

**КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ**

**В.М. ЛАРИОНОВ, О.В. ИОВЛЕВА**

**ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ  
ТЕРМОАКУСТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ**

Казань  
2017

**УДК 534.142**

*Учебно-методическая комиссия инженерного института  
Протокол №8 от 21 декабря 2016г.*

**Ларионов В.М.** – профессор кафедры технической физики и энергетики

**Иовлева О.В.** – доцент кафедры технической физики и энергетики

**Введение в теорию термоакустических колебаний. Учебное пособие: курс лекций, решение задач.**

В пособии излагаются физические и математические основы теории возбуждения колебаний газа в акустических резонаторах с тепловыми источниками. Дается общая характеристика процесса термоакустической неустойчивости течений газа, проводится анализ процессов горения и диссипации акустической энергии, рассмотрены некоторые математические модели термоакустических колебаний в трубе и установках типа резонатора Гельмгольца.

Книга рассчитана на бакалавров старших курсов, магистров и аспирантов специализирующихся по механике жидкости и газа, теплофизике и энергетике, а так же научных работников и специалистов, занимающихся вопросами устойчивости неизоэнтропических течений сплошной среды.

Рецензенты: **Р.Г. Зарипов**, доктор физ.–мат. наук, профессор (кафедра технической физики и энергетики)

**Ю.В. Ваньков**, доктор техн. наук, профессор (Казанский государственный энергетический университет)

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Введение .....</b>	<b>5</b>
<b>ГЛАВА 1 ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ТЕРМОАКУСТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ.....</b>	<b>6</b>
<b>1.1 Неустойчивость течений газа с тепловыми         источниками.....</b>	<b>6</b>
<b>1.2 Энергетический критерий термоакустической         неустойчивости</b>	<b>14</b>
<b>ГЛАВА 2 ГЕНЕРАЦИЯ И ПОГЛОЩЕНИЕ АКУСТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ.....</b>	<b>19</b>
<b>2.1 Генерация акустической энергии в области         теплоподвода.....</b>	<b>19</b>
<b>2.2 Поглощение звука.....</b>	<b>28</b>
<b>Задачи .....</b>	<b>32</b>
<b>ГЛАВА 3 ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ГАЗА В СИСТЕМАХ С ТЕПЛОВЫМИ ИСТОЧНИКАМИ.....</b>	<b>36</b>
<b>3.1 Колебания газа в трубах.....</b>	<b>36</b>
<b>3.2 Влияние находящихся в покое препятствий         на частоту колебаний.....</b>	<b>42</b>
<b>3.3 Установка типа емкость-труба,         резонатор Гельмгольца.....</b>	<b>45</b>
<b>Задачи .....</b>	<b>50</b>
<b>ГЛАВА 4 ПРИМЕРЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ТЕРМОАКУСТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ГАЗА.....</b>	<b>53</b>

<b>4.1</b>	<b>Явление Рийке.....</b>	<b>53</b>
<b>4.2</b>	<b>Эффект Зондхаусса.....</b>	<b>58</b>
<b>4.3</b>	<b>Неравномерно нагретый резонатор Гельмгольца.....</b>	<b>64</b>
<b>4.4</b>	<b>Термоакустические колебания газа в системах с горением.....</b>	<b>68</b>
<b>4.5</b>	<b>Термоакустические колебания газа при горении в открытой трубе.....</b>	<b>69</b>
<b>4.6</b>	<b>Возбуждение колебаний газа при горении в установке типа резонатора Гельмгольца.....</b>	<b>78</b>
	<b>Задачи .....</b>	<b>85</b>
	<b>Список использованных источников .....</b>	<b>87</b>

## Введение

В течении нескольких лет на кафедре «Техническая физика и энергетика» К(П)ФУ магистрам, специализирующимся по теплофизике, читается лекционный курс «Теория термоакустических колебаний». Основу данной дисциплины составляют результаты фундаментальных исследований таких ученых, как: Рэлей, Б.В. Раушенбах, N. Rott, Р.Г. Галиуллин. Часть лекционного материала основывается на результатах исследований, проведенных авторами данного пособия. Цель данного пособия – кратко и в доступной форме изложить основы теории термоакустических колебаний газа, закрепить полученные знания в процессе решения задач, так же применить их при выполнении магистерских диссертаций, темы которых имеют отношение к изучаемому явлению. Основным содержанием книги является анализ физических процессов, приводящих к самовозбуждению акустических колебаний газа в резонаторах при наличии теплопередачи от внутренних и внешних тепловых источников. Вопросы акустической неустойчивости процессов горения подробно не рассматриваются, т.к. учебная литература по этой тематике уже имеется.

Авторы выражают признательность профессору Ю.В. Ванькову и профессору Р.Г. Зарипову за общую положительную оценку данного пособия, за ряд полезных методических замечаний. После доработки содержание некоторых разделов книги стало проще и доступнее для понимания студентов.

# Глава 1 Общая характеристика термоакустических колебаний газа

## 1.1 Неустойчивость течений газа с тепловыми источниками

В 1777г. Хиггинс [1] провел следующий опыт. В вертикально расположенную, открытую на концах трубу длиной около 1м, внутренним диаметром 30 – 50мм было помещено диффузионное водородное пламя (рисунок 1.1, а). Горючий газ подавался по трубке диаметром в несколько миллиметров, имеющей сужение на конце с выходным отверстием диаметром  $\approx 1$ мм. При некоторых условиях происходило самовозбуждение звуковых колебаний с частотой, близкой к наименьшей собственной частоте колебаний воздуха в трубе, открытой на концах. Наиболее интенсивные колебания имели место, когда пламя располагалось в средней части трубы-резонатора. Существенное значение имеет длина газоподающей трубки. При ее непрерывном изменении интервалы, при которых происходит самовозбуждение звука, чередуются с интервалами, когда колебания отсутствуют. Более поздние исследования [2] показали, что явление зависит также от условий на входе в газоподающую трубку, то есть подача водорода происходит из емкости или через большое гидравлическое сопротивление, например, через клапан. Явление наблюдается и в том случае, когда по трубке подается предварительно подготовленная смесь горючего газа с воздухом. Влияние газоподающей трубки можно исключить, подавая горючий газ через капиллярную трубку. Если по трубке подавать водород и образующееся диффузионное пламя расположить в нижней половине трубы-резонатора, происходит самовозбуждение звука, причем амплитуда колебаний максимальна, когда пламя расположено на расстоянии, равном четверти длины трубы от нижнего конца.

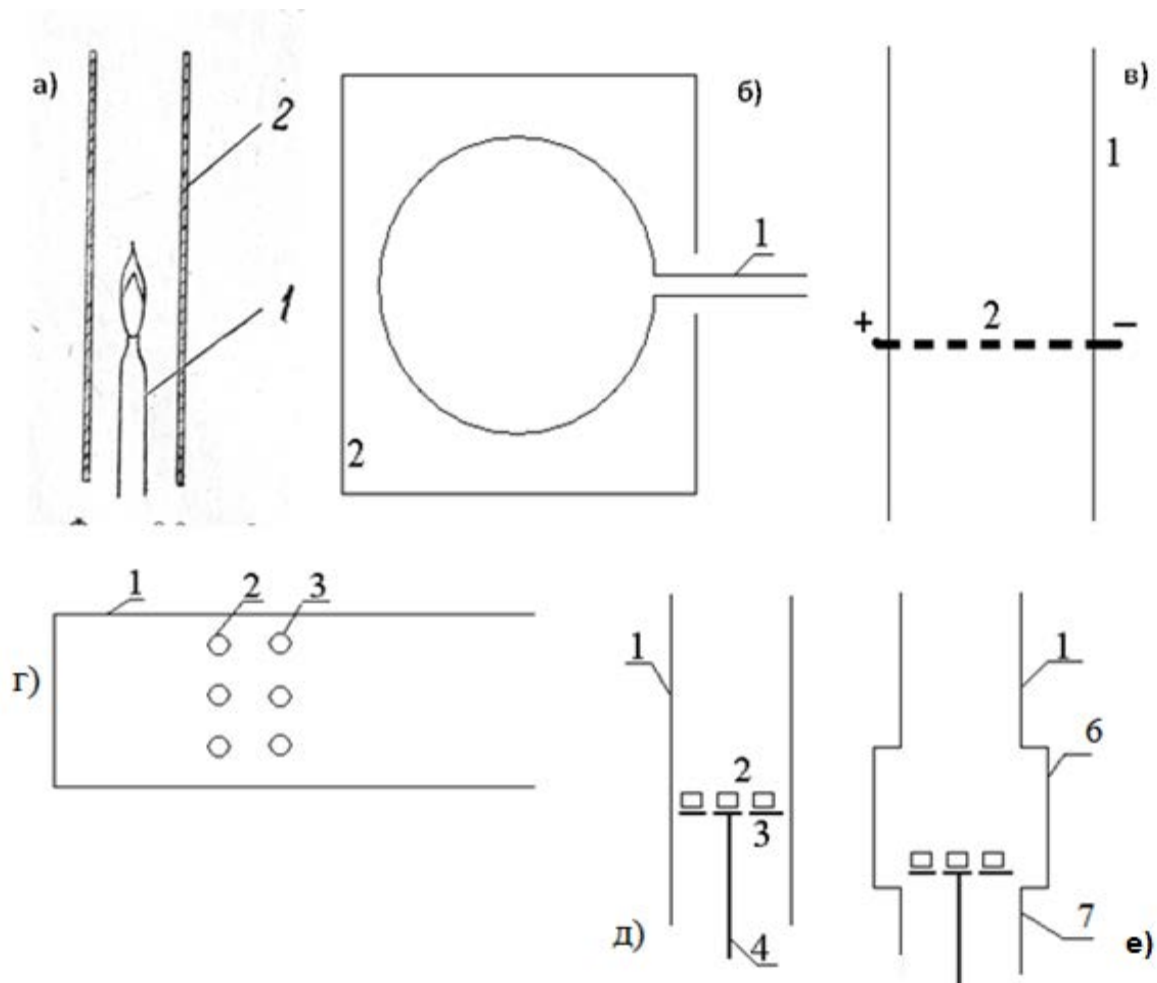


Рисунок 1.1 а – поющее пламя Хиггинса: 1 – горелка, 2 – труба–резонатор;  
 б – неравномерно нагретый резонатор Гельмгольца: 1 – резонатор Гельмголца, 2 – печь;  
 в – труба Рийке: 1 – труба, 2 – сетка;  
 г – установка Зондхаусса: 1 – труба, 2 – нагреватель, 3 – охладитель;  
 д - схема экспериментальной установки типа трубы, е – схема экспериментальной  
 установки типа емкость–труба: 1–труба; 2–образцы; 3–сетка; 4 – штوك; 6 – емкость, 7 –  
 входной патрубок.

В средние века стеклодувы наблюдали следующее явление [3]. Если через стеклянную трубу продуть воздух, то на её конце, расположенном в печи, образуется раскаленная сферическая полость (рисунок 1.1, б). При определенных размерах трубки и полости происходило самовозбуждение звука. Такое устройство, состоящее из емкости и узкой трубы, длина которой намного меньше длины звуковой волны, называется резонатором

Гельмгольца. Воздух в трубке – «горле» резонатора может совершать собственные колебания, частота которых зависит от геометрических параметров устройства. Самовозбуждение колебаний связано с разницей температуры стенок емкости и горла, причем градиент температуры на входе в горло должен быть выше некоторого минимального значения.

В 1859 г. Пауль Рийке [3] обнаружил следующее: если в вертикально расположенную трубу длиной 0.8м поместить на расстоянии примерно 0.2м от нижнего конца раскаленную проволочную сетку, нагреваемую электрическим током, в трубе происходит самовозбуждение звуковых колебаний (рисунок 1.1, в). Впоследствии этот эффект наблюдали многие исследователи, которые использовали различные нагревательные элементы – решетки, кольца, всевозможные спирали. Явление обладает рядом свойств. Для возбуждения колебаний, соответствующих первой гармонике, необходимо располагать нагретое тело в нижней половине трубы. Наиболее интенсивное звучание наблюдается в том случае, когда источник теплоты расположен на расстоянии четверти длины трубы от нижнего конца. Эффект наблюдается, если средняя скорость движения воздуха в трубе изменяется в некотором интервале, а мощность теплового источника выше некоторого предельного значения.

Самовозбуждение колебаний происходит и в том случае, когда электрический ток в сетке отсутствует, но на ее поверхности располагаются горящие образцы твердого топлива (древесины, угля, органического стекла и пр., рисунок 1.1, д, е). Так же, как в трубе Рийке и в случае капиллярного поющего пламени, колебания с частотой первой гармоники возникают, когда горение происходит в нижней половине трубы [4]. В трубах длиной менее 1м колебания развиваются постепенно в результате усиления случайных малых пульсаций скорости и давления, которые всегда присутствуют в реальных потоках газа. Колебания, возникающие по такому сценарию, называются «мягким» режимом



автоколебаний, который наблюдается во всех рассмотренных до сих пор установках. В длинных трубах, когда горящие образцы находятся на расстоянии от нижнего конца трубы, близком к  $\frac{1}{4}$  ее длины, наблюдается следующая картина. Сначала возникает мягкий режим автоколебаний. Над образцом образуется диффузионное колеблющееся пламя и можно считать, что процесс возбуждения колебаний аналогичен тому, который происходит в трубе с капиллярным поющим пламенем. По мере выгорания топлива амплитуда колебаний постепенно нарастает, затем в течение нескольких секунд наблюдается резкое усиление колебаний и сокращение пламени. Происходит переход к установившимся колебаниям с более высокой амплитудой и сокращение пламени. Пламя сильно турбулизируется, горение топлива происходит по обе стороны сетки. Если переместить сетку ближе к открытому концу или середине трубы, наблюдается только мягкий режим автоколебаний, но с меньшей амплитудой. Это значит, что автоколебания с высокой амплитудой  $p_{ж}$  и интенсивным горением топлива возникают в том случае, когда в трубе уже имеются колебания газа, амплитуда которых  $p_m$  достигает некоторого «критического» значения (рисунок 1.2, б). Автоколебания, возникающие по такой схеме называют «жестким» режимом автоколебаний. При горении древесины и угля наблюдается и беспламенный режим вибрационного горения. В этом случае жесткий режим автоколебаний похож на колебания газа в трубе Рийке, так как между раскаленными частицами твердого топлива и раскаленной сеткой имеется определенная аналогия. Отличие состоит в том, что сетка нагревается искусственно, а слой частиц раскаляется вследствие колебаний, которые сам же и поддерживает.

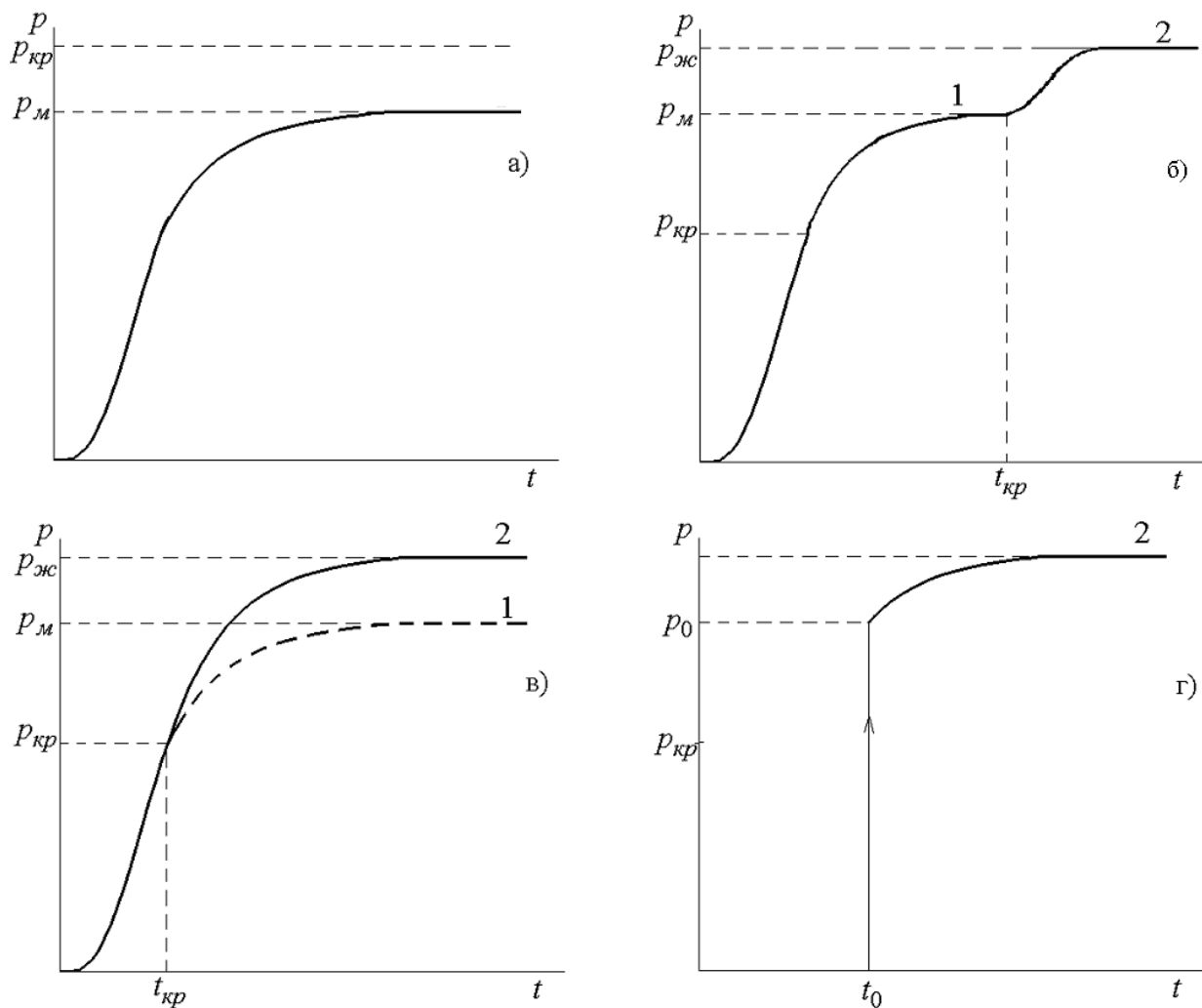


Рисунок 1.2 «Жесткие» режимы автоколебаний:

а – «мягкий» режим;

б, в – «жесткий» режим на основе «мягкого» режима автоколебаний;

г – вследствие начального импульса давления;

1, 2 – зависимости амплитуды колебаний давления от времени,

«мягкий» и «жесткий» режим, соответственно

При горении смесей жидких горючих газов и паров жидких топлив с воздухом за плохообтекаемыми телами (рисунок 1.1, д, е) самовозбуждение колебаний имеет мягкий характер. Жесткий режим автоколебаний устанавливается в течение нескольких периодов. Амплитуда колебаний нарастает так быстро, что мягкий режим автоколебаний не успевает установиться (рисунок 1.2, в). Отличие процессов жесткого возбуждения автоколебаний, соответствующих

рисунка 1.2, б, в, объясняется особенностями горения твердых частиц и газов. Обсуждение этого вопроса будет дано в Главе 2 при рассмотрении механизмов обратной связи автоколебаний.

Термоакустические колебания наблюдаются и при отсутствии потока воздуха. Для этого в горизонтально расположенную трубу, один конец которой закрыт, а другой открыт, или закрытую на обоих концах, необходимо поместить нагреватель и близко расположенный к нему охладитель (рисунок 1.1, е). При некоторой разнице температур происходит мягкое самовозбуждение звука. Этот эффект был обнаружен Зондхауссом [3].

Тот факт, что небольшие начальные пульсации параметров потока газа с течением времени вырастают до колебаний скорости и давления с очень большой амплитудой говорит о том, что течение газа становится неустойчивым. Этот термин заимствован из общей теории устойчивости и разработанной на ее основе теории автоматического регулирования [4].

Если параметры, описывающие некоторый процесс (физический, химический и пр.) не изменяются с течением времени, система, в которой протекает процесс, находится в положении (состоянии) статического равновесия. Пусть в результате внешнего воздействия один из параметров отклоняется от равновесного значения. Представим это принципиальной схемой (рисунок 1.3), где  $x(t)$  – входной параметр, характеризующий

внешнее воздействие,  $y(t)$  – выходной параметр, описывающий реакцию системы. Если после устранения внешнего воздействия система с течением времени возвращается в исходное положение равновесия, то она и протекающий в ней процесс называются устойчивыми. Если система монотонно удаляется от состояния равновесия или совершает около

положения равновесия колебания с возрастающей амплитудой, то она будет неустойчивой. Так как после устранения внешнего воздействия система совершает собственное движение, например, собственные колебания, то условие устойчивости имеет вид

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_c(t) = 0. \quad (1.1)$$

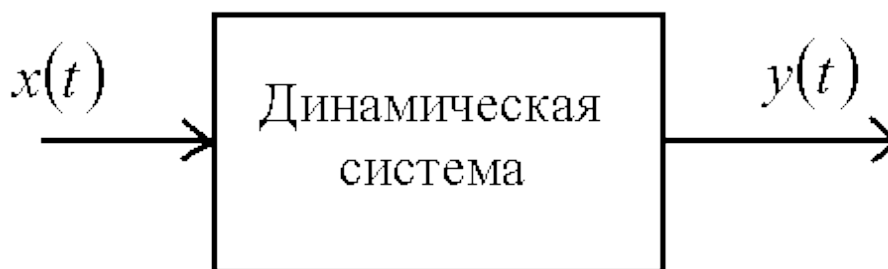


Рисунок 1.3 Принципиальная схема динамической системы

Пусть в трубе, заполненной воздухом, возбуждаются акустические колебания. После отключения источника звука поглощение акустических волн приводит к затуханию колебаний, условие (1.1) выполняется, и данная система устойчива.

