на прямой некоторым числом. При этом отрезки, отложенные в том же направлении, что и 1, соответствуют положительным числам, а в противоположном – отрицательным.

Задача 24. Можно ли на вопрос "Что такое вещественные числа" ответить: "Вещественные числа – это числа, которые являются либо рациональными, либо иррациональными"?

Свойства числовой прямой. Аксиомы полноты

Подробную теорию вещественного числа можно посмотреть в специальной литературе. Здесь мы только заметим, что на вещественные числа распространяются обычные свойства чисел, такие, как арифметические операции и сравнение меньше / больше.

Как было сказано выше, вещественные числа задаются цепочкой двойных неравенств. Складывая их (умножая, вычитая, деля) мы получим аналогичные неравенства для суммы (произведения, разности, частного). Нужно только доказать, что такое определение корректно, т.е. результаты арифметических действий определяются единственным образом (ср. с проверкой корректности сложения дробей на стр. 37).

Еще одно свойство вещественной прямой, общее с множеством $\mathbb{Q}$ – аксиома Архимеда.

Аксиома Архимеда. Пусть a – положительное число. Тогда для любого неотрицательного b найдется такое натуральное n, что $na > b$.

Здесь под "числом" можно понимать как рациональные, так и вещественные числа.

Однако у множества вещественных чисел есть и собственное свойство. Как мы видели, множество рациональных чисел “дырявое”: в том месте, где мы ожидаем найти нужное нам число, никакого рационального числа нет. Вещественные числа как раз заполняют эти "дыры", т.е. делают множество чисел сплошным.

Математики говорят, что множество рациональных чисел неполное. Если же мы его пополним, т.е. вставим все недостающие значения, то получим множество вещественных чисел $\mathbb{R}$. Итак, множество вещественных чисел полное (иногда говорят – непрерывное).

Аксиому полноты (непрерывности) можно формулировать в разных, равносильных друг другу, вариантах.

Аксиома отделимости

Пусть числовое множество A лежит слева от множества B, т.е $a < b$ для любых $a \in A$, $b \in B$. Тогда существует хотя бы одно число c, лежащее между A и B, т.е. такое, что $a < c < b$ для любых $a \in A$, $b \in B$.

Если разницу $b - a$ можно сделать сколь угодно малой, то такая точка c единственна.

Аксиома отделимости выполняется для множества вещественных чисел и не выполняется для рациональных. Это свойство формализует процесс вставки новых чисел с учетом порядка.

Принцип вложенных отрезков.

Пусть заданы отрезки $[a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset \ldots \supset [a_n; b_n] \supset \ldots$ Они имеют хотя бы одну общую точку.

Если длины отрезков можно сделать сколь угодно малыми (стягивающиеся отрезки), то такая точка единственна.

Слова "сколь угодно малые" означают "меньше любого наперед заданного положительного числа". Или еще: "стремятся к 0".

Именно идея вложенных отрезков была использована выше для построения вещественного числа как десятичной дроби

Важным частным случаем этого принципа является метод деления пополам (дихотомии).

Метод дихотомии. Пусть задан некоторый отрезок $[a; b]$. Поделим его пополам точкой $c = \frac{a+b}{2}$ и выберем одну из половин $[a; c]$ или $[c; b]$ в качестве отрезка $[a_1; b_1]$. Продолжая этот процесс, получим последовательность отрезков $([a_n; b_n])$. Ясно, что они вложены друг в друга, и длины их стремятся к 0. Значит, если на прямой выполняется аксиома вложенных отрезков, то метод дихотомии порождает единственную точку, общую для всех отрезков.

Меняя выбор половин отрезка, мы можем получить таким способом любую точку из $[a; b]$.

З а д а ч а 25. Вам надо выбрать один вариант ответа из 1000. Разрешается задавать вопросы, на которые можно ответить только "да" или "нет". Как минимизировать их число?

Существование точной верхней грани.

Пусть $A \subset \mathbb{R}$. Верхней гранью или мажорантой множества A называют любое число M такое, что $a \leq M$ для всех $a \in A$. Соответственно миноранта – это число m такое, что $a \geq m$ для всех $a \in A$.

О п р е д е л е н и е 7. Т о ч н а я в е р х н я я г р а н ь множества A – это наименьшая из всех его мажорант. Она называется также с у п р е м у м о м и обозначается sup A. Точная нижняя грань множества A – это наибольшая из всех его минорант. Она называется инфимумом и обозначается inf A.

Понятие супремума есть обобщение понятия максимума. Разница состоит в том, что максимум всегда принадлежит самому множеству, а супремум – не всегда. Например, sup (0; 1) = 1, так как никакое число, меньшее 1, не является мажорантой этого интервала.

Определение супремума, данное выше, было "внешним", через мажоранты, т.е. числа, не принадлежащие множеству. Можно придать ему и другую форму. Идея состоит в том, что точки множества "подходят" к мажоранте сколь угодно близко.

Теорема. Мажоранта M является супремумом множества A тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется элемент множества A, который лежит в промежутке $(M - \varepsilon; M]$.

Полнота (непрерывность) множества $\mathbb{R}$ состоит в том, что для любого непустого ограниченного сверху множества существует супремум.

Задача 26. Доказать, что существование инфимума равносильно существованию супремума.

Равносильность аксиом полноты

Все три аксиомы полноты равносильны друг другу. Например, с помощью метода дихотомии можно построить супремум ограниченного множества. С другой стороны, общая точка стягивающихся отрезков отделяет множество их левых концов от множества правых.

Приведенные три формулировки не исчерпывают всех возможных аксиом полноты. Например, им равносильна следующая теорема:

Теорема Больцано-Вейерштрасса. Любое бесконечное ограниченное множество имеет хотя бы одну предельную точку.

Для ее понимания надо знать, что такое предельная точка множества. Интуитивно ее можно представить как точку «сгущения», вокруг которой сколь угодно близко существуют элементы множества. Точные формулировки требуют познаний в топологии. Они есть в учебниках.

Расширенная прямая

Черные дыры во Вселенной образовались
там, где Бог поделил на 0

Математики тоже шутят.

Введение вещественных чисел существенно расширяет круг операций, производимых с числами. Однако одно простое действие по-прежнему недопустимо: это деление на 0. Попробуем восполнить этот пробел.

Если делить единицу на малые числа, дробь будет большой, причем чем меньше делитель, тем больше частное.

Поэтому результат деления на 0 естественно считать *бесконечно большим* и обозначить ∞. Однако этот новый элемент не является числом в собственном смысле, так как свойства его отличаются от свойств элементов $\mathbb{R}$. Введем для ∞арифметические действия разумным образом.

	$x = 0$	$x \in \mathbb{R}, x \neq 0$	$x = \infty$
$\infty + x$	∞	∞	
$\infty - x$	∞	∞	
$\infty \cdot x$		∞	∞
$x/0$		∞	∞
∞ / x	∞	∞	
x/∞	0	0	

Как мы видим, некоторые операции остались неопределенными. Например, не ясно чему равна разность $\infty - \infty$. Действительно, бесконечность есть обобщение "большой величины", но вычитая из одного большого числа другое большое, мы может получить число любого размера. Поэтому нет разумных оснований придать этой разности какое-то конкретное значение. То же можно сказать и о сумме $\infty + \infty$, т.к. значок ∞ не имеет знака, т.е. соответствует как положительным, так и отрицательным числам.

Итак, с введением бесконечности четыре арифметических действия остались неопределенными. Это $\infty - \infty$, $\infty \cdot 0$, $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.

Определение 8. Множество $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ называется *расширенной прямой*. Будем обозначать его $\mathbb{R}^*$.

Заметим, что к значку ∞ нельзя применять отношения ">" или "<". Можно сказать, что этот новый элемент находится как на правом конце числовой прямой, так и на левом. Таким образом, расширенная прямая – это как бы окружность бесконечного радиуса.

Однако в некоторых случаях необходимо различать *знак* большого числа. Построим другую расширенную прямую, добавляя к $\mathbb{R}$ символы $+\infty$ и $-\infty$. Действия с ними вводятся следующим образом:

$$+\infty + x = +\infty, x \in \mathbb{R} \qquad -\infty + x = -\infty, x \in \mathbb{R}$$

$$+\infty - x = +\infty, x \in \mathbb{R} \qquad -\infty - x = -\infty, x \in \mathbb{R}$$

$$+\infty + (+\infty) = +\infty \qquad -\infty + (-\infty) = -\infty$$

$$+\infty \cdot x = +\infty, x > 0 \qquad -\infty \cdot x = -\infty, x > 0$$

$$+\infty \cdot x = -\infty,\ x < 0 \qquad -\infty \cdot x = +\infty,\ x < 0$$
$$+\infty \cdot (+\infty) = +\infty \qquad -\infty \cdot (+\infty) = -\infty$$
$$+\infty / x = +\infty,\ x > 0 \qquad -\infty / 0 = \infty$$
$$x / +\infty = 0,\ x \in \mathbb{R} \qquad x / -\infty = 0,\ x \in \mathbb{R}$$

Определение 9. Множество $\mathbb{R} \bigcup \{-\infty;\ +\infty\}$ также называется расширенной прямой. Будем обозначать его $\overline{R}$.

Заметим, что величины $\frac{1}{+\infty}$ и $\frac{1}{-\infty}$ обе равны 0, хотя первую естественно считать положительной, а вторую – отрицательной. Можно обозначить их +0 и –0 соответственно. Более точный смысл этих значков раскрывается в теории пределов.

На расширенной прямой второго вида можно обобщить понятие супремума (инфимума) на неограниченные множества. А именно, для множества, неограниченного сверху, супремумом будет $+\infty$, а для множества, неограниченного снизу, инфимумом будет $-\infty$.

Бесконечность как предел

> Для настоящего математика пределов не существует!
>
> Ученые шутят.

Бесконечно удаленные элементы прямой мы ввели формально, однако эта формальность опирается на некоторые естественные представления. А именно, всякая бесконечность мыслится как результат некоторого процесса, как предельное состояние некоторой величины.

Действительно, бесконечность можно считать обозначением предела величины $\frac{1}{x}$ при $x \to 0$.

Аналогично получены и результаты других арифметических действий на расширенной прямой. Например, "величину" $\infty + a$ можно рассматривать как предел функции $f(x) + a$, где $f(x)$ стремится к бесконечности.

Теперь мы можем с новых позиций сформулировать понятие неопределенности.

Определение 10. Рассмотрим арифметическую операцию $a \lozenge b$, где a, b – элементы $\mathbb{R}^*$ или $\overline{R}$. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – произвольные функции, такие, что $f(x) \to a$, $g(x) \to b$ при $x \to x_0$. Выражение $a \lozenge b$ называется неопределенностью, если предел функции $f(x) \lozenge g(x)$ при $x \to x_0$ зависит не только от a и b, но и от выбора функций f и g.

Покажем, например, что $\frac{0}{0}$ есть неопределенность. Действительно, функции $f(x) = 2x$, $g(x) = x$ и $h(x) = x^2$ стремятся к 0 при $x \to 0$. Но

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = 2, \quad \lim_{x\to 0}\frac{h(x)}{g(x)} = 0, \quad \lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{h(x)} = \infty.$$

Упражнения

3.1. (*) Можно ли пополнение множества $\mathbb{Q}$ (т.е. порождение вещественных чисел) произвести способом факторизации?

3.2. Покажите, что с вещественными числами можно производить все арифметические действия и сравнение.

3.3. Почему эпиграф на стр. 38 – шутка?

3.4. Доказать, что величина 2^n с ростом n растет неограниченно.

3.5. Доказать, что в процессе дихотомии длины отрезков стремятся к 0.

3.6. В каком из разделов первой главы использован метод дихотомии?

3.7. Чему равны супремум и инфимум множества

$$A = \{\frac{m}{n} \mid n \in N, m \in N, m < n\}?$$

3.8. Пусть $M_1 = \sup A$, $M_2 = \sup B$, где A и B – числовые множества. Можно ли выразить через эти величины супремумы $\sup A \cup B$ и $\sup A \cap B$? Что можно сказать об этих величинах? Тот же вопрос для инфимума.

