УДК 517.958

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ, ОПИСЫВАЮЩЕМ ОРИЕНТАЦИОННЫЕ ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ В СИСТЕМЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЧАСТИЦ

Бахтиева Л.У., Эскин Л.Д. (*КГУ, Казань, Россия*)

Термодинамика системы произвольных осесимметричных частиц описывается ориентационной функцией распределения (ОФР) ***f(n)*** (***n*** – орт оси частицы), удовлетворяющей интегральному уравнению [1,2]

$$\nu + \ln f(n') + \lambda \int K(n,n') f(n) dn = 0, \qquad (1)$$

где ядро K непрерывно и удовлетворяет условиям симметрии (g – оператор поворота)

$$K(gn, gn') = K(n,n') = K(n',n) = K(-n,n'),$$

конкретный вид ядра K определяется геометрией частиц и выбором модели парного потенциала и парной корреляционной функции. Параметр λ – монотонная функция концентрации η частиц. Параметр ν определяется условием нормировки $\int f(n) dn = 1$ для ОФР. Для изотропной фазы $f(n) = 1$, для анизотропной $f(n) \neq 1$. Частными случаями уравнения (1) являются уравнение Онзагера [3,4], описывающее ориентационные фазовые переходы в системе сильно вытянутых стержней со стерическим взаимодействием ($K = \sqrt{1 - nn'^2}$, nn' - скалярное произведение ортов, $\lambda = 8\eta / \pi\delta$, $\delta = d / l << 1$, l -длина, d - диаметр частицы) и модель Парсонса [1] для системы частиц, имеющих форму эллипсоида вращения с полуосями $b > a$ ($K = \sqrt{1 - (\chi nn')^2}$, $\lambda = 8J(\eta) / \sqrt{1 - \chi^2}$, $J(\eta) = (4\eta - 3\eta^2) / 4(1-\eta)^2$, $\chi = (b^2 - a^2)/(b^2 + a^2)$. Среди возможных анизотропных фазовых состояний системы осесимметричных частиц наибольший физический интерес представляет нематическая фаза, ОФР которой удовлетворяет условиям: a) ***f(n)*** не зависит от сферической координаты φ орта ***n*** (*f(n)= f(θ)*); b) *f(θ)= f(π-θ)*; c) *f(0)= f(π)=max*, других максимумов f не имеет. Условие c) означает, что нематик обладает единственным направлением преимущественной ориентации осей частиц.

В работах авторов [2,4,5,6] для изучения ОФР нематической фазы системы осесимметричных частиц систематически используются методы теории ветвления решений нелинейных уравнений (теории Ляпунова-Шмидта [7]), на основе которой определены точки бифуркации $\lambda = \lambda_k$ и исследована структура разложений по степеням $(\lambda - \lambda_k)$ решений *f(n)* интегрального уравнения (1), описывающих нематик в окрестности точки бифуркации с одномерным или двумерным ветвлением. Показано, что в обоих случаях в точке бифуркации $\lambda = \lambda_1$ (наименьшее бифуркационное значение параметра λ) от изотропной ветви ответвляется влево единственная анизотропная нематическая ветвь. Исследованы условия устойчивости изотропной («жидкой») и анизотропной нематической фазы.

