

УДК 5530.12+531.51+517.944+519.713+514.774

*Ю. Г. Игнатьев,¹ А. А. Агафонов²***КАЧЕСТВЕННЫЙ И ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ, ОСНОВАННОЙ НА ФАНТОМНОМ СКАЛЯРНОМ ПОЛЕ С САМОДЕЙСТВИЕМ. II. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МОДЕЛЕЙ С КЛАССИЧЕСКИМ И ФАНТОМНЫМ ПОЛЯМИ³**

На основе качественного анализа и численного моделирования космологических моделей с классическими и фантомными скалярными полями с самодействием выявлены и уточнены их отличительные особенности, а также потенциальные возможности их использования в качестве базовых моделей в космологии.

Ключевые слова: космологические модели, классическое и фантомное скалярное поле, качественный анализ, асимптотическое поведение, численное моделирование, численная гравитация.

PACS: 04.20.Cv, 98.80.Cq, 96.50.S, 52.27.Ny

Введение

С формальной точки зрения фантомные поля были введены в гравитацию в качестве одной из возможных моделей скалярного поля в 1983 году в работе одного из Авторов [1]. В указанной работе, а также и в более поздних (см., например, [2], [3]) фантомные поля классифицировались как скалярные поля с притяжением одноименно заряженных частиц и выделялись множителем $\epsilon = -1$ в тензоре энергии - импульса скалярного поля⁴. В последующих работах, начиная с 2012 года, неминимальная теория скалярного взаимодействия на основе понятия фундаментального скалярного заряда последовательно развивалась, как для классических, так и фантомных скалярных полей [6], [7], [8], [9]. В частности, в этих работах были выявлены некоторые особенности фантомных полей, в частности, особенности межчастичного взаимодействия. С 2014 [10], [11], [11], [12], [13], [14] эти исследования были углублены для распространения теории скалярных, в том числе, и фантомных полей на сектор отрицательных масс частиц, вырожденные Ферми-системы, конформно-инвариантные взаимодействия и тому подобное. С 2015 года сконструированные математические модели скалярных полей были применены к исследованию космологической эволюции систем взаимодействующих частиц и скалярных полей, как классического, так и фантомного типов [15], [16], [17]. Эти исследования выявили уникальные особенности космологической эволюции плазмы с межчастичным фантомным скалярным взаимодействием, такие как существование гигантских всплесков космологического ускорения, наличие плато с постоянным ускорением и тому подобное.

Однако, построенные численные модели не могут полностью удовлетворить физика - теоретика, так как не дают возможности аналитического описания этих явлений и выявления природы обнаруженных особенностей. В связи с этим возникает необходимость качественного исследования космологических моделей, основанных на скалярном взаимодействии. В качестве первого шага необходимо провести качественное исследование космологических моделей, основанных на свободных скалярных полях. Такие исследования для классического скалярного массивного поля проводились с 1985 года [18], [19], [22], [20], [24] (см. также [21]). В работе Журавлева [20] методами качественной теории динамических систем исследовалась также двухкомпонентная космологическая модель с минимальным взаимодействием. В статье одного из Авторов [25] была показана некорректность так называемого приближения «медленного скатывания» и заново проведен качественный, а также и численный анализ космологической стандартной космологической модели, основанной на классическом скалярном поле, сведением задачи к исследованию динамической системы на плоскости. При этом был показан микроскопический

¹E-mail: ignatev_yu@rambler.ru

²E-mail: a.a.agathonov@gmail.com

³This work was founded by the subsidy allocated to Kazan Federal University for the state assignment in the sphere of scientific activities.

⁴Заметим, что фантомные поля применительно к кротовым норам и так называемым черным вселенным рассматривались в работах [4], [5].

колебательный характер инвариантного космологического ускорения на поздних стадиях расширения. Далее результаты были обобщены на космологические модели с Λ - членом [26], [29], причем удалось подтвердить сохранение колебательного характера инвариантного космологического ускорения при достаточно малых значениях величины космологического члена. В работе В.М. Журавлева [28] был использован метод исследования, предложенный в указанных работах, и применен к двухкомпонентной системе «скалярное поле+жидкость» с произвольной потенциальной функцией $V(\phi)$ ⁵. К некоторым результатам этой работы мы еще вернемся ниже.

Далее, в работах [30], [31] и [32] был частично проведен качественный анализ космологической модели, основанной на фантомном скалярном поле с самодействием. В настоящей работе мы разовьем и детализируем результаты исследований космологических моделей, основанных на классическом и фантомном скалярных полях.

1. Основные соотношения космологической модели со скалярным полем

1.1. Уравнения свободного скалярного поля с самодействием

В цитированных работах [30], [31] Функция Лагранжа скалярного поля с массой m и самодействием записывалась в форме (см., например, [8]):

$$L = \frac{\epsilon_1}{8\pi} \left(g^{ik} \Phi_{,i} \Phi_{,k} - \epsilon_2 m^2 \Phi^2 + \frac{\alpha}{2} \Phi^4 \right), \quad (1.1)$$

где α - константа самодействия; для поля с отталкиванием одноименно заряженных частиц $\epsilon_1 = 1$, для поля с притяжением одноименно заряженных частиц $\epsilon_1 = -1$; для классического скалярного поля $\epsilon_2 = 1$, для фантомного скалярного поля $\epsilon_2 = -1$. Заметим, что *одиночное* классическое скалярное поле с притяжением одноименно заряженных частиц существовать не может, так его энергия строго отрицательна. Тензор энергии - импульса относительно функции Лагранжа (1.1) равен

$$T^{ik} = \frac{\epsilon_1}{8\pi} \left(2\Phi^{,i} \Phi^{,k} - g^{ik} \Phi_{,j} \Phi^{,j} + g^{ik} \epsilon_2 m^2 \Phi^2 - g^{ik} \frac{\alpha}{2} \Phi^4 \right). \quad (1.2)$$

Для приведения к обозначениям, стандартным для космологических моделей со скалярными полями, перепишем функцию Лагранжа (1.1) в другой нормировке, учитывая тот факт, что к функции Лагранжа можно добавить произвольную константу:

$$L = \frac{\epsilon_1}{8\pi} \left(g^{ik} \phi_{,i} \phi_{,k} - 2V(\Phi) \right), \quad (1.3)$$

где

$$V(\Phi) = -\frac{1}{4} (\alpha \Phi^4 - 2\epsilon_2 m^2 \Phi^2) \Rightarrow -\frac{\alpha}{4} \left(\Phi^2 - \epsilon_2 \frac{m^2}{\alpha} \right)^2. \quad (1.4)$$

Очевидно, что в уравнениях Эйнштейна такая перенормировка потенциала будет эквивалентна перенормировке космологической постоянной

$$\Lambda = \Lambda_0 - \epsilon_1 \frac{m^4}{2\alpha}; \quad (\alpha \neq 0), \quad (1.5)$$

где Λ_0 - некоторое «затравочное» значение космологической постоянной. Таким образом, в терминах Лагранжиана (1.3), потенциальной энергии (1.4) рассматриваемая потенциальная функция в работах [30], [31] эквивалентна Хиггсовому потенциалу (1.4). В терминах этих величин модель полностью определяется знаками ϵ_1 , ϵ_2 и α .

Тензор энергии-импульса скалярного поля в терминах этих величин принимает стандартный вид:

$$T_{ik} = \frac{\epsilon_1}{8\pi} \left(2\Phi_{,i} \Phi_{,k} - g_{ik} \Phi_{,j} \Phi^{,j} + 2V(\Phi) g_{ik} \right). \quad (1.6)$$

⁵В частности, для Хиггсовского потенциала.

Равенство нулю ковариантной дивергенции этого тензора приводит к уравнению свободного скалярного поля:

$$\square\Phi + V'(\Phi) = 0. \quad (1.7)$$

В частности, при использовании функции потенциальной энергии в форме (1.4) получим из (1.7):

$$\square\Phi + m_*^2\Phi = 0, \quad (1.8)$$

где m_* - эффективная масса скалярного бозона

$$m_*^2 \equiv \epsilon_2 m^2 - \alpha\Phi^2, \quad (1.9)$$

которая может быть и мнимой величиной.

Выпишем также уравнения Эйнштейна с космологическим членом $\Lambda > 0$ ⁶

$$R^{ik} - \frac{1}{2}Rg^{ik} = \Lambda g^{ik} + 8\pi T^{ik}, \quad (1.10)$$

где необходимо учитывать связь между «затравочным» значением космологической постоянной и ее эффективным значением (1.5).

1.2. Самосогласованные уравнения для пространственно - плоской модели Фридмана

Выпишем самосогласованные уравнения пространственно - плоской космологической модели

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (1.11)$$

- уравнение Эйнштейна

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \epsilon_1 \left(\dot{\Phi}^2 + \epsilon_2 m^2 \Phi^2 - \frac{\alpha}{2} \Phi^4 \right) + \Lambda \quad (1.12)$$

и уравнение массивного скалярного поля с кубической нелинейностью⁷:

$$\ddot{\Phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Phi} + \epsilon_2 m_*^2 \Phi = 0. \quad (1.13)$$

При этом тензор энергии - импульса (1.2) имеет структуру тензора энергии - импульса изотропной жидкости с плотностью энергии и давлением:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{\epsilon_1}{8\pi} \left(\dot{\Phi}^2 + \epsilon_2 m^2 \Phi^2 - \frac{\alpha}{2} \Phi^4 \right); \\ p &= \frac{\epsilon_1}{8\pi} \left(\dot{\Phi}^2 - \epsilon_2 m^2 \Phi^2 + \frac{\alpha}{2} \Phi^4 \right), \end{aligned} \quad (1.14)$$

так что:

$$\epsilon + p = \frac{\epsilon_1 \dot{\Phi}^2}{4\pi}.$$

1.3. Кинематические инварианты

В дальнейшем нам также понадобятся значения двух кинематических инвариантов Вселенной Фридмана:

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a} \geq 0; \quad \Omega(t) = \frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} \equiv 1 + \frac{\dot{H}}{H^2} \quad (1.15)$$

- постоянная Хаббла и инвариантное космологическое ускорение.

⁶Мы используем планковскую систему единиц: $G = c = \hbar = 1$.

⁷Здесь и в дальнейшем $\dot{f} \equiv df/dt$.