Рассмотрев процесс самовозбуждения колебаний газа в энергетических установках с позиций теории устойчивости, проведем его анализ с физической точки зрения [2, 4].

Любая автоколебательная система включает собственно колебательную систему, источник энергии и механизм обратной связи, управляющий источником (рисунок 1.4). При возбуждении вибрационного горения колебательной системой является камера сгорания, заполненная газом, к которой в более сложных случаях могут добавиться другие элементы установки.

В энергетических установках, использующих газообразные компоненты, при пересечении зоны горения массовый расход остается постоянным, градиент давления незначительный. В этом случае газ

приобретает энергию, необходимую для поддержания колебаний, вследствие подвода теплоты, выделяющейся при сгорании топлива. В трубе Рийке, установке Зондхаусса, неравномерно нагретом резонаторе Гельмгольца самовозбуждение колебаний происходит за счет теплоты, получаемой газом от находящихся в потоке нагретых тел.

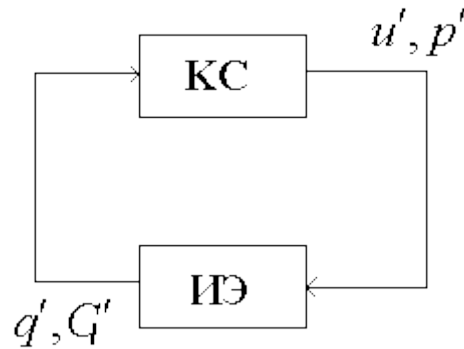


Рисунок 1.4 Принципиальная схема автоколебательной системы:  
КС – колебательная система, ИЭ – источник энергии

В отсутствие пульсаций параметров газа источник выделяет постоянное количество энергии в единицу времени. Усиление и поддержание колебаний происходит в том случае, когда процесс выделения энергии имеет периодический характер. Это значит, что между источником энергии и колебательной системой существует обратная связь и некоторый «механизм» обратной связи. В энергетических установках механизм обратной связи – это совокупность физико-химических процессов, происходящих в зоне горения или области теплоподвода под воздействием акустических колебаний, приводящих к периодическому выделению энергии.

Рассмотрим причины, приводящие к постепенному усилению малых случайных пульсаций параметров течения газа до установившихся колебаний, так, как это показано на рисунке 1.2, а.

Наличие нагретых тел в потоке газа или неравномерный нагрев внешней стороны стенок трубы являются причинами самовозбуждения

акустических колебаний в трубе Рийке и неравномерно нагретом резонаторе Гельмгольца. Если возмущения потока отсутствуют, процесс теплопередачи будет стационарным. Периодическая составляющая скорости теплоподвода, необходимая для возбуждения колебаний, появляется благодаря воздействию звуковых колебаний на теплообмен газа с нагретым телом или стенками трубы. Например, в трубе Рийке колебания скорости потока приводят к периодическим изменениям скорости теплоотдачи от нагретого тела. Этот процесс математически можно представить выражением [2]

$$q'(t) = K_u u'(x^*, t) = |K_u| u'(x^*, t) \exp(-i\psi). \quad (1.2)$$

Модуль и фаза передаточной функции зависят от числа Струхалия  $Sh = \omega d / U_0$ ,  $d$  - линейный размер нагретого тела, например, диаметр проволоки, из которой изготовлена сетка в трубе Рийке. При увеличении числа Струхалия модуль передаточной функции быстро уменьшается, а фаза увеличивается, причем при  $Sh \rightarrow \infty$  имеем  $|K_u| \rightarrow 0$ ,  $\psi \rightarrow \pi/2$ .

Таким образом, колебания скорости теплоотдачи отстают по фазе от колебаний скорости потока на угол  $\psi$ , который при увеличении числа Струхалия достигает предельного значения  $\pi/2$ . Так как процесс теплоотдачи обладает определенной инерцией, то при больших числах Струхалия нагретое тело не успевает передать газу теплоту, обусловленную колебаниями скорости потока, поэтому амплитуда колебаний скорости теплоотдачи стремится к нулю.

## **1.2 Энергетический критерий термоакустической неустойчивости**

Физический анализ принципиальной схемы автоколебательной системы показал, что энергетическая составляющая процесса самовозбуждения колебаний имеет первостепенное значение. Ясно, что

пульсации параметров потока будут усиливаться, если в результате периодического выделения теплоты или дополнительного количества газа происходит увеличение энергии собственных колебаний газа – акустической энергии. Далее будут рассматриваться установки с тепловыми источниками энергии. В этом случае автоколебания газа часто называют термоакустическими колебаниями.

Рассмотрим некоторый объем газа, который получает теплоту от внутреннего источника или в результате теплопередачи от внешнего источника через непроницаемую часть поверхности (рисунок 1.5) [4].

$$A = \langle \oint p' \vec{u}' d\vec{S} \rangle_t. \quad (1.3)$$

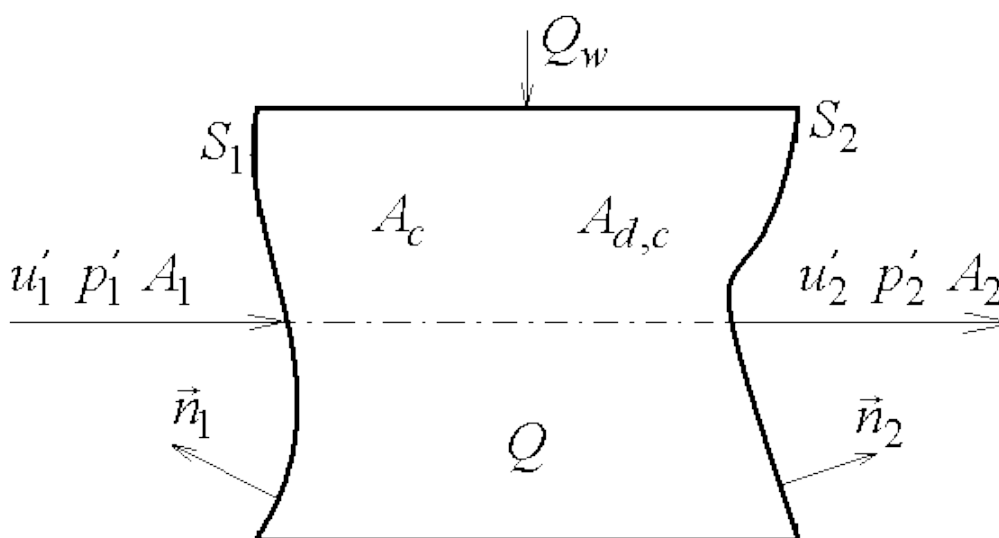


Рисунок 1.5 Поток акустической энергии через область теплоподвода:  
 $Q$ ,  $Q_w$  – скорость теплоподвода от внутренних и внешних источников,  
 соответственно

По определению [5] средний за период колебаний поток акустической энергии через поверхность, ограничивающую выделенный объем, который будем называть областью теплоподвода.

Пусть газ поступает в область теплоподвода через часть поверхности  $S_1$ , а выходит через часть поверхности  $S_2$ . Через оставшуюся непроницаемую часть поверхности поток энергии отсутствует. С учетом

направления внешних нормалей на поверхностях  $S_1$  и  $S_2$ , из формулы (1.3) следует

$$A_2 - A_1 = \langle \int_{S_2} p'_2 \vec{u}'_2 d\vec{S}_2 - \int_{S_1} p'_1 |\vec{u}'_1| d\vec{S}_1 \rangle_t.$$

По закону сохранения энергии изменение потока акустической энергии равно ее изменению за единицу времени в области теплоподвода, где происходит преобразование тепловой энергии в механическую. Вследствие вязкости и теплопроводности газа часть акустической энергии теряется. С учетом сказанного

$$A_2 - A_1 = A_c - A_{d,c}.$$

Рассматривая энергетическую установку в целом, необходимо учесть потери энергии в холодной и горячей части потока, обусловленные, например, трением газа о стенки и излучением звука на входе и выходе из установки. Из энергетических соображений ясно, что колебания будут усиливаться, если акустическая энергия, генерируемая в области теплоподвода, превышает общие потери

$$A_c > A_d. \quad (1.4)$$

При выполнении этого условия поток газа, пересекая область теплоподвода, получает дополнительную акустическую энергию, так как  $A_2 > A_1$ , и процессы, происходящие в энергетической установке становятся неустойчивыми. Если неравенство имеет противоположный знак, колебания газа не возникают, течение газа – устойчивое. Равенство получаемой и теряемой акустической энергии

$$A_c = A_d, \quad (1.5)$$

соответствует границе неустойчивости, или что то же самое, границе устойчивости. Выбор термина зависит от того, что является целью изучения – неустойчивость процесса или его устойчивость.

Применяя энергетические соотношения (1.4), (1.5), следует иметь в виду, какая из стадий развития автоколебаний исследуется.



Первоначальное течение газа находится в состоянии статического (с точки зрения колебательного движения) равновесия. Малые случайные возмущения параметров потока не могут изменить устойчивость движения газа, так как  $A_{c,L} < A_{d,L}$ . Индекс «L» означает, что процессы, происходящие в энергетической установке, рассматриваются в линейной постановке.

Изменяя условия течения газа и процесса тепловыделения, можно добиться равенства получаемой и теряемой газом акустической энергии. Это состояние соответствует границе устойчивости (или неустойчивости) – малые пульсации параметров потока газа не гасятся, но и не усиливаются. Равенство (1.5) имеет вид

$$A_{c,L} = A_{d,L}. \quad (1.6)$$

Условие термоакустической неустойчивости (1.4) принимает вид

$$A_{c,L} > A_{d,L}. \quad (1.7)$$

Физический смысл этого неравенства состоит в том, что при выполнении такого условия происходит самовозбуждение колебаний газа. На этой стадии амплитуда пульсаций скорости газа и давления быстро нарастает. В силу того, что реальные физические процессы – нелинейные, при достаточно большой амплитуде колебаний темп генерации акустической энергии в области теплоподвода замедляется. Это приводит к снижению темпа роста амплитуды колебаний газа, чему способствует также ускорение процессов диссипации энергии. В итоге условие энергетического баланса (1.5) выполняется повторно, однако, теперь оно имеет другой смысл. При выполнении такого условия газ совершает установившиеся колебания с постоянной частотой и амплитудой. Это состояние часто называют состоянием динамического равновесия, и оно является устойчивым. Условие установившихся, устойчивых колебаний газа запишем в виде

$$A_{c,N} = A_{d,N}. \quad (1.8)$$

Индекс « $N$ » означает, что это равенство выполняется, когда учитывается нелинейный характер процессов, приводящих к возбуждению термоакустических колебаний.

Соотношения (1.6) – (1.8) составляют основу энергетического метода исследования автоколебаний газа в энергетических установках [2, 4, 5]. По общему мнению он проще и физически нагляднее, чем методы, основанные на теории дифференциальных уравнений или теории автоматического регулирования.

## Глава 2 Генерация и поглощение акустической энергии

### 2.1 Генерация акустической энергии в области теплоподвода

В работах [6, 7] был проведен анализ распространения акустических возмущений в трубе постоянного сечения. На некотором участке газу

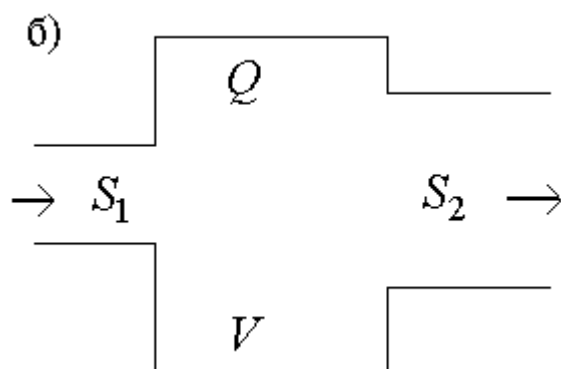
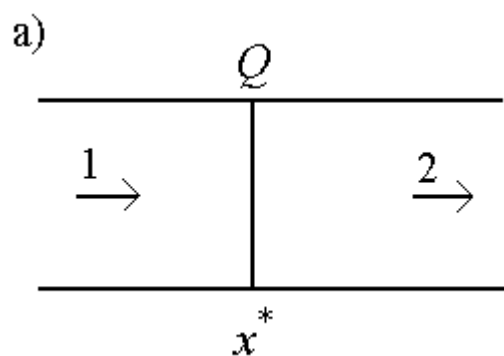


Рисунок 2.1. Идеализация области теплоподвода:

а – плоский тепловой источник;  
б – тепловыделение в акустической емкости

сообщается теплота, которая выделяется при горении, а также посредством теплопередачи от нагретых тел, расположенных в потоке, или от стенок трубы. Предполагалось, что протяженность области теплоподвода мала по сравнению с длиной звуковой волны. Следует заметить, что при горении под областью теплоподвода подразумевается начальный участок зоны горения, наиболее чувствительный к возмущениям потока и где наибольшая скорость тепловыделения. Область догорания не учитывается.

В этом случае реальная область теплоподвода заменяется плоскостью (рисунок 2.1, а), разделяющей поток на холодную и горячую части, в которых течения – одномерные, а газ – идеальный. Чтобы связать возмущения скорости потока и давления по обе стороны плоскости теплоподвода, использовались линеаризованные уравнения сохранения

импульса и энергии. Уравнение сохранения массы применяется в том случае, если необходимо учитывать возмущения энтропии. Для малых чисел Маха в обеих частях потока были получены соотношения:

$$\begin{aligned} p'_1(x^*, t) &= p'_2(x^*, t), \\ u'_2(x^*, t) - u'_1(x^*, t) &= (B - 1)U_{1,0}q'/Q_0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Назовем эту схему идеализации моделью Раушенбаха–Мерка.

Такой подход не применим к устройствам типа емкость-труба. Одним из параметров, определяющих характер акустических колебаний и их частоту, является объем емкости, поэтому область теплоподвода не может быть сведена к плоскости разрыва. Кроме того, общая площадь отверстий, через которые газ поступает в емкость, может отличаться от площади поперечного сечения трубы–резонатора.

Рассмотрим следующую схему (рисунок 2.1, б) [2, 4]. Горение происходит в цилиндрической емкости, протяженность которой мала по сравнению с длиной волны ( $l_c/\lambda \ll 1$ ). Потoki газа на входе и выходе из зоны горения – одномерные, причем  $S_1, S_2 \ll S_c$ . Уравнения сохранения массы, импульса и энергии в интегральной форме, описывающие процессы в зоне горения, имеют вид:

$$\begin{aligned} \oint \rho \vec{U} d\vec{S} &= -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV, \\ \int \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} dV &= -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho U_i dV, \\ \oint \rho \vec{U} \left( \frac{U^2}{2} + c_p T \right) d\vec{S} &= -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \left( \frac{U^2}{2} + c_v T \right) dV + Q. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Интегралы в левых частях первого и третьего уравнений берутся по всей поверхности, ограничивающей область теплоподвода. Во втором уравнении  $\Pi_{ik} = P\delta_{ik} + \rho U_i U_k$  есть тензор плотности потока  $i$ -й компоненты импульса.

К уравнениям (2.2) добавляется уравнение состояния идеального газа

$$P = \rho R^* T. \quad (2.3)$$

Представим параметры потока в виде суммы средних (стационарных) величин и бесконечно малых возмущений

$$p = P_0 + p'(x, t), \quad U = U_0 + u'(x, t), \quad \rho = \rho_0 + \rho'(x, t),$$

$$T = T_0 + T'(x, t), \quad Q = Q_0 + q'(x, t).$$

Для стационарного течения из (2.2) следует

$$\rho_{1,0} U_{1,0} S_1 = \rho_{2,0} U_{2,0} S_2, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \Pi_{xx}}{\partial x} = 0, \quad \Pi_{xx} = P_0 + \rho_0 U_{0,x}^2 = const,$$

$$\rho_{2,0} U_{2,0} \left( \frac{U_{2,0}^2}{2} + c_{p,2} T_{2,0} \right) S_2 = \rho_{1,0} U_{1,0} \left( \frac{U_{1,0}^2}{2} + c_{p,1} T_{1,0} \right) S_1 + Q_0. \quad (2.5)$$

Используем известную в акустике формулу для скорости звука  $c^2 = \gamma P_0 / \rho_0$ , тогда

$$P_0 + \rho_0 U_{0,x}^2 = P_0 (1 + \gamma M_0^2).$$

При условии  $M_0 \ll 1$  для обеих частей потока вторым членом в скобках можно пренебречь, т.е.

$$P_{1,0} = P_{2,0} = P_{V,0}. \quad (2.6)$$

Пренебрегая в уравнении (2.5) членами, содержащими квадраты скоростей, с учетом равенства (2.4) получаем выражение

$$1 + \frac{Q_0}{\rho_{1,0} U_{1,0} c_{p,1} T_{1,0} S_1} = \frac{c_{p,2} T_{2,0}}{c_{p,1} T_{1,0}} = B. \quad (2.7)$$

В рассматриваемом случае основной перенос импульса происходит по оси  $x$ . Плотность потока импульса  $\Pi_{xx} = P$ , так как членом содержащим  $U_x^2$ , можно пренебречь. Из уравнения сохранения импульса следует

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}(\rho U_x) = 0.$$

С учетом того, что для акустических возмущений зависимость от времени описывается функцией  $\exp(i\omega t)$ , получается

$$\frac{\partial p'}{\partial x} + i\omega(\rho_0 u'_0 + U_{0,x} p' + \rho' u'_x) = 0.$$

Введем безразмерные величины, выбрав в качестве масштабов  $P_0, \rho_0, c$ , как это принято в акустике, и длину области теплоподвода. Тогда  $\bar{p} = p'/P_0$ ,  $\bar{\rho} = \rho'/\rho_0$ ,  $\bar{u}_x = u'_x/c$ ,  $\bar{x} = x/l_c$ . Если учесть, что  $\omega = 2\pi c/\lambda$ , применив формулу для скорости звука, получим

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{i2\pi\gamma l_c}{\lambda}(\bar{u}_x + M_0 \bar{\rho} + \bar{\rho} \bar{u}_x) = 0.$$

Так как  $l_c/\lambda \ll 1$ , второй член содержит величины второго и более высоких порядков малости. Следовательно, в первом приближении

$$p'_1 = p'_2 = p'_V, \quad (2.8)$$

то есть возмущения давления на входе и выходе из зоны горения равны.

Если в уравнении сохранения энергии (2.2) отбросить члены, содержащие квадраты скоростей, произведения акустических возмущений, получим

$$\begin{aligned} c_{p,2} S_2 (\rho_{2,0} T_{2,0} u'_2 + \rho_{2,0} U_{2,0} T'_2 + U_{2,0} T_{2,0} \rho'_2) = c_{p,1} S_1 (\rho_{1,0} T_{1,0} u'_1 + \\ + \rho_{1,0} U_{1,0} T'_1 + U_{1,0} T_{1,0} \rho'_1) + q' - \frac{\partial}{\partial t} \int c_V (\rho_0 T' + T_0 \rho') dV \end{aligned} \quad (2.9)$$

Из уравнения состояния (2.3) следует

$$P_0 = \rho_0 R^* T_0, \quad p' = R^* (\rho_0 T' + T_0 \rho'), \quad \bar{p} = \bar{\rho} + \bar{T}. \quad (2.10)$$

Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} \rho_0 T_0 u' + \rho_0 U_0 T' + U_0 T_0 \rho' = \rho_0 T_0 c [\bar{u} + M_0 (\bar{T} + \bar{\rho})] = \\ = \rho_0 T_0 c (\bar{u} + M_0 \bar{\rho}). \end{aligned}$$

Членом, содержащим число Маха, можно пренебречь. С учетом условия непрерывности давления и второго из выражений (2.10), заменяя дифференцирование по времени множителем  $i\omega$ , получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{c_v p'}{R^*} dV = \frac{i\omega V c_v p'}{R^*},$$

где  $c_v, R^*$  – средние для области теплоподвода величины.