3.9. Понятие супремума (инфимума) задано для множества. Как бы вы определили супремум функции? Заметьте, что функция всегда задана на некотором множестве (даже если это не указано явно, см. Дополнение "Область определения элементарной функции").

3.10. Каков смысл выражения $\sup_{x\in A} f(x)$? Чему равен $\sup_{1<x<3}(x + \frac{1}{x})$?

3.11. Почему в число стандартных неопределенностей не включена сумма $\infty + \infty$?

3.12. Обычно считается, что $+2 = 2$. Верно ли, что $+\infty = \infty$?

3.13. Покажите, что $\infty - \infty$, $\infty \cdot 0$ и $\frac{\infty}{\infty}$ – неопределенности.

3.14. Для каких значений a, b из расширенной прямой выражение a^b будет неопределенностью? (предварительно прологарифмируйте его).

4. Соотношения и отображения

Понятие «множество» является ключевым в математике, тем более в математическом анализе. Само слово «анализ» по сути означает «разделение». Однако разбиение на элементы – процесс разрушительный. Необходимо использовать и противоположное действие – синтез. В частности, описать связи, которые существуют между элементами множеств. Этим целям и отвечает понятие «соотношение»

Соотношение (соответствие) устанавливается между двумя множествами. Говорят, что между элементами множеств A и B задано соотношение, если для каждой пары элементов (a, b), где $a \in A$, $b \in B$, можно сказать, выполняется это соотношение или нет. Соотношение можно описать как некоторое множество пар элементов. Те пары, для которых оно выполняется, входят в соотношение, а остальные – нет.

Определение 11. Подмножество декартова произведения $A \times B$ называется соотношением между множествами A и B.

Примерами соотношений являются равенство чисел, отношение родства, отношение ученик – учитель, соотношение стимул – реакция и т. д. Обозначается соотношение либо специальным символом, например,

$$< \quad \leq \quad = \quad > \quad \geq \quad \neq \quad \sim \quad \Leftrightarrow \quad \in \quad \notin \quad \subset \quad \not\subset \quad \|$$

и т. п., либо описывается словами.

Примеры: $a = b$, $1 < 2$, Сидоров – ученик Петрова и т. п. Можно обозначить соотношение и какой-нибудь буквой (например, ρ) или символом (например, ✧). Тогда фраза «a находится с b в соотношении ρ (соотв. ✧)» будет кратко записываться как $a \rho b$ (соотв. a ✧ b).

Многие слова реального языка описывают на самом деле не объекты, а соотношения. Например, что такое «мать»? Сравните фразы «По улице идет мать» и «Анна Ивановна – мать Лены». Первая явно ошибочна, так как слово «мать» означает не просто женщину, а ее отношение с некоторым другим человеком (ее ребенком).

Заметим, что в соотношении $a \rho b$ элементы a и b играют разную роль. Один из них естественно считать значением соотношения, тогда другой можно назвать аргументом. В соотношениях, определяемых фразами русского языка, значение стоит обычно на первом месте, а аргумент – на втором. Например: "Сидоров – ученик Петрова", "Сидоров" – значение соотношения, а "Петров" – аргумент. Аналогично можно считать, что в записи $a \leq b$ аргументом является b, а значением – a.

При записи в виде набора пар, наоборот, аргумент помещают на первое место, а значение – на второе. Например, соотношение "столица" можно записать так:

Россия $\to$ Москва,

США $\to$ Вашингтон,

Франция $\to$ Париж,

Великобритания $\to$ Лондон,

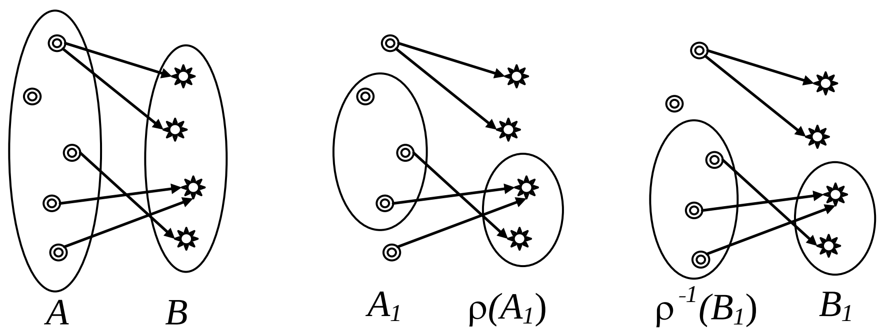
…

Образ и прообраз

Вообще говоря, одному аргументу может соответствовать несколько значений. Они образуют множество, которое называется образом данного элемента. Приведем примеры: 1) учителя Васи; 2) произведения А.С. Пушкина; 3) дети Анны Ивановны. Заметим, что у Анны Ивановны может и не быть детей, тогда соответствующий образ – пустой. Образ можно находить не только для одного элемента, но и для целого множества: 1) учителя 10а класса; 2) произведения советских писателей; 3) дети работниц швейной фабрики. При этом образ множества – это объединение образов его элементов.

Определение 12. Пусть задано соотношение ρ между множествами A и B, Образом множества $A_1 \subset A$ при этом соотношении называется множество всех значений соотношения ρ, которые оно принимает на элементах множества A_1. Обозначается образ через $\rho(A_1)$. Иначе говоря, в $\rho(A_1)$ входят такие элементы $b \in B$, для которых существует $a \in A_1$ такое, что $a \rho b$.

Аналогично вводится и понятие "прообраз", надо только поменять местами аргумент и значение. Например, "столицы европейских государств" это образ, а "государства, столицы которых насчитывают менее 1.000.000 человек" – прообраз, если в качестве соотношения выбрано "столица".



Определение 13. Прообразом некоторого множества $B_1 \subset B$ называется множество всех элементов из A, таких, что значения соотношения на них лежат в множестве B_1. Обозначение: $\rho^{-1}(B_1)$. Иначе говоря, в $\rho^{-1}(B_1)$ входят такие элементы $a \in A$, для которых существует $b \in B_1$ такое, что $a \rho b$.

Задача 27. Что является образом числа a относительно соотношения "$\geq$"? Тот же вопрос для числового множества A.

Действия над соотношениями

Это композиция (суперпозиция) и обращение (отыскание обратного соотношения).

Обратное соотношение получается из заданного, если поменять местами аргумент и значение. Например, обратным к отношению "мать" будет отношение "ребенок".

Определение 14. Рассмотрим соотношение ρ, действующее между множествами A и B. Обратное соотношение ρ^{-1} действует между множествами B и A, причем $b\ \rho^{-1}\ a$ тогда и только тогда, когда $a\ \rho\ b$.

Задача 28. а) Найти соотношения, обратные к соотношениям "жена", "ученик", "брат", "начальник", ">".

б) Какие соотношения обратны к соотношениям "мать" и "отец", чем они отличаются друг от друга?

Композицию (сложное соотношение) можно составить, если значения одного соотношения могут рассматриваться как аргументы второго. Например, понятие "авторский гонорар (за книгу)" составляется из двух: "гонорар (автора)" и "автор (книги)". Аналогично можно рассматривать понятия "мать ученика", "численность населения столицы" и т.п. В последнем примере в композицию входит три соотношения, а его аргументами являются государства мира.

Определение 15. Рассмотрим два соотношения: ρ, действующее между множествами A и B и σ, связывающее B и C. Для таких двух соотношений можно построить композицию (сложное соотношение) $\sigma \circ \rho$. А именно, будем считать, что элементы $a \in A$ и $c \in C$ связаны соотношением $\sigma \circ \rho$, если существует такой элемент $b \in B$, что $a\ \rho\ b$ и $b\ \sigma\ c$.

Задача 29. Найти композицию

а) соотношений ">" и "возраст"; б) соотношения "$\leq$" с самим собой;

в) соотношений "брат" и "жена" в том и другом порядке;

Задача 30. Записать отношение «старше» через отношения ">" и "возраст".

Отображения

Старые математики никогда не умирают. Они только теряют некоторые из своих функций.

Ученые шутят.

В случае соотношения одному аргументу может соответствовать несколько значений, а одному значению – несколько аргументов. Например, у учителя много учеников, а у ученика – несколько учителей. Однако во многих случаях требуется, чтобы значение по аргументу определялось однозначно. Такое соотношение и называется отображением (преобразованием, функцией).

Определение 16. Отображение – это соотношение, в котором каждому аргументу соответствует ровно одно значение.

В обратном направлении однозначность не требуется, т. е. одно и то же значение может получаться для разных аргументов.

Для отображения f, действующего из множества A (область аргументов) в множество B (область значений) используются такие обозначения: $f\colon A \to B$; $a \xrightarrow{f} b$ или $f(a) = b$, где $a \in A$, $b \in B$. Здесь a – аргумент отображения, а b – его значение на аргументе a.

Так как отображение является в то же время и соотношением, его можно записать как набор пар, а именно, пар вида $(a, f(a))$. Этот набор называется графиком отображения. Обычное, "школьное" представление о графике получается, если считать пары чисел координатами на плоскости.

Отображения с конечным числом аргументов можно записать с помощью таблицы из двух строк: в первой записываются аргументы, а во второй – соответствующие им значения. Для числовых отображений чаще используют запись с помощью формулы.

Пример. Функция «длина» применяется к отрезкам, а ее значениями являются числа.

Обозначим множество всех отрезков через W, т.е. $W = \{[a, b] \mid a \in \mathbb{R};\ b \in \mathbb{R};\ a \le b\}$. Можно записать формально: длина: $W \to \mathbb{R}$. Читается так: «длина – отображение из множества отрезков в множество чисел». Значение функции "длина" определяется формулой длина$([a, b]) = b - a$.

Задача 31. а) Какие из родственных отношений являются функциями (отображениями): "брат", "отец", "дед", "дед по отцу", "дед по матери".

б) Что является областью аргументов функции "мама"? областью ее значений?

Замечание. Иногда определение отображения задают несколько по-другому, а именно, требуют, чтобы для каждого аргумента существовало не более одного значения. Тогда некоторым элементам A может не соответствовать никакого значения. При этом естественно выделить в отдельное множество те элементы из A, для которых значения существуют. Это множество назовем областью определения отображения f и обозначим через $D(f)$ или $Dom(f)$. Можно заметить, что (в терминах определения 13) это множество – прообраз B при отображении f, $D(f) = f^{-1}(B)$.

Две функции, отличающиеся только областью определения, считают различными. Пусть заданы функции $f: A \to B$, $g: A_1 \to B$, причем $A_1 \subset A$ и $f(a) = g(a)$ для всех $a \in A_1$. Тогда g называют сужением f, а f, соответственно, расширением g. См. также Дополнение "Область определения элементарной функции", стр. 59.

Может оказаться, что не все элементы множества B являются значениями отображения. Например, для функции "длина" значениями будут не любые действительные числа, а только неотрицательные. В множестве B выделяется множество значений отображения f, которое обозначается через $E(f)$. Формальная запись: $E(f) = \{y \in B \mid \exists\ x \in A,\ y = f(x)\}$. В частности, $E(\text{длина}) = [0; +\infty)$. В терминах определения 12 это множество – образ множества A при отображении f, $E(f) = f(A)$.

Иногда точный вид множества $E(f)$ определить довольно трудно. Пусть через v обозначена функция "возраст" (человека). Ее значениями будут неотрицательные числа, но не слишком большие (уж точно не более 300). С другой стороны, исторические исследования или достижения медицины могут изменить верхнюю границу этого множества.

Если среди всех людей рассматривать только школьников (обозначим их множество через Ш), то образ Ш при отображении v имеет вид $v(\text{Ш}) = [6; 17]$, если измерять возраст в целых годах. С другой стороны, обозначение $v^{-1}([31; +\infty))$ описывает множество «тех, кому за 30» как прообраз промежутка $[31; +\infty)$.

