КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ УПРАВЛЕНИЯ, ЭКОНОМИКИ И ФИНАНСОВ
Кафедра экономико-математического моделирования

В.Л. Воронцова, Л.Н. Зайнуллина

Учебно-методическое пособие
по дисциплине **«Математика»**
для организации самостоятельной работы
со студентами, обучающимися по направлению
38.03.02 «Менеджмент»

Казань – 2016

УДК 517,519.2
ББК Б(В)

Принято на заседании кафедры экономико-математического моделирования
Протокол № 5 от 21 января 2016 года

Рецензенты:

кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры ЭММ КФУ **А.Г. Багаутдинова;**
кандидат технических наук,
доцент кафедры высшей математики Института транспортных сооружений
КГАСУ **Т.Ю. Горская**

Воронцова В.Л., Зайнуллина Л.Н.
Учебно-методическое пособие по дисциплине «Математика» для организации самостоятельной работы со студентами, обучающимися по направлению 38.03.02 «Менеджмент» / В.Л.Воронцова, Л.Н.Зайнуллина. – Казань: Казан. ун-т, 2016. – 56 с.

В соответствии с программой курса «Математика» студенты 1 курса факультета «Менеджмент» в первом семестре изучают разделы: «Математический анализ», «Линейная алгебра», «Теория вероятностей». Согласно программе по определенным темам студенты должны выполнить 9 самостоятельных работ и 3 контрольные работы. По данным темам в пособии предлагаются по 30 вариантов заданий для самостоятельных работ, из которых в дальнейшем на основе случайной выборки формируются контрольные работы. Кроме того, в каждой теме приведены необходимые теоретические сведения и формулы, необходимые для решения предлагаемых заданий. Количество заданий из каждой темы и время, отведенное на выполнения задания, определяется преподавателем.

Выполнение студентами всех предлагаемых заданий способствует более глубокому и системному изучению дисциплины «Математика».

Настоящее учебно-методическое пособие адресовано студентам экономических и гуманитарных специальностей.

.

СОДЕРЖАНИЕ

Тема№1. Предел и непрерывность функции

О п р е д е л е н и е. Число a называется пределом функции $y=f\ (x)$ при $x \to x_0$, если для всех значений x, достаточно мало отличающихся от x_0, соответствующие значения функции $f(x)$ как угодно мало отличаются от числа a.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \text{ или } \underset{x \to x_0}{f(x)} \to a$$

Определение. Предел функции $\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$ при $\alpha \to 0$ называют *первым замечательным пределом:*

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$$

С помощью полученного предела находятся многие другие пределы.

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{tg\alpha}{\alpha} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{\alpha \to 0}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha} \cdot \frac{1}{\cos\alpha}\right) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha} \cdot \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{\cos\alpha} = 1$$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{arc\sin x}{x}$. Пусть arc Sin x = a, тогда x=Sin a и предел запишется:

$$\lim_{x \to 0} \frac{arc\sin\ x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{\alpha}{\sin\alpha} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{\sin\alpha}{\alpha}} = \frac{1}{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha}} = 1$$

Пример

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 6x}{4x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin 6x}{4 \cdot x} \cdot \frac{6}{6} = \frac{3}{2} \lim_{x \to 0} \frac{\sin 6x}{6x} == \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}$$

Определение. Предел последовательности $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ при $n \to \infty$ называется *вторым замечательным пределом* и равен числу ***e*:**

$$\lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Полагая в формуле (1) $\dfrac{1}{x} = \alpha$ или все равно, что $\alpha = \dfrac{1}{x}$ и учитывая, что $\alpha \to 0$, получаем еще одну форму записи второго замечательного предела:

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$$

Пример.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{5}{x}\right)^{\frac{x}{5}}\right]^{\frac{5}{x}\cdot 3x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{5}{x}\right)^{\frac{x}{5}}\right]^{15}=e^{15}$$

Задания для самостоятельной работы

Вычислить: предел функции в точке (а); предел тригонометрической функций, используя первый замечательный предел (б); предел функции на бесконечности, используя второй замечательный предел (в).

1. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2+2x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos 5x}{3x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3-2x}{5-2x}\right)^{x+2}$

2. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5x-2}{x^2-x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{2x^2-4x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-3}\right)^{3x-4}$

3. а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+7x+12}{2x^2+8x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3x\cdot x}{tg5x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-1}{5x+3}\right)^{2x+1}$

4. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{3x^2+8x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{\sqrt{x+4}-2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-1}{4x-3}\right)^{2x-1}$

5. а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-2x-8}{2x^2-7x-4}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\cos 3x\cdot x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{3x}{4}\right)^{\frac{x-5}{7x}}$

6. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-7x-6}{x^2-9}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 6x}{x\sin x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{9x+4}{9x+7}\right)^{2x-5}$

7. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+4x-5}{2x^2+3x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sqrt[2]{x+4}-2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{9x+4}{9x+7}\right)^{2x-5}$

8. а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-7x+10}{2x^2-9x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x\left(\sqrt{3+2x}-\sqrt{3}\right)}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x-5}{6x+7}\right)^{3x+2}$

9. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x^2-9x-2}{x^2-4x+4}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{3x^3-24}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{12x+5}{12x-7}\right)^{4x-5}$

10. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{3x^2+13x+14}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xtg4x}{\cos x-\cos^3 x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+5}{4x-3}\right)^{5x-3}$

11. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{7x^2-13x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x\sin 3x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{10x+3}{10x-7}\right)^{2x-3}$

12. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{5x^2-4x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 3x}{1-\cos 2x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x-7}\right)^{4x+5}$

13. а) $\lim\limits_{x\to -7}\dfrac{x^2+8x+7}{2x^2+3x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg5x}{x\sin 2x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x+5}{7x-3}\right)^{5x-4}$

14. а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+3}{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\arcsin(x+2)}{x^2-x-6}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{11x-7}{11x+5}\right)^{3x-2}$

15. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-4x-4}{x^3-3x^2+2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{tg2x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-5}{4x+3}\right)^{3x-5}$

16. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{x^3+2x^2-x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg3x}{\sqrt{9+5x}-3}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{13x+4}{13x-5}\right)^{3x+5}$

17. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-3x^2+x-3}{x^2-4x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x(1-\cos 2x)}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{12x+5}{12x-7}\right)^{4x-5}$

18. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+2x}{4x^2+x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x\left(\sqrt{x+4}-2\right)}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3-2x}{5-2x}\right)^{x+2}$

19. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2+2x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{\sqrt{2+5x}-\sqrt{2}}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-3}\right)^{3x-4}$

20. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5x-2}{x^2-x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos 7x}{1-\cos 2x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-1}{5x+3}\right)^{2x+1}$

21. а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+7x+12}{2x^2+8x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-1}{4x-3}\right)^{2x-1}$

22. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{3x^2+8x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{2x^2-4x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{9x+4}{9x+7}\right)^{2x-5}$

23. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-7x-6}{x^2-9}$;   б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3x\cdot(x-1)}{tg5x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{9x+4}{9x+7}\right)^{2x-5}$

24. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+4x-5}{2x^2+3x-5}$;   б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{\sqrt{x+4}-2}$;   в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{3x}{4}\right)^{\frac{x-5}{7x}}$;

25. а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-7x+10}{2x^2-9x-5}$;   б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\cos 3x\cdot x^2}$;   в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x-5}{6x+7}\right)^{3x+2}$

26. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{7x^2-13x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{x\left(\sqrt{4+x}-2\right)}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{12x+5}{12x-7}\right)^{4x-5}$

27. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{5x^2-4x-1}$;   б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos 2x}{1-\cos 2x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+5}{4x-3}\right)^{5x-3}$

28. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^3+3x^2-x-3}$;   б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 6x}{x\sin x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{10x+3}{10x-7}\right)^{2x-3}$

29) а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}}{5x^2-7x-6}$;   б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos 5x}{1-\cos 4x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+2}{x^3-2}\right)^{x^3-2}$

30. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-5x-3}{\sqrt{7-x}-\sqrt{x+1}}$;   б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{2x+9}-3\right)\cdot ctg3x$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$

Тема №2. Производная и дифференциал функции

Теорема (о непрерывности дифференцируемой функции). Если функция *f(x)* дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

Обратное неверно, то есть функция может быть непрерывна в точке, но не иметь в ней производную.

Правила дифференцирования

$$1.\ (u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$2.\ (Cu)' = Cu'$$

$$3.\ (uv)' = u'v + uv'$$

$$4.\ \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0)$$

$$5.\ \left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{Cv'}{v^2} \quad (v \neq 0)$$

Теорема о сложной функции. Если $y=f(u)$ и $u=\varphi(x)$- дифференцируемые функции своих аргументов, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ является дифференцируемой функцией аргумента x, и производная ее равна:

$$y' = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

Таблица сложных производных основных элементарных функций

$$1.\ (u^{\alpha})' = \alpha u^{\alpha-1} u' \quad (\alpha \in R)$$

$$2.\ (a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$$

$$3.\ (e^u)' = e^u u'$$

$$4.\ (\ln u)' = \frac{1}{u} u'$$

$$5.\ (\log u)' = \frac{1}{a \ln u} u'$$

$$6.\ (\sin u)' = \cos u \cdot u'$$

$$7.\ (\cos u)' = -\sin u \cdot u'$$

$$8.\ (tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u} u'$$

$$9.\ (ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u} u'$$

$$10.\ (\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u'$$

$$11.\ (\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u'$$

$$12.\ (arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} u'$$

$$13.\ (arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2} u'$$

Определение. Главная линейная часть $f'(x_0)\Delta x$ приращения дифференцируемой функции называется дифференциалом функции и обозначается: $$dy = f'(x_0)\Delta x$$

Дифференциал dy функции равен произведению ее производной и дифференциала независимой переменной: $dy = y'dx = f'(x)dx$.

Задания для самостоятельной работы

Найти: производную функции (а); дифференциал функции (б).