Поделим уравнение (2.9) на  $\rho_{1,0} c_{p,1} T_{1,0}$ . С учетом сделанных замечаний получим

$$\theta S_2 u'_2 - S_1 u'_1 = \frac{q'}{\rho_{1,0} c_{p,1} T_{1,0}} - \frac{i\omega V c_v p'}{R^* \rho_{1,0} c_{p,1} T_{1,0}}.$$

Применяя уравнение состояния, условие равенства давлений (2.6), известные из термодинамики формулы для удельных теплоемкостей, получим

$$\theta = \frac{c_{p,2} \rho_{2,0} T_{2,0}}{c_{p,1} \rho_{1,0} T_{1,0}} = \frac{\gamma_2 (\gamma_1 - 1)}{\gamma_1 (\gamma_2 - 1)}.$$

Обычно с целью упрощения расчетов разницей в показателях адиабаты пренебрегают, тогда  $\theta \approx 1$ . Аналогично

$$\frac{c_v}{R^* \rho_{1,0} T_{1,0} c_{p,1}} = \frac{\gamma_1 - 1}{(\gamma - 1) \gamma_1 P_{1,0}} \approx \frac{1}{\rho_{1,0} c_1^2}.$$

С учетом выражения (2.7)

$$\frac{q'}{\rho_{1,0} c_{p,1} T_{1,0}} = (B - 1) S_1 U_{1,0} q' / Q_0.$$

Линеаризованное уравнение сохранения энергии окончательно имеет вид

$$S_2 u'_2 - S_1 u'_1 = \frac{(B - 1) S_1 U_{1,0} q'}{Q_0} - \frac{i\omega V p'_1}{\rho_{1,0} c_1^2}. \quad (2.11)$$

При уменьшении емкости до величины  $V = S_c l_c = S_2 l_c$ , а также при условии  $S_1 = S_2$ , последний член в уравнении (2.11) будет пропорционален

$l_c \bar{p}_1 / \lambda$  и станет величиной второго порядка малости. В этом случае получается выражение (2.1), соответствующее модели Раушенбаха-Мерка для трубы постоянного сечения.

Итак, получено обобщенное условие, связывающее акустические возмущения на границах области теплоподвода в трубе и устройствах типа емкость-труба.

Средний за период колебаний поток акустической энергии, проходящий через поверхность, ограничивающую некоторый объем газа, определяется выражением

$$A = \left\langle \oint \operatorname{Re}(p') \operatorname{Re}(u') dS \right\rangle_t.$$

Для цилиндрической области теплоподвода (рисунок 2.1, б) при условии непрерывности давления (2.8) получается

$$A = \left\langle \operatorname{Re}(p'_1) [\operatorname{Re}(S_2 u'_2 - S_1 u'_1)] \right\rangle_t = A_2 - A_1 = A_c.$$

Если разница между выходящим и входящим потоками энергии положительна, то  $A_c > 0$  и, следовательно, в области теплоподвода происходит выделение акустической энергии. При  $A_c < 0$  энергия поглощается, а в случае  $A_c = 0$  область теплоподвода нечувствительна к акустическим возмущениям. Ясно, что самовозбуждение колебаний возможно, если область теплоподвода генерирует акустическую энергию, и выполняется условие

$$A_c > A_d. \quad (2.12)$$

Равенство

$$A_c = A_d \quad (2.13)$$

соответствует границе неустойчивости. Избыток энергии способствует усилению возникающих колебаний. Энергетическое условие (2.12) и уравнение (2.13) являются физическим обоснованием одноименного метода.



В начальной стадии акустические возмущения малы, и можно воспользоваться линеаризованным уравнением сохранения энергии (2.11).

Тогда

$$A_c = \left\langle \operatorname{Re}(p'_1) \operatorname{Re} \left[ \frac{(B-1)S_1 U_{1,0} q'}{Q_0} - \frac{i\omega V p'_1}{\rho_{1,0} c_1^2} \right] \right\rangle_t.$$

Для установившихся гармонических колебаний  $p'_1 = p_* \exp(i\omega t)$ . При усреднении за период колебаний второй член в квадратных скобках приводит к интегралу, содержащему  $\cos \omega t \sin \omega t$ , который равен нулю. Физически это можно объяснить тем, что газ считается идеальным, поэтому при его сжатии акустическая энергия не поглощается. Итак

$$A_c = \frac{(B-1)S_1 U_{1,0}}{Q_0} \langle \operatorname{Re}(p'_1) \operatorname{Re}(q') \rangle_t \quad (2.14)$$

Эта формула позволяет вычислить акустическую энергию, выделяющуюся за единицу времени (акустическую мощность) вследствие колебаний скорости тепловыделения при горении или периодической теплопередачи от внутренних и внешних тепловых источников.

В общем случае между колебаниями давления и колебаниями скорости тепловыделения существует фазовый сдвиг, зависящий от характера процессов, составляющих механизм обратной связи. Положим  $q' = |q| \exp i(\omega t - \psi)$ . Без учета потерь энергии энергетическое условие самовозбуждения колебаний  $A_c \geq 0$ . После интегрирования выражения (2.14) это уравнение принимает вид

$$\cos \psi \geq 0, \quad |\psi| \leq \pi/2.$$

Это известный критерий Рэлея.

Согласно модели Раушенбаха-Мерка зависимость колебаний скорости теплоподвода от акустических возмущений на входе в область, где расположен тепловой источник, можно представить в виде

$$q' = K_u u'_1 + K_p p'_1. \quad (2.15)$$

Подстановка передаточных функций  $q'(t) = |K_u|u'_b(t)\exp(-i\omega\tau_u)$  и  $q' = |K_p|p'(x^*, t)\exp(-i\omega\tau_p)$  в формулу (2.14) дает

$$A_c = \frac{(B-1)S_1U_{1,0}}{Q_0} \left\langle \operatorname{Re}(p'_1) \operatorname{Re} \left[ |K_u|e^{-i\omega\tau_u}u'_1 + |K_p|e^{-i\omega\tau_p}p'_1 \right] \right\rangle_t.$$

Возмущения скорости потока и давления связаны соотношением  $p'_1 = -Z_1u'_1$ , где импеданс  $Z_1$  зависит от конкретного вида входной части устройства, предшествующей области теплоподвода. Из акустики известно, что действительная часть импеданса, обусловленная поглощением звука, намного меньше мнимой ( $X_1/Y_1 \ll 1$ ). Тогда можно положить  $u'_1 = i p'_1/Y_1$  и получить

$$A_c = \frac{(B-1)S_1U_{1,0}p_*^2}{Q_0} \left\langle \cos \omega t \left[ \frac{|K_u|}{Y_1} \sin(\omega\tau_u - \omega t) + |K_p| \cos(\omega t - \omega\tau_p) \right] \right\rangle_t$$

При интегрировании по времени исчезнут члены, содержащие  $\cos(\omega t)\sin(\omega t)$ ,  $\cos(2\omega t)$ . Окончательное выражение для акустической мощности теплового источника имеет вид

$$A_c = \frac{(B-1)S_1U_{1,0}p_*^2}{2Q_0} \left( \frac{|K_u|}{Y_1} \sin \omega\tau_u + |K_p| \cos \omega\tau_p \right) \quad (2.16)$$

Если колебания скорости тепловыделения возникают вследствие возмущений скорости потока,  $K_p = 0$ . Без учета потерь акустической энергии условие самовозбуждения колебаний имеет вид

$$\sin(\omega\tau_u)/Y_1 \geq 0. \quad (2.17)$$

В общем случае импеданс  $Y_1$  может быть как положительным, так и отрицательным. В первом случае

$$u'_{Б1} = (|p'_1|/Y_1)\exp i(\omega t + \pi/2),$$

то есть колебания скорости потока опережают колебания давления на  $\pi/2$ .

Автоколебания возникают, если

$$0 \leq \omega \tau_u \leq \pi. \quad (2.18)$$

При  $Y_1 < 0$   $u'_1 = (|p'_1|/|Y_1|)\exp i(\omega t - \pi/2)$ , возмущения скорости потока отстают на  $\pi/2$  от возмущений давления, а условие самовозбуждения колебаний (2.17) дает

$$\pi \leq \omega \tau_u \leq 2\pi. \quad (2.19)$$

В качестве иллюстрации проведем упрощенный анализ самовозбуждения звука в трубе Рийке. Изменение температуры воздуха в трубе не учитывается. В соответствии с выражениями

$$\begin{aligned} u'(x, t) &= C \cos(k_0 x + \varphi) \exp i \omega t, \quad k_0 = \omega / c_0, \\ p'(x, t) &= -i \rho_0 c_0 C \sin(k_0 x + \varphi) \exp i \omega t. \end{aligned} \quad (2.20)$$

для трубы, открытой на концах, акустические возмущения в сечении, где расположена нагревательная сетка, описываются соотношениями

$$\begin{aligned} u'_1 &= u'(x^*, t) = C \cos(\omega x^* / c_0) \exp(i \omega t), \\ p'_1 &= p'(x^*, t) = -i \rho_0 c_0 C \sin(\omega x^* / c_0) \exp(i \omega t). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Ранее отмечалось, что пульсации теплового потока от сетки к проходящему через нее воздуху отстают по фазе от колебаний скорости потока на величину, не превышающую  $\pi/2$ . С учетом условия (2.17) самовозбуждение звука возможно, если  $Y_1 > 0$ . Для первой гармоники  $\omega_1 = \pi c_0 / l^*$ ,

$$Y_1 = \rho_0 c_0 \operatorname{tg}(\omega_1 x^* / c_0) = \rho_0 c_0 \operatorname{tg}(\pi x^* / l^*) > 0.$$

Отсюда следует, что явление Рийке наблюдается, если сетка расположена в нижней половине трубы,  $0 < x^* / l^* < 0,5$ .

## 2.2 Поглощение звука

Одной из причин поглощения звука является вязкость и теплопроводность газа в пристеночном пограничном слое. Поток акустической энергии, передаваемой ядром потока пограничному слою

$$A_v = \left\langle \int_S \operatorname{Re}(p') \operatorname{Re}(u'_y) dS \right\rangle_t, \quad (2.22)$$

где скобки означают усреднение за период колебаний. Для цилиндрической трубы  $dS = 2\pi R dx$ . На внешней границе пограничного слоя  $u'_y = u_y \exp(i\omega t)$ ,  $p' = p \exp(i\omega t)$ , тогда выражение (2.22) принимает вид

$$A_v = \pi R \int_0^l \operatorname{Re}(p) \operatorname{Re}(u_y) dx. \quad (2.23)$$

Воспользуемся решением Ротта [5] для поперечной компоненты акустической скорости

$$u_y = \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{n\sqrt{\operatorname{Pr}}} \right) \frac{d}{dx} \left[ u_x \left( \frac{v}{i\omega} \right)^{1/2} \right] + \frac{1}{n} \left( \frac{2}{1 + \beta} \frac{1}{\operatorname{Pr} + \sqrt{\operatorname{Pr}}} - \frac{\gamma - 1}{\sqrt{\operatorname{Pr}}} \right) u_x \frac{d}{dx} \left( \frac{v}{i\omega} \right)^{1/2}$$

В ядре потока газ можно считать идеальным, тогда из линеаризованного уравнения Эйлера следует

$$p' = \frac{i\rho_0 c^2}{\omega} \frac{\partial u'_x}{\partial x}, \quad u'_x = u_x e^{i\omega t}.$$

Если стенки трубы обладают высокой теплопроводностью,  $n = 1$ . С учетом сделанных замечаний, после подстановки выражения для  $u_y$  в (2.23) и интегрирования получается

$$A_v = \pi R \left( \frac{\omega}{2} \right)^{1/2} \left[ \left( 1 + \frac{\gamma-1}{\sqrt{\text{Pr}}} \right) \int_0^l \rho_0 (u_x)^2 v^{1/2} dx + \left( \frac{4}{3(\text{Pr} + \sqrt{\text{Pr}})} - \frac{\gamma-1}{\sqrt{\text{Pr}}} \right) \frac{\rho_0 c^2}{\omega^2} \int_0^l u_x \frac{du_x}{dx} \frac{dv^{1/2}}{dx} dx \right] \quad (2.24)$$

Пусть в сечении трубы  $x^*$  происходит скачкообразное увеличение температуры газа, после чего она изменяется по закону  $T_{2,0}(x)$ . Для газов  $v \sim T_0^{3/2}$ ,  $\rho_0 \sim T_0^{-1}$ .

Выражение (2.23) принимает вид

$$A_v = \pi R \left( \frac{\omega}{2} \right)^{1/2} \left[ \left( 1 + \frac{\gamma-1}{\sqrt{\text{Pr}}} \right) \rho_{1,0} v_1^{1/2} \left( \int_0^{x^*} u_1^2(x) dx + T_{1,0}^{1/4} \int_{x^*}^l \frac{u_2^2(x) dx}{T_{2,0}(x)} \right) + \left( \frac{4}{3(\text{Pr} + \sqrt{\text{Pr}})} - \frac{\gamma-1}{\sqrt{\text{Pr}}} \right) \frac{\rho_{1,0} c_1^2}{\omega^2} \frac{v_1^{1/2}}{T_{1,0}^{3/4}} \int_{x^*}^l u_2(x) \frac{du_2}{dx} \frac{dT_{2,0}^{3/4}}{dx} dx \right] \quad (2.25)$$

Если температура горячего газа постоянна, выражение для потока акустической энергии, поглощаемой в пограничном слое, упрощается

$$A_v = \pi R \left( \frac{\omega}{2} \right)^{1/2} \left[ \left( 1 + \frac{\gamma-1}{\sqrt{\text{Pr}}} \right) \rho_{1,0} v_1^{1/2} \left( \int_0^{x^*} u_1^2(x) dx + \left( \frac{T_{1,0}}{T_{2,0}} \right)^{1/4} \int_{x^*}^l u_2^2(x) dx \right) \right] \quad (2.26)$$

В качестве примера рассмотрим трубу, закрытую на входе и открытую на выходе. В этом случае  $u_1'(0,t) = 0$ , тогда  $\varphi_1 = -\pi/2$  и  $u_1'(x,t) = C_1 \sin(\omega x/c_1) \exp(i\omega t) = u_1(x) \exp(i\omega t)$ , где  $C_1$  – действительная величина.

Второе граничное условие  $p_2'(l^*,t) = 0$ , следовательно,  $\varphi_2 = -\omega l^*/c_2$ ,  $u_2'(x,t) = C_2 \cos[\omega(x-l^*)/c_2] \exp(i\omega t) = u_2(x) \exp(i\omega t)$ .

После подстановки  $u_1(x), u_2(x)$  в выражение (2.24) и интегрирования получается

$$A_v = \pi R \left( \frac{\omega}{2} \right)^{1/2} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{\sqrt{\text{Pr}}} \right) \rho_{1,0} v_1^{1/2} \left[ \frac{C_1^2}{2} \left( x^* - \frac{c_1}{2\omega} \sin \left( \frac{2\omega x^*}{c_1} \right) \right) + \left( \frac{T_{1,0}}{T_{2,0}} \right)^{1/4} \frac{C_2^2}{2} \left( l - x^* + \frac{c_2}{2\omega} \sin \left( \frac{2\omega(l^* - x^*)}{c_2} \right) \right) \right] \quad (2.27)$$

Для трубы, открытой на обоих концах,  $p_1'(0, t) = 0, \varphi_1 = 0$ ,  $u_1'(x, t) = C_1 \cos(\omega x / c_1) \exp(i\omega t)$ .

В этом случае получается выражение, почти совпадающее с (2.27). Отличие состоит в том, что член, содержащий  $\sin(2\omega x^* / c_1)$ , будет иметь положительный знак.

Пусть труба заполнена холодным газом,  $x^* = l$ . Если пренебречь членом, содержащим  $l^* - l$ , получается

$$A_v = \pi R \left( \frac{\omega}{2} \right)^{1/2} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{\sqrt{\text{Pr}}} \right) \rho_{1,0} v_1^{1/2} \frac{C_1^2}{2} \left( l - \frac{c_1}{2\omega} \sin \left( \frac{2\omega l}{c_1} \right) \right).$$

Для трубы, закрытой на входе и открытой на выходе,  $\omega_n = \pi n c_1 / l^*$ ; членом, содержащим синус, можно пренебречь, и получается известная формула [8] для трубы, заполненной однородным газом

$$A_v = \frac{\pi R \rho_{1,0} (\omega v_1)^{1/2} l}{2^{3/2}} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{\sqrt{\text{Pr}}} \right) C_1^2. \quad (2.28)$$

Если труба открыта на концах,  $\omega_n = 2\pi n c_1 / l^*$ , и получается то же самое выражение.

Пусть скачок температуры расположен на входе, т.е. труба заполнена горячим газом с температурой  $T_{2,0}$ . Полагая  $x^* = 0$ , с учетом указанных зависимостей плотности и вязкости газа от температуры, пренебрегая разницей величин  $\gamma, \text{Pr}$  для холодного и горячего газов, нетрудно получить формулу, совпадающую с (2.28) после замены индекса 1 на 2.

Из выражения (2.28) следует  $A_v \sim (\omega v)^{1/2} \rho_0$ . Для рассмотренных случаев  $\omega \sim c \sim T_0^{1/2}$ . Т.к.  $v \sim T_0^{3/2}$ ,  $\rho_0 \sim T_0^{-1}$ , оказывается, что при одинаковой амплитуде колебаний скорости потока поглощение звука в трубе постоянных размеров не зависит от температуры заполняющего ее газа. Если температура изменяется вдоль трубы, но достаточно медленно, в выражении (2.25) член, содержащий  $dT_{2,0}^{3/4}/dx$ , будет мал по сравнению с остальными. Тогда приближенно можно считать, что поглощение звука в горячем газе с малым градиентом температуры такое же, как и при постоянной температуре. Поток поглощаемой акустической энергии может быть вычислен по упрощенной формуле (2.28).

Другой причиной, приводящей к потерям акустической энергии, является излучение звука на концах трубы. Поток энергии, выходящий из трубы, определяется выражением

$$A_l = \int \operatorname{Re}(p'_l) \operatorname{Re}(u'_l) \chi_l S \quad (2.29)$$

Возмущения давления и скорости на конце трубы связаны соотношением  $p'_l = X_l u'_l$ . Для трубы, открытой на конце, действительная часть импеданса равна [9]

$$X_l = \rho_{l,0} \left( \frac{\omega^2 d^2}{16c_l} + \frac{u_l}{2} \right), \quad (2.30)$$

где  $u_l$  – амплитуда колебаний скорости потока на открытом конце трубы. С учетом сделанных замечаний и того, что  $u'_l = u_l \exp(i\omega t)$ , выражение (2.29) для потерь акустической энергии на открытом конце трубы после интегрирования принимает вид

$$A_l = \frac{\rho_{l,0} S u_l^2}{4} \left( \frac{\omega^2 d^2}{8c_l} + u_l \right). \quad (2.31)$$

## ЗАДАЧИ

**2.1** Вычислить поток акустической энергии, входящей в область теплоподвода, если по трубе в положительном направлении оси  $x$  распространяется плоская звуковая волна. Диаметр трубы 0.04 м, УЗД – уровень звукового давления на входе в область теплоподвода 160 дБ, средняя плотность газа 1.23 кг/м<sup>3</sup>, скорость звука 343 м/с.

*Решение.* Пульсации давления в газе, вызванные распространением волны, имеют вид

$$p'_1(x^*, t) = C_1^+ \cos(\omega t - k_1 x^*), \quad k_1 = \omega/c_1,$$

где  $C_1^+$  – амплитуда пульсаций. Пульсации скорости газа связаны с пульсациями давления известным из акустики соотношением для одномерных бегущих волн

$$u'_1(x^*, t) = p'_1(x^*, t)/(\rho_{1,0} c_1).$$

Подстановка этих выражений в формулу (2.31) дает

$$A_l = \frac{s(c_1^+)^2}{\rho_{1,0} c_1} \langle \cos^2(\omega t - k_1 x^*) \rangle_t.$$

Полагая  $\cos^2(\omega t - k_1 x^*) = [1 + \cos(2(\omega t - k_1 x^*))]/2$ , учитывая, что при усреднении за период колебаний интеграл, содержащий  $\cos(2\omega t)$ , обратится в нуль, получим

$$A_l = \frac{s(c_1^+)^2}{2\rho_{1,0} c_1} = 6 \text{ Вт}.$$

Связь УЗД с амплитудой колебаний давления  $C_1^+$ , измеряемой в Па, производится по известной формуле

$$I_p = 20 \log(10^5 C_1^+ / 2).$$

**2.2** Решить задачу 1 в случае, когда в трубе имеется стоячая волна.

*Решение.* Рассмотрим вынужденные колебания газа, создаваемые источником звука, расположенным на входе в трубу. Пульсации скорости



и давления можно представить в виде суммы двух слагаемых, одно из которых соответствует прямой, а второе – обратной бегущей волне.

$$p'_1(x^*, t) = C_1^+ \cos(\omega t - k_1 x^*) + C_1^- \cos(\omega t + k_1 x^*),$$

$$u'_1(x^*, t) = [C_1^+ \cos(\omega t - k_1 x^*) - C_1^- \cos(\omega t + k_1 x^*)] / \rho_{1,0} c_1.$$

Добавим и вычтем в этих выражениях член  $C_1^- \cos(\omega t - k_1 x^*)$ . После несложных преобразований они принимают вид

$$p'_1(x^*, t) = (C_1^+ - C_1^-) \cos(\omega t - k_1 x^*) + 2C_1^- \cos(\omega t) \cos(k_1 x^*),$$

$$u'_1(x^*, t) = [(C_1^+ - C_1^-) \cos(\omega t - k_1 x^*) + 2C_1^- \cos(\omega t) \cos(k_1 x^*)] / \rho_{1,0} c_1.$$

В этих формулах первые члены соответствуют прямой бегущей волне, а вторые – стоячей волне. Полный поток акустической энергии, входящей в область теплоподвода, представим в виде суммы

$$A_l = A_{l,t} + A_{l,s}.$$

Второе слагаемое, обусловленное наличием стоячей волны, равно

$$A_{l,s} = \frac{2S(C_1^-)^2 \sin(2k_1 x^*)}{\rho_{1,0} c_1} \langle \sin(\omega t) \cos(\omega t) \rangle_t = 0.$$

Это значит, что поступление акустической энергии в область теплоподвода связано с распространением прямой бегущей волны с амплитудой  $C_1^+ - C_1^-$ . Воспользовавшись результатом решения задачи 2.1, получаем

$$A_l = A_{l,t} = \frac{S(C_1^+ - C_1^-)^2}{2\rho_{1,0} c_1}.$$

При условии  $C_1^+ = C_1^-$  в трубе будет только стоячая волна, которая образуется в результате сложения двух бегущих волн с одинаковой амплитудой. Поэтому количество энергии, вносимое прямой волной, равно количеству выходящей энергии, обусловленное прохождением обратной волны. В результате, средний за период колебаний поток акустической энергии, входящей в область теплоподвода, равен нулю. Такой результат соответствует короткой трубе, закрытой на выходе, где происходит полное

отражение прямой волны, а потерями акустической энергии вследствие вязкости и теплопроводности газа можно пренебречь.