Задача 32. Запишите множество всех пенсионеров (по возрасту), используя функцию v и множества М (мужчин) и Ж (женщин).

Необходимо научиться отличать функцию от ее значения. Математические функции записываются обычно с помощью формул, например, $f(x) = x^2$. Здесь x^2 – значение функции, саму же ее можно описать как “возведение в квадрат”. Иногда эту функцию называют sqr. Точно также $\log_a$ – это функция (логарифм по основанию a), а $\log_a b$ – ее значение в точке b (для аргумента b).

Нечисловые примеры: "годовой доход" – это отображение, а "годовой доход КамАЗа" – его значение; "автор" – отображение[1], "автор «Евгения Онегина»" – значение.

Разновидности отображений

Отображения можно классифицировать исходя из того, какие объекты являются их аргументами и значениями. Естественно, в математике особую роль играют отображения, связанные с числами.

Отображение, для которого областью значений является множество чисел ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ или другое) называют функционалом. Примеры функционалов – длина кривой и площадь фигуры, рост и возраст человека, цена, стоимость, доход и т. п.

Если и аргумент, и значение отображения – числа, то его называют функцией. Вы знаете много примеров функций из школьного курса математики. Например, линейная функция, квадратичная функция, sin, cos, log, …

Впрочем, слово "функция" используют иногда расширительно, называя так любое отображение.

Если область определения отображения $D(f)$ – множество натуральных чисел $\mathbb{N}$, то оно называется последовательностью. Для элементов последовательности a существует специальное обозначение: вместо $a(n)$ пишут a_n.

Члены последовательности можно записать один за другим в порядке их аргументов: $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ Таким образом, вновь введенное определение не противоречит тому, которое было дано в разделе "Списки и последовательности" главы "Дом, который построил Георг".

Примеры отображений.

1) График дежурств. Каждой дате ставится в соответствие человек (группа людей), который будет дежурить в этот день.

2) Театральные билеты задают отображение их владельцев на места в зале.

3) Цвет волос – отображение множества людей в множество цветов.

4) Оценка по некоторому предмету – отображение множества студентов в множество из шести элементов {неуд., поср., удовл., хор., оч. хор., отл.}.

5) Тождественное отображение, заданное на множестве A произвольной природы. Каждому элементу множества оно ставит в соответствие сам этот элемент. Иногда его обозначают id или id_A. Для любого $a \in A$ имеем $id(a) = a$.

6) Постоянное отображение, принимающее одно и то же значение для всех аргументов. Обозначается const.

---

[1] Будем рассматривать всех соавторов одного произведения как некоего "коллективного автора". В таком понимании "автор" определяется однозначно.

7) Вес предмета – числовое отображение (функционал), принимающий положительные значения.

8) Годовой доход – также функционал, применяемый к физическим и юридическим лицам. Впрочем, можно считать, что значениями этого отображения (как и предыдущего) являются не числа, а именованные величины. Действительно, одна и та же сумма, выраженная в рублях и в долларах, будет задаваться совсем разными числами.

9) Число элементов – функционал, аргументами которого являются конечные множества, а значениями – неотрицательные целые числа.

10) Элементарная функция, т.е. функция, полученная из простейших элементарных функций x^a, sin x, cos x, arcsin x, arccos x, arctg x, a^x, $\log_a x$ с помощью арифметических действий и операции подстановки.

11) Функция sign (сигнум, т. е. знак) принимает значение 1, если ее аргумент положителен, –1 для отрицательных аргументов и 0 для нуля. Коротко это записывают так: sign(x) = $\begin{cases} 1 \text{ при } x > 0, \\ 0 \text{ при } x = 0, \\ -1 \text{ при } x < 0, \end{cases}$. Функция sign – это расширение элементарной функции $\frac{|x|}{x}$ на всю числовую прямую.

12) Производная – отображение (иногда говорят оператор), аргументы и значения которого – функции.

13) Если число аргументов отображения конечно, то его можно описать с помощью таблицы значений. Например, картинки на шкафчиках в детском саду задают отображение из множества воспитанников в множество рисунков:

Аргумент	Анюта	Ваня	Гузель	Алеша	Руслан	Айдар	Лейсан
Значение	Зайчик	Роза	Солнце	Лиса	Мячик	Мишка	Домик

14) Последовательность полных квадратов 1, 4, 9, 16, … можно описать также формулой $a_n = n^2$.

15) Последовательность, задаваемая формулой $a_n = (-1)^n$, $n \geq 1$, имеет элементы –1; 1; –1; 1; –1, …

☝ Не следует думать, что отображение должно быть всегда «осмысленно». Определение функции не предполагает, что соответствие между аргументом и значением должно починяться какому-либо правилу или порядку. Тем более, что понятие осмысленности очень трудно формализовать, и не менее трудно проверить. Например, на первый взгляд кажется, что цифры 8, 2, 9, 0, 1, 5, 7, 3, 4, 6 чередуются как попало. На самом деле здесь есть порядок: они расставлены … по алфавиту! Как видно из этого простого примера, то, что на первый взгляд кажется хаосом, с другой точки зрения является вполне закономерным. И наоборот, внешне закономерное может оказаться абсурдным. Например: медведь – медведица, верблюд – верблюдица, лис – лисица, стол –… столица!?

Действия с отображениями

К отображениям, как и ко всем соотношениям, можно применять обращение и композицию. Возникает вопрос, когда результаты также будут отображениями?

1. Композиция отображений – снова отображение. Действительно, рассмотрим два отображения: f: $A \to B$ и g: $B \to C$. Значения отображения f могут в этом случае являться аргументами отображения g. Так что, выбрав элемент $a \in A$, с помощью отображения f мы можем найти единственный элемент $b = f(a)$ из B, а с помощью отображения g – единственный элемент $c = g(b)$ из C. Поэтому элемент c определяется по a также однозначно. В общем случае композиция $h = g \circ f$ вычисляется по формуле $h(a) = g(f(a))$.

В качестве иллюстрации рассмотрим "театральное" отображение из второго примера. Его можно разбить на 3 шага.

Первое отображение “владелец” $\to$ “билет” возникает при покупке билета в кассе. Отображение “билет” $\to$ “номер места” появилось при печатании билетов в типографии. И, наконец, отображение “номер места” $\to$ “кресло” было задано при установке кресел в зале. Композиция трех этих отображений и позволяет человеку, купившему билет, безошибочно найти свое место.

Задача 33. Найти композицию функций "мама" и "муж" в том и другом порядке.

Понятие сложной функции часто вызывает трудности для восприятия. Причина – в том, о чем говорилось выше: в сознании смешивается сама функция и ее значение.

Задача 34. Пусть $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin x$. Найти формулы, выражающие функции $f \circ f$; $f \circ g$; $g \circ f$; $g \circ g$.

2. Если соотношение, обратное к данному отображению, само является отображением, то исходное отображение называют обратимым. При этом не только одному аргументу соответствует одно значение, но и одному значению – один аргумент. В силу этого обратимое отображение называют еще взаимно однозначным[1].

Определение 17. Если для каждого значения из множества значений

[1] Английский термин короче и выразительней: one-to-one, т.е. один-к-одному.

отображения существует единственный аргумент, при котором отображение получает это значение, то отображение называют взаимно однозначным или обратимым.

То же через кванторы $\forall$, $\exists$. Отображение $f : A \to B$ называется обратимым, если для $\forall b \in B \; \exists$ единственное $a \in A$ такое, что $f(a) = b$.

И еще: f взаимно однозначно, если из $f(a_1) = f(a_2)$ следует, что $a_1 = a_2$.

Если f – обратимо, то, зная значение b, мы можем найти аргумент a, такой, что $b = f(a)$. Это значит, что можно считать a функцией от b. Эту функцию (отображение) обозначают через f^{-1} и называют обратным отображением (обратной функцией) для f.

Понятие обратимости тесно связано с областью определения функции. Например, функция sqr (возведение в квадрат) необратима, так как числа x и $-x$ она переводит в одно и то же значение x^2. В то же время, если рассматривать sqr только для неотрицательных аргументов, она становится обратимой. Обратная к ней функция называется квадратным корнем ($\sqrt{}$ или sqrt). Пользуясь введенными обозначениями, можно записать: $\mathrm{sqr}^{-1} = \mathrm{sqrt}$ и $\mathrm{sqrt}^{-1} = \mathrm{sqr}$ (сравните с равенством $(x^2)^{-1}=1/x^2$).

В качестве нечислового примера снова обратимся к театральным билетам. Так как они печатаются с обозначением мест, то на каждое место приходится только один зритель. Поэтому кроме отображения "зритель" $\to$ "место" можно рассматривать и обратное отображение “место” $\to$ “зритель”. По сути оба отображения – это одно взаимно однозначное соответствие которое можно обозначить двойной стрелкой: "зритель" $\leftrightarrow$ "место". Разница между ними определяется только точкой зрения. Для зрителя первичен он сам, он ищет для себя место по билету. Для администратора же театра картина иная: места заполняются зрителями.

Задача 35. Опишите понятие «аншлаг» в терминах свойств отображения, задаваемого театральными билетами.

Задача 36. Известно, что система брака, принятая в нашем обществе (моногамия) – не единственная. В мусульманском мире распространена полигамия (многоженство), в некоторых первобытных обществах практиковалась полиандрия (многомужество). К этому можно добавить еще так называемую "шведскую семью", где число мужей и жен не фиксируется. В каких из этих систем

а) соотношение "жена" является отображением?

б) отображением является обратное соотношение?

в) отображение "жена" обратимо?

☝ Функциональная зависимость понимается в математике не совсем так, как в конкретных науках. Если b зависит от a (является функцией от a) это не значит, что a является причиной b. Тем более, что в случае взаимно однозначной зависимости обе величины можно считать функциями друг от друга, так что разница между причиной и следствием здесь стирается.

Если прямое отображение f переводит элемент a в b, то обратное – b в a, поэтому композиция $f^{-1} \circ f$ переводит a в a. Это значит, что $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}$, т.е. тождественному отображению на $D(f)$. Точно также можно показать, что $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{f(A)}$, т.е. тождественному отображению на $E(f)$. Каждое из этих равенств можно считать определением обратного отображения.

Приведем несколько терминов, которые можно встретить в научной литературе:

Инъекция – взаимно-однозначное отображение множества A и части множества B. Не требуется, чтобы B совпадало с множеством значений f.

Сюръекция, или отображение "на" – отображение, для которого B совпадает с $E(f)$, т.е. все элементы B являются значениями отображения.

Биекция – отображение, являющееся одновременно и инъекцией, и сюръекцией.

Биекция называется еще изоморфизмом множеств, от изо- – “равный, одинаковый, подобный” и морфа – “форма”. Впрочем, термин "изоморфизм" имеет более широкое значение: отображение, сохраняющее существенные свойства. В каждой области математики и ее приложений есть свое понимание изоморфизма.

– Изоморфны ли группы A и B?
– Группа A изоморфна, а B – нет!

Упражнения

4.1. Соотношение может связывать не только два объекта, но и больше. Например, соотношение «между» применяется к трем предметам: А находится между В и С. Покажите, что понятие «подарок» описывает некоторое соотношение. Сколько объектов оно связывает?

4.2. Покажите, что определение подмножества (см. стр. 29) является, по сути, определением некоторого соотношения. Чем являются аргументы и значения этого соотношения?

4.3. Что является значением соотношения "оглавление"? Выберите из вариантов: книга; глава; множество глав; список глав.

4.4. Пусть соотношение ρ связывает множества A и B, а $C \subset A$. Как соотносятся между собой множества C и $\rho^{-1}(\rho(C))$?

4.5. Какое соотношение является обратным к соотношению sin, т.е. соотношению, связывающему x и $\sin x$?

Ответ. Это соотношение ставит в соответствие каждому x все решения уравнения $\sin y = x$ и называется Arcsin x. Оно (в отличие от *функции* $\arcsin x$) принимает для одного и того же x бесконечное число значений.