2. Качественный анализ

2.1. Приведение системы уравнений к нормальному виду

Пользуясь тем, что постоянную Хаббла можно выразить из уравнения Эйнштейна (1.12) через функции Φ , $\dot{\Phi}$, переходя к безразмерному комптоновскому времени:

$$mt = \tau; \quad (m \neq 0)$$

и проводя стандартную замену переменных $\Phi' = Z(t)$, приведем уравнение поля (1.13) к виду нормальной автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений на плоскости $\{\Phi, Z\}$:

$$\begin{aligned} \Phi' &= Z; \\ Z' &= -\sqrt{3}\sqrt{\epsilon_1 \left(Z^2 + \epsilon_2 \Phi^2 - \frac{\alpha_m}{2} \Phi^4 \right) + \Lambda_m Z - \epsilon_2 \Phi + \alpha_m \Phi^3}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $f' \equiv df/d\tau$ и введены обозначения:

$$\Lambda_m \equiv \frac{\Lambda}{m^2}; \quad \alpha_m \equiv \frac{\alpha}{m^2}.$$

При этом:

$$H = m \frac{a'}{a} \equiv mh; \quad \Omega = \frac{aa''}{a'^2} \equiv 1 + \frac{h'}{h^2}. \quad (2.2)$$

Таким образом, имеем автономную двумерную динамическую систему на фазовой плоскости $\{\Phi, Z\}$. Для приведения её к стандартным обозначениям качественной теории дифференциальных уравнений (см., например, [15]) положим:

$$\begin{aligned} \Phi &= x; \quad Z = y; \\ P(x, y) &= y; \\ Q(x, y) &= -\sqrt{3}\sqrt{\epsilon_1 \left(y^2 + \epsilon_2 x^2 - \frac{\alpha_m}{2} x^4 \right) + \Lambda_m y - \epsilon_2 x + \alpha_m x^3}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Соответствующая нормальная система уравнений в стандартных обозначениях имеет вид:

$$x' = P(x, y); \quad y' = Q(x, y). \quad (2.4)$$

Для того, чтобы система дифференциальных уравнений (2.1) (или (14)) имела вещественное решение, необходимо выполнение неравенства:

$$\epsilon_1 \left(y^2 + \epsilon_2 x^2 - \frac{\alpha_m}{2} x^4 \right) + \Lambda_m \geq 0. \quad (2.5)$$

2.2. Особые точки динамической системы

Особые точки динамической системы определяются уравнениями (см., например, [15]):

$$M: \quad P(x, y) = 0; \quad Q(x, y) = 0. \quad (2.6)$$

Очевидно, что при любых значениях α_m и $\Lambda_m \geq 0$ система алгебраических уравнений (2.5), как и в работах [13]-[14] имеет одно тривиальное решение

$$x = 0; \quad y = 0 \Rightarrow M_0(0, 0). \quad (2.7)$$

Кроме того, в случае одноименных знаков ϵ_2 и α_m , возможны и нетривиальные симметричные решения:

$$x = x_{\pm} = \pm \frac{1}{\sqrt{\epsilon_2 \alpha_m}}; \quad y = 0 \Rightarrow M_{\pm}(x_{\pm}, 0). \quad (2.8)$$

Подставляя решения (2.8) в условие (2.5), получим необходимое условие вещественности решений в особых точках (2.7) и (2.8):

$$(17) \rightarrow \Lambda_m \geq 0; \quad (18) \rightarrow \Lambda_m + \frac{\epsilon_1}{2\alpha_m} \geq 0. \quad (2.9)$$

2.3. Характеристическое уравнение и качественный анализ в случае вблизи нулевой особой точки

Вычислим производные функций (2.3) в нулевой особой точке (2.6) при $\Lambda_m \geq 0$:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{M_0} &= 0; & \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{M_0} &= 1; \\ \left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_{M_0} &= -\epsilon_2; & \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{M_0} &= -\sqrt{3\Lambda_m}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Таким образом, получаем характеристическое уравнение и его корни (см. [15]):

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\epsilon_2 & -\lambda - \sqrt{3\Lambda_m} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_{\pm} = -\frac{\sqrt{3\Lambda_m}}{2} \pm \frac{\sqrt{3\Lambda_m - 4\epsilon_2}}{2}. \quad (2.11)$$

2.4. Численное интегрирование модели без космологической постоянной ($\Lambda = 0$) с классическим скалярным полем ($\epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = 1$) без самодействия ($\alpha = 0$)

В этом случае корни характеристического уравнения (2.9) принимают значения:

$$\lambda = \pm i. \quad (2.12)$$

Поскольку собственные числа оказались чисто мнимыми, то единственная особая точка (2.7) динамической системы является центром (см. [26]). В этом случае при $\tau \rightarrow +\infty$ фазовая траектория динамической системы наматывается на этот центр, совершая бесконечное множество витков.

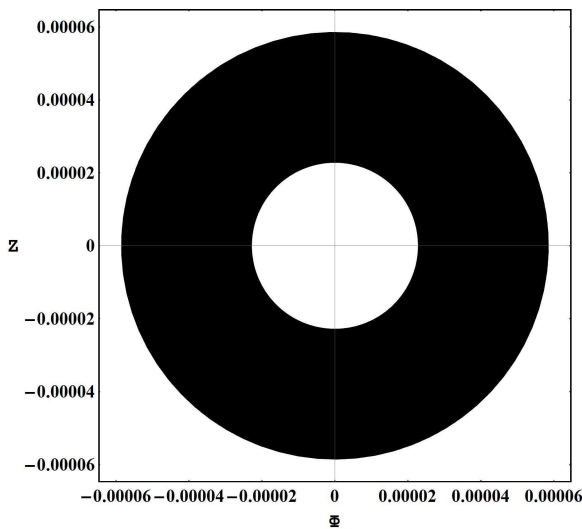


Рис. 1. Фазовый портрет системы (2.1) в крупном масштабе для случая $\alpha_m = 0; \Lambda_m = 0$; $\Phi(0) = 100; Z(0) = 0; \tau = 20000 \div 50000$.

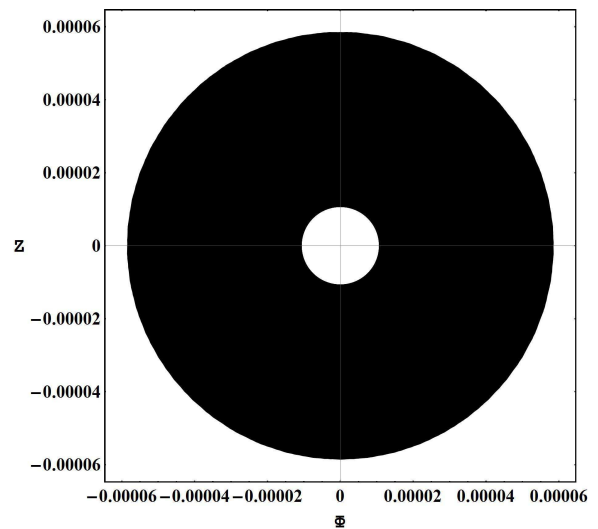


Рис. 2. Тот же случай $\tau = 20000 \div 105000$.

2.5. Численное интегрирование модели с космологической постоянной ($\Lambda > 0$) с классическим скалярным полем ($\epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = 1$) без самодействия ($\alpha_m = 0$)

В этом случае корни характеристического уравнения (2.9) принимают значения:

$$\lambda_{\pm} = -\frac{\sqrt{3\Lambda_m}}{2} \pm \frac{\sqrt{3\Lambda_m - 4}}{2}. \quad (2.13)$$

Возможны случаи [31]:

- 1) $\Lambda_m < 4/3$ — собственные значения комплексно сопряженные с отрицательными действительными частями — притягивающий фокус.
- 2) $\Lambda_m > 4/3$ — собственные значения действительные разные отрицательные — устойчивый узел.

Можно показать, что характер особой точки не меняется при учете второго порядка теории возмущений, так как все вторые частные производные динамической системы в центральной точке равны нулю:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \Big|_{M_0} = \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} \Big|_{M_0} = \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \Big|_{M_0} = \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \Big|_{M_0} = \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} \Big|_{M_0} = \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} \Big|_{M_0} = 0. \quad (2.14)$$

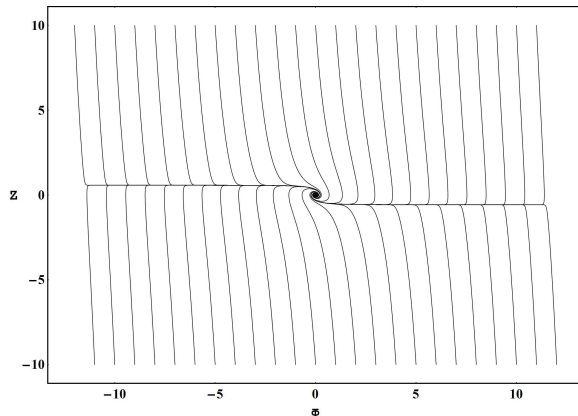


Рис. 3. Фазовый портрет системы (2.1) в крупном масштабе для случая $\alpha_m = 0$; $\Lambda_m = 0.0001$; $\tau = 0 \div 90$.

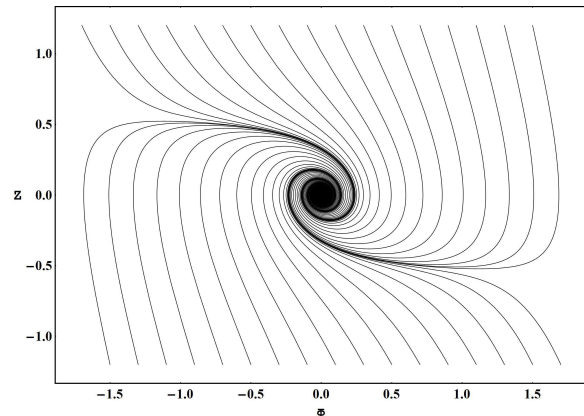


Рис. 4. Тот же случай, окрестности особой точки.

2.6. Численное интегрирование модели с космологической постоянной ($\Lambda > 0$) с фантомным скалярным полем ($\epsilon_1 = -1, \epsilon_2 = -1$) без самодействия ($\alpha_m = 0$)

В этом случае корни характеристического уравнения (2.9) принимают значения:

$$\lambda_{\pm} = -\frac{\sqrt{3\Lambda_m}}{2} \pm \frac{\sqrt{3\Lambda_m + 4}}{2}. \quad (2.15)$$

При любых Λ_m корни характеристического уравнения действительные разных знаков — особая точка седло.

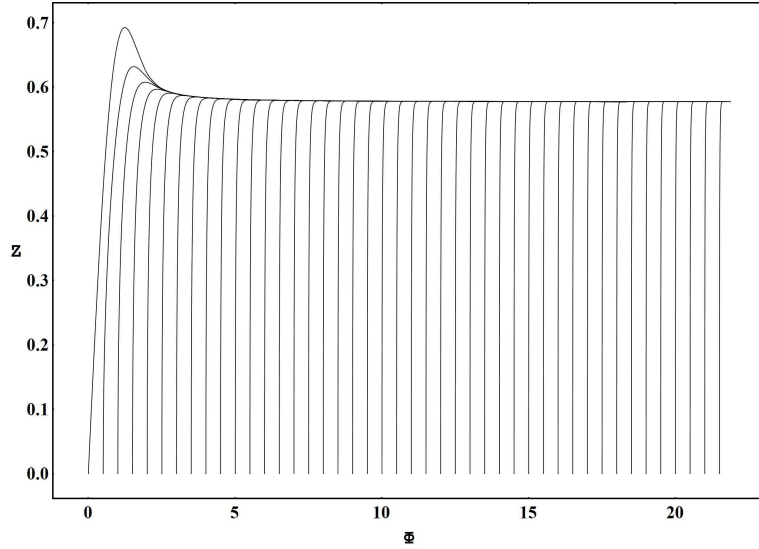


Рис. 5. Фазовый портрет системы (2.1) для случая $\alpha_m = 0$; $\Lambda_m = 0.0001$; $\tau = 0 \div 30$.