**2.3** Найти количество акустической энергии, теряемой в пристеночной области трубы, закрытой на входе, открытой на выходе. Газ, имеющий температуру  $T_{2,0} = 10^3 \text{ К}$ , совершает колебания с частотой первой гармоники и максимальной амплитудой пульсаций давления 200 Па. Длина трубы 2 м, радиус 20 мм,  $\gamma = 1.4$ ,  $\text{Pr} = 0.73$ , плотность газа и вязкость при  $T_{1,0} = 293 \text{ К}$  равны  $1.23 \text{ кг/м}^3$  и  $1.5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ , соответственно.

*Решение.* Выполним предварительные вычисления

$$c_2 = c_1 \sqrt{T_{2,0} / T_{1,0}} = 634 \text{ м/с},$$

$$\rho_{2,0} = \rho_{1,0} T_{1,0} / T_{2,0} = 0.36 \text{ кг/м}^3,$$

$$\nu_2 = \nu_1 (T_{2,0} / T_{1,0})^{3/2} = 9.46 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}.$$

В соответствии с формулой

$$f_n = c_0 (n - 1/2) / (2l^*), \quad l_c^* = l_c + \Delta l.$$

частота первой гармоники

$$\omega_1 = \frac{\pi c_2}{2l_c^*} = \frac{\pi c_2}{2(l_c + \Delta l)} = 495 \text{ рад/с}.$$

С учетом выражений (2.20), после замены индекса «0» на «2»

$$C_2 = p_{\max} / (\rho_{2,0} c_2) = 0.88 \text{ м/с}.$$

Потери энергии вычисляются по формуле (2.28), в которой индекс «1» заменен на «2». Результат вычислений

$$A_\nu = 0.01 \text{ Дж/с}.$$

**2.4** Вычислить потери акустической энергии, вызванные излучением звука на открытом конце трубы, закрытой на входе, заполненной газом с одинаковой температурой. Данные для расчета такие же, как в задаче 2.3. Решить задачу для первых двух частот колебаний.

*Решение.* В соответствии с формулой (2.31) необходимо определить среднюю плотность газа, скорость звука и амплитуду пульсаций скорости газа на конце трубы. Градиент температуры отсутствует, поэтому  $\rho_{l,0} = \rho_{2,0}$ ,  $c_l = c_2$ . Эти значения вычислены при решении задачи 2.3. Там же получено значение для  $C_2$  – максимальной амплитуды пульсаций скорости газа в трубе. С учетом выражения (2.20), после замены индекса «0» на «2» имеем

$$u'_2(x, t) = C_2 \cos(\omega_n x/c_2 + \varphi_2) \exp(i\omega_n t).$$

На закрытом входе в трубу, имеем  $\varphi_2 = \pm \pi/2$ . Тогда амплитуда пульсаций скорости газа на открытом конце трубы равна

$$u_l = |u'_2(l_c, t)| = C_2 \sin(\omega_n l_c/c_2).$$

Частота первой гармоники была ранее определена,  $\omega_1 = 495$  рад/с.

Согласно формуле

$$f_n = c_0(n - 1/2)/(2l^*), \quad l_c^* = l_c + \Delta l.$$

следующей будет частота  $\omega_3 = 3\omega_1$ . Вычисления по формуле (2.31) дают следующие результаты  $A_{l,1} = 8.4 \cdot 10^{-5}$  Вт,  $A_{l,3} = 1.4 \cdot 10^{-4}$  Вт.

## Глава 3 Продольные колебания газа в системах с тепловыми источниками

### 3.1 Колебания газа в трубах

Распространение малых акустических возмущений в идеальном изэнтропическом газе описывается волновым уравнением, в котором скорость звука постоянна, а решения могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} u'(x,t) &= C \cos(k_0 x + \varphi) \exp i\omega t, \quad k_0 = \omega/c_0, \\ p'(x,t) &= -i\rho_0 c_0 C \sin(k_0 x + \varphi) \exp i\omega t. \end{aligned} \quad (3.1)$$

В теории звука широко используется понятие акустического импеданса, равного отношению акустического давления к акустической скорости в данном сечении трубы или точке звукового поля. Импеданс является комплексной величиной, ее действительная часть обусловлена потерями акустической энергии, мнимая часть влияет на фазу звуковой волны. Без учета потерь граничные условия на концах трубы обычно записывают в виде

$$p'(0,t) = -iY_0 u'(0,t), \quad p'(l,t) = iY_l u'(l,t).$$

Из первого условия с учетом решений (3.1) следует

$$\varphi = \operatorname{arctg} \bar{Y}_0, \quad \bar{Y}_0 = Y_0 / (\rho_0 c_0).$$

Второе условие приводит к выражению

$$\operatorname{tg}(k_0 l) = \frac{\bar{Y}_0 + \bar{Y}_l}{\bar{Y}_0 \bar{Y}_l - 1}, \quad \bar{Y}_l = Y_l / (\rho_0 c_0)$$

Это известное в акустике уравнение частот колебаний газа в трубе с произвольными граничными условиями. Например, для трубы, открытой на концах, можно положить  $\bar{Y}_0 = \bar{Y}_l = 0$ , если вместо реальной длины трубы взять «эффективную» [2, 9]

$$l^* = l + 2\Delta l, \quad \Delta l = 0.613R. \quad (3.2)$$

Решение для частот колебаний имеет вид

$$f_n = c_0 n / (2l^*), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Если один из концов трубы закрыт, например,  $u'(0, t) = 0$ , тогда  $\bar{Y}_0 = \infty$ ,  $\bar{Y}_l = 0$ , а из уравнения частот следует

$$f_n = c_0 (n - 1/2) / (2l^*), \quad l^* = l + \Delta l.$$

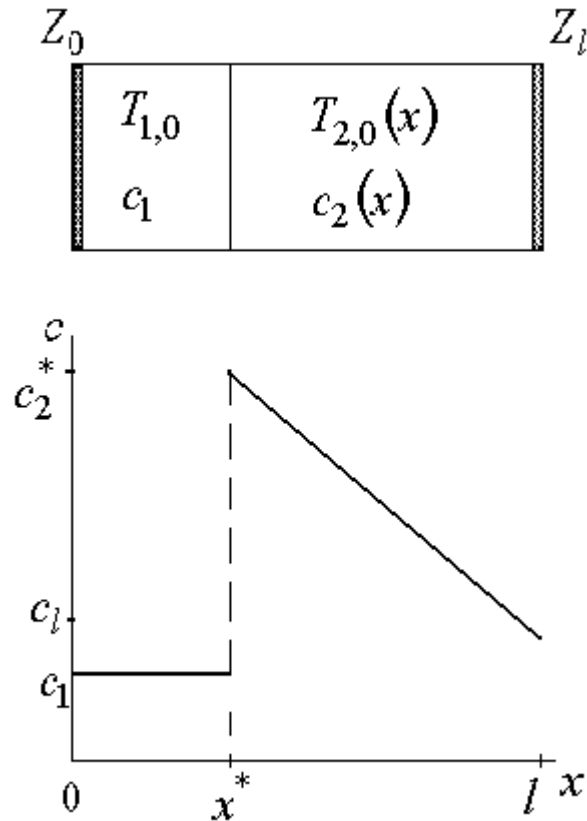


Рисунок 3.1 Принципиальная схема трубы и распределение скорости звука в газе

Пусть внутри трубы имеется плоскость теплоподвода, которая делит поток на холодную и горячую части. Газ входит в трубу, имея температуру  $T_{1,0}$ . В некотором сечении на расстоянии  $x^*$  от входа температура скачком увеличится до  $T_{2,0}$ . Потом за счет теплоотдачи к стенкам температура газа и скорость звука, которая прямо пропорциональна корню квадратному из температуры, уменьшаются (рисунок 3.1). Если скорость потока велика, а труба – короткая, падение температуры можно не учитывать.

Исследования распространения звуковых волн в трубе при скачкообразном изменении температуры газа [2] показали, что при перемещении скачка от входа к концу трубы частоты колебаний изменяются неравномерно. Например, в трубе, открытой на концах, в интервалах значений  $x^*$  от 0 до  $0.25l$  и от  $0.5l$  до  $l$  первая из частот колебаний быстро уменьшается, а в диапазоне от  $0.25l$  до  $0.5l$  практически остается постоянной. Уравнение частот колебаний имеет вид

$$\sqrt{B} \operatorname{tg}(\omega x^*/c_1) + \operatorname{tg}[\omega(l-x^*)/c_2] = 0. \quad (3.3)$$

В длинной трубе при небольшой скорости потока, а также при наличии воздушного или водяного охлаждения стенок падение температуры будет значительным, появится градиент скорости звука в горячей части потока. Для идеального газа при отсутствии возмущений тепловых потоков, градиента среднего давления, при малых числах Маха волновое уравнение для скорости потока имеет вид [4]

$$\frac{\partial^2 u_2'}{\partial t^2} - c_2^2(x) \frac{\partial^2 u_2'}{\partial x^2} = 0. \quad (3.4)$$

В общем случае это уравнение решается приближенными методами или путем численного интегрирования. Положим, что скорость звука изменяется по линейному закону

$$c_2(x) = a - bx \quad \text{при} \quad x^* \leq x \leq l. \quad (3.5)$$

Решение ищется в виде  $u_2' = F_u(x) \exp(i\omega t)$ . После подстановки в выражение (2.4) получается уравнение

$$\frac{d^2 F_u}{dx^2} + \left( \frac{\omega}{c_2} \right)^2 F_u = 0 \quad (3.6)$$

Введем новую переменную

$$y_u = \int \frac{\omega dx}{c_2}.$$

После преобразования уравнение (3.6) принимает вид

$$\frac{d^2 F_u}{dy_u^2} + \frac{b}{\omega} \cdot \frac{dF_u}{dy_u} + F_u = 0.$$

Решение ищется в виде  $F_u = F^* \exp(\alpha'y)$ . Определяя значения  $\alpha'$ , получим

$$F_u(y_u) = e^{-\frac{by_u}{2\omega}} (F_1^* e^{i\beta y_u} + F_2^* e^{-i\beta y_u}),$$

$$\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{2\omega}\right)^2}.$$

Возвращаясь к исходной переменной, полагая  $2F_1^* = C_2 \exp i\varphi_2$ ,  $2F_2^* = C_2 \exp(-i\varphi_2)$ , имеем

$$u'_2(x, t) = \exp\left(-\frac{b}{2} \int \frac{dx}{c_2}\right) C_2 \cos\left[\left(\omega \beta \int \frac{dx}{c_2}\right) + \varphi_2\right] \exp(i\omega t). \quad (3.7)$$

Для распределения (3.5)

$$\int \frac{dx}{c_2} = \int \frac{dx}{a - bx} = -\frac{1}{b} \ln(a - bx) + const.$$

Если градиент скорости звука отсутствует, для акустической скорости должно быть выражение типа (3.1)

$$u'_2(x, t) = C_2 \cos(\omega x/a + \varphi_2) \exp(i\omega t). \quad (3.8)$$

При  $b = 0, \beta = 1$ , чтобы из соотношения (3.7) получить (2.8), необходимо положить  $const = (1/b) \ln a$ . Полагая  $c_2(x) = a = c_2^*$ , переходя к пределу при  $b \rightarrow 0$ , раскрывая неопределенность типа  $0/0$ , получим

$$\left(\int \frac{dx}{c_2}\right) \Big|_{b \rightarrow 0} = \left[ -\frac{1}{b} \ln\left(1 - \frac{b}{a} x\right) \right] \Big|_{b \rightarrow 0} = \frac{x}{c_2^*}, \quad (3.9)$$

что доказывает правильность выбора постоянной.

Окончательное выражение для возмущений скорости потока принимает вид

$$u_2'(x,t) = C_2 e^{i\omega t} \left(1 - \frac{bx}{a}\right)^{1/2} \cos \left[ \varphi_2 - \frac{\omega\beta}{b} \ln \left(1 - \frac{bx}{a}\right) \right]. \quad (3.10)$$

Акустическое давление можно определить из линеаризованного уравнения непрерывности

$$p_2'(x,t) = -\rho_{2,0} c_2^2 \int \frac{\partial u_2'}{\partial x} dt = -\frac{\rho_{2,0} c_2^2}{i\omega} \cdot \frac{dF_u}{dx} e^{i\omega t}.$$

Выражение для возмущений давления имеет вид

$$p_2'(x,t) = -i\rho_{2,0} c_2 C_2 e^{i\omega t} \left(1 - \frac{bx}{a}\right)^{1/2} \left\{ \frac{b}{2\omega} \cos \left[ \varphi_2 - \frac{\omega\beta}{b} \ln \left(1 - \frac{bx}{a}\right) \right] + \beta \sin \left[ \varphi_2 - \frac{\omega\beta}{b} \ln \left(1 - \frac{bx}{a}\right) \right] \right\}. \quad (3.11)$$

На входе в трубу справедливо соотношение

$$p_1'(0,t) = -iY_0 u_1'(0,t),$$

где  $Y_0$  – мнимая часть импеданса в сечении  $x=0$ ; выражения для акустических возмущений в холодном газе описываются выражениями (3.1) с учетом соответствующего индекса. Из этого граничного условия следует

$$\varphi_1 = \text{arctg} [Y_0 / (\rho_{1,0} c_1)]. \quad (3.12)$$

На конце трубы выполняется граничное условие

$$p_2'(l,t) = iY_l u_2'(l,t),$$

и с учетом формул (3.10), (3.11) имеем

$$\varphi_2 = \frac{\omega\beta}{b} \ln \left(1 - \frac{bl}{a}\right) - \text{arctg} \left[ \frac{1}{\beta} \left( \frac{b}{2\omega} + \frac{Y_l}{\rho_{l,0} c_l} \right) \right].$$

Условия, связывающие акустические возмущения до и после скачка температуры, имеют вид

$$p_1'(x^*,t) = p_2'(x^*,t), \quad u_1'(x^*,t) = u_2'(x^*,t). \quad (3.13)$$

Из них следует



$$-\frac{b}{2\omega} + \beta \operatorname{tg} \left[ \frac{\omega\beta}{b} \ln \left( 1 - \frac{bx^*}{a} \right) - \varphi_2 \right] + \frac{c_2^*}{c_1} \operatorname{tg} \left( \frac{\omega x^*}{c_1} + \varphi_1 \right) = 0. \quad (3.14)$$

Это уравнение позволяет вычислить частоты продольных колебаний газа в трубе с любыми граничными условиями.

Для трубы, открытой на концах, заменяя реальную длину трубы эффективной, полагая  $Y_0 = 0 = Y_l$ , получим

$$\varphi_1 = 0;$$

$$\varphi_2 = \frac{\omega\beta}{b} \ln \left( 1 - \frac{bl^*}{a} \right) - \operatorname{arctg} \left( \frac{b}{2\omega\beta} \right). \quad (3.15)$$

Если в равенствах (3.14), (3.15) положить  $b = 0, \beta = 1$ , раскрыть неопределенности, получим  $\varphi_2 = -\omega l^* / c_2^*$ , а уравнение частот совпадет с выражением (3.3), в котором с учетом конечных поправок необходимо заменить реальную длину трубы на эффективную.

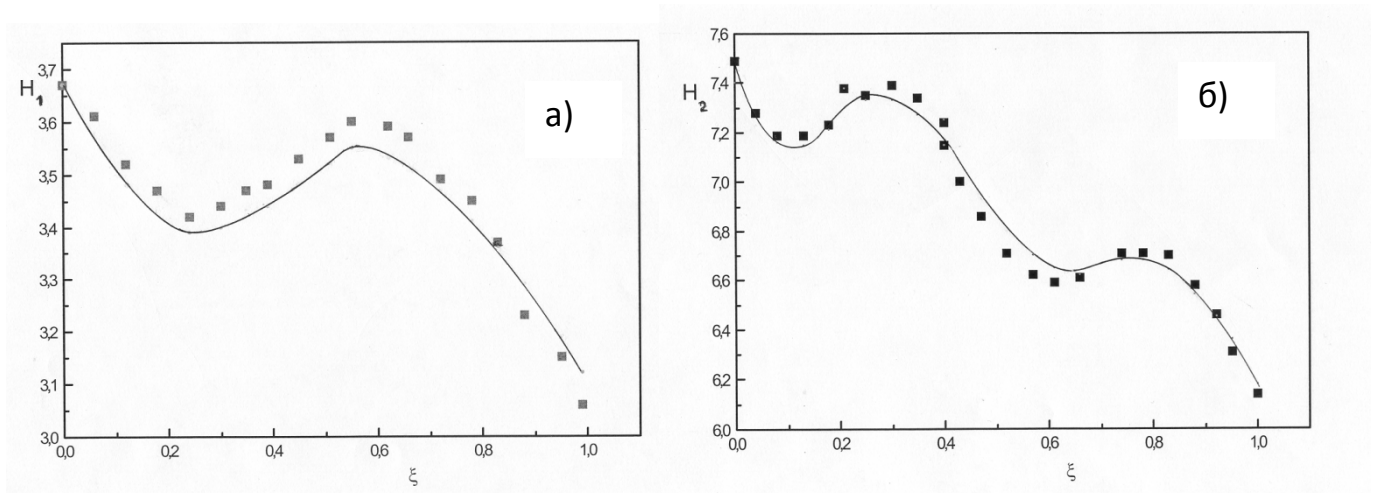


Рисунок 3.2 Зависимости частоты колебаний от положения скачка температуры в трубе: а – первая; б – вторая собственная частота

$H = \omega l / c_1$ ,  $\xi = x^* / l$ ; линия – теория, точки – эксперимент

Были проведены измерения собственных частот акустических колебаний газа в трубе, открытой на концах, длиной 0.91 м с внутренним диаметром 0.036 м [2]. Колебания возбуждались с помощью генератора

звуковых сигналов и электродинамического громкоговорителя, а регистрировались акустическим зондом и соответствующей аппаратурой. Собственные частоты определялись резонансным методом. На оси трубы располагалось пропано–воздушное пламя, образующееся на конце газоподающей трубки длиной 3м с внутренним диаметром 0.005м. На рисунке 3.2 приведены экспериментальные и теоретические данные для двух первых собственных частот при условии  $c_2^* = 497 \text{ м/с}$ ,  $b = 165 \text{ с}^{-1}$ . Эти значения были определены по результатам измерений распределения вдоль трубы средней по сечению температуры газа. Опытные данные и результаты расчета количественно согласуются. При изменении положения скачка от входа к выходу из трубы частота колебаний изменяется не монотонно: участки, где происходит уменьшение частоты, чередуются с интервалами, в которых она изменяется противоположным образом. На кривых появляются минимумы и максимумы, которые отсутствуют, если имеется скачок температуры, но градиент скорости звука в горячем газе отсутствует.

### **3.2 Влияние находящихся в потоке препятствий на частоту колебаний [2]**

В прямооточных камерах сгорания для удержания пламени используются тела плохообтекаемой формы – стабилизаторы. В топочных устройствах для сжигания твердого кускового топлива имеются специальные решетки. Наличие препятствий искажает линии тока, приводит к вихреобразованию, что должно повлиять на характер распространения звуковых волн, а, следовательно, и на частоты акустических колебаний. В таблице приведены результаты измерений частот колебаний воздуха для первых трех гармоник трубы, описанной в подразделе 3.1. На входе в трубу располагался конус с углом при вершине

90°, с переменной площадью основания, его ось совпадала с осью трубы, вершина находилась во входном сечении. Резонансным методом определялись собственные частоты трубы, открытой на концах, и трубы с конусом на входе для первых трех гармоник  $n=1,2,3$ . Если степень перекрытия сечения трубы  $\varepsilon_s = 0.36$ , частоты практически те же, что и при отсутствии препятствия. Увеличение перекрытия приводит к уменьшению частот, причем с возрастанием номера гармоники эффект становится более заметным (таблица 3.1).

**Таблица 3.1. Влияние параметра  $\varepsilon_s$  на частоты колебаний**

$\varepsilon_s$	$f$ , Гц		
	$f_1$	$f_2$	$f_3$
0	184	370	553
0.67	182	363	546
0.85	180	359	541

Рассмотрим трубу, открытую на концах, в начале которой на участке  $0 \leq x \leq l_s$  расположено препятствие. Как было показано, замена реальной длины на эффективную приводит к равенству нулю импеданса на конце, т.е.  $p'(l^*, t) = 0$ . Из этого условия, с учетом выражения (3.1) для акустического давления, следует:  $\varphi = -\omega l^*/c_0$ . Граничное условие в сечении  $x = l_s$  можно записать в виде

$$Sp'(l_s, t) = -iZ_s u'(l_s, t),$$

где  $Z_s$  – механический импеданс препятствия, который в теории звука обычно записывают в виде:  $Z_s = \omega M_s$ , ( $M_s$  – так называемая «присоединенная» масса).