4.6. Что является композицией отношения "<" с самим собой

а) на множестве натуральных чисел;

б) на множестве рациональных чисел;

Ответ. а) меньше хотя бы на два; б) меньше.

4.7. Соотношение является в то же время и множеством (подмножеством $A \times B$), поэтому для него можно применять обычные операции объединения, пересечения, разности. Дополнением можно считать разность между $A \times B$ и данным соотношением (противоположное соотношение). Найдите

а) объединение отношений "мать" и "отец";

б) пересечение отношений "≤" и "≥";

в) отношение, противоположное отношению ">".

г) в каком случае объединение отображений будет отображением? Тот же вопрос для пересечения.

4.8. Какое из перечисленных соотношений является отображением: субподрядчик; отец; учитель; автор; мэр; дед; подразделение; призер.

4.9. В лингвистике функция *Magn*(x) означает "высокая степень проявления x". Так, *Magn*(свет) = яркий, *Magn*(звук) = громкий.

а) Найдите значения *Magn*(брюнет), *Magn*(дурак).

б) Будет ли эта функция отображением в строгом смысле слова?

в) Найдите прообраз $Magn^{-1}$(проливной).

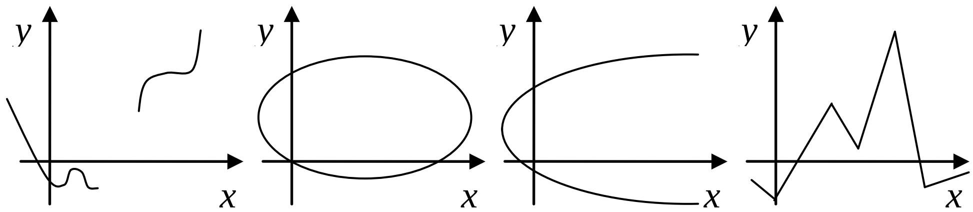
г) Имеет ли *Magn* обратную функцию?

4.10. Пусть при проведении эксперимента замерялись два параметра – x и y. Результаты измерений приведены в таблице:

x	1	3	4	2	3	1	4
y	2	7	1	5	5	3	1

Можно ли считать, что параметр y является функцией от параметра x? А наоборот? Почему?

4.11. Какие из приведенных ниже графиков а) – г) являются графиками функций $y = f(x)$, а какие – нет? Почему?



а) б) в) г)

4.12. Найдите образ множества [–1; 2] при отображении $f(x) = x^2$; прообраз множества [1; 4] при том же отображении.

4.13. Пусть задано отображение f: $A\to B$ и $A_1 \subset A$, $A_2 \subset A$, $B_1 \subset B$, $B_2 \subset B$, Выразить (сравнить)

а) множества $f(A_1 \cup A_2)$ и $f(A_1 \cap A_2)$ с $f(A_1)$ и $f(A_2)$;

б) множества $f^{-1}(B_1 \cup B_2)$ и $f^{-1}(B_1 \cap B_2)$ с $f^{-1}(B_1)$ и $f^{-1}(B_2)$.

4.14. Пусть $\{K\}$– множество квадратов на плоскости, и $a(K)$ – длина стороны K. Какой смысл у функции $\mathrm{sqr} \circ a$? Существует ли функция $a \circ \mathrm{sqr}$?

4.15. Пусть $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \ln x$. Найдите $f \circ f$; $f \circ g$; $g \circ f$; $g \circ g$.

4.16. Пусть $f(x) = (x^2 + 2)^3$. Каким-нибудь способом представьте ее в виде композиции $f = g \circ h$. Запишите формулы для $h(x)$ и $g(x)$.

4.17. Какие из отображений, приведенных в примерах (в тексте параграфа), обратимы, а какие – нет?

4.18. Какая функция будет обратной к функции exp? По определению $\exp(x) = e^x$.

4.19. Будет ли функция sin обратима на всей прямой? А на каком–либо отрезке? На отрезке $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$? Какая функция будет обратной к sin, заданному на этом отрезке? Ср. с упражнением 4.5. на стр. 56.

4.20. Числовая функция называется в о з р а с т а ю щ е й, если бóльшие числа она переводит в большие (или равные). Аналогично можно дать определение убывающей функции: функция f называется у б ы в а ю щ е й, если для всех x и y из области ее определения, таких, что $x \le y$, выполняется $f(x) \ge f(y)$. И возрастающие, и убывающие функции называются также м о н о т о н н ы м и. Какой будет композиция двух возрастающих функций? двух убывающих? возрастающей и убывающей?

4.21. Если в определениях предыдущего упражнения заменить неравенства на строгие, то функция будет называться с т р о г о в о з р а с т а ю щ е й (соотв. с т р о г о у б ы в а ю щ е й, с т р о г о м о н о т о н н о й). Покажите, что строго монотонная функция всегда обратима.

5. Дополнения

Непростая тривиальность

Задача. Записать с помощью символов фразу "Множества A и B не пересекаются".

Большинство студентов, впервые решая эту задачу, предлагают такую запись: $A \not\cap B$. Но это, конечно, неверно. Дело в том, что знак $\bigcap$ означает "пересечение", так что $\not\cap$ – это "не пересечение". И что же это такое? Во фразе $A \not\cap B$ нет сказуемого, так что она не может быть ни истинной, ни ложной. Правильная запись выглядит так: $A \bigcap B = \varnothing$. Как мы видим, для решения этой задачи нам понадобилось пустое множество.

Множество $\varnothing$ – один из примеров чисто математических объектов, в которых парадоксальным[1] образом сочетаются тривиальность и неочевидность.

Действительно, в обычном мышлении (и языке) нет необходимости в таком объекте: если чего-то нет, то зачем о нем говорить? Такое понятие как "ничто" относится, скорее, к области философии, чем к повседневным представлениям.

И тем не менее, в самой пустоте пустого множества заключен глубокий смысл. Проверка пустоты конкретного множества (скажем, множества корней уравнения) может быть весьма нетривиальной задачей.

Вообще проблема существования объекта с заданными свойствами – одна из основных в математике. А ведь это и есть проверка пустоты / непустоты!

Как известно из истории науки, подобные "нулевые" понятия возникли в человеческом сознании достаточно поздно. Например, само число "ноль" не существовало на первых этапах развития математики. Его, по-видимому, изобрели индусы при создании позиционной системы записи чисел. Нуля нет, скажем, в римской системе счисления, а также в греческой буквенной записи, перенятой древнерусскими математиками.

Более того, даже число "единица" – не совсем такое, как другие. Действительно, при счете предметов мы говорим "раз, два, три, …", а не "один,

[1]Парадокс – верное суждение, противоречащее общепризнанным, традиционным представлениям.

Софизм – ложное рассуждение, внешне кажущееся истинным.

Антиномия – внутренне противоречивое суждение, которое нельзя считать ни истинным, ни ложным.

два, три, …", так как один предмет нет необходимости пересчитывать! Царь Петр I стал Первым только после того, как появился второй.

– Соседка, Вы брали у меня два яйца, а вернули одно!
– Ах, извините, обсчиталась! ☺

Даже грамматически слово "один" в русском языке имеет другие свойства, чем остальные числительные. Действительно, оно, в отличие от остальных, изменяется по родам (одна, одно) и даже по числам (одни)! Из этого видно, что оно указывает не на количество, а, скорее, на уединенность или уникальность объекта (ср. "Один дома").

Особую роль числа 0 и 1 играют и в "алгебраической грамматике". Действительно, не принято писать $0x + 3$ или $1x - 2$. Начинающий "алгебраист", забыв об этом, не сможет вынести за скобку x в выражении $x + xy$.

Как показывает опыт, от пропущенных нулей и единиц страдают и некоторые студенты. Например, часто делают ошибки при вычислении $\int dx$, т.е. при поиске первообразной от единицы (пропущенной в этой записи!). В таблице первообразных этот интеграл является частным случаем $\int x^n dx$ при $n = 0$.

Ноль и единица являются основополагающими понятиями не только в "грамматике", но и в смысловой части математики. Действительно, число 0 тесно связано со сложением: для любого a имеем $0 + a = a$. Для умножения такую же роль играет единица: $1 \cdot a = a$. Заметим, что для любого множества A выполняется $\varnothing \bigcup A = A$, т.е. пустое множество играет роль "нуля" относительно объединения. Роль единичного множества играет универсальное (см. задачу 17, стр. 30).

Имея нуль, мы можем построить также противоположный к данному элемент. Действительно, что такое $-a$? Это число, которое в сумме с a дает 0. Используя это понятие, мы можем свести вычитание к прибавлению (противоположного числа). Те же идеи, приложенные к умножению, дают обратное число $1/a$ и деление. В наиболее общем виде подобные операции исследуются в математической Теории групп.

Область определения элементарной функции

С точки зрения высшей математики функция имеет три составляющих: область определения, область значений и соответствие между элементами того и другого. Поэтому функции "$f(x) = 1$ для всех $x \in \mathbb{R}$" и "$g(x) = 1$ для $x \geq 0$" различны. Но при задании элементарных функций обычно не уточняют, какие значения пробегает переменная. По умолчанию считается, что x принимает все значения, для которых можно вычислить $f(x)$. Это утверждение таит в себе опасность, когда мы начинаем сравнивать две функции, заданные формулами.

Пример 1. Найдите ошибку в решении уравнения $\mathrm{tg}(x+\pi/4) + \sin^2 x = 0$.

"*Решение*". Имеем $\mathrm{tg}(x+\frac{\pi}{4}) = \frac{1+\mathrm{tg}\,x}{1-\mathrm{tg}\,x}$ и $\sin^2 x = \frac{\mathrm{tg}^2\,x}{1+\mathrm{tg}^2\,x}$. Уравнение приводится к виду

$$\frac{1+\mathrm{tg}\,x}{1-\mathrm{tg}\,x} + \frac{\mathrm{tg}^2\,x}{1+\mathrm{tg}^2\,x} = 0. \qquad (1)$$

откуда $2t^2 + t + 1 = 0$, ($t = \mathrm{tg}\,x$). Последнее уравнение не имеет корней.

Анализ "решения". Исследуем тождество $\mathrm{tg}(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1+\mathrm{tg}\,x}{1-\mathrm{tg}\,x}$. Левая часть имеет смысл для всех точек, кроме $\pi/4+ \pi k$. Правая часть не определена в этих точках, а также когда тангенс не существует, т.е. при $x = \pi/2+ \pi k$. Поэтому применение данного тождества сужает область определения функции, что может привести к потере корней.

И действительно, подстановкой получаем, что все числа $\pi/2 + \pi k$ являются решениями уравнения. ☒

Подобные ошибки могут возникнуть также при проверке четности/нечетности функции. Например, функцию можно считать нечетной, если $f(-x)$ и $-f(x)$ совпадают как функции, в частности, имеют одинаковую область определения.

Пример 2. Является ли функция $f(x) = \frac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin x+\cos x}$ нечетной?

Эта функция не определена при $x = -\pi/2 + 2\pi k$ и при $x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. При замене x на $-x$ вторая группа разрывов переходит сама в себя, а первая – нет. В то же время для точек, в которых $f(x)$ и $f(-x)$ обе существуют, равенство $f(-x) = -f(x)$ выполняется!

Нулевые понятия в логике

– Товарищ старшина, ваше приказание выполнил!
– Да я же ничего не приказывал.
– А я ничего и не делал.

Так все-таки, выполнил солдат приказ командира или нет? В каком-то смысле, да: ведь он его не нарушил.

Действительно, сформулируем утверждение так: если командир приказал, то подчиненный должен выполнить приказ. В каком случае это утверждение будет нарушено? Если командир приказал, а солдат не сделал. Во всех остальных случаях импликация[1] верна.

[1] Т.е. утверждение типа "Если – то".

Вот еще пример.

Приказ: "Школьники, победившие во всероссийской олимпиаде, зачисляются в вуз по соответствующей специальности без экзаменов"[1].

Что можно сказать о вузе, куда ни один победитель олимпиад не подал заявление? Выполнил ли такой вуз приказ министерства? Да, конечно. Ведь никому же не было отказано в зачислении. Запишем то же подробнее с помощью конструкции "если – то".