1. а) $y = \ln\left(\cos x - \sqrt{1+\cos^2 x}\right)$; б) $y = (\sin x)^{\cos^2 x}$

2. а) $y = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x} + \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{3\cos^3 x}$; б) $y = (tgx)^{e^x}$

3. а) $y = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\sin x}{1+\sin x} + \frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x}$; б) $y = \left(\cos^2 x\right)^{\sin x}$;

4. а) $y = 3^{2x}\left(\cos^2 5x + \sin 2x\right)$; б) $y = x^{2\sin x^2 - 1}$;

5. а) $y = \left(1 + tg^3 4x\right)^5$; б) $y = x^{\sqrt{2x+\sin 3x}}$;

6. а) $y = \sqrt[3]{3-2x^4}\cdot\sin 3x$; б) $y = x^{2\ln x}$;

7. а) $y = \sqrt{3-2x^3}\cdot\arcsin 0{,}3x$; б) $y = (\cos x)^{\sin^2 x}$;

8. а) $y = 3arctg\,0{,}5x\cdot\sqrt{2-x^2+3x}$; б) $y = (3x+5)^{4x^2-3}$;

9. а) $y = \sqrt[3]{12x+4}\cdot e^{arctg\,3x}$; б) $y = \left(\sqrt{3x+1}\right)^{2x-3}$;

10. а) $y = arctg\sqrt{\frac{1-2x}{1+3x}}$; б) $y = x^{e^x}$;

11. а) $y = \arcsin\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}$; б) $y = (tgx)^{ctg\,2x}$;

12. а) $y = ctg^3\left(7x^2+2\right)$; б) $y = (\ln x)^{\frac{1}{x}}$;

13. а) $y=\sqrt[3]{\dfrac{2-tg5x}{2+tg5x}}$; б) $y=(\sin x)^{2^x}$;

14. а) $y=\sqrt[4]{3x^2+2}\cdot\cos^2\left(1-5x^2\right)$; б) $y=x^{\arcsin 3x}$;

15. а) $y=2^{\ln\frac{\sin 3x}{2-\cos 3x}}$; б) $y=x^{\cos^2 4x}$;

16. а) $y=\ln^2(\arccos 5x)$; б) $y=(\sin 2x)^{\cos x}$;

17. а) $y=\ln^5 tg\left(\dfrac{\pi}{4}-2x\right)$; б) $y=(\cos 2x)^{\sqrt{x}}$;

18. а) $y=\ln\sqrt[3]{\dfrac{\cos 3x}{1-\cos 3x}}$; б) $y=(\ln x)^{\sqrt{x^2+x}}$;

19. а) $y=\sqrt[4]{5-2x^3}\cdot\dfrac{x^2}{3}$; б) $y=(arctg\,2x)^{\sqrt[3]{x}}$;

20. а) $y=2^{arctg^3 5x}$; б) $y=(ctg 2x)^{tg 3x}$;

21. а) $y=\sin^3\ln\dfrac{x^2}{5}$; б) $y=(\arccos 2x)^{e^{\sin 3x}}$;

22. а) $y=x\,arctg\,2x-\ln\left(1-4x^2\right)$; б) $y=(\sin x)^{\sin^2 3x}$;

23. а) $y=\log_2\sqrt{\dfrac{3x+1}{8-3x}}\cdot\cos^2 7x$; б) $y=(1+\ln(3x+1))^{2\sin x}$;

24. а) $y=\ln\arcsin\sqrt{1-e^{5x}}$; б) $y=(1-5x)^{\sqrt[3]{x-2}}$;

25. а) $y=\dfrac{\sqrt{\arcsin 2x}}{1-3x^2}$; б) $y=\left(\ln 2x+e^{3x}\right)^{x^3}$;

26. а) $y=ctg\sqrt[3]{\dfrac{1+e^{4x}}{1-e^{4x}}}$; б) $y=(\arcsin 2x)^{\ln x}$;

27. а) $y=\ln^2\sin\left(5x^3-2\right)\cdot tg\,x$; б) $y=\left(\dfrac{4x-1}{4x+1}\right)^{0,5x}$

28. а) $y=\left(\sin x-16x^2\right)\cdot\arcsin 4x$; б) $y=(\sin 2x)^{\arcsin 3x}$;

29. а) $y=\dfrac{\cos\left(2\log_3\left(3-\sqrt{x}\right)\right)}{\sin x^2}$; б) $y=\left(3-5\sin^2 3x\right)^{x+1}$;

30. а) $y=\sqrt[4]{\dfrac{\sin 5x}{2-e^{4x}}}\cdot \ln x$; б) $y=(\arcsin 3x)^{\arccos 3x}$;

Тема №3. Применение дифференциального исчисления для исследования функций

Теорема. Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема в интервале $(a;b)$.Для того, чтобы функция $y=f(x)$была возрастающей в $(a;b)$, необходимо и достаточно, чтобы для всех x из $(a;b)$ производная ее была положительна: $f'(x)>0$
Для убывания функции $y=f(x)$ в интервале $(a;b)$ необходимо и достаточно, чтобы при любых $x \in (a;b)$ производная ее была отрицательна: $f'(x)<0$.