Подставляя в это граничное условие выражения (3.1) для акустических возмущений, получим уравнение

$$\left(\omega_n l^* / c\right) \left(1 + \bar{m}_s - l_s / l^*\right) = \pi n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.16)$$

где  $\bar{m}_s = M_s / m_0$ ,  $m_0 = \rho_{1,0} l^* S$  – масса колеблющегося в трубе газа с учетом присоединенных масс на открытых концах.

Если присоединенная масса препятствия известна, из уравнения (3.15) можно определить частоты колебаний. При известной частоте

$$\bar{m}_s = \left(0,5nc_0 / f_n + l_s\right) / l^* - 1. \quad (3.17)$$

Эта формула является основой простой методики экспериментального определения мнимой части импеданса любого препятствия. Для этого достаточно поместить препятствие в начале трубы, измерить собственные частоты, соответствующие определенным порядковым номерам, определить расстояние  $l_s$ , эффективную длину трубы, скорость звука с учетом условий проведения эксперимента, и подставить в выражение (3.17).

По этой методике была определена присоединенная масса конического препятствия, описанного в начале данного подраздела. Результаты измерений были аппроксимированы полиномом

$$\bar{m}_s = \left(0,015 + 0,152\varepsilon_s - 0,304\varepsilon_s^2 + 0,198\varepsilon_s^3\right) \varepsilon_s = f(\varepsilon_s). \quad (3.18)$$

Обычно продольные размеры препятствия и образующегося за ним пламени намного меньше длины звуковой волны. В этом случае можно ввести единую плоскость разрыва, при пересечении которой происходит скачкообразное изменение средней температуры газа и акустического давления. Действительно, по второму закону Ньютона

$$\begin{aligned} S \left[ p_1'(x^*, t) - p_2'(x^*, t) \right] &= m_s \left( \partial u_1' / \partial t \right); \\ p_1'(x^*, t) &= p_2'(x^*, t) + i\omega \rho_{1,0} l^* f(\varepsilon_s) u_1'. \end{aligned} \quad (3.19)$$

После деления выражения (3.19) на  $u'_1(x^*, t)$  и ряда преобразований, аналогичных сделанным при выводе соотношения (3.13), получается

$$-\frac{b}{2\omega} + \beta \operatorname{tg} \left[ \frac{\omega\beta}{b} \ln \left( 1 - \frac{bx^*}{a} \right) - \varphi_2 \right] + \frac{c_2^*}{c_1} \left[ \operatorname{tg} \left( \frac{\omega x^*}{c_1} + \varphi_1 \right) + \frac{\omega l^* f(\varepsilon_s)}{c_1} \right] = 0 \quad (3.20)$$

Это уравнение позволяет рассчитать частоты колебаний в трубе с учетом скачка температуры газа, градиента скорости звука в горячей части потока и акустического сопротивления в плоскости скачка, обусловленного наличием стабилизатора пламени, удерживающих решеток и пр.

### 3.3 Установка типа емкость–труба, резонатор Гельмгольца [4, 10]

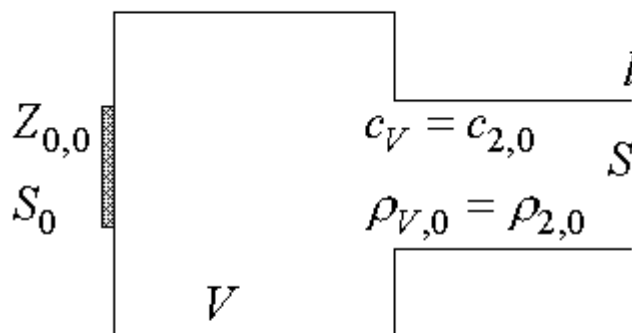


Рисунок 3.3 Акустическая модель  
«емкость – труба»

На практике широкое распространение получило устройство, которое можно представить принципиальной схемой, включающей камеру сгорания (топочный объем), трубу для отвода продуктов сгорания, входное устройство для подвода горючих компонентов отдельно или в виде смеси. При горении кускового твердого топлива в этом месте происходит

поступление воздуха. Газ входит в топочный объем через отверстия общей площадью  $S_0$ . Импеданс входного устройства  $Z_{0,0}$  зависит от акустических свойств системы подачи (рисунок 3.3).

Топочный объем обладает свойствами акустической емкости, если его поперечный размер намного больше диаметра трубы, а продольный намного меньше длины волны. В этом случае движением газа в емкости можно пренебречь и считать, что изменения давления во всех точках емкости происходят одинаково

$$p'_0 = p'_V = p'_{2,0}, \quad (3.21)$$

где  $p'_0$  – акустическое давление на входе в емкость,  $p'_V$  – в емкости,  $p'_{2,0}$  – на входе в трубу.

Линеаризованное уравнение сохранения массы для газа в емкости имеет вид

$$-\frac{V}{\rho_0 c_0^2} \cdot \frac{\partial p'_V}{\partial t} + S_0 u'_0 = S u'_{2,0}.$$

Вывод этого выражения и условия непрерывности давления дан в главе 3 при анализе процессов в зоне теплоподвода.

Для гармонических колебаний  $\partial p'_V / \partial t = i\omega p'_V$ . После деления на  $p'_V$  с учетом (3.20) получим

$$\frac{S u'_{2,0}}{p'_{2,0}} = \frac{S_0 u'_0}{p'_0} - \frac{i\omega V}{\rho_0 c_0^2}. \quad (3.22)$$

На входе в трубу температура газа такая же, как в емкости, затем из-за охлаждающего действия стенок она понижается. Используем выражения для акустических возмущений (3.10), (3.11), полученные для линейного распределения скорости звука. На входе в трубу, полагая  $x = 0$ , получим

$$u'_{2,0} = C_2 e^{i\omega t} \cos \varphi_2,$$

$$p'_{2,0} = -i\rho_{V,0} c_{2,0} C_2 e^{i\omega t} \left( \frac{b}{2\omega} \cos \varphi_2 + \beta \sin \varphi_2 \right).$$

На входе в емкость  $p'_0 = -iY_{0,0}u'_0$ , где  $Y_{0,0}$  – мнимая часть импеданса входного устройства. С учетом сделанных замечаний выражение (3.22) после некоторых преобразований принимает вид

$$\frac{b}{2\omega} + \beta \operatorname{tg} \varphi_2 + F^{-1} = 0, \quad (3.23)$$

где

$$F = \left( \frac{\omega V}{c_0 S} - \frac{\varepsilon_0}{\bar{Y}_{0,0}} \right) \frac{c_0}{c_{2,0}}, \quad \varepsilon_0 = \frac{S_0}{S}, \quad \bar{Y}_{0,0} = \frac{Y_{0,0}}{\rho_0 c_0}. \quad (3.24)$$

Уравнение (3.23) позволяет рассчитать частоты колебаний газа при любых условиях на входе и выходе устройства рассматриваемого типа.

При отсутствии градиента температуры газа в трубе, открытой на выходе,  $\varphi_2 = -\omega l^*/c_{2,0}$ . Если входное устройство имеет большое акустическое сопротивление,  $Y_{0,0} \rightarrow \infty$ . Полагая в выражении (3.23)  $b = 0, \beta = 1$ , получим известное уравнение частот колебаний однородного газа в трубе с емкостью

$$\operatorname{tg} \left( \frac{\omega l^*}{c_{2,0}} \right) = \frac{c_{2,0} S}{\omega V}.$$

Если длина трубы мала по сравнению с длиной волны,  $l^*/\lambda \sim \omega l^*/c_{2,0} \ll 1$ , получается устройство, которое называют резонатором Гельмгольца. В этом случае, заменяя тангенс аргументом, получим известную формулу

$$\omega = c_{2,0} \left( \frac{S}{l^* V} \right)^{1/2}. \quad (3.25)$$

В качестве примера рассмотрим случай, когда топливо вводится в емкость с помощью форсунок или путем загрузки, а воздух поступает из атмосферы через патрубок. Акустические возмущения в патрубке описываются выражениями типа (3.1)

$$u'_0(y_0, t) = C_0 \cos(\omega y_0 / c_0 + \varphi_0) \exp(i\omega t),$$

$$p'_0(y_0, t) = -i\rho_0 c_0 C_0 \sin(\omega y_0 / c_0 + \varphi_0) \exp(i\omega t).$$

Ось  $y_0$  направлена против потока, так что граничные условия имеют вид

$$u'_0(0, t) = -u'_0, p'_0(0, t) = p'_0, p'_0(l_0^*, t) = 0.$$

Тогда  $\varphi_0 = -\omega l_0^* / c_0$ . Т.к. по определению  $Z_{0,0} = -p'_0 / u'_0$ , то

$$Y_{0,0} = \text{Im}(Z_{0,0}) = \rho_0 c_0 \text{tg}(\omega l_0^* / c_0), \quad (3.26)$$

а функция  $F$  (3.24), входящая в уравнение частот, принимает конкретный вид.

Пусть горючая смесь поступает в топочный объем из небольшой смесительной камеры через ряд одинаковых отверстий, глубина которых намного меньше длины волны, так что газ в них колеблется как твердое тело. Используем линеаризованное уравнение движения газа в отверстии

$$\rho_0 \frac{\partial u'_e}{\partial t} + \frac{\partial p'_e}{\partial y} = 0.$$

Для гармонических колебаний интегрирование этого уравнения по длине отверстия дает

$$i\omega \rho_0 l_e u'_e + p'_0 - p'_{V,0} = 0. \quad (3.27)$$

Линеаризованное уравнение сохранения массы имеет вид

$$\rho_0 u'_0 S_0 = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} \rho'_{V,0} dV, \quad u'_e = u'_0.$$

Возмущения плотности и давления в смесительной камере связаны известным в линейной акустике соотношением:  $p'_{V,0} = c_0^2 \rho'_{V,0}$ . Тогда

$$p'_{V,0} = i \frac{\rho_0 c_0^2 S_0}{\omega V_0} u'_0.$$

Поделив уравнение (3.27) на  $u'_0$ , получим



$$Y_{0,0} = -\operatorname{Im}\left(\frac{p'_0}{u'_0}\right) = \rho_0 c_0 \left( \frac{\omega l_g}{c_0} - \frac{c_0 S_0}{\omega V_0} \right). \quad (3.28)$$

Если воздух поступает в камеру сгорания через отверстия из атмосферы, то  $V_0 \rightarrow \infty$ , а выражение (3.28) дает  $Y_{0,0} = \rho_0 \omega l_g^*$ .

## ЗАДАЧИ

**3.1** Труба, открытая на концах, заполнена газом, средняя температура которого изменяется по ступенчатому закону.

*Решение.* С учетом концевых поправок граничные условия задачи имеют вид

$$p'_1(-\Delta l, t) = 0, \quad p'_2(l_c + \Delta l, t) = 0.$$

После скачкообразного повышения средняя температура газа в дальнейшем остается постоянной, поэтому соотношения (2.20) сохраняют свой вид и для горячего газа. Необходимо только заменить индекс «0» на индекс «2». Из граничных условий следует

$$\varphi_1 = \omega \Delta l / c_1, \quad \varphi_2 = -\omega l_c^* / c_2, \quad l_c^* = l_c + \Delta l,$$

где поправка  $\Delta l$  определяется в соответствии с формулой

$$l_c^* = l_c + 2 \Delta l, \quad \Delta l = 0.613 R_c.$$

В сечении трубы, где происходит скачок температуры газа, выполняются условия непрерывности пульсаций скорости газа и давления (3.13), то есть

$$\frac{p'_1(x^*, t)}{u'_1(x^*, t)} = \frac{p'_2(x^*, t)}{u'_2(x^*, t)}.$$

После подстановки выражений для акустических пульсаций получаем

$$\rho_{1,0} c_1 \tan(\omega x^* / c_1 + \varphi_1) = \rho_{2,0} c_2^* \tan(\omega x^* / c_2^* + \varphi_2).$$

В отсутствие продольного градиента среднего давления, с учетом уравнения состояния идеального газа и формулы для скорости звука, имеем

$$\rho_{1,0} / \rho_{2,0} = T_{2,0} / T_{1,0} = (c_2^* / c_1)^{1/2} = B.$$

Подстановка значений фазовых углов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  дает

$$\sqrt{B} \tan[\omega(x^* + \Delta l) / c_1] + \tan[\omega(l_c^* - x^*) / c_2] = 0.$$

Без учета концевых поправок ( $\Delta l = 0, l_c^* = l_c$ ) получаем уравнение (3.3).

**3.2** Решить задачу 3.1 в случае уменьшения скорости звука в горячем газе по линейному закону.

*Решение.* Для холодного газа величина фазового угла  $\varphi_1$  остается прежней. В выражении (3.11) для пульсаций давления положим  $x = l_c^*$ . В соответствии с нулевым граничным условием имеем

$$-\frac{b_2}{2\omega} + \beta_2 \operatorname{tg} \left[ \varphi_2 - \frac{\omega \beta_2}{b_2} \ln \left( 1 - \frac{b_2 l_c^*}{a_2} \right) \right] = 0.$$

Отсюда следует

$$\varphi_2 = \frac{\omega \beta_2}{b_2} \ln \left( 1 - \frac{b_2 l_c^*}{a_2} \right) - \operatorname{arctg} \left( \frac{b_2}{2\omega \beta_2} \right).$$

Частоты колебаний находятся из уравнения (3.14) после подстановки выражений для углов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ .

Если градиент скорости звука в горячем газе отсутствует, необходимо положить  $b_2 = 0, \beta_2 = 1$ . Тогда

$$\left[ \frac{\omega \beta_2}{b_2} \ln \left( 1 - \frac{b_2 l_c^*}{a_2} \right) \right]_{b_2 \rightarrow 0} = -\frac{\omega l_c^*}{a_2} = -\frac{\omega l_c^*}{c_2^*}.$$

Учитывалось, что  $a_2 - b_2 x^* = c_2^* = a_2$ , так как  $b_2 = 0$ . В этом случае  $\varphi_2 = -\omega l_c^*/c_2^*$ , а уравнение (3.14) превращается в полученное ранее уравнение (3.3).

**3.3** Установка типа емкость–труба, в которой входным устройством является открытая труба для поступления воздуха из атмосферы.

*Решение.* В трубе, подающей воздух, пульсации скорости потока и давления описываются выражениями, аналогичными (2.20)

$$u'_0(y_0, t) = C_0 \cos(\omega y_0/c_0 + \varphi_0) \exp(i\omega t),$$

$$p'_0(y_0, t) = -i\rho_0 c_0 C_0 \sin(\omega y_0/c_0 + \varphi_0) \exp(i\omega t).$$

Ось  $y_0$  направлена против потока, так что граничные условия имеют вид

$$u'_0(0, t) = -u'_0, p'_0(0, t) = p'_0, p'_0(l_0^*, t) = 0.$$

Тогда  $\varphi_0 = -\omega l_0^*/c_0$ . Так как по определению  $Z_{0,0} = -p'_0/u'_0$ , то  $Z_{0,0} = \text{Im}(Z_{0,0}) = \rho_0 c_0 \tan(\omega l_0^*/c_0)$ .

Подставляя выражение для мнимой части импеданса на входе в емкость в формулы (3.24), определяем функцию  $F$ . Частоты колебаний вычисляются из уравнения (3.23). В общем случае уравнение (3.10) может быть решено только численными методами. Аналитическое решение получается для устройства типа резонатора Гельмгольца. Пусть воздух поступает в топочный объем через короткий патрубок ( $l_0 \ll \lambda$ ) или отверстия, общая площадь которых равна  $S_0$ . Тогда  $Y_{0,0} = \rho_0 \omega l_0^*$ , а формула (3.24) имеет вид

$$F = \frac{\omega V}{c_{2,0} S_c} - \frac{\varepsilon_0 c_0^2}{\omega l_0^* c_{2,0}}.$$

Длина трубы (горло резонатора) мала и можно пренебречь градиентом температуры, то есть  $\beta_2 = 0, \beta_2 = 1, \varphi_2 = -\omega l_c^*/c_{2,0}$ . Тогда из уравнения (3.23) следует

$$F \omega l_c^*/c_{2,0} = 1.$$

Решение имеет вид

$$\omega = c_{2,0} \sqrt{\frac{S_c}{l_c^* V}} \sqrt{1 + \frac{\varepsilon_0 c_0^2 l_c^*}{c_{2,0}^2 l_0^*}}.$$

Сравнение с выражением (3.25) для обычного резонатора Гельмгольца, состоящего из емкости и горла, показывает, что наличие входного патрубка или входных отверстий повышает частоту колебаний.

## Глава 4 Примеры теоретического анализа термоакустических колебаний газа

### 4.1 Явление Рийке

Интересным случаем термических автоколебаний является эффект Рийке, т.е. генерация звука в открытой с обоих концов трубе, в которой находится внутренний источник тепла, при наличии потока газа через нагреватель.

Характерной особенностью эффекта является замкнутость областей возбуждения колебаний, т.е. прекращение колебаний при достаточно больших и достаточно малых скоростях потока. Наиболее удачную теорию эффекта Рийке предложил Раушенбах. Но он воспользовался решением Лайтхилла задачи о теплообмене одиночной проволоки в бесконечном пространстве при наложенных звуковых колебаниях. Использование этих результатов для случая сетки, которая служит источником тепла в трубе, как указывал сам Раушенбах, может дать только качественное представление о явлении. К тому же указанные результаты не позволяют построить замкнутые области возбуждения колебаний, то есть не объясняют прекращение колебаний при малых скоростях потока. Оценка показывает, что объяснение нижних пределов пульсации температуры нагревателя возможно лишь при нагревательных элементах небольшого размера.

Предлагаемая теория эффекта Рийке хорошо описывает закономерности областей возбуждения колебаний [9].

Рассмотрим открытую с обоих концов трубу длиной  $L$  и диаметром  $D$ , внутри которой на расстоянии  $\delta$  от входа (рисунок 4.1) установлена пластинчатая сетка, состоящая из параллельных, расположенных на

расстоянии  $2a$  друг от друга и соединенных электрически последовательно пластин.

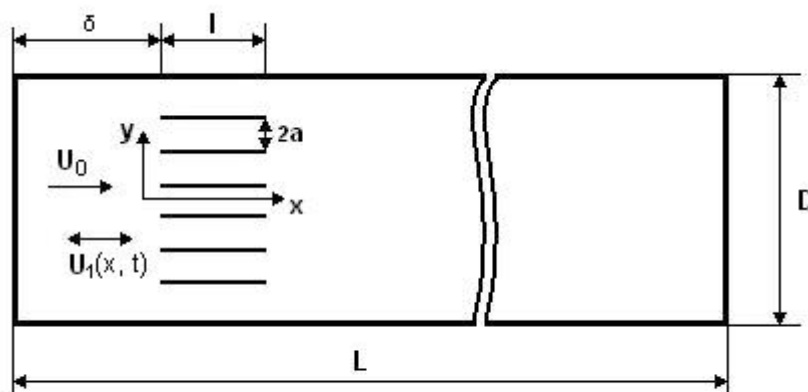


Рисунок 4.1. Схема эффекта Рijke

Система разогревается электрическим током мощностью  $W$  до температуры  $T_W$ . Газ в трубе движется с небольшой постоянной скоростью  $U_0$ . Предположим, что в трубе возникли колебания, гармонические по форме и с частотой, соответствующей основной гармонике трубы, причем пульсации скорости  $U_1(x, t)$  малы по сравнению с  $U_0$ . Положим также, что жидкость несжимаема, так как условие  $U_\infty/\omega\lambda_0 \ll 1$  выполняется, когда размеры пластин малы по сравнению с длиной волны, т.е.  $d \ll \lambda_0$ , где  $d$  – длина пластины. При прохождении через нагреватель газ нагревается не более, чем на  $100 \div 150$  °С, поэтому будем считать, что параметры газа при этом не изменяются.

Рассмотрим процессы, которые происходят в каналах, составленных пластинами нагревателя. Введем координаты  $x, y$ , как показано на рисунке 4.1. Тогда пульсации давления  $p_1(x, t)$  и скорости  $U_1(x, t)$  в ядре течения имеют вид

$$p_1(x, t) = -i\rho c U_\infty \sin k(\delta + x)e^{i\omega t}, \quad (4.1)$$

$$U_1(x, t) = U_\infty \cos k(\delta + x)e^{i\omega t}. \quad (4.2)$$

Течение и теплообмен в канале описываются известными уравнениями ламинарного пограничного слоя для несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2, \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

где  $u$ ,  $v$  – компоненты скорости в пограничном слое,  $c_p$  – удельная теплоемкость при постоянном давлении.

Граничные условия задаются следующим образом: на пластинах, ограничивающих канал,  $u = 0$ ,  $T = T_W$  вдали от пластин  $u = U = \bar{U} + U_1(x, t)$ ,  $T = T_\infty$ .