"Если школьник победил в олимпиаде и поступает в вуз по той же специальности, то его необходимо зачислить".

Если абитуриент не удовлетворяет описанию, его можно зачислять в вуз, а можно не зачислять – ни то, ни другое не противоречит приказу.

В примере со школьниками вывод был довольно очевидным и не противоречил нашему здравому смыслу. Но это не всегда так.

В математике бывают определения, которые касаются не одного объекта, а их набора. А что, если набор окажется пустым? Будет ли верно соответствующее определение?

Можно ли у лысого разделить волосы пробором?

З а д а ч а. Как известно, функция $f(x)$ называется возрастающей, если для всех x_1, x_2 из ее области определения таких, что $x_1 > x_2$, выполняется $f(x_1) > f(x_2)$. Будет ли возрастающей функция $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{-x}$?

Р е ш е н и е. Найдем сначала область определения функции. Корень можно извлекать только из неотрицательного числа. Значит, должно выполняться как $x \geq 0$, так и $x \leq 0$. Но это возможно, только если $x = 0$. Итак, данная функция определена только в одной точке 0. Получается, что в ее области определения просто нет чисел, удовлетворяющих неравенству $x_1 > x_2$. Ну, а на нет и суда нет – мы договорились считать, что в этом случае импликация выполняется.

Итак, эта функция возрастающая. Впрочем, она же является и убывающей, и постоянной.

Подобные проблемы возникают и в математическом анализе, при попытке дать определение непрерывности и предела функции. Действительно, и то и другое характеризует поведение функции не в одной точке, а в некоторой окрестности. Но что, если эта окрестность пуста?

Напомним определение непрерывности функции (дадим его здесь на интуитивном уровне). Пусть функция f задана в точке a. Тогда для всех x, близких к a, значения $f(x)$ должны быть близки к $f(a)$.

[1] Это утверждение отличается от первого тем, что с нем есть "переменная величина" – школьник. Т.е. для некоторых школьников его посылка верна, а для некоторых – нет. Такая конструкция называется в логике **предикатом**.

Возникает вопрос: а что, если в точке x значение функции не определено? Ведь про него нельзя сказать, близко оно к чему-нибудь, или нет. Более того, по нашему соглашению, оно и близко, и не близко. Т.е. для такого x требование непрерывности выполняется!

Например, функция, приведенная в предыдущем упражнении, непрерывна в точке 0.

Еще хуже обстоит дело с понятием предела. Дело в том, что для существования предела в точке a не требуется, чтобы функция была определена в самой этой точке.

Задача. Чему равен предел функции $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{-x}$
а) в точке 1; б) в точке 0?

Решение. Число b называется пределом функции $f(x)$ в точке a, если значения $f(x)$ близки к b для x, близких к a (но не совпадающих с ней). Но данная функция не имеет никаких значений, ни в точках, соседних с 1, ни в точках, соседних с 0! Значит, можно считать, что эти (несуществующие) значения близки к произвольному числу b.

Итак, пределом данной функции как в 0, так и в 1 будет любое число. Как мы видим, при таком подходе не выполняется даже теорема о единственности предела!

Это наблюдение, конечно, не выполняется для "обычных" функций, с которыми мы работаем в школьном курсе математического анализа. Однако требование математической полноты и точности заставляет принять меры, чтобы обойти это затруднение.

Самый простой выход – вообще не рассматривать непрерывность и предел в изолированных точках. Например, можно в определении непрерывности потребовать, чтобы функция была задана в некоторой окрестности точки a. А для предела – в "проколотой" окрестности (т.е. во всех соседних точках, кроме самой a). Правда, тогда возникает проблема с "концевыми" точками: будет ли непрерывна функция $f(x) = \sqrt{x}$ в точке 0? Ведь она не определена слева от нуля! В этом случае в точке 0 существует только предел справа. Соответственно, в правом конце области определения можно искать только непрерывность (предел) слева[1].

[1] Вообще-то, не обязательно требовать, чтобы функция была задана во всей окрестности исследуемой точки a. Достаточно того, что область определения "подбирается" к a сколь угодно близко. Это интуитивное представление реализуется в понятии "предельной точки". Чаще всего определение предела или непрерывности функции задается только для предельных точек ее области определения. Однако это несколько нарушает чеканную красоту формулировки теоремы об элементарных функциях (см. стр. 70)

Необходимость помнить об этих ограничениях несколько утяжеляет определения и доказательства математического анализа.

О знаке равенства

Какой смысл имеет запись типа $f = g$? Это может быть:

Ч и с л о в о е р а в е н с т в о. Оно может быть верным или неверным, причем проверка этого может оказаться весьма нетривиальной.

У р а в н е н и е, т.е. равенство с одной или несколькими неизвестными. При некоторых значениях оно верно, а при других нет. Обычно ставится задача отыскать все решения уравнения. В трудных случаях цель может быть более скромной: проверить факт существования корней или, скажем, вычислить их приближенно.

У с л о в и е на одну или несколько неизвестных. К этому типу относятся, например, равенства, возникающие при поиске ОДЗ. Их можно не решать, а просто проверить, когда решение уже найдено.

Часто условия присутствуют также в задачах на оптимизацию: «Найти наименьшее значение суммы двух чисел п р и у с л о в и и, что их произведение равно 1». И здесь в с е пары чисел нам не нужны.

О п р е д е л е н и е, в котором переменной или функции придается некоторое значение. Чтобы подчеркнуть этот смысл, используют обозначение $\stackrel{\text{def}}{=}$ – "равно по определению". Например, $\operatorname{tg} x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sin x}{\cos x}$. В таком равенстве левая и правая части не эквивалентны. Кроме того, нельзя сказать, верно ли данное равенство: это вопрос соглашения, а не проверки. К этому типу относятся все случаи замены переменной, начинающиеся обычно со слова «пусть»: «пусть $t = \operatorname{tg} x$».

П р и с в о е н и е переменным конкретных значений: «пусть $x = 1$». Часто используется в программировании. Для такого равенства применяют особый значок “:=”. В отличие от предыдущего случая, переменная здесь может выражаться сама через себя, например, $x := x + 1$, причем к моменту присвоения исходное значение x должно быть уже известно. Присвоение используют также в знаке подстановки. Запись $f(x)|_{x=1}$ означает, что переменной x присвоено значение 1.

И наконец, т о ж д е с т в о, которое также имеет свой знак, “≡”. Это равенство, верное для всех значений переменной, принадлежащих некоторой области. Значит, тождество должно включать еще и сведения о том, для каких значений переменной оно верно.

Если тождество записано с помощью элементарных функций, можно считать, что оно верно во всех точках, для которых имеют смысл как правая, так и левая части. Более подробно об этом говорится в предыдущем разделе.

Классификация получилась довольно развернутой. При желании близкие понимания знака “=” можно объединить. Например, в три группы: 1) числовое равенство, не содержащее переменных, 2) равенство-определение и равенство-присвоение, которые в конкретных случаях бывает трудно различить и 3) все остальные равенства (уравнения). Тогда условие – это уравнение, которое решать не надо, а тождество – уравнение, которое уже решено.

Посмотрим также на привычную запись $y = f(x)$. Попробуем переставить местами левую и правую часть: одинаковы соотношения $y = 2$ и $2 = y$? Конечно, нет! Здесь y – это не просто ч и с л о, эта переменная несет в себе признаки ф у н к ц и и. В частности, в математическом анализе выражения вида dy и df используют как взаимозаменяемые. Это отождествление удобно практически (например, в свойстве инвариантности формы первого дифференциала).

В математическом анализе существуют еще некоторые записи, использующие знак "=", но не являющиеся равенствами в строгом смысле.

Например, $f(x) = o(g(x))$ при $x \to a$. Здесь левая и правая часть имеют разную природу: слева стоит функция, а справа – м н о ж е с т в о функций, бесконечно малых относительно g. Фактически это равенство имеет смысл включения, $\in$. Однако знак "=" более удобен при организации цепочки таких соотношений.

Чтобы верно оперировать с подобными "квазиравенствами", нужно использовать только допустимые, заранее обоснованные правила действия с ними (см. любой задачник по математическому анализу).

Проблемы возникают и с равенствами, содержащими неопределенный интеграл. Например, верно ли равенство $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$?

Существуют два подхода: рассматривать интеграл как м н о ж е с т в о первообразных или как п р о и з в о л ь н у ю первообразную.

В первом случае указанное равенство является равенством двух множеств и, конечно, верно. Если же интеграл – это функция (одна из первообразных), то придется писать $\int a\, f(x)dx = a\int f(x)dx + C$, т.к. слева и справа могут оказаться р а з н ы е первообразные функции $f(x)$.

Этот подход более аккуратный, однако и он содержит парадокс: равенство $\int f(x)dx = \int f(x)dx$ в этом случае, вообще говоря, неверно!

Продолжение по непрерывности

Элементарные функции хорошо известны нам из школьного курса математики, так что начинает казаться, что каждое из их значений существует и может быть вычислено само по себе. Но если присмотреться повнимательнее, то непосредственно заданными являются только многочлены и их отношения (рациональные функции). Они используют в своем определении арифметические действия с числами и переменными.

Уже степень с рациональным показателем определяется как обратная функция, *т.е. сначала описывается функция, а потом – ее значения*. И если число $\sqrt{9}$ еще можно найти подбором (т.к. $3^2 = 9$), то что такое $\sqrt{10}$? Для каких чисел существует корень? Сколько у него значений?

Естественно в определении корня использовать идею приближенного вычисления: если $p^2 \approx 10$, то и $p \approx \sqrt{10}$. Построив последовательность чисел p_k так, что p_k^2 приближается к 10, мы можем ожидать, что сами числа p_k приближаются к некоторому числу, которое и следует считать значением $\sqrt{10}$.

Как мы видим, само определение радикала требует идеи предела. Функция $\sqrt{x}$ строится так, чтобы она была непрерывной при $x \geq 0$. Существование и непрерывность функции, обратной к x^2, гарантируется теоремой об обратной функции. Ясно, что теми же способами можно доказать существование и непрерывность корней любой степени $\sqrt[n]{x}$, а также степеней с рациональным показателем $x^{m/n}$.

Однако, что означает, например, запись 2^{π}? Для нахождения 2^{π} необходимо заменить иррациональное число π близким к нему рациональным числом p. Приближая p к π, заметим, что 2^p приближается[1] к некоторому значению, которое и будем считать числом 2^{π}. Как видим, и в данном случае не функция определяется набором своих значений, а, наоборот, отдельные значения порождаются всей функцией (исходя из требования непрерывности).

В связи с этим возникает разночтение, как понимать запись a^x, если x – рационально. Для положительных a проблемы не возникнет, так как оба подхода (непосредственное вычисление и вычисление через функцию) здесь совпадают. Но что означает запись $(-1)^{m/n}$? Как известно, $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$. По этой формуле имеем:

$$(-1)^{5/3} = \sqrt[3]{(-1)^5} = -1; \quad (-1)^{10/6} = \sqrt[6]{(-1)^{10}} = 1; \quad \left(\sqrt[6]{-1}\right)^{10} \text{ не существует.}$$

Но ведь число $\frac{5}{3}$ совпадает с числом $\frac{10}{6}$!

Таким образом, выражение $a^{m/n}$ объединяет в себе два смысла: функция от ч и с л а[2] m/n и функция от п а р ы целых чисел $(m; n)$. В настоящее время степени придается первый смысл, тогда $a^{m/n}$ определено только для $a > 0$.

Впрочем, этот подход не выдерживается строго в задачниках по матема-

---

[1] Это требует, конечно, аккуратного обоснования.

[2] См.также стр. 38

тическому анализу. Например, линия, задаваемая уравнением $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, не называлось бы астроидой (*astros* – звезда), если бы выражение имело смысл только в первой координатной четверти.