2.7. Численное интегрирование модели с космологической постоянной ($\Lambda > 0$) с фантомным скалярным полем ($\epsilon_1 = -1$, $\epsilon_2 = -1$) с самодействием ($\alpha_m < 0$)

В этом случае корни для центральной точки вновь имеем седло:

$$\lambda_{\pm} = -\frac{\sqrt{3\Lambda_m}}{2} \pm \frac{\sqrt{3\Lambda_m + 4}}{2}.$$

Производные функций (2.3) в особых точках (2.8) при $\Lambda_m > 0$ равны:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{M_{\pm}} &= 0; & \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{M_{\pm}} &= 1; \\ \left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_{M_{\pm}} &= -2; & \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{M_{\pm}} &= -\sqrt{3} \sqrt{\Lambda_m - \frac{1}{2\alpha_m}}. \end{aligned}$$

Характеристические уравнения для обеих особых точек совпадают и собственные точки имеют один тип (см. [15]):

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda - \sqrt{3} \sqrt{\Lambda_m - \frac{1}{2\alpha_m}} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_{\pm} = -\frac{\sqrt{3} \sqrt{\Lambda_m - \frac{1}{2\alpha_m}}}{2} \pm \frac{\sqrt{3} \sqrt{\Lambda_m - \frac{1}{2\alpha_m} - \frac{8}{3}}}{2}. \quad (2.16)$$

Вследствие (2.9) подкоренное выражение в первом члене (2.16) строго больше нуля, поэтому возможны три случая:

- 1) $\Lambda_m - 1/2\alpha_m - 8/3 > 0$ - тогда оба собственных значения вещественны и отрицательны. В этом случае решение содержит *два симметричных притягивающих (устойчивых) невырожденных узла*. Все фазовые траектории в окрестности таких особых точек при $t \rightarrow \infty$ входят в эти точки и кроме двух исключительных касаются собственного вектора минимальной длины.
- 2) $\Lambda_m - 1/2\alpha_m - 8/3 = 0$ - тогда оба собственных значения отрицательны и равны. В этом случае решение содержит *два симметричных вырожденных узла*.
- 3) $\Lambda_m - 1/2\alpha_m - 8/3 < 0$ - тогда оба собственных значения комплексно сопряженные, причем их действительные части отрицательны. В этом случае решение содержит *два симметричных притягивающих фокуса*.

В случае двух симметричных фокусов легко найти предельное значение h_{∞} , к которому стремится постоянная Хаббла при $t \rightarrow \infty$. Подставив координаты фокусов $M_{\pm}(\pm \frac{1}{\sqrt{-\alpha}}, 0)$ в систему

(2.1), получим:

$$h_\infty = \sqrt{\frac{1}{3} \left(\Lambda_m - \frac{1}{2\alpha_m} \right)}. \quad (2.17)$$

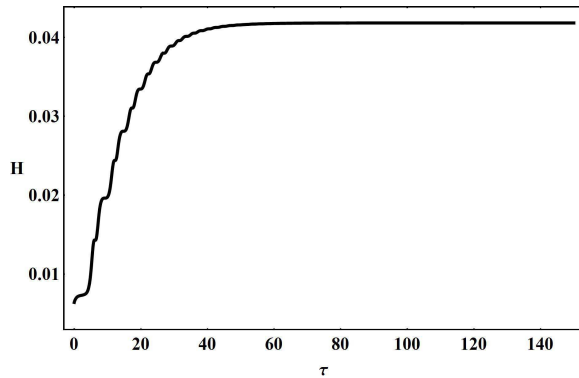


Рис. 6. Эволюция приведенного постоянной Хаббла для случая $\alpha_m = -100$; $\Lambda_m = 0.00001$; $\Phi(0) = 0.4$; $Z(0) = -0.4$; $\tau = 0 \div 150$.

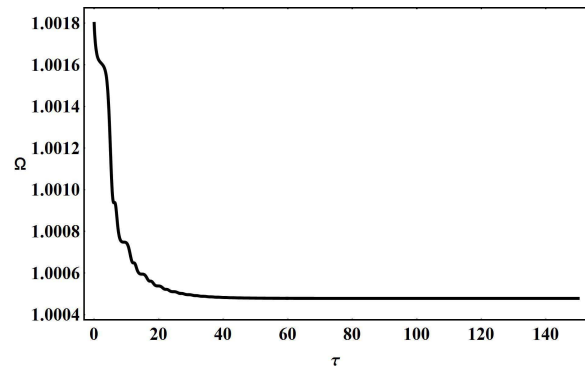


Рис. 7. Эволюция космологического ускорения для того же случая.

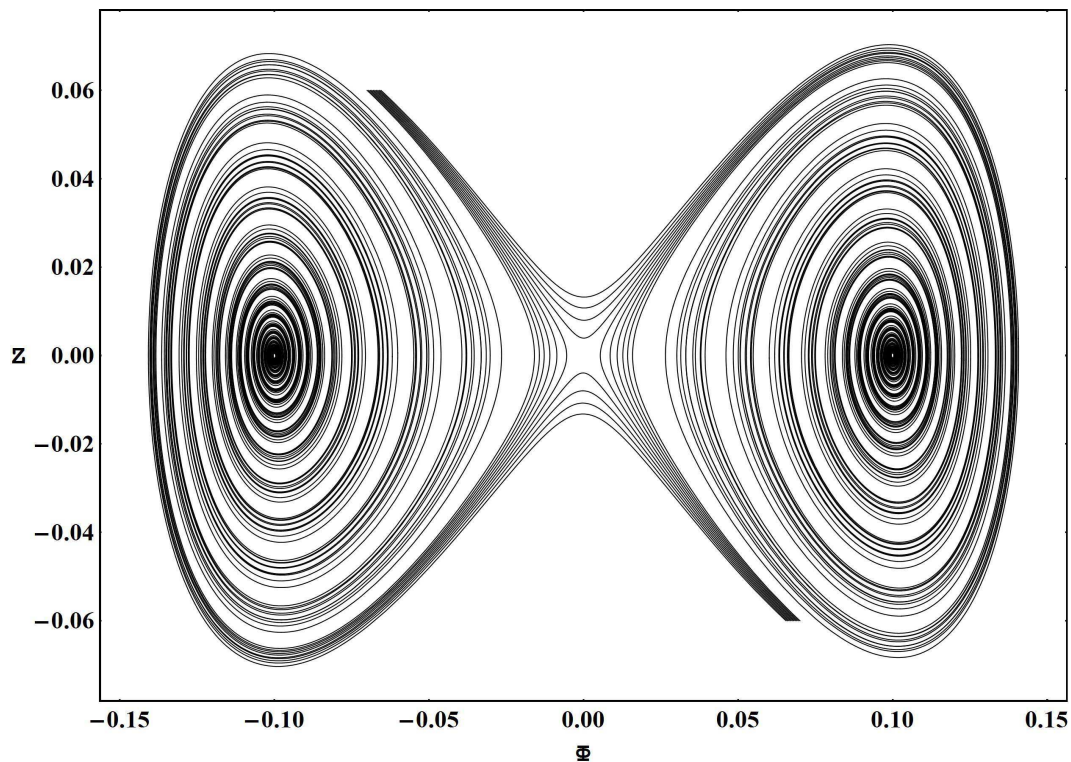


Рис. 8. Фазовый портрет системы (2.1) в крупном масштабе для случая $\alpha_m = -100$; $\Lambda_m = 0.00001$; $\{\Phi(0) = -0.07 + (j - 1) * .0005, j = 1..10; Z_0 = 0.06\}$, $\{\Phi(0) = 0.07 + (j - 1) * .0005, j = 1..10; Z_0 = -0.06\}$; $\tau = 0 \div 90$.

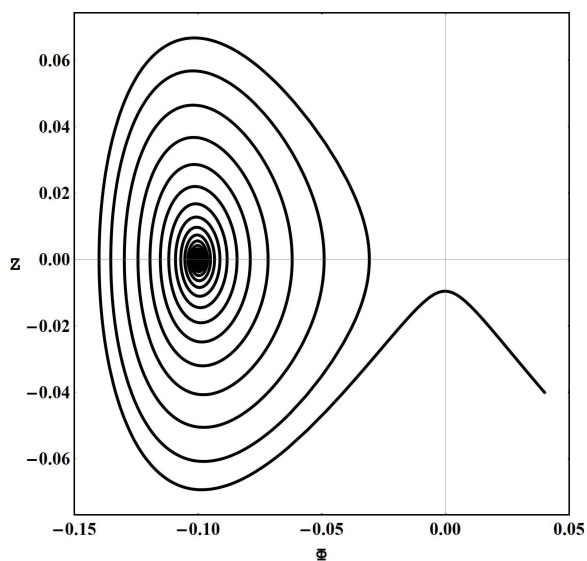


Рис. 9. Фазовый портрет системы для того же случая, оси Φ , Z .

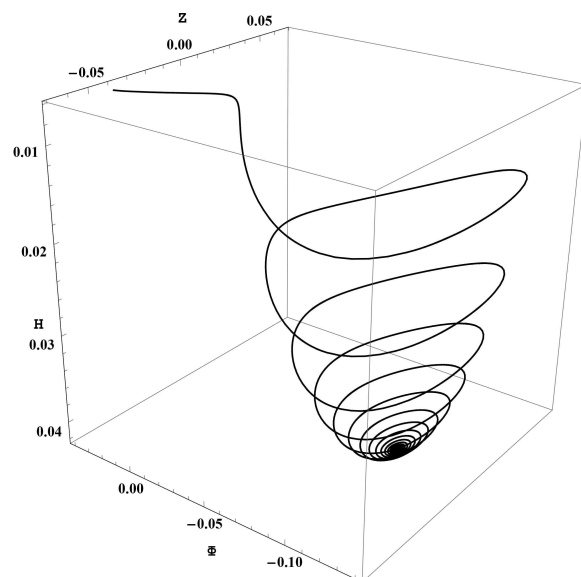


Рис. 10. Фазовый портрет системы для того же случая, оси Φ , Z , h .

На рисунках 11 - 16 приведены результаты численного моделирования эволюции решения системы в зависимости от космологической постоянной: $\epsilon_1 = -1$, $\epsilon_2 = -1$, $\alpha_m = -1$, $\Lambda_m = \{0, 0.01, 0.1\}$, $Z(0) = 0$, $\Phi(0) = 0.1$, $\tau = 0 \div 50$.