Теорема 1. *(первый достаточный признак локального экстремума).*

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна в некотором интервале, содержащем критическую точку $x=x_0$, и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, может быть, самой точки x_0). Если $f'(x)$ при $x<x_0$, положительна, а при $x>x_0$ отрицательна, то при $x=x_0$, данная функция имеет *максимум*.

Если же $f'(x_0)$ при $x<x_0$ отрицательна, а при $x>x_0$ положительна, то при $x=x_0$ данная функция имеет *минимум*.

Определение. Производной второго порядка или второй производной функции $y=f(x)$ называется производная от ее первой производной, т.е $(y')'$.

Теорема 2 *(второй достаточный признак локального экстремума).*

Пусть функция $y=f(x)$ дважды дифференцируема и $f'(x_0)$. Тогда в точке $x=x_0$ функция имеет *локальный максимум*, если $f''(x_0)<0$ и *локальный минимум,* если $f''(x_0)>0$.

В случае, когда $f''(x_0)=0$, точка $x=x_0$ может и не быть экстремальной.

Теорема *(достаточное условие выпуклости (вогнутости) графика функции).* Если во всех точках интервала (a,b) вторая производная функции функцией $y=f(x)$ отрицательна (положительна), т.е. $f''(x)<0$ $(f''(x)>0)$ для всех x из (a,b), то кривая в этом интервале *выпукла (вогнута).*

Определение. Точка кривой $M(x_0,f(x_0))$, отделяющая выпуклую ее часть от вогнутой, называется **точкой перегиба** кривой.

Теорема *(достаточный признак перегиба).*

Если в точке $x = x_0$ $f''(x)=0$ или $f''(x)$ не существует и при переходе через эту точку $x = x_0$ производная $f''(x)$ меняет знак, то точка с абсциссой $x = x_0$ - *точка перегиба* кривой $y=f(x)$.

Задания для самостоятельной работы

Найти: область определения, экстремум и интервалы возрастания (убывания) функции; точки перегиба и интервалы вогнутости (выпуклости) функции.

1. $y=\dfrac{x^2-x-2}{x}$. 2. $y=\dfrac{x^2-5}{x-3}$. 3. $y=\dfrac{x^2+3x-4}{x}$.

4. $y=\dfrac{x^2}{2-x}$. 5. $y=\dfrac{x^2-3x-4}{x-2}$. 6. $y=\dfrac{x^2-2x-3}{x-1}$.

7. $y=\dfrac{x^2-3}{x-1}$. 8. $y=\dfrac{x^2-4}{x+3}$. 9. $y=\dfrac{(x+1)^2}{x}$.

10. $y=\dfrac{3x^2-2}{x}$. 11. $y=\dfrac{x^2-2x+1}{x-3}$. 12. $y=\dfrac{(x+1)^2}{x-1}$.

13. $y=\dfrac{x^2-4x+3}{x-2}$. 14. $y=\dfrac{4x^2-1}{x}$. 15. $y=\dfrac{x^2-4}{x+3}$.

16. $y=\dfrac{x^2+2x-3}{x}$. 17. $y=\dfrac{x^2-6x+9}{x-1}$. 18. $y=\dfrac{x^2+x-2}{x-4}$.

19. $y=\dfrac{x^2-5x+6}{x+1}$. 20. $y=\dfrac{x^2-4x}{x-1}$. 21. $y=\dfrac{x^2-1}{x}$.

22. $y=\dfrac{x^2}{2+x}$. 23. $y=\dfrac{x^2-3x-4}{x-2}$. 24. $y=\dfrac{x^2-5}{x-3}$.

25. $y=\dfrac{x^2-x-2}{x}$. 26. $y=\dfrac{x^2-5x+6}{x}$. 27. $y=\dfrac{x^2+2x-3}{x^2}$.

28. $y=\dfrac{x^2-2x-3}{x-1}$. 29. $y=\dfrac{x^3-1}{4x^2}$. 30. $y=\dfrac{x^3-8}{x}$.

Тема №4. Экстремумы функций многих переменных

Пусть функция $z = f(x;y)$ непрерывна в точке $M(x;y)$, аргументу x дадим приращение Δx, а y оставим без изменения. Вычислим частное приращение функции

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x; y) - f(x;y).$$

Определение. Если существует конечный предел отношения частного приращения $\Delta_x z$ функции к приращению Δx, когда последнее стремится к 0, то этот предел называется *частной производной* функции $z=f(x;y)$ *по переменной* x:

$$f_x'(x;y) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x;y)-f(x;y)}{\Delta x}.$$

При нахождении частной производной функции двух переменных по переменной x, другая переменная y считается постоянной величиной, и функция $f(x;y)$ дифференцируется по x как функция одной переменной.

Аргумент x оставим без изменения, а аргументу y дадим приращение Δy и вычислим частное приращение функции

$$\Delta_y z = f(x; y+\Delta y) - f(x;y).$$

Определение. Если существует конечный предел вида $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$, то этот предел называется *частной производной* функции $z=f(x;y)$по *переменной* y:

$$f_y'(x;y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x;y+\Delta y) - f(x;y)}{\Delta y}$$

При нахождении частной производной функции двух переменных по переменной y, другая переменная x считается постоянной величиной.