Используя аналогичные идеи, можно построить показательную, логарифмическую, тригонометрические и обратные к ним функции. На основе этих "простейших элементарных" строятся и все остальные элементарные функции (с помощью арифметических действий и композиции). Эти рассуждения можно резюмировать в одном высказывании:

Каждая элементарная функция непрерывна в любой точке, где она определена.

Кстати, при таком подходе придется считать функцию непрерывной во всех изолированных точках области ее определения. Действительно, функция $\sqrt{x} + \sqrt{-x}$ элементарна, так что должна быть непрерывна в точке 0, – единственной, где она имеет смысл!

Упражнение. Докажите, что функция sign не элементарна.

Каких чисел больше?

> Если тебе трудно сразу понять всю бесконечность, постарайся понять хотя бы ее половину.
>
> Математики тоже шутят

Казалось бы, ответ на этот вопрос тривиален: меньше всего натуральных чисел, больше – целых, еще больше – рациональных и больше всего – вещественных. Однако для бесконечных множеств принцип "часть меньше целого" не всегда срабатывает.

Действительно, рассмотрим два множества: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ и $A = \{2, 4, 6, \ldots\}$. Второе входит в первое, и тем не менее их можно считать одинаковыми по размеру:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \ldots \end{array}$$

На этой схеме видно, что каждому элементу из $\mathbb{N}$ соответствует элемент из A и наоборот. Элементы второго множества можно пронумеровать натуральными числами. Каждое четное число $2n$ получит номер n.

В этом примере есть и общая идея:

Определение 18. Множества A и B называются равномощными, если существует взаимно однозначное соответствие (биекция) между A и B.

В этом смысле множества $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$ равномощны.

Действительно, элементы $\mathbb{Z}$ можно пронумеровать в таком порядке: 0, 1,

–1, 2, –2, …

Пронумеруем множество $\mathbb{Q} = \{m/n \mid m \in \mathbb{Z};\ n \in \mathbb{N}\}$. Для этого используем бесконечную таблицу:

$n \backslash m$	0	1	–1	2	–2	3	…
1	0	1	–1	2	–2	3	…
2	0	1/2	–1/2	1	–1	3/2	…
3	0	1/3	–1/3	2/3	–2/3	1	…
4	0	1/4	–1/4	1/2	–1/2	3/4	…
…	…	…	…	…	…	…	…

Каждая дробь m/n представлена в клетках этой таблицы, причем бесконечное число раз. Клетки можно пронумеровать, например, по диагоналям (слева снизу направо наверх) при этом все числа, которые уже были пронумерованы, пропускаются: 0; 1; 1/2; –1; 1/3; –1/2; 2; …

Мощность множества $\mathbb{N}$ и равномощных ему называется *счетной*.

З а д а ч а. а) Пусть A – бесконечное множество. Показать, что $A \cup \{a\}$ равномощно A. б) Если A и B счетны, то и $A \cup B$ счетно.

Р е ш е н и е. а) Выберем в A некоторую последовательность точек a_n, попарно различных между собой. Зададим соответствие между A и $A \cup \{a\}$ следующим образом: $a_1 \to a$; $a_2 \to a_1$; $a_3 \to a_2$; … Точки, не входящие в последовательность, перейдут сами в себя.

б) Пронумеруем элементы A и B, т.е. запишем эти множества в виде последовательностей (a_n) и (b_n). Тогда множество $A \cup B$ можно записать в виде последовательности a_1; b_1; a_2; b_2; …

З а м е ч а н и е. Утверждение пункта б) можно обобщить на множества любой мощности. Доказательство этого факта связано с так называемой аксиомой выбора. Эта аксиома формулируется разными способами, однако суть ее в том, что каждое множество можно исчерпать, выбирая в нем по одной точке. При этом оно становится *вполне упорядоченным* (т.е. каждое подмножество в нем имеет минимум). Ясно, что для вещественной прямой такой порядок не совпадает с естественным.

Т е о р е м а. Множество $\mathbb{R}$ несчетно.

Доказательство. Покажем, что несчетен даже интервал (0; 1). Предположим, что все вещественные числа между 0 и 1 пронумерованы, т.е. записаны в виде последовательности

$a_1 = 0{,}\boxed{0}2034\ldots$

$a_2 = 0{,}9\boxed{3}060\ldots \qquad a = 0{,}1001\ldots$

$a_3 = 0{,}30\boxed{5}10\ldots$

$a_4 = 0{,}101\boxed{0}1\ldots$

…

Построим число, которого нет в этом списке. Для этого выберем его первую цифру так, чтобы она не совпадала с первой цифрой первого числа, вторую – не совпадающей со второй цифрой второго числа, третью – не совпадающей с третьей цифрой третьего числа и т.д. Соответствующей цифры обведены рамочкой. При этом можно не использовать в записи цифру 9. Получим число a, которое отличается от каждого из чисел a_k хотя бы одной десятичной цифрой. Как следует из решения задачи 23, тогда и сами числа a и a_k не совпадают.

Итак, какой бы счетный список вещественных чисел мы не взяли, всегда найдется число, которого в этом списке нет. ☒

Мощность множества $\mathbb{R}$ называется континуум ("непрерывный").

Упражнение. Если A и B имеют мощность континуума, то и множества а) $A \bigcup B$, б) $A \times B$ имеют такую же мощность.

Указание. а) Отобразить прямую на интервал. б) Использовать десятичное представление вещественных чисел.

Вопрос о «количестве» точек возникал у нас при изучении канторова множества (см. стр. 18). Теперь мы можем поставить его более строго. А именно, какую мощность имеет канторово множество K?

Как следует из решения задачи 11, точки множества K – это те, которые можно записать в троичной системе счисления в виде бесконечной дроби, состоящей из цифр 0 и 2. Конечно, в это число не входят записи, имеющие «хвост» из двоек. Действительно, троичная запись вида 0,020222222… совпадает с числом 0,021, т.е. не входит в K.

Докажем, что множество K равномощно промежутку [0; 1). Для этого поделим каждую троичную цифру канторова числа на 2. Получим бесконечную дробь из нулей и единиц, которую можно рассматривать как двоичное представление некоторого числа из [0; 1).

Итак, нам удалось отобразить K в отрезок [0; 1]. Правда, конечные двоичные дроби не соответствуют точкам множества K. Значит, при заданном выше отображении K отображается биективно на множество [0; 1] \ {1; 0,1; 0,01; 0,11; 0,001; 0,011; 0,101 … }. Вычитаемое подмножество счетно, так что оно не уменьшает мощность множества.

Оперирование с кванторами

Что больше – дельта большое или дельта маленькое?

Занаучный юмор.

Задача 1. Можно ли в определении предела поменять местами слова “для $\forall \varepsilon > 0$” и “$\exists \delta > 0$”? Для сравнения рассмотрите такой анекдот:

Продавец: “У нас есть ботинки на любой размер”.

Покупатель: “Вот такие мне и дайте”.

Решение. Продавец, конечно, имел в виду, что для любого размера у них есть ботинки: $\forall$ размера $\exists$ ботинки. Покупатель же понял его буквально: $\exists$ ботинки $\forall$ размера. Причина – в нечеткости обыденной речи, ведь формально Покупатель прав. Конечно, в подобной ситуации вряд ли кто-то ошибется, но в более абстрактных, отвлеченных рассуждениях подмена не так заметна.

Задача 2. Как изменится определение непрерывности функции при небольших искажениях его текста?

	Высказывание	Кванторы
1)	$\forall\ \varepsilon > 0\ \forall\ \delta > 0\ \forall\ x,\ \lvert x - a\rvert < \delta \Rightarrow \lvert f(x) - f(a)\rvert < \varepsilon$	$\forall\forall\forall$
2)	$\exists\ \varepsilon > 0\ \forall\ \delta > 0\ \forall\ x,\ \lvert x - a\rvert < \delta \Rightarrow \lvert f(x) - f(a)\rvert < \varepsilon$	$\exists\forall\forall$
3)	$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall\ x,\ \lvert x - a\rvert < \delta \Rightarrow \lvert f(x) - f(a)\rvert < \varepsilon$	$\forall\exists\forall$
4)	$\forall\ \varepsilon > 0\ \forall\ \delta > 0\ \exists\ x,\ \lvert x - a\rvert < \delta \Rightarrow \lvert f(x) - f(a)\rvert < \varepsilon$	$\forall\forall\exists$
5)	$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \exists\ x,\ \lvert x - a\rvert < \delta \Rightarrow \lvert f(x) - f(a)\rvert < \varepsilon$	$\forall\exists\exists$
6)	$\exists\ \varepsilon > 0\ \forall\ \delta > 0\ \exists\ x,\ \lvert x - a\rvert < \delta \Rightarrow \lvert f(x) - f(a)\rvert < \varepsilon$	$\exists\forall\exists$
7)	$\exists\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall\ x,\ \lvert x - a\rvert < \delta \Rightarrow \lvert f(x) - f(a)\rvert < \varepsilon$	$\exists\exists\forall$
8)	$\exists\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \exists\ x,\ \lvert x - a\rvert < \delta \Rightarrow \lvert f(x) - f(a)\rvert < \varepsilon$	$\exists\exists\exists$

Решение.

1. В силу того, что δ произвольно, x также произвольно, так что число $|f(x) - f(a)|$ меньше любого положительного ε. Это значит, что оно равно 0, т.е. функция является постоянной.

2. Второе высказывание отличается от первого только тем, что число ε фиксировано. Получается, что все значения $f(x)$ попадают в некоторую (достаточно большую!) ε-окрестность числа $f(a)$. Это значит, что функция $f(x)$ ограничена.

3. Определение непрерывности.

4. Существует последовательность аргументов, сходящаяся к a, для которой значения функции сходятся к $f(a)$.

5. Ограничение на x можно отбросить (всегда можно подобрать доста-

точно большое δ). Высказывание означает, что число $f(a)$ является предельной точкой множества $E(f)$ значений функции f.

6. Функция не стремится к бесконечности.

7. Отличается от 2) только тем, что δ фиксировано. Функция ограничена в некоторой окрестности точки a.

8. Тривиальное высказывание, верно для любой функции.

Задача 3. Как построить отрицание выражения с кванторами?

Решение. Найдем отрицание высказывания $\forall x\ V(x)$, где V – некоторое высказывание об x. Если V выполняется не для любого x, значит, существует x, для которого оно не выполняется. Тогда для этого x выполняется высказывание "не V". Итак, отрицанием высказывания $\forall x\ V(x)$ будет высказывание $\exists x$ (не $V(x)$). Аналогично, не ($\exists x\ V(x)$) = $\forall x$ (не $V(x)$).

В частности, отрицанием определения 6 из предыдущего примера будет $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall\ x,\ |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| > \varepsilon$. Последнее неравенство описывает окрестность ∞, так что "не 6)" есть определение функции, стремящейся к бесконечности.

Можно рассмотреть высказывания, аналогичные определениям 1) – 8), поменяв в них знак неравенства. Получим:

9)	$\forall\ \varepsilon > 0\ \forall\ \delta > 0\ \forall\ x,\ \lvert x - a\rvert < \delta \Rightarrow \lvert f(x) - f(a)\rvert > \varepsilon$	$\forall\forall\forall>$, не 8)
10)	$\exists\ \varepsilon > 0\ \forall\ \delta > 0\ \forall\ x,\ \lvert x - a\rvert < \delta \Rightarrow \lvert f(x) - f(a)\rvert > \varepsilon$	$\exists\forall\forall>$, не 5)
11)	$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall\ x,\ \lvert x - a\rvert < \delta \Rightarrow \lvert f(x) - f(a)\rvert > \varepsilon$	$\forall\exists\forall>$, не 6)
12)	$\forall\ \varepsilon > 0\ \forall\ \delta > 0\ \exists\ x,\ \lvert x - a\rvert < \delta \Rightarrow \lvert f(x) - f(a)\rvert > \varepsilon$	$\forall\forall\exists>$, не 7)
13)	$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \exists\ x,\ \lvert x - a\rvert < \delta \Rightarrow \lvert f(x) - f(a)\rvert > \varepsilon$	$\forall\exists\exists>$, не 2)
14)	$\exists\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall\ x,\ \lvert x - a\rvert < \delta \Rightarrow \lvert f(x) - f(a)\rvert > \varepsilon$	$\exists\forall\exists>$, не 3)
15)	$\exists\ \varepsilon > 0\ \forall\ \delta > 0\ \exists\ x,\ \lvert x - a\rvert < \delta \Rightarrow \lvert f(x) - f(a)\rvert > \varepsilon$	$\exists\exists\forall>$, не 4)
16)	$\exists\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \exists\ x,\ \lvert x - a\rvert < \delta \Rightarrow \lvert f(x) - f(a)\rvert > \varepsilon$	$\exists\exists\exists>$, не 1)

Задача 4. Есть ли ошибки в следующих высказываниях:

а) Открытое множество – это множество, содержащее все свои внутренние точки.