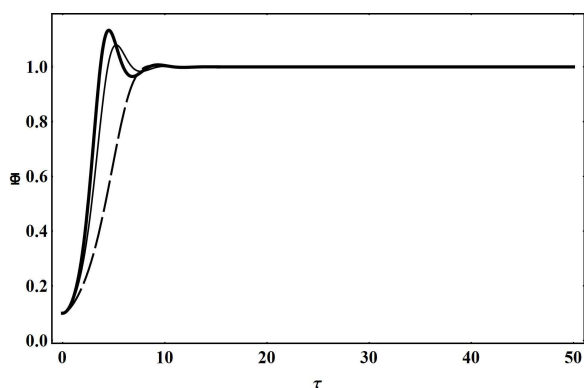


Рис. 11. Эволюция потенциала скалярного поля Φ для случая $\alpha_m = -1$; $Z(0) = 0$; $\tau = 0 \div 50$; $\Lambda_m = 0$ - жирная линия, $\Lambda_m = 0.01$ - тонкая линия, $\Lambda_m = 0.1$ - пунктирная линия.

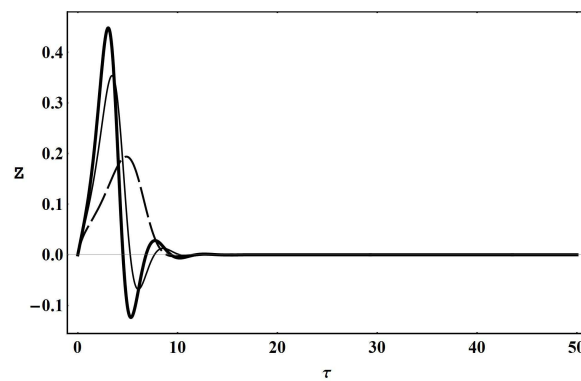


Рис. 12. Эволюция производной потенциала скалярного поля $Z = \dot{\Phi}$.

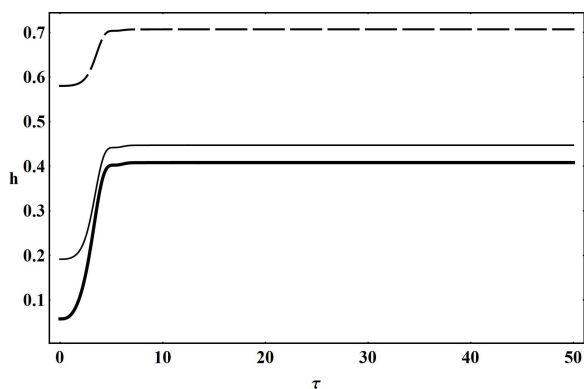


Рис. 13. Эволюция постоянной Хаббла.

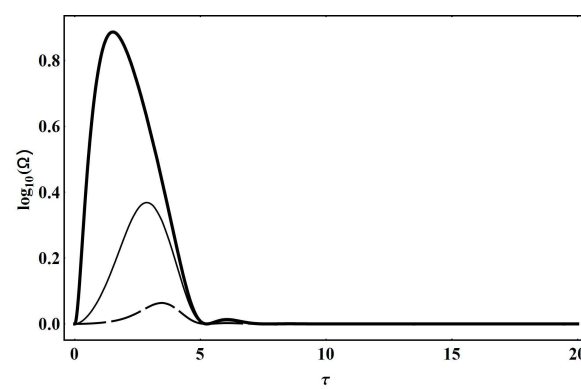


Рис. 14. Эволюция логарифма космологического ускорения.

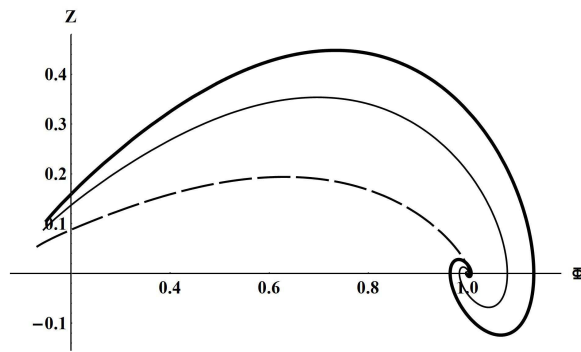


Рис. 15. Фазовый портрет системы.

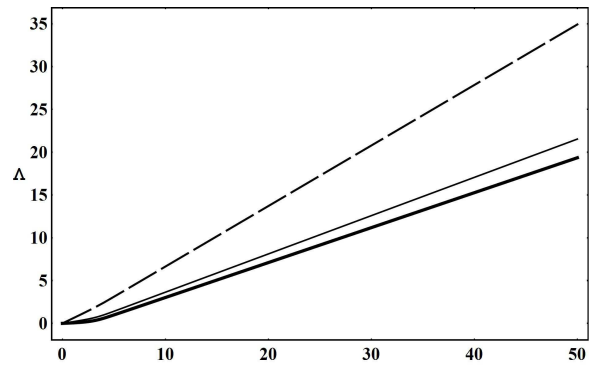


Рис. 16. Эволюция функции масштабного фактора $\Lambda = \ln a$.

2.8. Численное интегрирование модели без космологической постоянной ($\Lambda = 0$) с фантомным скалярным полем ($\epsilon_1 = -1, \epsilon_2 = -1$) с самодействием ($\alpha_m < 0$)

На рисунках 17 - 20 приведены результаты численного моделирования системы для случая: $\epsilon_1 = -1, \epsilon_2 = -1, \alpha_m = -10, \Lambda_m = 0, Z(0) = -0.4, \Phi(0) = \{0.1, 0.05, 0.01\}, \tau = 0 \div 50$.

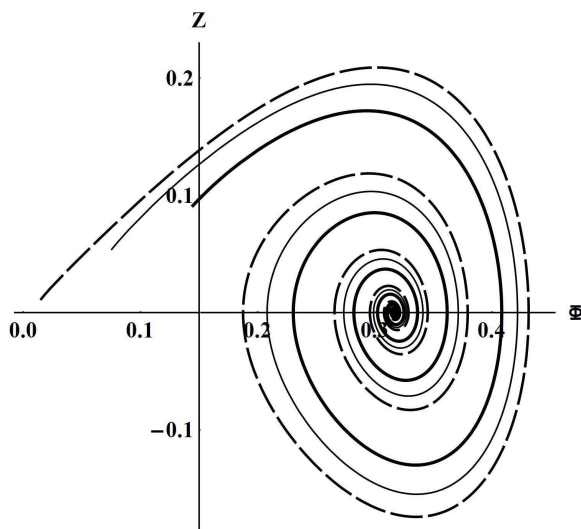


Рис. 17. Фазовый портрет системы для случая $\alpha_m = -10; \Lambda_m = 0; Z(0) = -0.4; \tau = 0 \div 50; \Phi(0) = 0.1$ - жирная линия, $\Phi(0) = 0.05$ - тонкая линия, $\Phi(0) = 0.01$ - пунктирная линия.

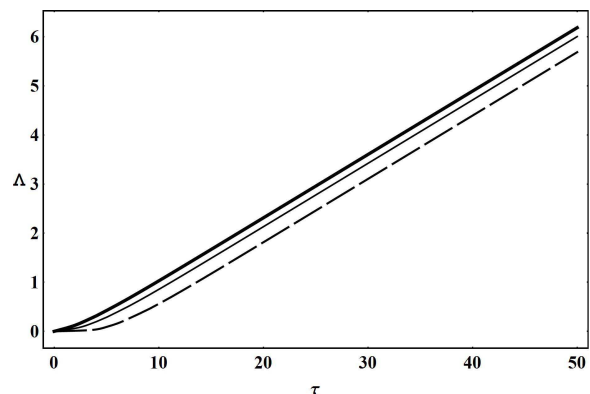


Рис. 18. Эволюция функции масштабного фактора $\Lambda = \ln a$.

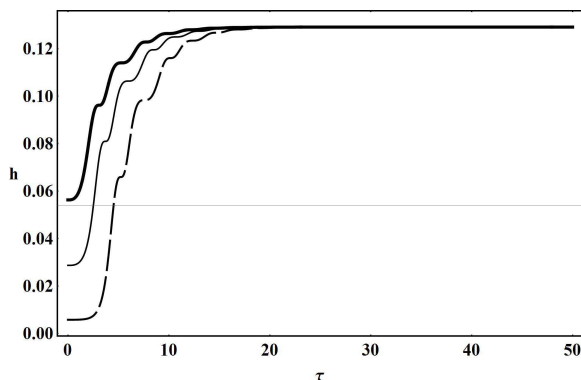


Рис. 19. Эволюция постоянной Хаббла.

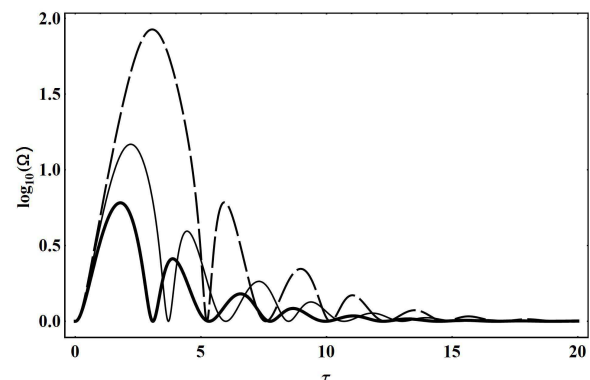


Рис. 20. Эволюция логарифма космологического ускорения.

На рисунках 21 - 25 приведены результаты численного моделирования эволюции системы в зависимости от константы самодействия: $\epsilon_1 = -1$, $\epsilon_2 = -1$, $\alpha_m = \{-1, -10, -50\}$, $\Lambda_m = 0$, $Z(0) = 0$, $\Phi(0) = 0.1$, $\tau = 0 \div 50$.

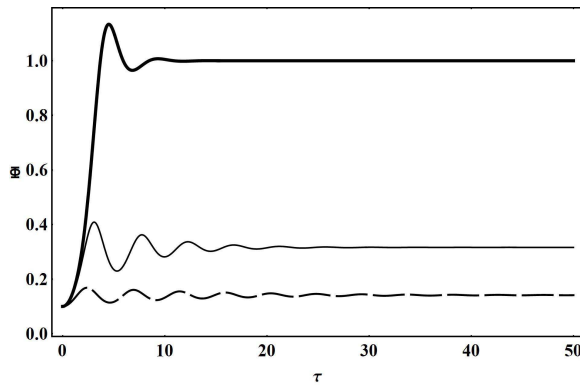


Рис. 21. Эволюция потенциала скалярного поля Φ для случая $\Lambda_m = 0$; $Z(0) = 0$; $\tau = 0 \div 50$; $\Phi(0) = 0.1$; $\alpha_m = -1$ - жирная линия, $\alpha_m = -10$ - тонкая линия, $\alpha_m = -50$ - пунктирная линия.