Представим скорость и температуру в виде суммы осредненных по времени частей  $u_0$ ,  $T_0$  и пульсационных составляющих  $u_1$ ,  $T_1$ . Положим, что  $u_0 > u_1$ ,  $T_0 > T_1$ . Скорость ядра потока  $U$  также состоит из двух слагаемых  $U = \bar{U}(x) + U_1(x, t)$ . Тогда система уравнений (3) распадается на две. Для стационарного основного течения, отбрасывая малые члены, получим

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0, \quad (4.3a)$$

$$u \frac{\partial u_0}{\partial x} + v \frac{\partial u_0}{\partial y} = \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}, \quad (4.3б)$$

$$u_0 \frac{\partial T_0}{\partial x} + u_0 \frac{\partial T_0}{\partial y} = u_0 \frac{\partial T_0}{\partial y^2}. \quad (4.3в)$$

С граничными условиями

$$u_0 = v_0 = 0, \quad T = T_w, \quad y = 0,$$

$$u_0 = \bar{U}(x), T_0 = T_\infty, y \rightarrow \infty.$$

Нестационарное течение характеризуется системой

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0, \quad (4.4a)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} + v_1 \frac{\partial u_0}{\partial y} = \frac{\partial U_1}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial U_1}{\partial x} + U_1 \frac{\partial U}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}, \quad (4.4б)$$

$$\frac{\partial T_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial T_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial T_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial T_1}{\partial y} + v_1 \frac{\partial T_0}{\partial y} = u_0 \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} \quad (4.4в)$$

с граничными условиями

$$u_1 = v_1 = 0, T_1 = 0, y = 0,$$

$$u_0 = U_1(x, t), T_1 = 0, y \rightarrow \infty.$$

Рассмотрим систему уравнений (4.3a - 4.3в). Решение уравнения (4.3б) для случая плоскопараллельного течения в начальном участке канала было выполнено Шлихтингом. Физически этот процесс представляется следующим образом. У входа в канал скорость потока по всей ширине одинакова и равно  $U_0$ . Вследствие трения на обеих стенках канала образуется пограничный слой, который сначала, т.е. на небольших расстояниях от входа в канал, развивается так же, как на плоской пластине, обтекаемой в продольном направлении. В результате течение в канале разбивается на три зоны: центральную, в которой жидкость движется на некотором участке ширины канала с одинаковой скоростью – ядро течения, и на две боковые, образованные пограничными слоями. Так как через каждое поперечное сечение должно протекать одинаковое количество жидкости, то уменьшение расхода вследствие трения в боковых зонах компенсируется увеличением расхода в центральной, т.е. увеличением скорости в ядре течения.

Ускорение движения ядра течения оказывает влияние на развитие пограничных слоев. Постепенно их рост приводит к тому, что они сливаются и устанавливается шарообразный профиль Гагена-Пунзейля.



Для аналитического исследования развития течения в начальном участке канала Шлихтинг использовал два способа, названные «подход спереди» и «подход сзади». Подход спереди заключается в исследовании развития пограничного слоя под действием ускоренного течения в ядре. При подходе сзади определяется отклонение распределения скоростей от параболического по мере приближения к входному сечению. Результаты представляются в виде рядов, и эти ряды сращиваются в некотором промежуточном сечении.

Ограничимся подходом спереди, считая его точность достаточной для данной приближенной теории.

Для сравнения с полученными теоретическими результатами было проведено экспериментальное исследование областей возбуждения автоколебаний Рийке. Экспериментальная установка, использованная для эксперимента, в точности отвечает рассмотренной модели. Нагреватель из нихромовой пластины шириной  $6 \cdot 10^{-3}$  м, закрепленной на асбестовом кольце так, что образуются параллельные стенки каналов, был помещен в горизонтальную трубу внутренним диаметром  $3,8 \cdot 10^{-2}$  м и длиной 1,4 м. Поток воздуха в трубе создавался вентилятором. Были измерены области возбуждения автоколебаний при различных положениях нагревателя в трубе. На рисунке 4.2 представлены результаты эксперимента для двух значений мощности нагревателя в координатах  $\bar{\sigma} = \sigma/L$  и  $Z = \omega d/U_0 = St$ , и построена теоретическая кривая границы устойчивости. Как видно, совпадение теории и эксперимента хорошее.

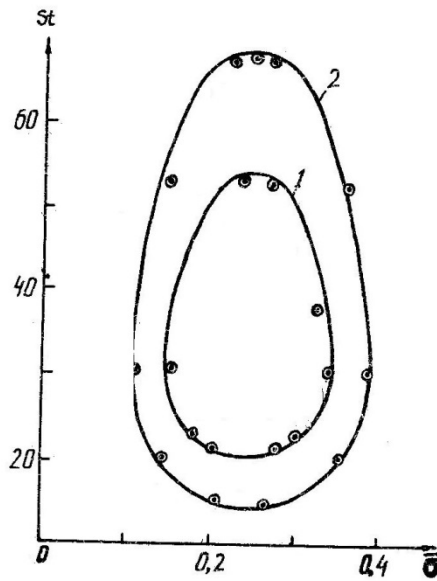


Рисунок 4.2  
 Области возбуждения эффекта Рийке в координатах  
 $\bar{\sigma} = \sigma/L$  и  $St = \omega d/U_0$  в трубе с  $L = 1,4\text{м}$ ,  
 $D = 3,8 \cdot 10^{-3}\text{м}$ ; 1 –  $W = 77\text{вт}$ , 2 –  $W = 100\text{вт}$ .

Для амплитуды пульсаций скорости на открытом конце трубы-резонатора имеем следующее выражение для вычисления Эфффекта Рийке

$$|u_{1э}| = \frac{1}{2\rho_0\omega S d c_0} F_i(St, \sigma) - \frac{\pi^2 c_0 D \delta}{4S} - \frac{2X}{\rho_0}.$$

#### 4.2 Эффект Зондхаусса

Начнем рассмотрение конкретных моделей Термических автоколебаний с эффекта Зондхаусса. Это явление состоит в возбуждении звука в трубе, к которой снаружи или изнутри подводится тепло при отсутствии потока через полость трубы.

Рассмотрим плоский канал с квадратным сечением [9]. Длина канала  $L$ , сторона квадрата равна  $d$ . Один конец канала закрыт, другой открыт, и газ в канале сообщается с окружаю - щей средой (рис.4.3).

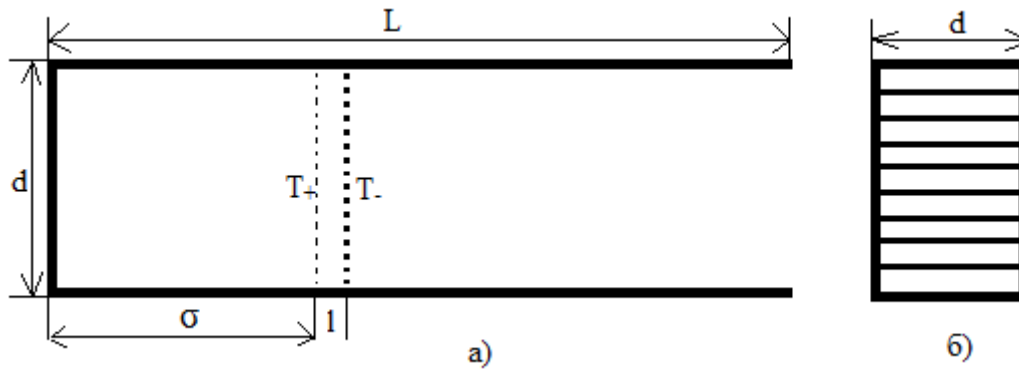


Рисунок 4.3 Схематическая модель установки Зондхауса (а) и вид нагревателя (б).

Внутри канала на расстоянии  $\sigma$  от закрытого конца расположен нагреватель, на расстоянии  $l \ll \sigma$  от нагревателя находится охладитель. Они имеют вид решеток, состоящих из равного числа  $N$  цилиндрических стержней одинакового радиуса  $a$  (рисунок 4.3б). Нагреватель имеет постоянную температуру  $T_+$ , температура охладителя  $T_-$ . Они расположены таким образом, что стержни параллельны.

Направим ось  $x$  вдоль канала так, чтобы закрытый конец находился в т.  $x = 0$ , оси других координат совместим с плоскостями стенок канала (рисунок 4.3а).

Допустим, что в канале возникли малые акустические колебания, причем пульсации скорости в ядре потока

$$U_1 = U_\infty \sin kxe^{i\omega t}, \quad (4.5)$$

пульсации давления

$$p_1 = i\rho c_0 U_\infty \cos kxe^{i\omega t}, \quad (4.6)$$

где  $U_\infty$  амплитуда пульсаций скорости в ядре течения,  $\omega$  - циклическая частота,  $c_0$  - скорость звука,  $k = \omega/c_0$  волновое число,  $\rho$  - плотность газа. Для простоты принято, что установившиеся колебания являются гармоническими, а их частота соответствует основной гармонике трубы. Положим также, что поведение газа в канале описывается уравнениями для несжимаемой жидкости, хотя это принципиального значения не имеет,

так как, во-первых, уравнение неразрывности с учетом сжимаемости было решено Вестервельтом, а, во-вторых, пренебрежение членом  $\partial\rho/\partial t$  равносильно требованию  $\omega l/c_0 \ll 1$ , что легко выполняется в нашем случае, когда расстояние между нагревателем и охладителем  $l$  мало по сравнению с длиной волны  $\lambda_0$ .

Акустические колебания среды вызывают колебательные процессы в зоне теплоподвода. Чтобы получить выражение для пульсирующего теплового потока, необходимо решить задачу о теплообмене системы цилиндров, помещенных в звуковое поле. То есть решетки нагревателя и охладителя представим как систему из  $N$  самостоятельных нагревателей и  $N$  охладителей, имеющих форму цилиндров и расположенных как показано на рисунке 4.4. Обозначим "+" параметры нагревателя, "-" обозначим параметры охладителя. Найдем температурное поле, создаваемое этой системой при наложении звуковых колебаний.

Рассмотрим сначала теплообмен одного нагревателя, например  $1^+$ . Цилиндрическая форма нагревателя позволяет решать задачу на плоскости, так что оси новых координат  $x'$  и  $y'$  расположим как показано на рисунке 4.4.

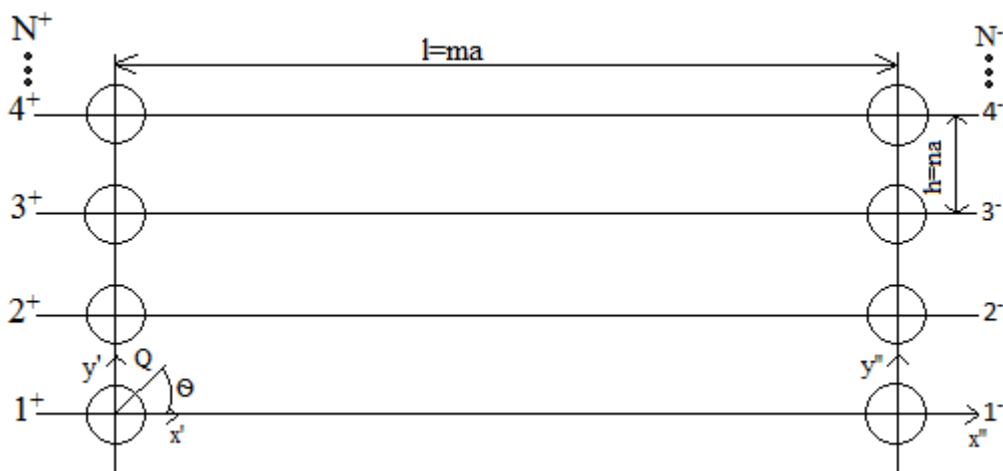


Рисунок 4.4 Схема нагревательной системы



Для сравнения полученного теоретического результата с экспериментом воспользуемся данными японских исследователей Катто и Такано. Параметры их экспериментальной установки, схема которой тождественна рассмотренной модели, следующие: сторона квадратного сечения канала  $d = 3 \cdot 10^{-2}$  м, радиус стержня  $a = 10^{-3}$  м, число стержней в решетке нагревателя  $N = 7$ , длина канала  $L$  менялась от 0,7 до 1,6 м, расстояние между нагревателем и охладителем  $l$  варьировалось в пределах  $5 \cdot 10^{-3} \div 7 \cdot 10^{-3}$  м, отношение  $\delta/L$  также изменялось.

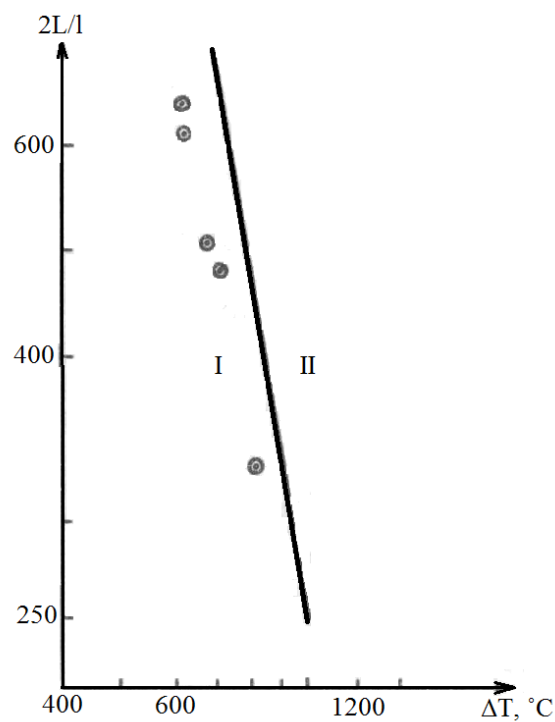


Рисунок 4.5 Области возбуждения колебаний (II) в координатах  $\Delta T - 2L/l$  для  $l = 5 \cdot 10^{-3}$  м;  $\sigma/L = 0,5$ ;  $0,7 \leq L \leq 1,6$  м; сплошная линия – теория, точки – эксперимент [ ]

На рисунке 4.5 построены на логарифмической плоскости ( $\Delta T - 2L/l$ ) области возбуждения колебаний, полученные теоретически и экспериментально для значений  $l = 5 \cdot 10^{-3}$  м,  $\sigma/L = 0,5$ . Длина канала  $L$  изменялась в максимальных пределах  $0,7 \div 1,6$  м.

Как видно из рисунка 4.5, теория находится в хорошем качественном соответствии с экспериментом. Количественные

расхождения теоретических и экспериментальных результатов (не превышающие 25%) можно объяснить следующий. Решения уравнения энергии и уравнения сохранения вихрей искались в виде разложения - по степеням параметра  $1/H$ , причем поиск был ограничен нахождением только первого приближения. Таким образом точность теории была ограничена величиной  $1/H$ , т.е. 25 - 30%.

При решении задачи об обтекании изолированного цилиндра для записи внешнего решения использовалось конформное отображение  $W = Z_0 + 1/Z_0$ , где  $Z_0$  - комплексная переменная, переводящая внешность круга в плоскость. Для системы, изображенной на рисунке 4.4 при расположении начала координат на центральном нагревателе, конформное отображение, переводящее внешность кругов в плоскость, можно записать как

$$W = Z_0 + \frac{1}{Z_0} + \sum_{k=1}^{(N-1)/2} \left( \frac{1}{Z_0 - ink} + \frac{1}{Z_0 + ink} + \frac{1}{Z_0 - m} + \frac{1}{Z_0 - m - ink} + \frac{1}{Z_0 - m + ink} \right).$$

Разложим каждый из членов под знаком суммы в ряд и отброс члены, вклад которых меньше  $I\%$ . После преобразований получим

$$W = Z_0 + \frac{1}{Z_0} + \left[ \frac{1}{Z_0} + \Phi_1 Z_0 \right],$$

где

$$\Phi_1 = \sum_{k=1}^{(N-1)/2} \left[ \frac{2}{k^2 n^2} + \frac{2(k^2 n^2 - m^2)}{(k^2 n^2 + m^2)^2} - \frac{1}{m^2} \right].$$

Тогда внешнее решение с учетом влияния соседних цилиндров имеет вид

$$\psi_{00} = \left\{ (1 + y) + C_2 \left[ -\frac{1}{1+y} + \Phi_1 (1 + y) \right] \right\} \sin \theta e^{it}.$$

Внутреннее решение записывается в виде

$$m_{00} = C_4 \left[ e^{-(1+i)\eta} + (1 + i)\eta - 1 \right] f(\theta) e^{it}.$$

Из условия асимптотического сращивания внешнего и внутреннего решений

$$(1/H)m(\infty) \simeq \psi(0)$$

Находим константы  $C_2$  и  $C_4$

$$C_2 = \frac{1}{1-\Phi_1}, C_4 = \frac{1-i}{1-\Phi_1}.$$

Следовательно внутреннее решение, учитывающее влияние соседних цилиндров, отличается от внутреннего решения для изолированного цилиндра множителем  $1/(1-\Phi_1)$  что приводит к увеличению на 17% значений пульсаций теплоподвода.

Таким образом, два неучтенных фактора: влияние соседних цилиндров в гидродинамической задаче и выбор  $Pr = I$  - действуют на результат в противоположных направлениях и количественно почти взаимно уничтожают друг друга, не оказывая заметного воздействия на окончательный результат.

### 4.3 Неравномерно нагретый резонатор Гельмгольца

Резонатор Гельмгольца, представляющий собой объем с присоединенной трубой (горлом), является классической акустической системой, в которой при наличии добавки энергии возникают автоколебания. Если стенки резонатора поддерживать нагретыми, то система может генерировать звуковые колебания, которые тоже относятся к колебаниям, возбуждаемым теплоподводом.

Можно провести упрощенный анализ явления, рассматривая колебания воздушного поршня в горле резонатора в одномерном представлении, полагая, что колебания температуры поршня являются источником энергии автоколебаний, и получил выражения для частоты и амплитуды автоколебаний. Однако результаты для амплитуды невозможно сравнить с экспериментом, так как в коэффициенте пропорциональности между смещением частиц и температурой воздушной пробки, входящем в окончательное выражение и заключается механизм



возбуждения колебаний. Другим недостатком исследования является заведомо грубое приближение, которое было сделано при замене всей массы газа, заполняющего горло резонатора, лишь небольшой ее частью, находящейся в зоне температурного градиента.

Предлагаемая теория термических автоколебаний в резонаторе Гельмгольца дает возможность получить количественные результаты, которые можно сравнивать с экспериментом [9].

Рассмотрим резонатор, состоящий из объема  $V$  с присоединенным к нему длинным горлом круглого сечения с радиусом  $R$ , длиной горла  $L$  ( $R \ll L$ ). Направим ось  $x$ , как показано на рисунке 4.6.

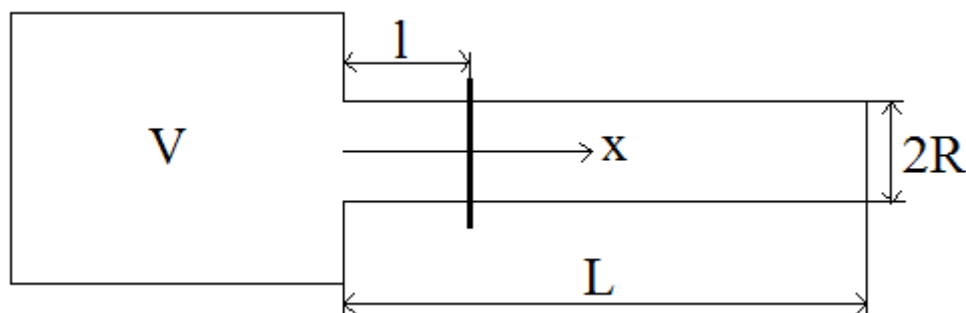


Рисунок 4.6 Схема резонатора Гельмгольца

Если резонатор поддерживать при температуре, равной температуре окружающей среды  $T_\infty$ , то в горле могут возникать колебания со скоростью в ядре потока

$$U_1 = U_\infty \cos k_\infty (L - x) \exp(i\omega_\infty t) \quad (4.9)$$

и давление

$$p_\infty = i\rho_\infty c_\infty U_\infty \sin k_\infty (L - x) \exp(i\omega_\infty t), \quad (4.10)$$

где  $\rho_\infty$ ,  $c_\infty$  - плотность воздуха и скорость звука при температуре окружающей среды, соответственно,  $k_\infty = \omega_\infty / c_\infty$  - волновое число,  $\omega_\infty$  - циклическая частота колебаний, при этом геометрические размеры, частота колебаний и скорость звука, связаны соотношением

$$\tan \frac{\omega_{\infty} L}{c_{\infty}} = \frac{c_{\infty} S}{V \omega_{\infty}}, \quad (4.11)$$

где  $S = \pi R^2$  - площадь поперечного сечения горла.

Эксперименты показывают, что при автоколебаниях, стенки объема резонатора поддерживаются нагретыми до температуры  $T_0(x)$  в  $1,5 \div 2$  раза превышающей температуру окружающей среды  $T_{\infty}$ . Тогда в горле установится неравномерное, температурное поле, связь которого с полем плотности при постоянном давлении можно выразить соотношением

$$\rho_0 T_0 = const. \quad (4.12)$$

Неравномерное температурное поле в горле изменит акустические свойства горла, и, строго говоря, пульсации давления уже не будут определяться выражениями (4.9 – 4.10). К сожалению, нам не известны аналитические выражения для распределения пульсаций, давления и скорости в канале с неравномерным распределением температуры со столь сильным градиентом температуры вдоль оси горла. Тем не менее, представляется разумным считать, что на акустические свойства системы (в ядре потока) температурное поле оказывает малое влияние.