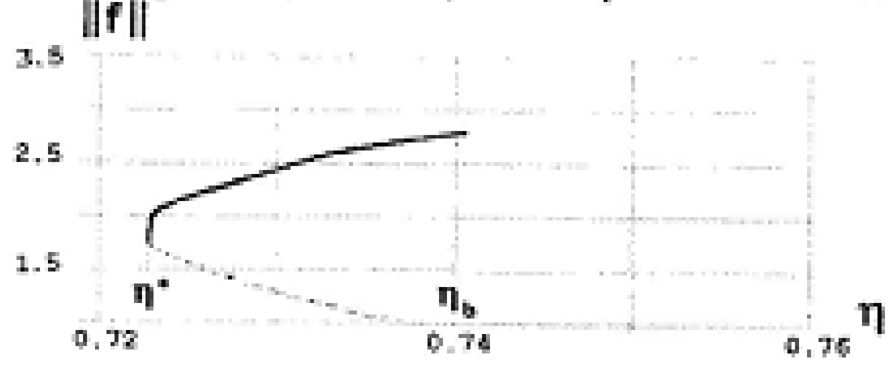

Рис.1

В случае модели Парсонса (для этой модели все точки бифуркации обладают одномерным ветвлением) построены уравнения состояния нематика и изотропной фазы, вычислены концентрации сосуществующих в равновесии изотропной и нематической фаз, вычислено давление как функция обратной концентрации в окрестности точки бифуркации (как в случае одномерного, так и в случае двумерного ветвления). На основе полученных результатов авторами развиты численные алгоритмы, позволяющие построить глобальную ОФР. Некоторые результаты численных экспериментов, основанных на этих алгоритмах, приводятся на рисунках (рис.1 - зависимость нормы $\| f \| = \sqrt{\int f^2(n)dn}$ от концентрации η при $\chi = 0.7$, можно заметить, что между значениями $\eta_b = 0.74$ (бифуркационное значение концентрации) и $\eta^* = 0.723$ (точка возврата) существует две анизотропные ветви решений (решение с большей нормой – сплошная линия и решение с малой нормой – пунктирная линия); рис.2 - давление P как функция обратной концентрации $1/\eta$ при $\chi = 0.7$, толстая сплошная линия соответствует давлению в изотропной фазе, тонкая сплошная линия – давлению в анизотропной фазе с большей нормой, пунктирная линия – давлению в анизотропной фазе с малой нормой).

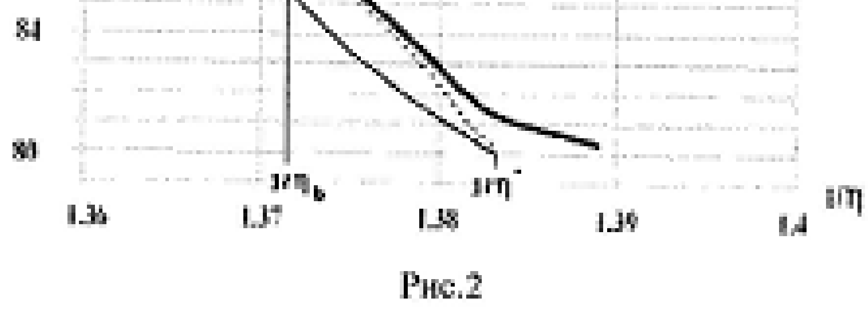

Рис.2

Библиография

1. Parsons J.D. Nematic ordering in a system of rods //Phys.Rev.A.,1979,V.19, N3, p.1225-1230.
2. Эскин Л.Д. О модели Парсонса в случае точки бифуркации с двумерным ветвлением // Изв. вузов. Математика, 2006, №3, с.62-74.
3. Kayser R.F., Raveche H.J. Bifurcation in Onsager's model of the isotropic-nematic transition // Phys.Rev.A., 1978,V.17, №6, p.2067-2072.
4. Эскин Л.Д. Уравнение Онзагера как уравнение Ляпунова-Шмидта // Изв. вузов. Математика, 1998, №8, с.71-78.
5. Эскин Л.Д., Бахтиева Л.У. О модели Парсонса оринтационного фазового перехода в системе эллипсоидальных частиц // Матем. моделирование, 2000, т.12, №10, с.3-18.
6. Эскин Л.Д. Об интегральном уравнении, описывающем ориентационные фазовые переходы в модели Парсонса // Изв. вузов. Математика, 1999, №10, с.63-72.
7. Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений // М., Наука, 1969, 527 с.

УДК 517.958

ЗАДАЧА О РАСПАДЕ РАЗРЫВА В ДИНАМИКЕ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ, ДВИЖУЩЕЙСЯ С МАЛЫМ ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЕМ ПО ГОРИЗОНТАЛЬНОМУ ЛОЖУ

Косолапов В.Н., Эскин Л.Д. *(КГУ, Казань, Россия)*

Динамика пленочных течений нелинейно-вязкой жидкости со степенным реологическим законом в одномерном приближении описывается уравнением [1, 2]:

$$\frac{\partial \ell}{\partial t}=\frac{\partial q^{(x)}}{\partial x},\ t>0,\ -\infty<x<\infty, \tag{1}$$

где ℓ - толщина пленки, $q^{(x)}$ - поток жидкости

$$q^{(x)}=sign\frac{\partial \ell}{\partial x}\left(\frac{\ell^{n+2}}{n+2}\left|\frac{\partial \ell}{\partial x}\right|^{n}+\varepsilon \ell^{m+1}\left|\frac{\partial \ell}{\partial x}\right|^{m}\right),\ n>m>1, \tag{2}$$

t - время, значение параметра n определяется реологическим законом, а параметров ε и m -законом проскальзывания пленки относительно ложа. В приложениях обычно $\varepsilon<<1$ (для ледников $\varepsilon\approx 0{,}15$).

Задачей о распаде разрыва для уравнения (1) называется задача построения его монотонно невозрастающего решения, удовлетворяющего условию непрерывности потока $q^{(x)}$ на всей оси x и начальному условию [3]:

$$t=0:\ \ell(x,t)=\ell_0(x);\quad \ell_0(x)=1\ (x<0),\quad \ell_0(x)=0\ (x>0). \tag{3}$$