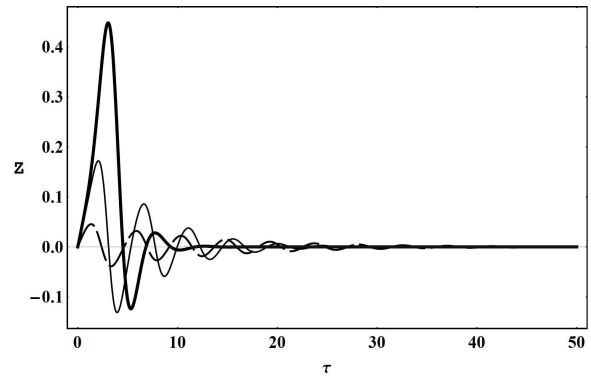


Рис. 22. Эволюция производной потенциала скалярного поля $Z = \dot{\Phi}$.

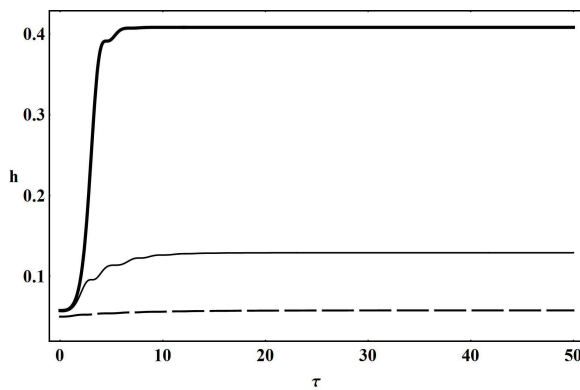


Рис. 23. Эволюция постоянной Хаббла.

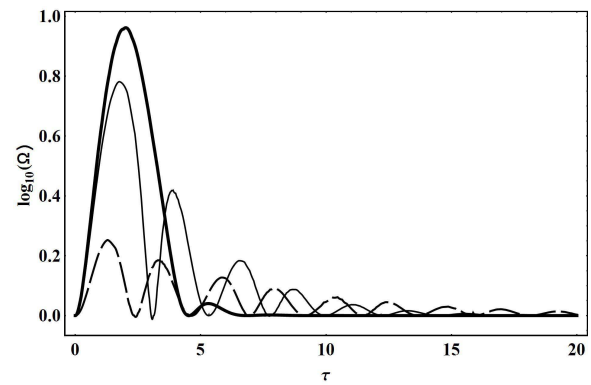


Рис. 24. Эволюция логарифма космологического ускорения.

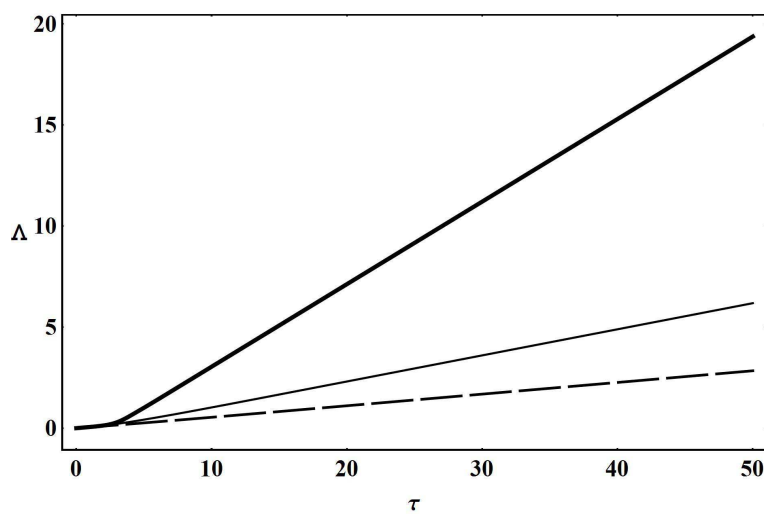


Рис. 25. Эволюция логарифма масштабного фактора $\Delta = \ln a$.

2.9. Численное интегрирование модели с классическим скалярным полем с Хиггсовским потенциалом самодействия.

Рассмотрим классическое скалярное поле с потенциалом самодействия Хиггса:

$$V(\Phi) = \frac{\alpha}{2} \left(\Phi^2 - \frac{\beta}{\alpha} \right)^2. \tag{2.18}$$

Таким образом, система (2.1) переписывается как:

$$\begin{aligned} \Phi' &= Z; \\ Z' &= -\sqrt{3}Z \sqrt{\left(Z^2 + \frac{\alpha_m}{2} \Phi^4 - \beta_m \Phi^2 + \frac{\beta_m^2}{2\alpha_m} \right) + \Lambda_m - \alpha_m \Phi^3 + \beta_m \Phi}, \end{aligned} \tag{2.19}$$

где:

$$\Lambda_m \equiv \frac{\Lambda}{m^2}; \quad \alpha_m \equiv \frac{\alpha}{m^2}; \quad \beta_m \equiv \frac{\beta}{m^2}.$$

Особые точки системы:

$$M_0(0, 0), \quad M_{\pm} \left(\pm \sqrt{\frac{\beta_m}{\alpha_m}}, 0 \right).$$

На рисунках 26 - 28 приведены результаты численного моделирования системы для случая: $\epsilon_1 = 1, \alpha_m = 1, \beta_m = 0.5, \Lambda_m = 0.000001, Z(0) = -0.1, \Phi(0) = 1, \tau = 0 \div 10000$.

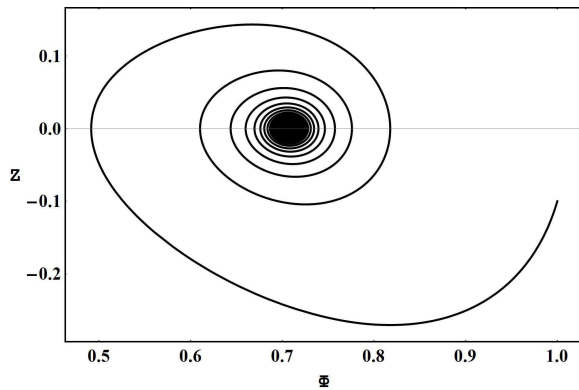


Рис. 26. Фазовый портрет системы с Хиггсовским потенциалом самодействия $\tau = 0 \div 1000$.

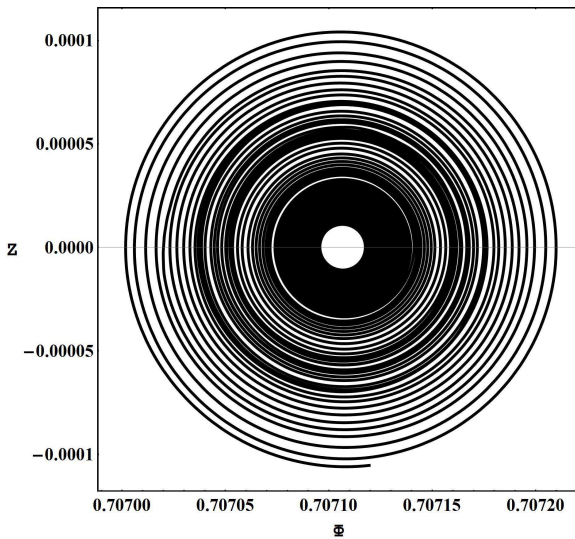


Рис. 27. Фазовый портрет системы с Хиггсовским потенциалом самодействия в крупном масштабе: $\epsilon_1 = 1; \alpha_m = 1; \beta_m = 0.5; \Lambda_m = 0.000001; Z(0) = -0.1; \Phi(0) = 1; \tau = 1000 \div 10000$.

3. Обсуждение результатов

В работе [28] высказывается, во-первых, предположение, что в случае классического скалярного поля при $\Lambda \neq 0$ нулевая особая точка не должна быть фокусом, а скорее всего, этой точке должен соответствовать предельный цикл, соответствующий колебаниям динамической системы. Этот вывод был сделан на основе численного анализа. Заметим, что в нашей работе мы не рассматриваем вторую компоненту космологической модели, которая в [28] описывала скалярно нейтральную идеальную жидкость. Тем не менее, нам представляется неверным указанное предположение, так как, с одной стороны, численный анализ при увеличении промежутка безразмерного времени τ (до значений порядка 10^5) эволюции динамической системы показывает монотонное уменьшение амплитуды колебаний динамической системы (Рис. 30 - 35).

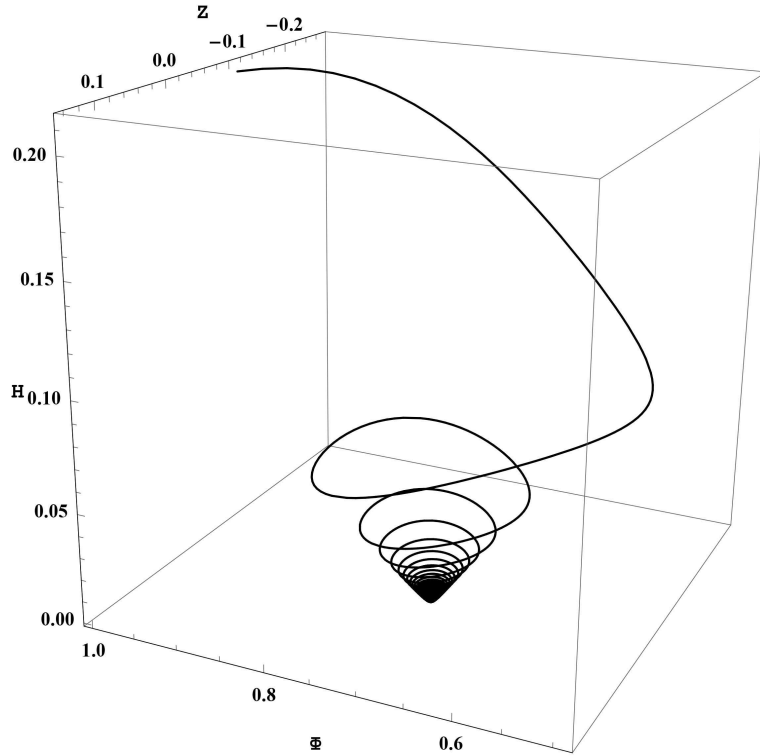


Рис. 28. Трехмерный фазовый портрет системы для того же случая; оси Φ , Z , h .

С другой стороны, полагая при $\tau \rightarrow \infty$ $\Phi(\tau) \rightarrow 0$, $Z(\tau) \rightarrow 0$ и пренебрегая квадратами этих членов в уравнениях (2.1) по сравнению с Λ_m , приведем последние в случае классического скалярного поля к виду:

$$\Phi'' + \sqrt{3\Lambda_m}\Phi' + \Phi = 0. \quad (3.1)$$

Решение этого уравнения

$$\Phi = e^{-\sqrt{\frac{3}{4}\Lambda_m}\tau} \left(C_+ e^{+i\sqrt{1-\frac{3}{4}\Lambda_m}\tau} + C_- e^{-i\sqrt{1-\frac{3}{4}\Lambda_m}\tau} \right); \quad (\Lambda_m < \frac{4}{3}) \quad (3.2)$$

описывает затухающие колебания с характерным временем затухания $\tau_{eff} = \sqrt{\frac{4}{3\Lambda_m}}$. В моделях без космологического члена ($\Lambda = 0$) уравнение (3.1) описывает незатухающие колебания, и решение содержит центр [25].