Течение и теплообмен в горле в цилиндрической системе координат описываются уравнениями пограничного слоя сжимаемой жидкости

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho v r) + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} = 0, \quad (4.14)$$

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial p}{\partial t} + \mu \Phi, \quad (4.15)$$

$$P = \rho R_g T, \quad (4.16)$$

где  $u, v$  - осевая и радиальная компонента скорости, соответственно,  $\Phi$  - диссипативная функция.

Решая выражения (4.13) – (4.16), можно получить нулевое приближение

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T_0}{\partial x} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda r \frac{\partial T_0}{\partial r} \right) = 0 \quad (4.17)$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial T_0}{\partial r} = 0, \quad r = 0,$$

$$T_0 = T_w(x), \quad r = R.$$

Нестационарные движение и теплообмен в первом приближении описываются уравнениями

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (4.18)$$

$$\rho_0 c_p \left( \frac{\partial T_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial T_0}{\partial x} + v_1 \frac{\partial T_0}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial p_1}{\partial t}, \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho_0 v_1 r) + \frac{\partial (\rho_0 v_1)}{\partial x} = 0, \quad (4.20)$$

$$P = \rho_c R_g T_1 + \rho_1 R_g T_0, \quad (4.21)$$

при граничных условиях

$$u_1 = v_1 = 0, \quad T_1 = 0, \quad r = R,$$

$$u_1 = U_1(x, t), \quad r = 0.$$

Эксперименты показывают, что при автоколебаниях, стенки объема резонатора поддерживаются нагретыми до температуры в 1,5-2 раза превышающей температуру окружающей среды  $T_c$ . Тогда в горле установится неравномерное, температурное поле, связь которого с полем плотности при постоянном давлении.

Неравномерное температурное поле в горле изменит акустические свойства горла, и, строго говоря, пульсации давления. К сожалению, нам не известны аналитические выражения для распределения пульсаций, давления и скорости в канале с неравномерным распределением температуры со столь сильным градиентом температуры вдоль оси горла. Тем не менее, представляется разумным считать, что на акустические свойства системы (в ядре потока) температурное поле оказывает малое влияние.

#### 4.4 Термоакустические колебания газа в системах с горением

Рассматриваются системы типа трубы Рийке и типа резонатора Гельмгольца (рисунок 1.1.д). Выражение для акустической мощности области теплоподвода (2.16) при условии  $K_p = 0$  согласно имеет вид

$$A_c = \frac{(B-1)S_1 U_{1,0} p_*^2}{2Q_0} \cdot \frac{|K_u|}{Y_1} \sin \omega \tau_u. \quad (4.22)$$

Без учета потерь акустической энергии условие самовозбуждения колебаний имеет вид

$$\sin(\omega \tau_u) / Y_1 \geq 0. \quad (4.23)$$

Проведем упрощенный анализ самовозбуждения колебаний газа при горении в открытой трубе без учета градиента температуры.

Пренебрегая концевыми поправками, получим

$$Y_1 = \frac{ip_1'(x^*, t)}{u_1'(x^*, t)} = \rho_0 c_0 \operatorname{tg} \left( \frac{\omega x^*}{c_0} \right).$$

Анализ экспериментальных данных показывает, что для приближенной оценки частот колебаний можно использовать формулу для трубы, открытой на концах, заполненной холодным газом. Для первой гармоники  $\omega_1 \approx \pi c_1 / l_c^*$ . Известно, что колебания с частотой первой гармоники возбуждаются, если горение топлива происходит в нижней половине трубы, то есть  $0 < x^* < l_c / 2$ . В этом случае  $Y_1 > 0$  и согласно условию (4.23) пульсационное горение возникает, если

$$0 \leq \omega \tau_u \leq \pi. \quad (4.24)$$

Пусть пульсации скорости тепловыделения в емкости связаны с пульсациями воздуха, поступающего в камеру сгорания. В этом случае  $Y_1$  – импеданс воздухоподающей трубы, который находится по формуле

$$Y_{0,0} = \operatorname{Im}(Z_{0,0}) = \rho_0 c_0 \operatorname{tg}(\omega l_0^* / c_0).$$

Если длина этой трубы такова, что  $\omega l_0/c_1 < \pi/2$ , тогда  $Y_1 = Y_{0,0} > 0$ , то есть условие (4.24) выполняется и в рассматриваемом случае.

#### 4.5 Термоакустические колебания газа при горении в открытой трубе

Исследуемая система была представлена на рисунке 1.1 д. Согласно энергетическому методу самовозбуждение колебаний газа в установках с тепловыми источниками происходит при условии

$$A_{c,L} \geq A_{d,L}, \quad (4.25)$$

где равенство соответствует границе неустойчивости.

Уравнение

$$A_{c,N} = A_{d,N}, \quad (4.26)$$

учитывающее нелинейные свойства процессов, приводящих к генерации и потерям акустической энергии, позволяет найти амплитуду установившихся колебаний газа.

Акустическую мощность, получаемую газом в результате теплоподвода, следуя работе [2, 10], представим в виде

$$A_{c,N} = (a_{c,L} - a_{c,N} p_{1,m}) p_{1,m}^2, \quad (4.27)$$

где  $p_{1,m} = \rho_{1,0} c_1 C_1$  – максимальная амплитуда пульсаций давления холодного газа, как это следует из соотношений

$$u'_1(x,t) = C_1 \cos(k_1 x + \varphi_1) \exp i\omega t, \quad k_1 = \omega/c_1, \quad (4.28)$$

$$p'_1(x,t) = -i\rho_{1,0} c_1 C_1 \sin(k_1 x + \varphi_1) \exp i\omega t. \quad (4.29)$$

В рассматриваемом случае условия самовозбуждения колебаний газа существенным образом зависят от положения зоны горения в трубе. В выражении (4.22) этот фактор в явном виде не учитывается. Используя условие непрерывности давления  $p'_1 = p'_2 = p'_V$  и соотношения (4.28), (4.29) для холодного газа, получим

$$p_* = |p'_1(x^*, t)| = \rho_{1,0} c_1 |C_1| \left| \sin\left(\frac{\omega x^*}{c_1} + \varphi_1\right) \right|,$$

$$Y_{1,*} = Y_1 = ip'_1(x^*, t)/u'_1(x^*, t) = \rho_{1,0} c_1 \operatorname{tg}\left(\frac{\omega x^*}{c_1} + \varphi_1\right).$$

После подстановки этих соотношений в формулу (4.22) выражение для акустической мощности области теплоподвода принимает вид

$$A_{c,N} = \frac{(B-1)SU_{1,0}p_{1,m}^2|K_N|\sin(\omega\tau_u)\sin[2(\omega x^*/c_1 + \varphi_1)]}{4Q_0\rho_{1,0}c_1}.$$

В этом выражении  $K_N = K_u$  – передаточная функция теплового источника, которая в квазилинейном приближении имеет вид

$$K_N = (|K_L| - b_q|u'_{1,*}|)\exp(-i\omega\tau_u).$$

Амплитуда пульсаций скорости холодного газа в сечении, где расположен тепловой источник, согласно соотношениям (4.28), (4.29) представим в виде

$$|u'_{1,*}| = C_1 \left| \cos\left(\frac{\omega x^*}{c_1} + \varphi_1\right) \right| = \left| \cos\left(\frac{\omega x^*}{c_1} + \varphi_1\right) \right| p_{1,m} / (\rho_{1,0} c_1) \quad (4.30)$$

Введя безразмерные передаточные функции  $\bar{K}_N = K_N U_{1,0} / Q_0$ ,  $\bar{K}_L = K_L U_{1,0} / Q_0$ ,  $\bar{Y}_u = \operatorname{Im}(\bar{K}_L) = -|\bar{K}_L| \sin(\omega\tau_u)$ , с учетом выражений (4.27), (4.30), формулы для  $A_c$ , получим

$$a_{c,L} = -\frac{(B-1)S\bar{Y}_u \sin[2(\omega x^*/c_1 + \varphi_1)]}{4\rho_{1,0}c_1}, \quad (4.31)$$

$$a_{c,N} = \frac{(B-1)Sb'_q \left| \cos\left(\frac{\omega x^*}{c_1} + \varphi_1\right) \right| \sin(\omega\tau_u) \sin[2(\omega x^*/c_1 + \varphi_1)]}{4(\rho_{1,0}c_1)^2},$$

$$b'_q = b_q U_{1,0} / Q_0.$$

Потери акустической энергии в пристеночной области на холодном участке находятся по известной формуле

$$A_{w,1} = \frac{\pi R \rho_{1,0} \sqrt{\omega v_1} x^* C_1^2}{2^{3/2}} \left( 1 + \frac{\gamma_1 - 1}{\sqrt{\text{Pr}_1}} \right).$$

Выражая  $C_1^2$  через  $p_{1,m}^2$  согласно соотношению (4.30), полагая

$$a_{w,1} = \frac{\pi R \sqrt{\omega v_1} x^*}{2^{3/2} \rho_{1,0} c_1^2} \left( 1 + \frac{\gamma_1 - 1}{\sqrt{\text{Pr}_1}} \right),$$

получим

$$A_{w,1} = a_{w,1} p_{1,m}^2. \quad (4.32)$$

Для второго участка трубы, заполненного горячим газом, потери определяются выражением

$$A_{w,2} = \frac{\pi R \rho_2^* \sqrt{\omega v_2} (l_c - x^*) C_2^2}{2^{3/2}} \left( 1 + \frac{\gamma_2 - 1}{\sqrt{\text{Pr}_2}} \right).$$

В сечении  $x = x^*$ , разделяющем холодный и горячий газ, выполняется условие  $p_1'(x^*, t) = p_2'(x^*, t)$ , из которого, согласно выражениям (4.29) и

$$p_2'(x, t) = -i \rho_{2,0} c_2 C_2 \exp(i\omega t) \sqrt{1 - \frac{b_2 x}{a_2}} \left\{ \frac{b_2}{2\omega} \cos \left[ \varphi_2 - \frac{\omega \beta_2}{b_2} \ln \left( 1 - \frac{b_2 x}{a_2} \right) \right] + \beta_2 \sin \left[ \varphi_2 - \frac{\omega \beta_2}{b_2} \ln \left( 1 - \frac{b_2 x}{a_2} \right) \right] \right\}, \quad (4.33)$$

следует

$$C_2 = \left| \sin(\omega x^* / c_1 + \varphi_1) \right| D_2 p_{1,m}, \quad (4.34)$$

$$D_2 = \left[ \rho_2^* c_2^* \sqrt{1 - b_2 x^* / a_2} \left( \frac{b_2}{2a_2} \cos(\varphi_2^*) + \beta_2 \sin(\varphi_2^*) \right) \right]^{-1},$$

$$\varphi_2^* = \varphi_2 - \frac{\omega \beta_2}{b_2} \ln \left( 1 - \frac{b_2 x^*}{a_2} \right).$$

Положим

$$a_{w,2} = \frac{\pi R \rho_2^* \sqrt{\omega v_2^*} (l_c - x^*) \sin^2(\omega x^*/c_1 + \varphi_2) D_2^2}{2^{3/2}} \left( 1 + \frac{\gamma_2 - 1}{\sqrt{\text{Pr}_2}} \right),$$

тогда

$$A_{w,2} = a_{w,2} p_{1,m}^2. \quad (4.35)$$

Потери акустической энергии, вызванные излучением звука на нижнем открытом конце трубы определяются известными выражениями

$$A_0 = \frac{S X_{0,L} u_0^2}{2} = \frac{S (X_{0,L} + \rho_{1,0} u_0^2 / 2) u_0^2}{2}, \quad X_{0,L} = \frac{\rho_{1,0} (\omega R)^2}{2 c_1}.$$

Амплитуда пульсаций скорости газа на входе в трубу, согласно выражению (4.28) равна

$$u'_0 = |u'_1(0, t)| = C_1 |\cos \varphi_1| = \frac{p_{1,m} |\cos \varphi_1|}{\rho_{1,0} c_1},$$

где угол  $\varphi_1$  находится по формуле  $\varphi_1 = \omega \Delta l / c_1$ .

Положим

$$A_0 = (a_{0,L} + a_{0,N} p_{1,m}) p_{1,m}^2, \quad (4.36)$$

где

$$a_{0,L} = \frac{S X_{0,L}}{2} \left( \frac{|\cos \varphi_1|}{\rho_{1,0} c_1} \right)^2, \quad a_{0,N} = \frac{S \rho_{1,0}}{4} \left( \frac{|\cos \varphi_1|}{\rho_{1,0} c_1} \right)^3.$$

На верхнем конце трубы потери акустической энергии находятся по формулам

$$A_l = \frac{S (X_{l,L} + \rho_{l,0} u_l / 2) u_l^2}{2}, \quad X_{l,L} = \frac{\rho_{l,0} (\omega R)^2}{2 c_l}.$$

Амплитуда пульсаций скорости газа на выходе из трубы находится из выражения

$$u'_2(x, t) = C_2 \exp(i\omega t) \sqrt{1 - \frac{b_2 x}{a_2}} \cos \left[ \varphi_2 - \frac{\omega \beta_2}{b_2} \ln \left( 1 - \frac{b_2 x}{a_2} \right) \right] \quad (4.37)$$

и равна



$$u'_l = |u'_2(l_c, t)| = C_2 \sqrt{1 - b_2 l_c / a_2} |\cos \varphi_{2,l}|, \quad \varphi_{2,l} = \varphi_2 - \frac{\omega \beta_2}{b_2} \ln \left( 1 - \frac{b_2 l_c}{a_2} \right),$$

где угол  $\varphi_2$  определяется по формуле

$$\varphi_2 = \frac{\omega \beta_2}{b_2} \ln \left( 1 - \frac{b_2 l_c^*}{a_2} \right) - \arctg \left( \frac{b_2}{2\omega \beta_2} \right), \quad \beta_2 = \sqrt{1 - (b_2 / 2\omega)^2}.$$

С учетом максимальной амплитуды пульсаций скорости горячего газа, получим

$$u_l = D_l \left| \sin(\omega x^* / c_1 + \varphi_1) \right| p_{1,m}, \quad D_l = D_2 |\cos \varphi_{2,l}| \sqrt{1 - b_2 l_c / a_2}.$$

Представим потери на выходе из трубы в виде

$$A_l = (a_{l,L} + a_{l,N} p_{1,m}) p_{1,m}^2, \quad (4.38)$$

где согласно полученным соотношениям

$$a_{l,L} = \frac{S X_{l,L}}{2} \left[ D_l \sin(\omega x^* / c_1 + \varphi_1) \right]^2, \quad a_{l,N} = \frac{S \rho_{l,0}}{4} \left[ D_l \left| \sin(\omega x^* / c_1 + \varphi_1) \right| \right]^3.$$

Подставляя выражения (4.27), (4.32), (4.34)–(4.36) в равенство (4.26), в котором  $A_{d,N} = A_{w,1} + A_{w,2} + A_0 + A_l$ , получим формулу, определяющую максимальную амплитуду установившихся колебаний давления

$$p_{1,m} = \frac{a_{c,L} - a_{w,1} - a_{w,2} - a_{0,L} - a_{l,L}}{a_{c,N} + a_{o,N} + a_{l,N}}, \quad (4.39)$$

Полагая  $p_{1,m} = 0$ , то есть приравнивая числитель этой формулы нулю, получаем уравнение, соответствующее границе возбуждения колебаний

$$a_{c,L} - a_{w,1} - a_{w,2} - a_{0,L} - a_{l,L} = 0.$$

Это уравнение можно получить непосредственно из условия (4.25).

Экспериментальная установка [2] (рисунок 1.1, д) состоит из камеры сгорания – трубы 1 переменной длины, внутренним диаметром 55мм, толщиной стенки 2мм. Внутри трубы находилась решетка 3 – металлическая сетка из проволоки диаметром 0.1мм с ячейками

1мм x 1мм, положение которой можно было менять с помощью штока 4. На ней располагалось твердое топливо 2 – мелкая щепка, среднестатистические размеры которой: длина 15мм, ширина 4мм, толщина 2мм. Топливо равномерно распределялось по сетке, образуя один слой, состоящий из 8 образцов. После воспламенения и разгорания топлива, сетка вводилась в трубу. Использовалась секционная труба длиной от 0.2м до 1м и две сплошные кварцевые трубы длиной 1.15м и 2.27м.

Определялось нижнее и верхнее положения сетки, между которыми наблюдалось пульсационное горение. Область этих значений в зависимости от длины трубы представлена на (рисунке 4.7). Вибрационное горение возникает, когда длина трубы достигает 0.4м и наблюдается, когда горение происходит в нижней половине трубы. При удлинении трубы до 1.15м интервал возбуждения колебаний быстро расширяется, после чего практически не изменяется.

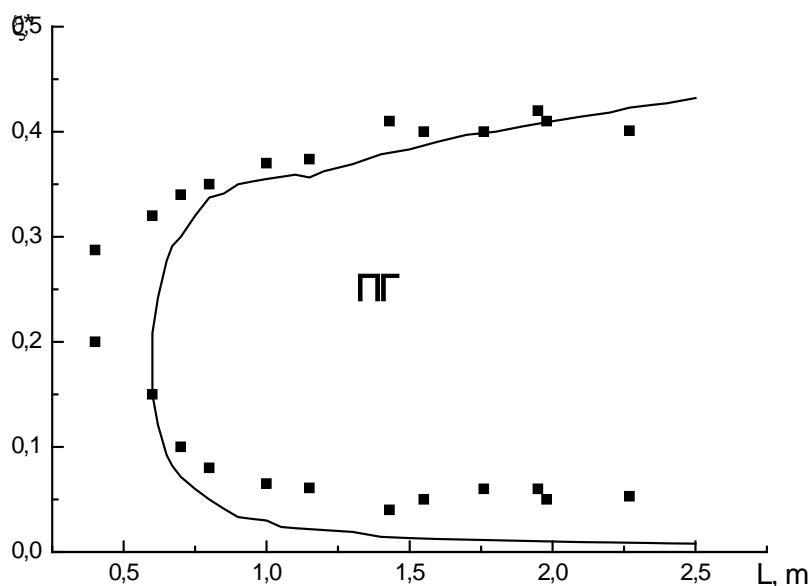


Рисунок 4.7 Область возбуждения пульсационного горения, линия – теория, точки – эксперимент

Для трубы длиной 1.15 м была получена зависимость частоты возбуждения колебаний от положения зоны горения. При перемещении ее вверх от нижнего конца (рисунок 4.8) частота колебаний уменьшается. Это связано с увеличением доли холодного газа в трубе. Скорость звука в холодном газе меньше, чем в горячем, поэтому время пробега звуковой волны от входа до выхода из трубы и обратно возрастает. Тогда период колебаний газа, вызванных распространением звуковых волн, увеличивается, а частота колебаний, соответственно, уменьшается. Уровень звукового давления (рисунок 4.9) после возбуждения колебаний быстро возрастает, в средней части интервала практически остается постоянным, а, при перемещении зоны горения к верхней границе, резко понижается и колебания прекращаются.

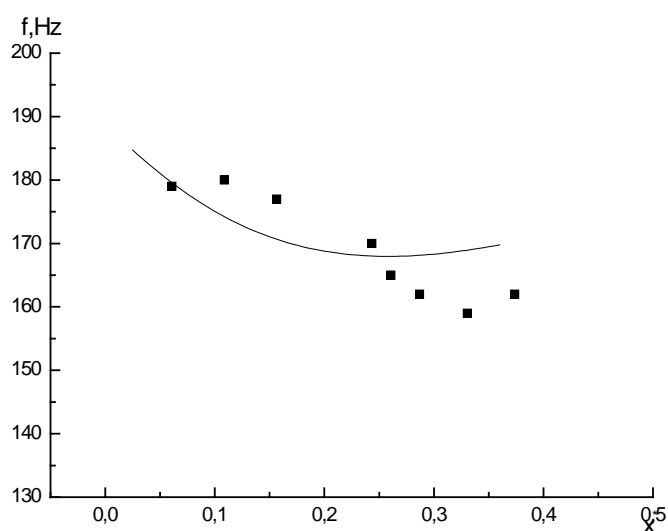


Рисунок 4.8 Зависимость частоты колебаний газа от положения зоны горения,  $l=1.15$  м, линия – теория, точки – эксперимент

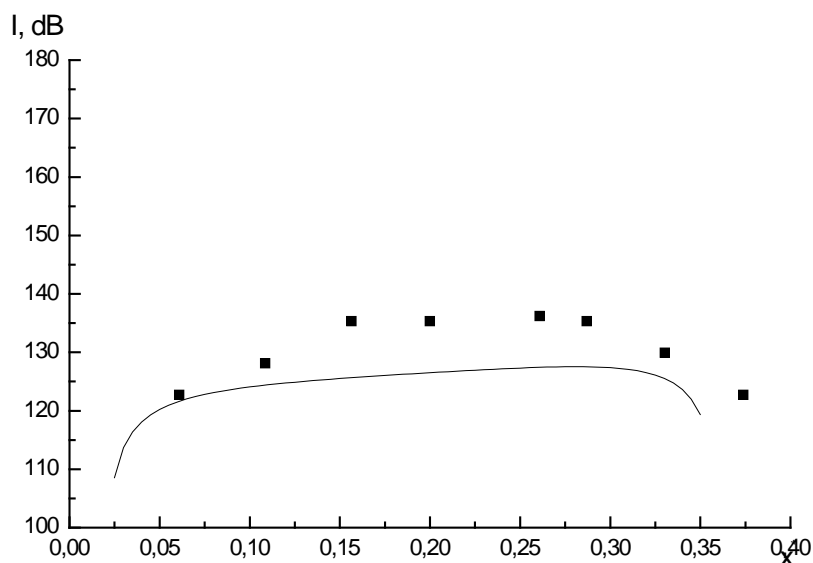


Рисунок 4.9 Зависимость УЗД от положения зоны горения в трубе,  $l_c = 1.15$  м, линия – теория, точки – эксперимент

При перемещении решетки снизу–вверх пульсационное горение возникает, когда ее положение соответствует значению  $\xi_{1.1}^* = 0.053$ . Устанавливается режим интенсивных колебаний, аналогичный тому, который наблюдается в трубе длиной 1.15 м при  $\xi^* = 0.25$  (Рисунок 4.10). Характерно то, что амплитуда колебаний постепенно нарастает и жесткий режим колебаний наступает, минуя мягкий.