Теорема. Если функция $z=f(x;y)$ дифференцируема в точке $M(x;\ y)$, то она непрерывна в этой точке.

Определение. Главная линейная часть полного приращения дифференцируемой функции двух переменных называется ее *полным дифференциалом* и обозначается dz.

$$dz = f_x'(x;y)dx + f_y'(x;y)dy \text{ или } dz = z_x' dx + z_y' dy$$

Пусть функция $z=f(x;y)$ дифференцируема в точке $M(x;y)$, то есть в этой точке существуют непрерывные частные производные $z_x'=f_x'(x;y)$ $z_y'=f_y'(x;y)$.

Определение. Частная производная по x от z_x' и частная производная по y от z_y' называются *частными производными второго порядка* от функции $z=f(x;\ y)$ и обозначаются:

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = \left(f_x'(x;y) \right)'_x = f_{xx}''(x;y);$$

$$z''_{yy} = (z'_y)'_y = \left(f_y'(x;y) \right)'_y = f_{yy}''(x;y).$$

Определение. Частная производная по y от z_x' и частная производная по x от z_y' называются *смешанными производными функции второго порядка* и обозначаются:

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = \left(f_x{}'(x;y) \right)'_y = f_{xy}{}''(x;y),$$

$$z''_{yx} = (z'_y)'_x = \left(f_y{}'(x;y) \right)'_x = f_{yx}{}''(x;y).$$

Смешанные производные второго порядка z_{xy}'' и z_{yx}'' равны между собой: $z_{xy}''= z_{yx}''$.Следовательно, функция двух переменных имеет три различных частных производных второго порядка: $z''_{xx}; z''_{yy}; z''_{xy}$

Алгоритм нахождения безусловного экстремума функции двух переменных

1. *Необходимое условие существования экстремума.*

Теорема. Если функция $z=f(x;y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0;y_0)$ и имеет в этой точке экстремум, то обе частные производные ее в точке M_0 равны нулю:

$$\begin{cases} f'_x(x_0;y_0)=0, \\ f'_y(x_0,y_0)=0. \end{cases}$$

Точки, в которых выполняются данные условия, называются *критическими точками* функции.

2. *Достаточное условие существования экстремума.*

Для функции $z=f(x;y)$ вычисляем $D=B^2-AC$,

где $f''_{xx}(x_0;y_0)=A;\ f''_{xy}(x_0;y_0)=B;\ f''_{yy}(x_0;y_0)=C$

При этом возможны случаи:

а) Если $D = B^2 - AC < 0$, то при А < 0 в точке M_0 функция имеет *максимум*,

при А > 0 в точке M_0 функция имеет *минимум*.

б) Если $D = B^2-AC > 0$, то в этом случае экстремума в критической точке $M_0(x_0;y_0)$ не существует.

в) Если $D = B^2-AC= 0$, то необходимы дополнительные исследования.

Отметим, что если $D < 0$, то A и C имеют одинаковые знаки, следовательно, характер экстремума можно определять и по знаку C.

Задания для самостоятельной работы

Найти: а) полный дифференциал функции $z=f(x,y)$; б) безусловный экстремум функции $z=f(x,y)$.

1. а) $z=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$; б) $z=x^3+(y+1)^2-3x+2y$;

2. а) $z=arctg\,\dfrac{x+y}{1-xy}$; б) $z=(x-1)^3+y^2-3x+2y$;

3. а) $z=\ln ctg\,\dfrac{x}{y}$; б) $z=x^3-(y-1)^2-3x-2y$;

4. а) $z=y\cdot arctg\sqrt{x^2+y^2}$; б) $z=2x^3+xy^2+5x^2+y^2$;

5. а) $z=x\sqrt{y}+e^{\frac{y}{x}}$; б) $z=xy(4-x-y)$;

6. а) $z=\ln\sqrt{\dfrac{2x+3y}{4x-5y}}$; б) $z=x^3+y^3-3xy$;

7. а) $z=\dfrac{\sin(2x-y)}{x^2}+\sqrt{y}\cdot\cos(x-2y)$; б) $z=x\sqrt{y}-x^2-y+2x+1$;

8. а) $z=ctg(3x+5y)-e^{xy}$; б) $z=x^2+y^3-6xy-9x-21y+1$;

9. а) $z=y\sqrt{1-x^2}-\arcsin\dfrac{x}{y}$; б) $z=x^3+(y-1)^2-3x+2y$;

10. а) $z=3^{\arccos\sqrt{2xy-y^2}}$; б) $z=xy+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$;

11. а) $z=\dfrac{1}{x\cos y-y\sin x}$; б) $z=x^2y+xy^2-2xy$;

12. а) $z=arcctg\,\dfrac{x-y}{1+xy}$; б) $z=x^3+3xy+2y^2+y$;

13. а) $z=\ln\dfrac{1-x-y+xy}{1-x-y}$; б) $z=x^2y+\dfrac{y^2}{2}+2x^2-2y$;

14. а) $z=2^{y\sqrt{x}}-y\cdot 2^{x\sqrt{y}}$; б) $z=2y\sqrt{x}-3y^2-2x+5y$;