Во-вторых, колебания системы вблизи особой точки происходят с периодом порядка:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\frac{3}{4}\Lambda_m}} \sim 2\pi, \quad (3.3)$$

то есть, с комптоновским по отношению к массе скалярных бозонов периоду. Это, как отмечалось в [26] - микроскопические времена, недоступные классическим измерениям. Поэтому о наблюдаемых колебаниях масштабных функций ($a(t)$, $H(t)$, $\Omega(t)$) на современном этапе космологической эволюции говорить неправомерно. Речь идет, скорее всего, о продолжающихся затухающих квантовых осцилляциях скалярного поля, которые должны восприниматься как рождение Хиггсовых бозонов, вероятность которого уменьшается экспоненциально быстро со временем.

Заметим также, что динамические уравнения (2.1) сводятся к обыкновенному дифференциальному уравнению вида:

$$\ddot{x} + \beta(x, \dot{x})\dot{x} - V'_x(x) = 0, \quad (3.4)$$

где $x(t) \equiv \phi(\tau)$,

$$\beta(x, \dot{x}) = \sqrt{2\epsilon_1 \left(\frac{1}{2}\dot{x}^2 - V(x) \right) + \Lambda_m} \geq 0. \quad (3.5)$$

Таким образом, уравнение (3.4) по своей физической сути представляет уравнение одномерных колебаний в поле Хиггсова потенциала $V(x)$ с неотрицательным коэффициентом нелинейного трения $\beta(x, \dot{x})$. Вне зависимости от явного вида коэффициента трения суть процесса, описываемого уравнением (3.4), физически прозрачна — это затухающие колебания в потенциальной яме $V(x)$. В случае Хиггсова потенциала система опускается в один из устойчивых минимумов $V(x)$ (Рис. 29). Таким образом, при $\Phi \rightarrow 0, Z \rightarrow 0$ и $\Lambda > 0$ коэффициент трения постоянен. В случае $\alpha = 0$ потенциал $V(x)$ имеет форму параболы, поэтому система обязана опускаться в ее вершину. В случае $\Lambda \equiv 0$ при $\Phi \rightarrow 0, Z \rightarrow 0$ коэффициент трения стремится к нулю, поэтому *только в этом случае и возможны незатухающие колебания при $\tau \rightarrow \infty$* .

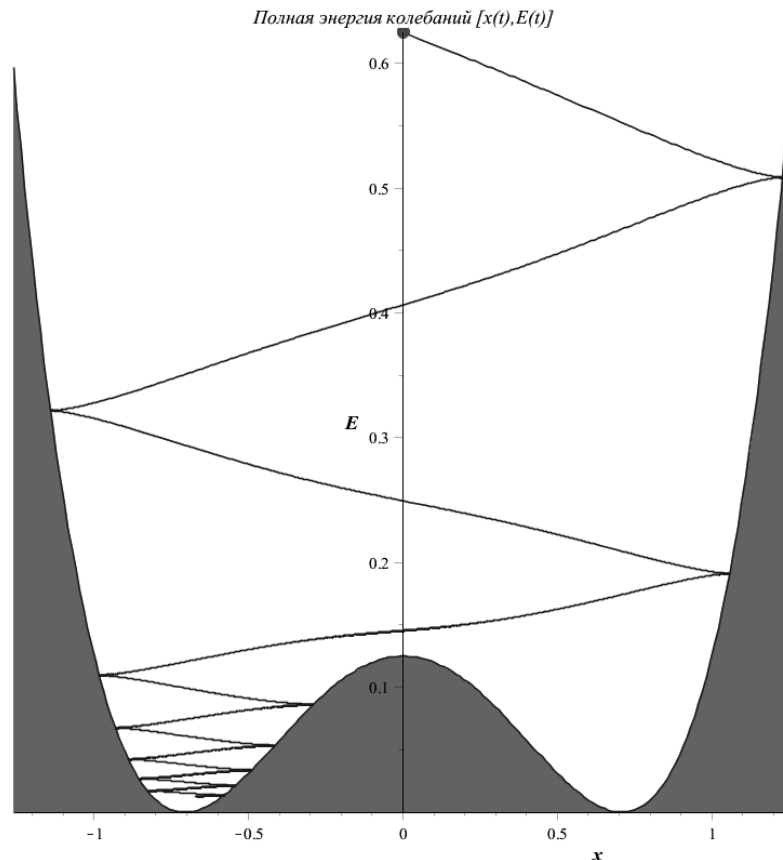


Рис. 29. Компьютерная симуляция затухающих колебаний в поле потенциала Хиггса [35].

Что же касается численных результатов и следующих из них выводов статьи, касающихся существования предельного цикла космологической динамической системы в случае $\Lambda \neq 0$, как видно из рисунков 30 и 31, для получения более точных результатов на больших временах эволюции необходимо применять более точные методы интегрирования нелинейных уравнений.

Из сравнения графиков на рисунках 30 и 31 видно, что метод интегрирования Рунге - Кутта 4-5 порядков при больших значениях времени эволюции динамической системы и малых значениях потенциала скалярного поля и его производной приводит к существенным ошибкам. Представленная на рисунке 30 фазовая диаграмма весьма интересна, но не соответствует действительности. На рисунке 31 мы видим правильную фазовую диаграмму, полученную для этого же случая методом интегрирования Рунге - Кудта повышенной точности 7-8 порядков. Эта диаграмма как раз и описывает затухающие колебания (3.2). Обращаем внимание на поразительную точность вычислений с помощью метода Рунге - Кудта 7-8 порядков: радиус спирали на исследуемом этапе составляет порядка 10^{-192} ! Обращаем также внимание и на то обстоятельство, что фазовая диаграмма на рисунке 30, полученная методом Рунге - Кудта 4-5 порядков при этом дает значения потенциала и его производной, завышенные на 184 порядка!

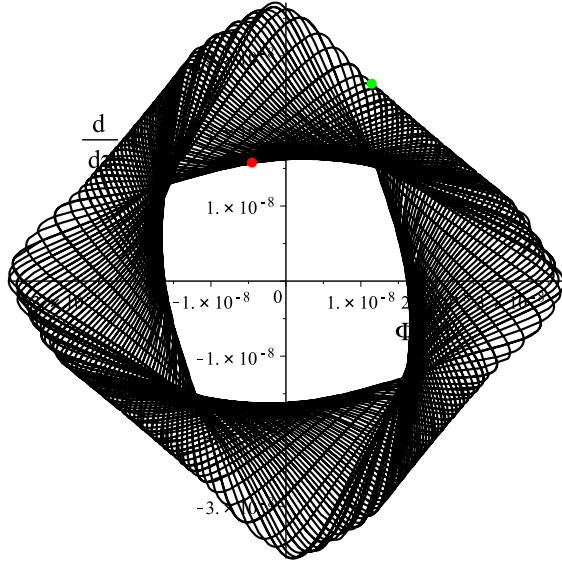


Рис. 30. Фазовый портрет системы (2.1) в крупном масштабе для случая $\alpha_m = 0$; $\Lambda_m = 0.001$; $\tau = 9000 \div 10000$; $\Phi(0) = 1$; $Z(0) = 0$. График получен с помощью стандартного метода Рунге - Кутты 4-5 порядков в пакете Maple 18.

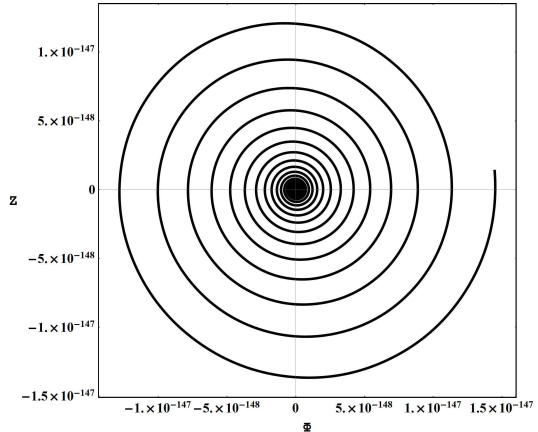


Рис. 31. Фазовый портрет системы (2.1) в крупном масштабе для случая $\alpha_m = 0$; $\Lambda_m = 0.001$; $\tau = 9000 \div 10000$; $\Phi(0) = 1$; $Z(0) = 0$. График получен с помощью метода интегрирования высокой точности Рунге - Кутты 7-8 порядков в пакете Maple 18.

На рисунках 32 — 35 показаны фазовые диаграммы динамической системы на больших временах в случае нулевого значения космологической постоянной. Как видно из представленных фазовых диаграмм, в случае $\Lambda = 0$, действительно, фазовые диаграммы *очень похожи* на предельные циклы, причем с практически строго круговой орбитой в наших переменных. Однако, можно заметить и неуклонную тенденцию к уменьшению радиуса этих циклов с увеличением времени эволюции динамической системы.

Тенденция же эволюции фазовых диаграмм такова, что

$$\Phi^2(\tau) + \Phi'^2(\tau) = \Phi_0^2(\tau) \approx \text{const}; \quad (\tau \gg 1), \quad (3.6)$$

причем до определенного момента времени выполняется приближенное соотношение $\Phi_0(\tau) \propto \tau^{-5/2}$ - медленно меняющаяся функция по сравнению с фазой колебаний; после чего $\Phi_0(\tau)$ падает гораздо быстрее.

Общую тенденцию падения амплитуды колебаний в случае $\Lambda = 0, \alpha = 0$ можно понять и на основе анализа уравнения поля

$$\Phi'' + \sqrt{3}\Phi' \sqrt{\Phi^2 + \Phi'^2} + \Phi = 0 \quad (3.7)$$

при учете свойства (3.6). Действительно, учитывая (3.6) и полагая в (3.7)

$$\Phi = \Phi_0(\tau)e^{i\tau},$$

получим:

$$\Phi_0'' + 2i\Phi_0' + \sqrt{3}\Phi_0'\Phi_0 + i\sqrt{3}\Phi_0^2 = 0. \quad (3.8)$$

Учитывая $\Phi_0' \ll \Phi_0$, получим в первом приближении из (3.8) закон эволюции амплитуды:

$$\Phi_0 \propto \frac{1}{\sqrt{3\tau}}, \quad (3.9)$$

что подтверждает вывод о падении амплитуды колебаний с течением времени.