б) В нашем магазине есть все, что Вам нужно! Если у нас чего-нибудь нет, то Вам это не нужно.

Решение. а) Высказывание неверно. Он обратно истинному:

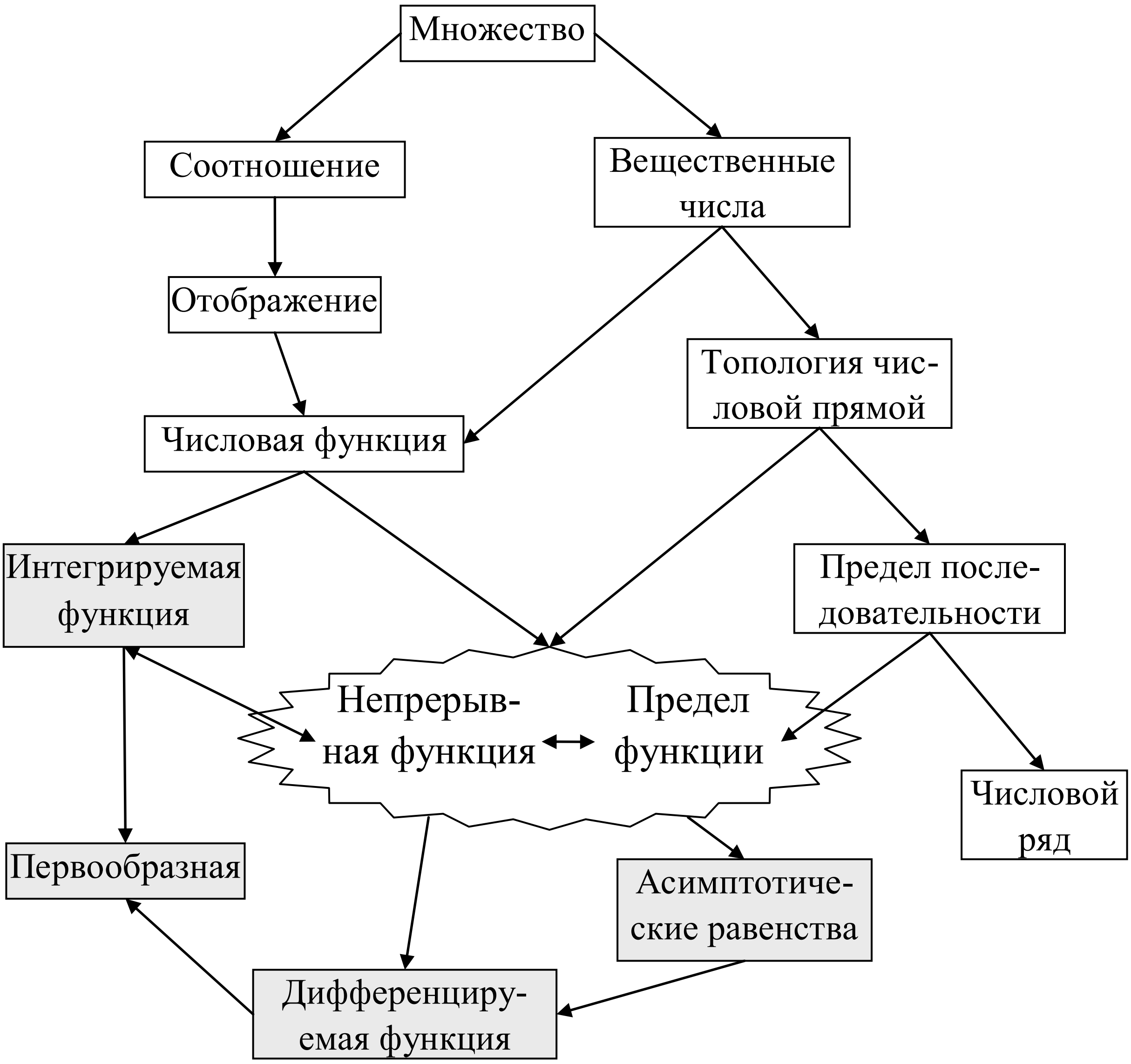
Сказано: $\forall$ внутренняя точка есть точка множества.

Верно: $\forall$ точка множества есть внутренняя точка.

б) В этой рекламе смущает второе высказывание, хотя оно равносильно первому. Как логическое следствие это высказывание верно.

Заключение. Схема взаимосвязи основных понятий

Понятия, о которых говорится в пособии. Изучаются на 1 курсе. Они объединяются между собой различными логическими связями. Примерно это можно изобразить в виде такой схемы: (стрелки показывают логическую связь между отдельными определениями).



Решения задач

Задача 1, стр. 7. Уравнение $f(x) = a$ легко исследовать, т.к. оно равносильно квадратному $x^2 - ax + 1 = 0$ (0 не является решением этого уравнения). Дискриминант его должен быть неотрицательным, т.е. $a^2 - 4 \geq 0$.

Итак, значениями функции f будут все числа из множества $(-\infty;\ 2] \cup [2; +\infty)$.

Уравнение же $g(x) = a$ – четвертой степени. В школьном курсе общий метод решения таких уравнений не изучается.

Задача 2, стр. 7. Функция растет от 2 до $+\infty$ для $x \in [-1; 0)$ и от $-\infty$ до -2 для $x \in (0; 1]$. Поэтому на отрезке $[-1; 1]$ функция принимает те же значения, что и на всей прямой, т.е. $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

Задача 3, стр. 8. Функция $\frac{\sin x}{x}$ – четная, так что достаточно проверить аргументы, большие 0. Для табличных значений имеем:

x	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$
$\sin x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\sin x}{x}$	$\frac{2}{\pi}$	$\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$	$\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$	$\frac{3}{\pi}$
Приближенно	0,637	0,827	0,900	0,955

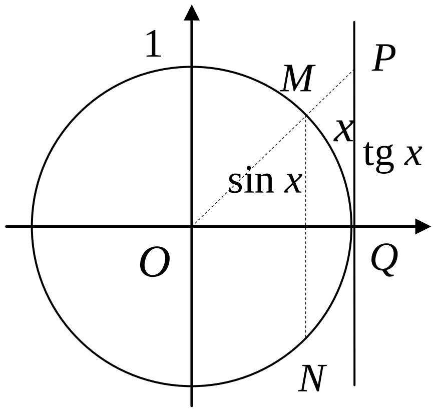
Как мы видим, при уменьшении аргумента значения функции растут и приближаются к 1. И действительно, предел функции $\frac{\sin x}{x}$ в нуле равен 1 (сравни с задачей 7).

Задача 4, стр. 8. За один раз a руб. превращаются в $a + a \cdot p100\% = a(1 + p)$ руб. Значит, каждое начисление приводит к умножению вклада на число $1 + p$. Когда произойдет n таких начислений, вклад увеличится в $(1 + p)^n$ раз.

Задача 5, стр. 10. По свойству погрешности имеем $x - \delta_1 < a < x + \delta_1$; $y - \delta_2 < b < y + \delta_2$, где x, y – приближенные значения для a и b соответственно. Складывая эти неравенства, получаем, что $x - \delta_1 + y - \delta_2 < a + b < x + \delta_1 + y + \delta_2$, причем число $x + y$ можно считать приближенным значением суммы $a + b$. Значит, погрешность этого приближения равна $\delta_1 + \delta_2$.

Для исследования разности сначала умножим неравенство для b на (-1), получим $-y + \delta_2 > -b > -y - \delta_2$. Меняем порядок: $-y - \delta_2 < -b < -y + \delta_2$. Складывая это неравенство с оценкой для a, получаем, что $x - y - \delta_1 - \delta_2 < a - b < x - y + \delta_1 + \delta_2$, так что и при вычитании величин абсолютные погрешности складываются.

Задача 6, стр. 11. Если сторона a квадрата измерена с относительной погрешностью δ, то погрешность площади, вычисленной по формуле $S = a^2$, равна $\delta + \delta + \delta^2$, что при малых δ приблизительно совпадает с 2δ. Итак, $2\delta \approx 1\%$, т.е. $\delta \approx 0{,}5\%$.



Задача 7, стр. 13. На рисунке длина отрезка MN равна $2|\sin x|$, а длина дуги MN равна $2|x|$ (в радианах). Ясно, что отрезок короче дуги, поэтому $|\sin x| < |x|$.

С другой стороны, площадь треугольника OPQ равна $\frac{1}{2}|\text{tg } x|$, а площадь сектора OMQ есть $\frac{1}{2}|x|$. Значит, $|\text{tg } x| > |x|$ или $|\sin x| > |x \cos x|$.

Задача 8, стр. 14. Функция $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, имеет столько же точек минимума и максимума, сколько $\sin \frac{1}{x}$. Кроме того, при x близких к 0 ее значения малы (синус не больше 1). Значит, они приближаются к 0. Если положить $f(0) = 0$, то функция станет непрерывной и в 0.

Более того, функция $x^2 \sin \frac{1}{x}$, которая меняет направление бесконечное число раз, является дифференцируемой в точке 0, т.е. имеет в ней касательную (это ось Ox)!

Задача 9, стр. 14. Локальный максимум – это точка, в которой функция имеет наибольшее значение из всех ближайших. Но это не значит, что слева и справа она монотонна.

Например, функция $x^2(\sin \frac{1}{x} - 2)$ имеет бесконечное число максимумов и минимумов вблизи 0. Если положить $f(0) = 0$, то функция будет иметь максимум в точке 0, т.к. выражение в скобке всегда отрицательно.

Задача 10, стр. 15. Заметим, что вершины ломаной, являющейся графиком функции $f_n(x)$, лежат также на всех последующих графиках, а значит, и на графике функции $f(x)$. Точки перелома функции $f_1(x)$ имеют абсциссы $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$, функции $f_2(x)$ – абсциссы $\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \ldots, \frac{8}{9}$ и т.д.

Предположим, что функция $f(x)$ монотонна на некотором промежутке (a, b). Выберем n настолько большим, что в этот промежуток попадают три точки вида $\frac{i-1}{3^n}$, $\frac{i}{3^n}$, $\frac{i+1}{3^n}$. По построению значение $f(x)$ в средней точке не лежит между значениями в крайних точках, что противоречит монотонности $f(x)$.

Задача 11, стр. 18. Точки первой трети отрезка [0; 1] лежат между 0_3 и $0{,}1_3$, т.е. первая цифра после запятой у них 0. Аналогично точки второй трети имеют вид $0{,}1\ldots_3$, а третьей трети – вид $0{,}2\ldots_3$. После первого этапа функция оказывается заданной на всех аргументах вида $0{,}1\ldots_3$, Аналогично на втором этапе определяются значения для x вида 0,01… и 0,21… Продолжая этот процесс, получаем, что неопределенными остаются значения для аргументов, чья троичная запись состоит только из 0 и 2. Это и есть канторово множество.

В приведенном выше рассуждении есть некоторая неточность. А именно, крайние правые точки каждой части имеют несколько другую запись, чем остальные. Действительно, на первом этапе функция задается не только для чисел $0{,}1\ldots_3$, но и для числа $\frac{2}{3} = 0{,}2_3$. Поэтому это число, а также числа 0,02; 0,22; 0,002; 0,022; 0,222 …, т.е. конечные троичные дроби, не входят в канторово множество.