При перемещении сетки частота колебаний немного уменьшается. В окрестности значения  $\xi^* = 0.25$  колебания настолько интенсивные, что приводят к срыву пламени. Далее автоколебания имеют устойчивый характер, но при  $\xi_{1.2}^* = 0.45$  происходит резкое затухание колебаний.

При обратном движении сетки был обнаружен гистерезисный эффект. Возбуждение колебаний начинается, когда  $\xi_{2.1}^* = 0.4$ . Режим интенсивных

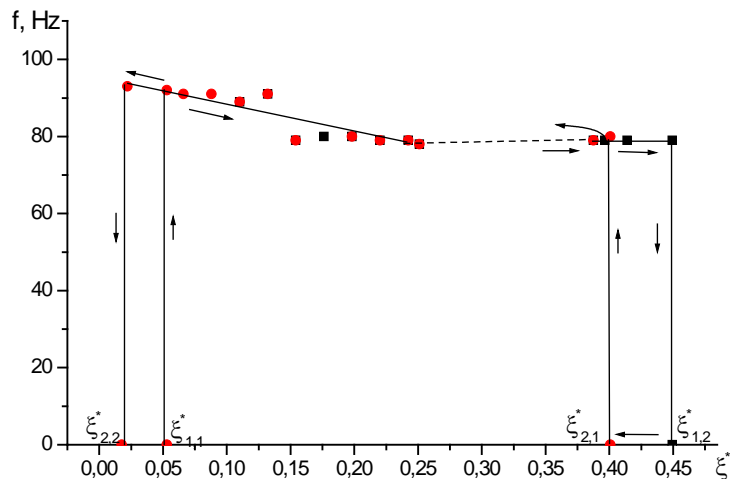


Рисунок 4.10 Интервалы возбуждения колебаний газа и их частота в зависимости от положения зоны горения в трубе

колебаний существует до  $\xi_{2.2}^* = 0.018$ . Происходит смещение интервала возбуждения колебаний в сторону меньшего значения.

Наличие гистерезисного эффекта имеет следующее объяснение. На рисунке 4.10  $\xi_{1.1}^*$  и  $\xi_{2.1}^*$  – это граничные положения сетки соответствующие «мягкому» режиму автоколебаний, которые не зависят от направления движения сетки. Условием возбуждения «жесткого» режима является наличие «мягкого» самовозбуждения колебаний. Поэтому при движении сетки снизу–вверх колебания возникают после того, как становится возможным «мягкое» самовозбуждение колебаний. Возникнув, «жесткий» режим существует до тех пор пока выполняется его собственное условие возбуждения. При обратном движении сетки колебаний нет, и критическое значение амплитуды колебаний необходимое для возбуждения «жесткого» режим автоколебаний достигается, когда будет выполнено условие «мягкого» самовозбуждения колебаний, то есть при  $\xi_{2.1}^*$ . Далее картина повторяется. Граничное значение  $\xi_{1.1}^*$  соответствующее «мягкому» режиму не имеет значения,

так как «жесткий» режим автоколебаний имеет собственную границу возбуждения  $\xi^*$  2.2. Наличие гистерезиса говорит о том, что физический механизм возбуждения «жесткого» режима – сугубо нелинейный процесс, в отличие от «мягкого» режима, самовозбуждение которого имеет линейный характер.

#### 4.6 Возбуждение колебаний газа при горении в установке типа резонатора Гельмгольца

Если горение топлива происходит в емкости (рисунок 2.1, б) согласно работе [4], можно использовать выражение

$$A_c = \frac{(B-1)S_1 U_{1,0}}{Q_0} \langle \text{Re}(p'_1) \text{Re}(q') \rangle_t,$$

в котором положим  $S_1 = S_0$  и  $p'_1 = p'_V = p'_c$  с учетом условия непрерывности давления. Тогда акустическая мощность зоны горения, расположенной в емкости, имеет вид

$$A_c = \frac{(B-1)S_0 U_{1,0}}{Q_0} \langle \text{Re}(p'_c) \text{Re}(q') \rangle_t \quad (4.40)$$

Связь пульсаций скорости тепловыделения в зоне горения с пульсациями скорости поступающего воздуха аналогична зависимости

$$q' = K_u u'_1, \quad K_u = |K_u| \exp(-i\omega\tau_u)$$

для трубы

$$q' = K_u u'_* = K_N u'_*,$$

где передаточная функция зоны горения имеет тот же вид. Определение пульсационной скорости воздуха  $u'_*$  в области, где расположена удерживающая топливо решетка, вызывает серьезные затруднения. Особенностью исследуемой установки является то, что горение топлива происходит с участием воздуха, поступающего по трубе, расположенной

на входе в емкость. При истечении воздуха в камере сгорания образуется струя, ядро которой сужается, после чего скорость потока быстро падает до нуля. Это значит, что на некотором удалении от дна емкости амплитуда колебаний скорости потока станет равной нулю, периодическая составляющая скорости тепловыделения исчезнет и вибрационное горение станет невозможным. Наличие в потоке решетки и слоя топлива усложняет картину. Теоретические исследования таких пульсирующих струй не проводились.

В данной книге  $u'_*$  – средняя по слою топлива пульсационная скорость воздуха, связывается с пульсациями скорости воздуха на выходе из воздухоподающей трубы, или, что тоже самое, на входе в емкость, соотношением

$$u'_* = u'_0 \left( 1 - \frac{x^*}{x_m^*} \right), \quad (4.41)$$

где  $x_m^*$  – расстояние решетки от входа в емкость, начиная с которого прекращаются пульсации скорости воздуха в емкости. Эта величина находится эмпирически.

Пульсации скорости воздуха на выходе из воздухоподающей трубы связаны с пульсациями давления в емкости выражением

$$u'_0 = \frac{ip'_c}{Y_{0,0}},$$

где мнимая часть импеданса воздухоподающей трубы, согласно формуле

$$Y_{0,0} = \text{Im}(Z_{0,0}) = \rho_0 c_0 \text{tg}(\omega l_0^*/c_0),$$

равна

$$Y_{0,0} = \rho_{1,0} c_1 \text{tg} \left( \frac{\omega l_0^*}{c_1} \right), \quad (4.42)$$

Выражение для акустической мощности, сообщаемой газу в результате теплоподвода в емкости, имеет вид

$$A_{c,N} = (a_{c,L} - a_{c,N} p_c) p_c^2, \quad (4.43)$$

где

$$a_{c,L} = -\frac{(B-1)S_0 \bar{Y}_u (1 - x^*/x_m^*)}{2Y_{0,0}}, \quad (4.44)$$

$$a_{c,N} = \frac{(B-1)S_0 b'_q \sin \omega \tau_0}{2Y_{0,0} |Y_{0,0}|},$$

где  $b'_q$  – эмпирический коэффициент нелинейности процесса тепловыделения при горении, который в отличие от аналогичного коэффициента в трубе учитывает расстояние  $x^*$ .

Потери акустической энергии в рассматриваемом случае складываются из потерь, вызванных излучением звука на открытых концах установки и поглощением энергии в пристеночных областях обеих труб

$$A_{d,N} = A_{w,0} + A_0 + A_{w,2} + A_l, \quad (4.45)$$

Потерями акустической энергии в емкости можно пренебречь. Связано это с тем, что исследование проводится в приближении, когда газ – идеальный, а процесс его сжатия в емкости – адиабатический.

Пристеночные потери во входной трубе находятся по формуле, аналогичной для потерь  $A_{w,1}$ , происходящих при горении в трубе, то есть

$$A_{w,0} = \frac{\pi R_0 \rho_{1,0} \sqrt{\omega v_1} l_0}{2^{3/2}} \left( 1 + \frac{\gamma_1 - 1}{\sqrt{\text{Pr}_1}} \right) C_0^2,$$

В рассматриваемом случае амплитуда пульсации давления в емкости связана с амплитудой пульсации давления во входной трубе соотношением

$p'_c = |p'_0(0,t)| = \rho_{1,0} c_1 C_0 |\sin \varphi_0|$ . При выводе формулы (4.42) было показано,

что  $\varphi_0 = -\omega l_0^* / c_1$ , тогда



$$C_0 = \frac{P_c}{\rho_{1,0} c_1 \left| \sin(\omega l_0^* / c_1) \right|}.$$

Следовательно

$$A_{w,0} = \frac{\pi R_0 \sqrt{\omega v_1} l_0 p_c^2}{2^{3/2} \rho_{1,0} c_1^2 \sin^2(\omega l_0^* / c_1)} \left( 1 + \frac{\gamma_1 - 1}{\sqrt{\text{Pr}_1}} \right) = a_{w,0} p_c^2. \quad (4.46)$$

Акустическая энергия, излучаемая на входе в установку, определяется так же, как в трубе и, следовательно,

$$A_0 = S_0 X_0 u_0^2 / 2, \quad X_0 = X_{0,L} + X_{0,N}.$$

Амплитуда пульсации скорости на входе в воздухоподающую трубу равна

$$u_0 = \left| \dot{u}_0(l_0, t) \right| = \frac{p_c \left| \cos(\omega(l_0 - l_0^*) / c_1) \right|}{\rho_{1,0} c_1 \left| \sin(\omega l_0^* / c_1) \right|} = D_0 p_c.$$

Тогда

$$A_0 = S_0 X_0 D_0^2 p_c^2 / 2 = (a_{0,L} + a_{0,N} p_c) p_c^2, \quad (4.47)$$

где

$$a_{0,L} = \frac{S_0 X_{0,L} D_0^2}{2}, \quad a_{0,N} = \frac{S_0 \rho_{1,0} D_0^3}{4};$$

$$X_{0,L} = \frac{\rho_{1,0} (\omega R_0)^2}{2c_1}, \quad X_{0,N} = \frac{\rho_{1,0} u_0}{2}.$$

Пристеночные потери в резонансной трубе находятся так же, как во входной трубе, то есть

$$A_{w,2} = \frac{\pi R_r \rho_2 \sqrt{\omega v_2} C_2^2 l_r}{2^{3/2}} \left( 1 + \frac{\gamma_2 - 1}{\sqrt{\text{Pr}_2}} \right), \quad (4.48)$$

Полагая в соотношениях (4.33), (4.37)  $x = 0$ , учитывая что  $p_c = |p'_2(0, t)|$ , находим максимальную амплитуду пульсаций скорости газа в резонансной трубе

$$C_2 = \frac{p_c}{\rho_2^* c_2^* \left| \frac{b_2}{2\omega} \cos \varphi_2 + \beta_2 \sin \varphi_2 \right|} = D_2 p_c.$$

Тогда с учетом формулы (4.48) имеем

$$A_{w,2} = \frac{\pi R_r \rho_2^* \sqrt{\omega v_2} l_r}{2^{3/2}} \left( 1 + \frac{\gamma_2 - 1}{\sqrt{\text{Pr}_2}} \right) D_2^2 p_c^2 = a_{w,2} p_c^2. \quad (4.49)$$

Согласно выражению (4.37) амплитуда пульсации скорости на выходе из резонансной трубы определяется соотношениями

$$u_l = |u'_2(l_r, t)| = C_2 \sqrt{1 - \frac{b_2 l_r}{a_2}} \left| \cos \left[ \varphi_2 - \frac{\omega \beta_2}{b_2} \ln \left( 1 - \frac{b_2 l_r}{\omega} \right) \right] \right|,$$

С учетом формулы для  $C_2$  получим

$$u_l = D_2 \sqrt{1 - \frac{b_2 l_r}{a_2}} \left| \cos \left[ \varphi_2 - \frac{\omega \beta_2}{b_2} \ln \left( 1 - \frac{b_2 l_r}{\omega} \right) \right] \right| \cdot p_c = D_l p_c.$$

Следовательно, потери, вызванные излучением звука на выходе из резонансной трубы, находятся так же, как и на входе в установку и равны

$$A_l = SX_l u_l^2 / 2 = SX_l D_l^2 p_c^2 / 2 = (a_{l,L} + a_{l,N} p_c) p_c^2, \quad (4.50)$$

где

$$a_{l,L} = \frac{SX_{l,L} D_l^2}{2}, \quad a_{l,N} = \frac{S \rho_{l,0} D_l^3}{4};$$

$$X_{l,L} = \frac{\rho_{l,0} (\omega R)^2}{2c_l}, \quad X_{l,N} = \frac{\rho_{l,0} u_l}{2},$$

С учетом вышеприведенного энергетического условия (4.26) и соотношений (4.26), (4.45)–(4.50) получаем

$$p_c = \frac{a_{c,L} - a_{w,0} - a_{w,2} - a_{0,L} - a_{l,L}}{a_{c,N} + a_{0,N} + a_{l,N}}, \quad (4.51)$$

Эта формула позволяет вычислить амплитуду установившихся колебаний давления в камере сгорания. Физический смысл имеют значения  $p_c \geq 0$ . Равенство нулю числителя выражения (4.51) дает уравнение

$$a_{c,L} - a_{w,0} - a_{w,2} - a_{0,L} - a_{l,L} = 0,$$

которое соответствует границам возбуждения колебаний газа.

Передаточная функция системы двух последовательно соединенных звеньев (инерционного и запаздывающего) равна произведению передаточных функций звеньев. Тогда

$$\bar{K}_u = \bar{K}_1 \bar{K}_2 = \frac{1 - i\omega\tau_1}{1 + (\omega\tau_1)^2} \exp(-i\omega\tau_2) = \frac{\exp(-i\omega\tau_u)}{\sqrt{1 + (\omega\tau_1)^2}}, \quad (4.52)$$

где

$$\tau_u = \tau_2 + \text{arctg}(\omega\tau_1)/\omega. \quad (4.53)$$

Экспериментальная установка (рисунок 1.1, е), состоит из камеры сгорания 7 в форме цилиндра с внутренним диаметром 0.1 м, длиной 0.14 м, и трубы-резонатора, размеры которой менялись в ходе эксперимента. Воздух поступал через входной патрубок 8 длиной 0.1 м, внутренним диаметром 0.04 м. В качестве топлива были использованы образцы древесины кубической формы, длина ребра 0.01 м [2].

В таблице 4.1 приведены результаты расчетов и соответствующие экспериментальные данные, для установки с объемом емкости  $V_c = 1.1 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$ , патрубком длиной 0.1 м, и внутренним диаметром 0.04 м. Вычисленные значения частоты колебаний газа и УЗД в емкости количественно согласуются с результатами измерений, выполненных для различных значений длины и диаметра резонансной трубы.

**Таблица 4.1 Сравнение теоретических и экспериментальных значений частоты и уровня звукового давления**

$l$ , м	$d$ , мм	$f$ , Гц		$I_c$ , дБ	
		эсп.	теор.	эсп.	теор.
0.25	20	198	195	137	140
0.45	25	195	187	139	140
0.6	30	190	182	141	140

## ЗАДАЧИ

**4.1** Объяснить, почему колебания газа в трубе Рийке наиболее интенсивные, когда сетка расположена на расстоянии  $1/4$  длины трубы от нижнего конца.

*Решение.* При фиксированных параметрах трубы, сетки и воздушного потока акустическая энергия, сообщаемая газу от нагретой сетки, пропорциональна квадрату амплитуды колебаний давления, как это следует из выражения (2.16). Из формул (2.21) видно, что амплитуда колебаний давления в сечении, где расположена сетка, пропорциональна  $\sin(\omega_1 x^*/c_0)$ . Дифференцируя  $A_c$  по  $x^*$ , приравнявая производную нулю, получим, что колеблющийся поток воздуха получает максимальную акустическую энергию, если сетка расположена на расстоянии, приблизительно равном четверти длины трубы от нижнего конца:  $(x^* = l^*/4)$ . В этом случае условия для поддержания колебаний наиболее благоприятные, а амплитуда акустических колебаний будет максимальной. Полученные результаты соответствуют реальным свойствам эффекта Рийке.

**4.2** Найти положения сетки в трубе Рийке, при которых возбуждаются колебания с частотой второй гармоники. Использовать упрощения.

*Решение.* Полагая в формуле (2.16)  $K_p = 0$ , получим

$$A_c \sim \sin(\omega\tau_u) \sin[2(\omega_n x^*/c_1 + \varphi_1)].$$

Для трубы, акустически открытой на концах

$$\varphi_1 = 0, \omega_n = \pi n c_1 / l_c.$$

Для нагретой сетки  $\sin(\omega\tau_u) > 0$ , поэтому условие самовозбуждения колебаний  $A_c > 0$  выполняется, если

$$m < nx^*/l_c < m + 1/2 \text{ имеем}$$

$$0 < x^*/l_c < 1/4.$$

**4.3** Определить фазовый сдвиг между пульсациями скорости тепловыделения и скорости истечения горючего газа, при котором наблюдается поющее пламя в трубе, открытой на концах, если газ подается по очень длинному трубопроводу.

*Решение.* В рассматриваемом случае волны, проникающие в подающую трубку, обратно не возвращаются. Так же, как при анализе поющего пламени Хиггинса, начало координат расположим на верхнем конце подающей трубки. Следовательно, в ней распространяются волны, бегущие в положительном направлении, для которых пульсации скорости и давления связаны соотношениями

$$u'_T(0, T) = p'_T(0, t)/\rho_0 c_0 = p'_1(x^*, t)/\rho_0 c_0.$$

В общем случае площадь выходного отверстия не равна площади сечения трубки, поэтому пульсации скорости истечения смеси равны

$$u'_B = -(S_T/S_B)u'_T(0, T) = -(S_T/S_B)p'_1(x^*, t)/\rho_0 c_0.$$

Положим

$$q' = K_u u'_B = |K_u| u'_B \exp(-i\omega\tau_u) =$$

$$= (S_T/S_B) |K_u| [p'_1(x^*, t)/\rho_0 c_0] \exp[i(\pi - \omega\tau_u)]$$

В то же время

$$q' = |K_p| p'_1(x^*, t) \exp(-i\omega\tau_p).$$

Сравнивая эти выражения, получим

$$\omega\tau_p = \omega\tau_u - \pi.$$

В соответствии с критерием Рэлея  $|\omega\tau_p| \leq \pi/2$ , и колебания возникают при условии

$$\pi/2 \leq \omega\tau_u \leq 3\pi/2.$$

## Список литературы

1. Higgins B. On the sound produced by a current of hydrogen gas passing through a tube / Higgins B. / Journal Natural Philosophy, Chemistry and the Arts. 1802. Vol. 1. P. 129.
2. Ларионов В.М. Автоколебания газа в установках с горением / В.М. Ларионов, Р.Г. Зарипов // Казань: Изд-во Казан. гос. технич. ун-та. - 2003. 237 с. – Библиогр.: 156 назв. – ISBN 5-7579-0659-6.
3. Bisio G. Sondhauss and Rijke oscillations-thermodynamic analysis, possible applications and analogies / G. Bisio, G. Rubatto // Energy 24. - 1999. P. 117 – 131.
4. Ларионов В.М. Автоколебания газа в энергетических установках. Учебное пособие: курс лекций, решение задач / В.М. Ларионов // Казань, 2006. 164 с.
5. Rott N. Thermoacoustics / N. Rott // Advanced Applied Mechanics. - 1980. Vol. 20. P. 135–175.
6. Iovleva, O.V. Frequencies of gas oscillations in a pipe with a concentrated heat source / O.V. Iovleva, V.M. Larionov, E.V. Semenova, // Journal of Physics Conference Series. – 2016. Том: 669.
7. Ларионов В.М. Математическая модель автоколебаний газа при горении твердого топлива в коаксиальных трубах / В.М. Ларионов, Е.В. Иовлева, О.В. Яллина // Известие ВУЗов, Проблемы энергетики. - 2014, №3-4, с.3-14.
8. Иовлева О.В. Математическая модель вибрационного горения в трубе с внезапным изменением поперечного сечения / О.В. Иовлева, В.М. Ларионов // Изв. Вузов: Авиационная техника. - 2007. - №3. с. 50-53.

9. Галиуллин Р.Г. Течение вязкой жидкости и теплообмен тел в звуковом поле / Р.Г. Галиуллин, В.Б. Репин, Р.К. Халитов // Казань: Изд-во КГУ. - 1978. с 128.
10. Iovleva, O.V. Conditions for exciting the maximal gas vibration amplitude in a combustion chamber of the Helmholtz resonator type / O.V. Iovleva, V.M. Larionov // Russian Aeronautics. - 2012. - V.3. - P. - 388-391.