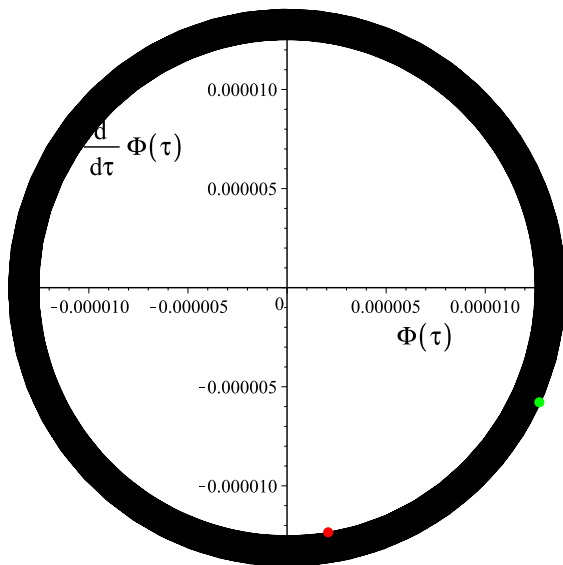


Рис. 32. Фазовый портрет системы (2.1) в крупном масштабе для случая $\alpha_m = 0$; $\Lambda_m = 0$; $\tau = 9000 \div 10000$; $\Phi(0) = 1$; $Z(0) = 0$. График получен с помощью стандартного метода Рунге - Кутты 4-5 порядков в пакете Maple 18.

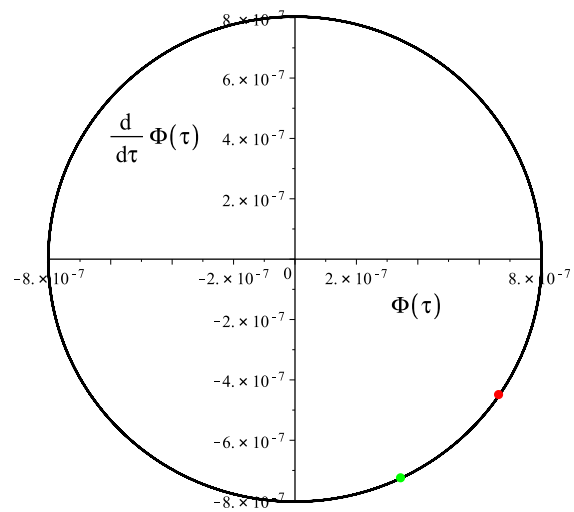


Рис. 33. Фазовый портрет системы (2.1) в крупном масштабе для случая $\alpha_m = 0$; $\Lambda_m = 0$; $\tau = 100000 \div 100100$; $\Phi(0) = 1$; $Z(0) = 0$. График получен с помощью метода интегрирования высокой точности Рунге - Кутты 7-8 порядков в пакете Maple 18.

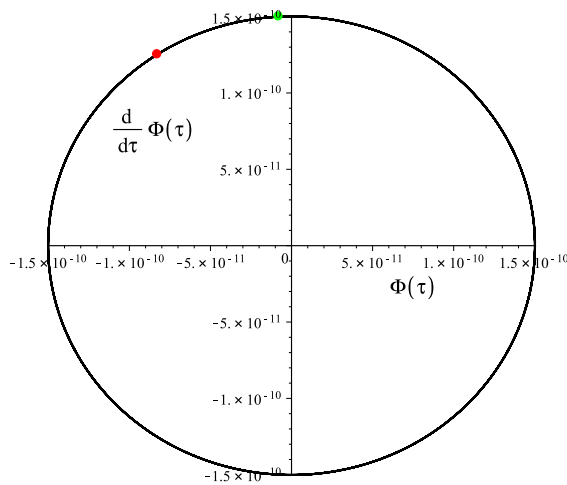


Рис. 34. Фазовый портрет системы (2.1) в крупном масштабе для случая $\alpha_m = 0$; $\Lambda_m = 0$; $\tau = 1000000 \div 1000100$; $\Phi(0) = 1$; $Z(0) = 0$. График получен с помощью стандартного метода Рунге - Кутты 4-5 порядков в пакете Maple 18.

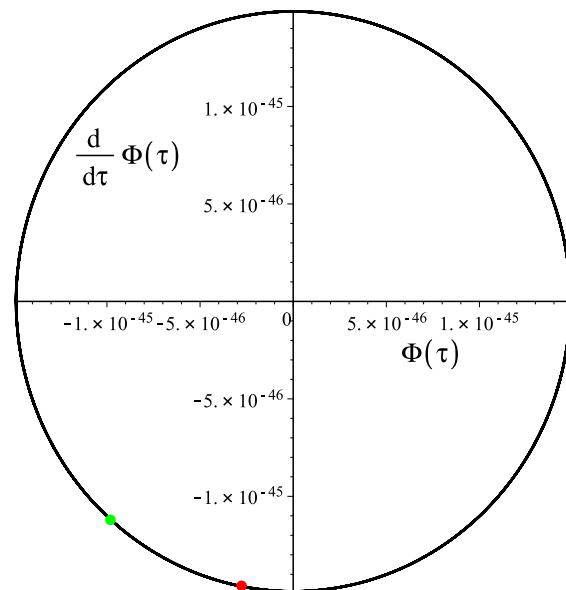


Рис. 35. Фазовый портрет системы (2.1) в крупном масштабе для случая $\alpha_m = 0$; $\Lambda_m = 0$; $\tau = 10000000 \div 10000100$; $\Phi(0) = 1$; $Z(0) = 0$. График получен с помощью метода интегрирования высокой точности Рунге - Кутты 7-8 порядков в пакете Maple 18.

Заключение

В заключении Авторы выражают благодарность членам ВС (MW) — семинара по релятивистской кинетике и космологии Казанского федерального университета за полезное обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ignat'ev Yu. G. Conservation laws and thermodynamic equilibrium in the general relativistic kinetic theory of inelastically interacting particles // *Soviet Physics Journal*. 1983. Vol. 26. № 8. P. 1068-1072.
2. Игнат'ев Ю.Г., Кузеев Р.Р. Термодинамическое равновесие самогравитирующей плазмы со скалярным взаимодействием // *Укр. физ. ж.* 1984. Т. 29. № 7. С. 1021-1025.
3. Ignatyev Yu.G., Miftakhov R.F. Statistical systems of particles with scalar interaction in cosmology // *Grav. and Cosmol.* 2006. Vol. 12. № 2-3. P. 179-185.
4. Bronnikov K.A., Fabris J.C. Regular phantom black holes // *Phys. Rev. Lett.* 2006. № 96. P. 973-977.
5. Bolokhov S.V., Bronnikov K.A., Skvortsova M.V. Magnetic black universes and wormholes with a phantom scalar // *Classical and Quantum Gravity*. 2012. Vol. 29. № 24. P. 245006.
6. Игнат'ев Ю.Г. Космологическая эволюция плазмы с межчастичным скалярным взаимодействием. I. Каноническая формулировка классического скалярного взаимодействия // *Известия Вузов, Физика*. 2012. Т. 55. № 2. С. 36-40.
7. Игнат'ев Ю.Г. Космологическая эволюция плазмы с межчастичным скалярным взаимодействием. II. Формулировка математической модели // *Известия Вузов, Физика*. 2012. Т. 55. № 5. С. 71-78.
8. Игнат'ев Ю.Г. Космологическая эволюция плазмы с межчастичным скалярным взаимодействием. III. Модель с притяжением одноименно заряженных скалярных частиц // *Известия Вузов, Физика*. 2012. Т. 55. № 11. С. 94-97.
9. Игнат'ев Ю.Г. Неравновесная Вселенная: кинетические модели космологической эволюции. Казань: Казанский университет, 2013. 316 с.
URL: http://www.stfi.ru/archive_rus/2013_2_Ignatiev.pdf;
<http://rgs.vniims.ru/books/universe.pdf>
10. Игнат'ев Ю.Г. Неминимальные макроскопические модели скалярного поля, основанные на микроскопической динамике // *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. 2014. № 1. С. 47-69.
11. Ignatyev Yu.G., Ignatyev D.Yu. Statistical system with a fantom scalar interaction in the Gravitation Theory. I. The Microscopic Dynamic // *Grav. and Cosmol.* 2014. Vol. 20. № 4. P. 299-303.
12. Ignatyev Yu.G., Agathonov A.A., Ignatyev D.Yu. Statistical systems with fantom scalar interaction in Gravitation Theory. II. Macroscopic Equations and Cosmological Models // *Grav. and Cosmol.* 2014. Vol. 20. № 4. P. 304-308. URL: <https://arxiv.org/pdf/1608.05020v1.pdf>
13. Ignatyev Yu.G. Nonminimal Macroscopic Models of a Scalar Field Based on Microscopic Dynamics: Extension of the Theory to Negative Masses // *Grav. and Cosmol.* 2015. Vol. 21. № 4. P. 296-308.
14. Ignatyev Yu.G., Agathonov A.A. Numerical Models of Cosmological Evolution of a Degenerate Fermi-System of Scalar Charged Particles // *Grav. and Cosmol.* 2015. Vol. 21. № 2. P. 105-112.
15. Ignat'ev Yu.G., Mikhailov M.L. Cosmological Evolution of a Boltzmann Plasma with Interparticle Phantom Scalar Interaction. I. Symmetric Cases // *Russ. Phys. J.* 2015. Vol. 57. P. 1743-1752.
16. Ignat'ev Yu., Agathonov A., Mikhailov M., Ignatyev D. Cosmological evolution of statistical system of scalar charged particles // *Astroph. Space Sci.* 2015. Vol. 357:61.
17. Игнат'ев Ю.Г., Агафонов А.А. Статистические космологические системы почти вырожденных скалярно заряженных фермионов // *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. 2016. Вып. 3. С. 48-90.
18. Белинский В.А., Гришук Л.П., Зельдович Я.Б., Халатников И.М. Инфляционные стадии в космологических моделях со скалярным полем // *ЖЭТФ*. 1985. Т. 89. С. 346-354.
19. Долгов А.Д., Зельдович Я.Б., Сажин М.В. Космология ранней Вселенной. Москва: МГУ, 1988. 189 с.
20. Журавлев В.М. Двухкомпонентные космологические модели с переменным уравнением состояния вещества и тепловым равновесием компонент // *ЖЭТФ*. 2001. Т. 120. Вып. 5. С. 1042-1061.
21. Бронников К.А., Рубин С.Г. Лекции по гравитации и космологии. М.: МИФИ, 2008. 460 с.
22. Urena-Lopez L.A., Reyes-Ibarra M.J. On the dynamics of a quadratic scalar field potential // *arXiv:0709.3996v2 [astro-ph]*. 2009. URL: <https://arxiv.org/pdf/0709.3996.pdf>
23. Zhuravlev V.M., Podymova T.V., Pereskokov E.A. Cosmological Models with a Specified Trajectory on the Energy Phase Plane // *Grav. and Cosmol.* 2011. Vol. 17. № 2. P. 101-109.
24. Urena-Lopez L.A. Unified description of the dynamics of quintessential scalar fields // *arXiv:1108.4712v2 [astro-ph.CO]*. 2012. URL: <https://arxiv.org/pdf/1108.4712.pdf>

25. Игнат'ев Ю.Г. Стандартная космологическая модель: математический, качественный и численный анализ // *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. 2016. № 3. С. 16-36.
URL: <https://arxiv.org/pdf/1609.00745v1.pdf>
26. Игнат'ев Ю.Г. Качественный и численный анализ стандартной космологической модели с Λ -членом // *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. 2016. Вып. 3. С. 37-47.
27. Игнат'ев Ю.Г. Классическая космология и темная энергия. Казань: Казанский университет, изд-во АН РТ, 2016. 248 с.
28. Журавлев В.М. Качественный анализ космологических моделей со скалярным полем // *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. 2016. Вып. 4. С. 39—51.
29. Ignat'ev Yu.G. Macroscopic Einstein Equations for a Cosmological Model with λ -term // arXiv:1509.01235v1 [gr-qc]. 2015. URL: <https://arxiv.org/pdf/1509.01235.pdf>
30. Игнат'ев Ю.Г. Качественный и численный анализ космологической модели с фантомным скалярным полем // *Известия Вузов, Физика*. 2016. Т. 59. № 12. С. 83-86.
31. Игнат'ев Ю.Г., Агафонов А.А. Качественный и численный анализ космологической модели, основанной на фантомном скалярном поле с самодействием // *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. 2016. Вып. 4. С. 52-61.
32. Ignat'ev Yu.G., Agathonov A.A. The qualitative and numerical analysis of the cosmological model based on phantom scalar field with self // arXiv:1610.04443 [gr-qc]. 2016.
URL: <https://arxiv.org/abs/1610.04443>
33. Богоявленский О.И. Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике. М.: Наука, 1980. 320 с.
34. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. Серия "Справочная математическая библиотека". Вып. 11. М.: Наука, 1989. 489 с.
35. Игнат'ев Ю.Г. Математическое моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Лекции для школы по математическому моделированию. Казань: Казанский университет, 2013. 298 с.