15. а) $z = x\arcsin\sqrt{y^2 - x^2}$; б) $z = \frac{x^2}{2} + 2xy + \frac{y^2}{2} - 4x - 5y$;

16. а) $z = (x^2 + y^2)e^{\frac{x^2 - y^2}{xy}}$; б) $z = 6xy - x^3 - y^3$;

17. а) $z = y\sqrt{\ln y^x}$; б) $z = x^3 + 2y^2 - 12x - 4y$;

18. а) $z = \arccos\sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$; б) $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$;

19. а) $z = \ln tg\frac{y}{x}$; б) $z = xy^2 + \frac{x^2}{2} - x + y^2$;

20. а) $z = \ln\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$; б) $z = 2x^2 - 3xy + y^3 - x$;

21. а) $z = \arcsin\sqrt{\frac{3x - 2y}{4x + 7y}}$; б) $z = \frac{x^3}{3} + 2xy + \frac{y^2}{2} - 5x$;

22. а) $z = \cos(x^2 - 3xy^2 + y^3)$; б) $z = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 7y$;

23. а) $z = \sin(xy) - e^{\frac{x}{y}} - x^3 y$; б) $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - xy$;

24. а) $z = xy \cdot 5^{\sin(2x - y)}$; б) $z = 3x^2 - 2x\sqrt{y} + y - 8x + 8$;

25. а) $z = x\sqrt{\ln x^y}$; б) $z = xy - x^2 y - xy^2$;

26. а) $z = arcctg\sqrt{x^y}$; б) $z = (x + 3)^2 + \frac{y^3}{3} + xy$;

27. а) $z = arctg\frac{x + y}{1 - xy}$; б) $z = \frac{x^2}{2} + 4xy + \frac{y^3}{3} - 7x$;

28. а) $z = 4x - 5y - \sqrt{x^2 - y^2}$; б) $z = x^3 + 2xy + y^2 - x - y$;

29. а) $z = \sin\frac{x}{y} \cdot \cos\frac{y}{x}$; б) $z = 2x^2 + 2x\sqrt{y} + y + x$;

30. а) $z = e^x(\cos y + x\sin y)$; б) $z = x^2 + y^3 + 4x - 27y$;

Тема №5, 6. Неопределенный интеграл. Определенный интеграл. Несобственный интеграл.

Пусть на интервале *(a; b)* задана функция *f(x)*. Если $F'(x) = f(x)$ *или* $dF(x) = f(x)dx$, где $x \in (a;b)$, то функция *F(x)* называется *первообразной функцией* для функции *f(x)* на интервале *(a; b)*.

Определение. Совокупность первообразных *F(x) + C* (где *C* – произвольная постоянная) функции *f(x)*, $x \in (a;b)$, называется *неопределенным интегралом* функции *f(x)*:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Таблица формул интегрирования

1. $d\frac{x^{n+1}}{n+1} = x^n dx$

2. $d(\ln|x|) = \frac{1}{x}dx$

3. $d(\sin(x)) = \cos(x)dx$

4. $d(-\cos(x)) = \sin(x)dx$

5. $d(tg(x)) = \frac{dx}{\cos^2(x)}$

6. $d(ctg(x)) = -\frac{dx}{\sin^2(x)}$

7. $d(\arcsin(x)) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1.$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

3. $\int \cos(x)dx = \sin(x) + C.$

4. $\int \sin(x)dx = -\cos(x) + C.$

5. $\int \frac{dx}{\cos^2(x)} = tg(x) + C.$

6. $\int \frac{dx}{\sin^2(x)} = -ctg(x) + C.$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C.$

8. $d(-\arccos(x)) = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

8. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos(x) + C.$

9. $d(arctg(x)) = \dfrac{dx}{1+x^2}$

9. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctg(x) + C.$

10. $d(-arcctg(x)) = \dfrac{dx}{1+x^2}$

10. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = -arcctg(x) + C.$

11. $d\left(\dfrac{a^x}{\ln a}\right) = a^x dx$

11. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C.$

12. $d\left(e^x\right) = e^x dx$

12. $\int e^x dx = e^x + C.$

13. $d(\ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)) = \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$;

13. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C.$

14. $d\left(\dfrac{1}{2a}\ln\dfrac{x-a}{x+a}\right) = \dfrac{dx}{x^2 - a^2}$;

14. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C.$

15. $d\left(\dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a}\right) = \dfrac{dx}{a^2 + x^2}$;

15. $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} + C.$

16. $d\left(\arcsin\dfrac{x}{a}\right) = \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$;

16. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C.$

Для вычисления определенного интеграла используется *формула Ньютона-Лейбница.*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Формула Ньютона-Лейбница является основной формулой интегрального исчисления и читается так: определенный интеграл некоторой функции на отрезке $[a; b]$ равен разности значений любой первообразной этой функции при $x=b$ и при $x=a$.

Пусть функция $f(x)$ определена, непрерывна на $[a;+\infty)$. Тогда она будет интегрируема в любой ее конечной части $[a;M]$, то есть существует интеграл $\int_a^M f(x)dx$.