Задача 12, стр. 21. а) Расходится. Действительно, объединяя члены ряда в группы из 2, 4, 8, … членов, получим, что в каждой группе сумма не менее ½. Значит, сумма всего ряда равна бесконечности.

б) Сходится. Частичные суммы ряда поочередно увеличиваются и убывают, причем это колебание затухает. Значит, они приближаются к некоторому числу. Более строго это можно доказать, используя свойства вещественной прямой.

Задача 13, стр. 23. Во-первых, понятие площади появилось задолго до интеграла, интегрирование же дало новый метод ее вычисления путем сведения к сумме. Так что суть и новизна понятия интеграла именно в применении суммирования.

Во-вторых интеграл является площадью только для положительной функции, в противном случае он изображает площадь со знаком (относительную площадь или заряд[1]).

Кроме того, интеграл используется не только для вычисления площади, но также и объема, длины кривой, веса и вероятности, т.е. меры.

Задача 14, стр. 24. Ответы представлены в таблице. Веса заданы в первом

[1] По аналогии с электрическим зарядом, который бывает и положительным, и отрицательным, но в то же время суммируется при объединении заряженных тел (свойство аддитивности).

случае для значений (p_i), во втором – для аргументов ($p(x)$).

Среднее	арифметическое	квадратичное	взвешенное
Сгруппированные значения y_i, $i = 1, 2, \dots k$, каждое в количестве n_i.	$\frac{\sum_{i=1}^{k} y_i n_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$	$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} y_i^2 n_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i}}$	$\frac{\sum_{i=1}^{k} p_i y_i n_i}{\sum_{i=1}^{k} p_i n_i}$
Функция $f(x)$, $x \in [a, b]$.	$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$	$\sqrt{\frac{\int_a^b f^2(x)dx}{b-a}}$	$\frac{\int_a^b p(x)f(x)dx}{\int_a^b p(x)dx}$

Заметим, что значения функции также можно "сгруппировать", придав каждому вес, пропорциональный тому, как "часто" оно встречается. Именно так вводят среднее в теории вероятностей.

Задача 15, стр. 27. а) да, б) нет, в) да. Решение дано в тексте.

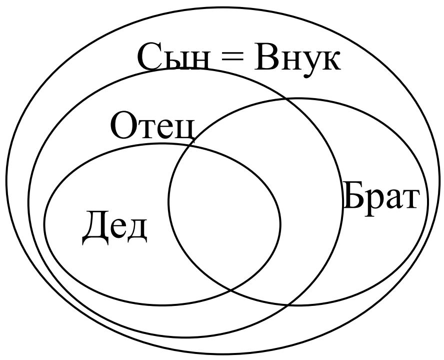
Задача 16, стр. 29. Переформулируем приведенные определения более формально:

а) Люди, каждый из которых пришел на концерт.

б) Люди, каждый из которых может перенести рояль.

Во втором случае смысл фразы исказился: если даже такие люди и существуют, это не те, о которых говорится в определении. В пункте б) описание относится не к отдельным элементам, а к множеству в целом.

Задача 17, стр. 30. Операция объединения множеств похожа на сложение чисел. Соответственно пересечение можно сравнить с умножением. Но для универсального множества E и произвольного множества A имеем $E \cap A = A$, т.е. E ведет себя так же, как число 1 ($1 \cdot a = a$).



Задача 18, стр. 31. Ясно, что каждый мужчина является чьим-то сыном и чьим-то внуком, так что соответствующие множества совпадают с множеством всех мужчин. Понятие "отец" более узкое, т.к. некоторые мужчины не являются отцами. Кроме того, всякий дед – отец, но не наоборот. Среди отцов, дедов и бездетных мужчин есть такие, которые являются чьими-то братьями, и такие, что не являются.

Задача 19, стр. 31. а) объединение множеств; б) пересечение множеств.

Задача 20, стр. 32. Имеем $A \times B = \{(1; 1); (1; 2); (\{1; 2\}; 1); (\{1; 2\}; 2)\}$, т.е. множество $A \times B$ состоит из 4 элементов, ни один из которых не совпадает с элементами A.

Множество $(A \times B) \bigcap A$ может быть непустым, если A содержит как элемент, так и список с этим элементом. Например, заменив в примере $A = \{1; \{1; 2\}\}$ на $A = \{1; (1; 2)\}$, получим, что $A \times B = \{(1; 1); (1; 2); ((1; 2); 1); ((1; 2); 2)\}$, так что пересечение $(A \times B) \bigcap A$ содержит один элемент, а именно, пару (1; 2).

З а д а ч а 2 1 , с т р . 32. Алфавит является множеством, когда рассматривается как набор букв для записи слов. Например, "кириллица", "латиница" и т.п. Списком он является тогда, когда его используют для упорядочения: "расположить в алфавитном порядке".

З а д а ч а 2 2 , с т р . 36. Как меняется форма слова при счете?

один стол	два стола	три стола	четыре стола	пять столов
одна книга	две книги	три книги	четыре книги	пять книг

Как мы видим, начиная с "пяти", управление падежами существительных меняется. Если 2, 3, 4 требуют родительного падежа е д и н с т в е н н о г о числа (чего? – книги), то начиная с 5 – м н о ж е с т в е н н о г о .

Для выяснения смысла слова "полтретья" найдем похожие современные слова:

Слово	Смысл	Слово	Смысл
полтретья	?	полтретьего	2,5 часа
пол(в)тора	1,5	полвторого	1,5 часа

Из этой таблицы ясно, что полтретья = 2,5. Заодно мы выяснили происхождение числительного "полтора".

З а д а ч а 2 3 , с т р . 39. Если на некотором шаге измерения число оказывается строго между двумя делениями, то соответствующая десятичная цифра определяется однозначно (из записи левого конца). Разночтение может возникнуть, только если число попадает сразу в два промежутка деления, т.е. оказалось на границе. Значит, оно представимо в виде к о н е ч н о й десятичной дроби. Например, пусть $x = a{,}b\ldots c$, $c \neq 0$. Тогда x удовлетворяет неравенству $a{,}b\ldots d9 < x \leq a{,}b\ldots c$, где $d = c - 1$.

Уточнение измерения даст неравенства $a{,}b\ldots d99 < x \leq a{,}b\ldots c$; $a{,}b\ldots d999 < x \leq a{,}b\ldots c$ и т.д., т.е. число x можно представить также в виде $x = a{,}b\ldots\, d999\ldots$

З а д а ч а 2 4 , с т р . 40. Приставка "ир-" задает отрицание, так что на русский язык это высказывание переводится так: "Вещественные числа – это числа, которые являются либо рациональными, либо не рациональными". В таком виде высказывание становится тривиальным. Формально оно верное, но не может служить определением вещественного числа. В существующих определениях понятие вещественного числа задается самостоятельно, а иррациональными называются вещественные нерациональные числа.

Задача 25, стр. 41. Если перебирать все элементы по одному, то может понадобиться (в худшем случае) 999 вопросов. Лучше задавать вопрос так, чтобы ответ "да" был бы настолько же вероятен, как и "нет". Тогда в любом случае за одну попытку мы отбросим половину альтернатив. Значит, нам понадобится не более 10 вопросов (т.к. $2^{10} = 1024$).

Задача 26, стр. 42. Пусть для всех непустых множеств, ограниченных сверху, существует супремум. Рассмотрим непустое множество A, ограниченное снизу. Множество B составим их всех чисел $-a$, $a \in A$. Если m – миноранта A, то $m \le a$ для любого $a \in A$. Но тогда $-m \ge -a$, так что $-m$ – мажоранта B и наоборот. По условию среди всех мажорант существует минимальная, $\sup B \le -m$. Но тогда $-\sup B$ – миноранта множества A, причем $-\sup B \ge m$ для всех минорант m. Это и означает, что $\inf A = -\sup B$.

Задача 27, стр. 48. Образ числа a – промежуток $[a; +\infty)$. Образ A есть объединение таких промежутков для всех $a \in A$. Если среди элементов множества A есть минимальный, то это объединение будет равно $[x; +\infty)$, где $x = \min A$. В противном случае оно будет иметь вид $(x; +\infty)$. Число x будет точной нижней гранью (инфимумом) множества A, $x = \inf A$. Определение этого понятия см. на стр. 42.

Задача 28, стр. 48. а) "Муж", "учитель", "брат", "подчиненный", "<".

б) И то и другое соотношение можно назвать "ребенок", а отличаются они областью изменения своих аргументов: "ребенок (женщины)" и "ребенок (мужчины)".

Задача 29, стр. 48. а) "число, большее возраста". Ответ "старше" будет неправильным, т.к. последнее соотношение связывает людей, а искомое – человека и число. б) $\le$. в) шурин (брат жены) и невестка (как жена брата; слово имеет и другие значения);
аналогично: деверь = брат мужа, золовка = сестра мужа, свояченица = сестра жены.

Задача 30, стр. 48. Пусть M – множество людей. Отношение «возраст» связывает множества M и R, отношение «>» – числа. Отношение «старше» связывает M с M. Нам нужно описать цепочку «человек – число (возраст) – большее число – другой человек». Она содержит три связи. Поэтому

$$\text{старше} = \text{возраст}^{-1} \circ > \circ\ \text{возраст}.$$

Задача 31, стр. 49. а) Все, кроме "брат" и "дед". б) Область аргументов – множество всех людей, а область значений – множество всех женщин. При этом множество значений E("мать") состоит только из женщин, имеющих детей.

Задача 32, стр. 50. $(M \cap v^{-1}([60; +\infty))) \cup (Ж \cap v^{-1}([55; +\infty)))$.

Задача 33, стр. 53. "Мама" $\circ$ "муж" = "свекровь"; "муж" $\circ$ "мама" = "отец либо отчим". Заметим, что в последнем случае отображение задается не одним понятием, а двумя, и, тем не менее, оно однозначно. Аналогичное явление наблюдается и для числовых отображений, так как одна и та же функция может задаваться разными формулами для разных значений аргументов (например, sign).

Задача 34, стр. 53. $f \circ f(x) = f(f(x)) = (x^2)^2 = x^4$;

$f \circ g(x) = f(g(x)) = (\sin x)^2 = \sin^2 x$;

$g \circ f(x) = g(f(x)) = \sin(x^2) = \sin x^2$;

$g \circ g(x) = g(g(x)) = \sin \sin x$.

Задача 35, стр. 54. Пусть W – множество зрителей, M – множество мест в зале, b – функция "зритель" $\to$ "место". Аншлаг – это состояние, когда все места заняты, $b(W) = M$, т.е. когда b – сюръекция.

Задача 36, стр. 54. а) при моногамии и полиандрии; б) при моногамии и полигамии; в) только при моногамии.

Литература

Юмористические цитаты взяты из книг

1. Ученые шутят/авт.-сост. С.Н.Федин, Б.С.Горобец, Ю.А.Золотов. – М.: Либроком, 2010.
2. Федин С.Н. Математики тоже шутят. – М.: Либроком, 2010.
3. Занаучный юмор / сост. С.Орлов. – М.: МФТИ, 2000.

Вопросы, о которых говорится в Дополнениях, обсуждаются также в статьях

4. Григорьева И.С. Такой простой знак равенства. // Математика в школе. – 2000, – № 10. – С. 53-54.
5. Григорьева И.С. Присмотрись к словам. //Математика в школе. 2001, – № 1. – С.38–40.
6. Григорьева И.С. Чем мама похожа на синус?. //Математика в школе. 2003, – № 1. – С. 77.
7. Григорьева И.С. Сложная простота. //Математика для школьников. 2008, – № 2. – С.52-60.
8. Григорьева И.С. Сложная простота отображений. //Математика для школьников. 2008, – № 3. – С.56-62.
9. Григорьева И.С. Пустота, наполненная смыслом. //Математика для школьников. 2009, – № 3. – С.51-64.