Поступила в редакцию 29.03.2017

Игнат'ев Юрий Геннадьевич, д. ф.-м. н., профессор, кафедра высшей математики и математического моделирования, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский федеральный университет, 420008, Россия, г. Казань, ул. Кремлевская, 35.
E-mail: ignat'ev_yu@rambler.ru

Агафонов Александр Алексеевич, к. ф.-м. н., доцент, кафедра высшей математики и математического моделирования, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский федеральный университет, 420008, Россия, г. Казань, ул. Кремлевская, 35.
E-mail: a.a.agathonov@gmail.com

Yu. G. Ignat'ev, A. A. Agathonov

Qualitative and numerical analysis of the cosmological model based on the phantom scalar field with self-interaction. II. Comparative analysis of models of classical and phantom fields

Keywords: cosmological models, classical and phantom scalar fields, quality analysis, asymptotic behavior, numerical simulation, numerical gravitation.

PACS: 04.20.Cv, 98.80.Cq, 96.50.S, 52.27.Ny

Based on qualitative analysis and numerical simulations of cosmological models with classical and phantom scalar fields with self-interaction are identified and clarified their characteristics, and their potential use as base models in cosmology.

REFERENCES

1. Ignat'ev Yu. G. Conservation laws and thermodynamic equilibrium in the general relativistic kinetic theory of inelastically interacting particles, *Soviet Physics Journal*, 1983, vol. 26, no. 8, pp. 1068-1072.
2. Ignat'ev Yu.G., Kuzeev R.R. The thermodynamic equilibrium of self-gravitating plasma with scalar interaction, *Ukr. Fiz. Zh.*, 1984, vol. 29, pp. 1021-1025.
3. Ignatyev Yu.G., Miftakhov R.F. Statistical systems of particles with scalar interaction in cosmology, *Grav. and Cosmol.*, 2006, vol. 12, no. 2-3, pp. 179-185.

4. Bronnikov K.A., Fabris J.C. Regular phantom black holes, *Phys. Rev. Lett.*, 2006, no. 96, pp. 973-977.
5. Bolokhov S.V., Bronnikov K.A., Skvortsova M.V. Magnetic black universes and wormholes with a phantom scalar, *Classical and Quantum Gravity*, 2012, vol. 29, no. 24, pp. 245006.
6. Ignat'ev Yu.G. Cosmological evolution of plasma with scalar interparticle interaction. I. Canonical formulation of classical scalar interaction, *Russ. Phys. J.*, 2012, vol. 55, no. 2, pp. 166-172.
7. Ignat'ev Yu.G. Cosmological evolution of the degenerated plasma with interparticle scalar interaction. II. Formulation of mathematical model, *Russ. Phys. J.*, 2012, vol. 55, no. 5, pp. 550-560.
8. Ignatyev Yu.G. Cosmological evolution of the plasma with interparticle scalar interaction. III. Model with attraction of like-charged scalar particles, *Russ. Phys. J.*, 2012, vol. 55, no. 11, pp. 1345-1350.
9. Ignat'ev Yu.G. *Neravnovesnaya Vselennaya: kineticheskie modeli kosmologicheskoi evolucii* (Nonequilibrium universe: kinetic models of cosmological evolution), Kazan: Kazan University, 2013, 316 p.
10. Ignat'ev Yu.G. Nonminimal macroscopic models of a scalar field based on microscopic dynamics, *Space, Time and Found. Interact.*, 2014, no. 1, pp. 47-69.
11. Ignatyev Yu.G., Ignatyev D.Yu. Statistical system with a fantom scalar interaction in the Gravitation Theory. I. The Microscopic Dynamic, *Grav. and Cosmol.*, 2014, vol. 20, no. 4, pp. 299-303.
12. Ignatyev Yu.G., Agathonov A.A., Ignatyev D.Yu. Statistical systems with fantom scalar interaction in Gravitation Theory. II. Macroscopic Equations and Cosmological Models, *Grav. and Cosmol.*, 2014, vol. 20, no. 4, pp. 304-308. arXiv:1608.05020 [gr-qc]
13. Ignatyev Yu.G. Nonminimal Macroscopic Models of a Scalar Field Based on Microscopic Dynamics: Extension of the Theory to Negative Masses, *Grav. and Cosmol.*, 2015, vol. 21, no. 4, pp. 296-308.
14. Ignatyev Yu.G., Agathonov A.A. Numerical Models of Cosmological Evolution of a Degenerate Fermi-System of Scalar Charged Particles, *Grav. and Cosmol.*, 2015, vol. 21, no. 2, pp. 105-112.
15. Ignat'ev Yu.G., Mikhailov M.L. Cosmological Evolution of a Boltzmann Plasma with Interparticle Phantom Scalar Interaction. I. Symmetric Cases, *Russ. Phys. J.*, 2015, vol. 57, pp. 1743-1752.
16. Ignat'ev Yu., Agathonov A., Mikhailov M., Ignatyev D. Cosmological evolution of statistical system of scalar charged particles, *Astroph. Space Sci.*, 2015, vol. 357:61.
17. Ignat'ev Yu.G., Agathonov A.A. Statistical Cosmological Fermion Systems With Interparticle Fantom Scalar Interaction, *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2016, vol. 3, pp. 48-90.
18. Belinskii V.A., Grishchuk L.P., Zel'dovich Ya.B., Khalatnikov I.M. Inflationary stages in cosmological models with a scalar field, *JETP*, 1985, vol. 62(2), pp. 195-203.
19. Dolgov A.D., Zeldovich Ya.B., Sazhin M.V. *Kosmologiya ranney Vselennoy* (The cosmology of the early Universe), Moscow: Izd. Moscow State University, 1988, 199 p.
20. Zhuravlev V.M. Two-component cosmological models with a variable equation of state of matter and with thermal equilibrium of components, *J. Exp. Theor. Phys.*, 2001, vol. 93, no. 5, pp. 903-919.
21. Bronnikov K.A., Rubin S.G. *Lekcii po gravitacii i kosmologii* (Lectures on Gravitation and Cosmology), Moscow: Izd. MIFI, 2008, 460 p.
22. Urena-Lopez L.A., Reyes-Ibarra M.J. On the dynamics of a quadratic scalar field potential, arXiv:0709.3996v2 [astro-ph], 2009. <https://arxiv.org/pdf/0709.3996.pdf>
23. Zhuravlev V.M., Podymova T.V., Pereskokov E.A. Cosmological Models with a Specified Trajectory on the Energy Phase Plane, *Grav. and Cosmol.*, 2011, vol. 17, no. 2, pp. 101-109.
24. Urena-Lopez L.A. Unified description of the dynamics of quintessential scalar fields, arXiv:1108.4712v2 [astro-ph.CO], 2012. <https://arxiv.org/pdf/1108.4712.pdf>
25. Ignat'ev Yu. The standard cosmological model: mathematical, qualitative and numerical analysis, *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2016, vol. 3, pp. 16-36.
26. Ignat'ev Yu.G. Qualitative and numerical analysis of the standard cosmological model with Λ - term, *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2016, vol. 3, pp. 37-47.
27. Ignat'ev Yu.G. *Klassicheskaya kosmologiya i tyemnaya energiya* (Classical Cosmology and Dark Energy), Kazan: Kazan University, 2016, 248 p.
28. Zhuravlev V.M. Qualitative analysis of cosmological models with scalar fields, *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2016, vol. 4, pp. 39-51.
29. Ignat'ev Yu.G. Macroscopic Einstein Equations for a Cosmological Model with λ -term, arXiv:1509.01235v1 [gr-qc], 2015. <https://arxiv.org/pdf/1509.01235.pdf>
30. Ignat'ev Yu.G. Qualitative and numerical analysis of the cosmological models based on the phantom scalar interaction, *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Fizika*, 2016, vol. 59, no. 12, pp. 83-86.
31. Ignat'ev Yu.G., Agathonov A.A. The qualitative and numerical analysis of the cosmological model based on phantom scalar field with self interaction, *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2016, vol. 4, pp. 52-61.
32. Ignat'ev Yu.G., Agathonov A.A. The qualitative and numerical analysis of the cosmological model based on phantom scalar field with self, arXiv:1610.04443 [gr-qc], 2016. <https://arxiv.org/abs/1610.04443>
33. Bogoyavlensky O.I. *Metody kachestvennoi teorii dinamicheskikh sistem v astrofizike i gazovoi dinamike* (Methods of the qualitative theory of dynamical systems in astrophysics and gas dynamics), Moscow: Nauka, 1980, 320 p.

34. Bautin N.N., Leontovich E.A. *Metody i priemy kachestvennogo issledovaniya dinamicheskikh sistem na ploskosti. Vyp. 11* (Methods and techniques of the qualitative study of dynamical systems on the plane. Vol. 11), Moscow: Nauka, 1989, 489 p.

35. Ignatyev Yu.G. *Matematicheskoe modelirovanie fundamental'nyh objektov i yavlenij v sisteme komp'yuternoj matematiki Maple. Lekcii dlya shkoly po matematicheskomu modelirovaniyu* (Mathematical modeling of fundamental objects and phenomena in system of computer mathematics Maple. Lectures for school on mathematical modeling), Kazan: Kazan University, 2013, 298 p.

Received 29.03.2017

Ignat'ev Yurii Gennadievich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan Federal University, ul. Kremlyovskaya, 35, Kazan, 420008, Russia.

E-mail: ignatev_yu@rambler.ru

Agathonov Alexander Alexeevich, Candidate of Physics and Mathematics, Assistant Professor, Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan Federal University, ul. Kremlyovskaya, 35, Kazan, 420008, Russia.

E-mail: a.a.agathonov@gmail.com