Определение. Конечный или бесконечный предел интеграла $\int_a^M f(x)dx$ при $M\to\infty$ называют *несобственным интегралом функции $f(x)$ с бесконечным верхним пределом* в промежутке от a до $+\infty$ и обозначают:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{M\to\infty}\int_0^M f(x)dx$$

Если этот предел конечен, то несобственный интеграл *сходится*, а функция $f(x)$называется интегрируемой на бесконечном промежутке.

Если этот предел бесконечен или не существует, то несобственный интеграл *расходится*.

Определение. Конечный или бесконечный предел интеграла $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ при $N\to-\infty$ называют *несобственным интегралом функции $f(x)$ с бесконечным нижним пределом* в промежутке от $-\infty$ до b и обозначают:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{N\to-\infty}\int_N^b f(x)dx$$

Если этот предел конечен, то несобственный интеграл *сходится*, а если этот предел бесконечен или не существует, то несобственный интеграл *расходится*.

Задания для самостоятельной работы

Найти интеграл (а); вычислить интегралы (б), (в); исследовать сходимость несобственного интеграла (г).

1. а) $\int \frac{ctgxdx}{\ln^2 \sin x}$; б) $\int_1^5 \frac{3x+2}{\sqrt{2x-1}}dx$;

в) $\int\limits_{0}^{1/3} xe^{-3x}dx$;

г) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{\left(4+x^3\right)^2}$.

2. а) $\int \frac{\sin 2x dx}{\left(1+\cos^2 x\right)^3}$;

б) $\int\limits_{1}^{4} \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$;

в) $\int\limits_{1}^{e} x\ln^2 x dx$;

г) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+10x+29}$.

3. а) $\int \left(x^2-1\right)e^{-\frac{x}{2}}dx$;

б) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \cos^3 x \sin 2x dx$;

в) $\int\limits_{3}^{10} \frac{xdx}{\sqrt[3]{x-2}}$;

г) $\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x(2\ln x+1)^3}$.

4. а) $\int \frac{tgx dx}{\sqrt[3]{\ln \cos x}}$;

б) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$;

в) $\int\limits_{0}^{1} (3x-2)e^{-x}dx$;

г) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x}$.

5. а) $\int (3x+4)e^{5x}dx$;

б) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \cos^2 x \sin^3 x dx$;

в) $\int\limits_{0}^{9} x\sqrt[3]{1-x}dx$;

г) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2-2x+17}$.

6. а) $\int \frac{3x-2}{x^2-4x-5}dx$;

б) $\int\limits_{0}^{1} \frac{arctg^2 x+x}{1+x^2}dx$;

в) $\int\limits_{0}^{1/2} xe^{-2x}dx$;

г) $\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[4]{\ln^5 x}}$.

7. а) $\int \frac{1-\sin x}{(x+\cos x)^3}dx$;

б) $\int\limits_{1}^{e} x^3 \ln\frac{x}{2}dx$;

в) $\int\limits_{1}^{9} \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)}dx$;

г) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{2x+1}{x^2+4}dx$.

8. а) $\int x^4 \ln 3x dx$;

б) $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{4-\ln^2 x}}$;

в) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^5 xdx}{\sin^7 x}$; г) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{xdx}{\left(3+x^2\right)^3}$.

9. а) $\int \sin^3 x \sin 2xdx$; б) $\int\limits_{4}^{9} \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-1}$;

в) $\int\limits_{0}^{\pi} (3x-2)\sin\frac{x}{2}dx$; г) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{\left(1+x^3\right)^2}$.

10. а) $\int \frac{\sin^3 x+2}{\cos^2 x}dx$; б) $\int\limits_{1}^{8} \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x^2}}$;

в) $\int\limits_{0}^{\pi/2} (2x-1)\cos 2xdx$; г) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{6x-5}{x^2+9}dx$.

11. а) $\int \frac{\ln xdx}{x^3}$; б) $\int\limits_{0}^{1} x^2\sqrt{1-x^2}dx$;

в) $\int\limits_{0}^{\pi/3} \cos x\cos 5xdx$; г) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{(2x+1)dx}{x^2-2x+4}$.

12. а) $\int x^3 e^{-x^2}dx$; б) $\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{e^{tgx}dx}{\cos^2 x}$;

в) $\int\limits_{0}^{1} \frac{2x-7}{x^2+3}dx$; г) $\int\limits_{-\infty}^{1} \frac{xdx}{(3-x)^3}$.

13. а) $\int x\sin^2 xdx$; б) $\int\limits_{1}^{2} x^2 e^{2x^3-3}dx$;

в) $\int\limits_{0}^{3} \frac{(x-2)dx}{x^2+8x+20}$; г) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{xdx}{9+x^4}$.

14. а) $\int \frac{\sin 2xdx}{\sqrt[3]{1+\sin^2 x}}$; б) $\int\limits_{1/3}^{e/3} x^4 \ln 3xdx$;

в) $\int\limits_{0}^{5} \frac{2x-1}{\sqrt{x+4}}dx$; г) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x(3+2\ln x)^4}$.

15. а) $\int \frac{(1-\cos x)dx}{(x-\sin x)^4}$; б) $\int\limits_{6}^{8} e^{-\frac{x}{2}}(x-4)dx$;

в) $\int_{0}^{4} \frac{xdx}{\sqrt{2x+1}+1}$; г) $\int_{-\infty}^{1} \frac{xdx}{\left(4-x^2\right)^3}$.

16. а) $\int \frac{ctgxdx}{\sqrt[3]{4\ln\sin x-3}}$; б) $\int_{1}^{4} \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt{x}}$;

в) $\int_{1}^{2} (5x-2)e^{2x}dx$; г) $\int_{0}^{+\infty} \frac{xdx}{(x+2)^3}$.

17. а) $\int \sin 5x \sin 3xdx$; б) $\int_{1}^{3} (x-1)e^{-\frac{x}{3}}dx$;

в) $\int_{0}^{1} \frac{x^3+x}{x^4+1}dx$; г) $\int_{1}^{+\infty} \frac{x^4+3}{x^5}dx$.

18. а) $\int \frac{e^{\arcsin 4x}dx}{\sqrt{1-16x^2}}$; б) $\int_{0}^{\pi/3} (x+2)\sin 3xdx$;

в) $\int_{1}^{e} \frac{\ln xdx}{x\sqrt{4-\ln^2 x}}$; г) $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+4x+13}$.

19. а) $\int \frac{x^3-x}{x^4+1}dx$; б) $\int_{0}^{2} \left(x^2+4\right)e^{-\frac{x}{2}}dx$;

в) $\int_{0}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{3tgx+1}}$; г) $\int_{0}^{+\infty} \frac{x^2dx}{\sqrt{4+x^3}}$.

20. а) $\int \frac{tgxdx}{(2\ln\cos x-1)^3}$; б) $\int_{1}^{1/3} (3x+2)e^{3x}dx$;

в) $\int_{4}^{6} \frac{2x+3}{x^2-2x-3}dx$; г) $\int_{1}^{+\infty} \frac{x^3+4}{x^4}dx$.

21. а) $\int \frac{\ln tgxdx}{\sin 2x}$; б) $\int_{\pi/3}^{\pi/2} (3x-2)\sin^2\frac{x}{2}dx$;

в) $\int_{0}^{2} x^2\sqrt{9-x^2}dx$; г) $\int_{1}^{+\infty} \frac{2x+1}{x^2+3x}dx$.

22. а) $\int \sin^5 x \cos^4 x dx$; б) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \left(x^2-3\right)\cos 3x dx$;

в) $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$; г) $\int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-2x} dx$.

23. а) $\int \frac{x^3+2x+3}{x^2+x-6} dx$; б) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{x \cos x dx}{\sin^2 x}$;

в) $\int\limits_{1}^{e} \frac{\ln x dx}{x(2+\ln x)^2}$; г) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{4x-3}{x^2+4} dx$.

24. а) $\int (2x+1)\cos^2 \frac{x}{2} dx$; б) $\int\limits_{4}^{12} \frac{xdx}{\sqrt{2x+1}-1}$;

в) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{3-2\sqrt[3]{ctg 3x}}{\sin^2 3x} dx$; г) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{\left(2x^3+1\right)^3}$.

25. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}\arccos^5 2x}$; б) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^3+2x-3}{x^2+2x+5} dx$;

в) $\int\limits_{0}^{\pi/3} xtg^2 x dx$; г) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{4+x^6}$.

26. а) $\int \frac{\ln ctgx}{\sin 2x} dx$; б) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} xctg^2 x dx$;

в) $\int\limits_{2}^{3} \frac{2x^3-x-3}{x^2+5x-6} dx$; г) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{xdx}{\sqrt[3]{1-2x}}$.

27. а) $\int \frac{8x - arctg 2x}{1+4x^2} dx$; б) $\int\limits_{2}^{9} \frac{xdx}{\sqrt[3]{x-1}+1}$;

в) $\int\limits_{0}^{\pi/4} x \sin^2 2x dx$; г) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{xdx}{(2x-1)^3}$.

28. а) $\int \frac{(x+\cos x)dx}{\left(x^2+2\sin x\right)^3}$; б) $\int\limits_{0}^{1/2} \frac{\arcsin\sqrt{x} dx}{\sqrt{1-x}}$;

в) $\int\limits_3^5 \frac{(2x+3)\,dx}{x^2+3x-10}$; г) $\int\limits_{-\infty}^0 \frac{x^3dx}{(1-x^4)^2}$.

29. а) $\int x\ln(x+1)\,dx$; б) $\int\limits_1^3 \frac{\sqrt{3x-1}dx}{x}$;

в) $\int\limits_{2/\sqrt{3}}^2 \frac{\arccos\frac{1}{x}\,dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; г) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{5x+7}{x^2+5x-6}\,dx$.

30. а) $\int \frac{\arcsin^3\frac{2}{x}\,dx}{x\sqrt{x^2-4}}$; б) $\int\limits_0^{1/4} \frac{\arccos\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$;

в) $\int\limits_{-6}^{-1} \frac{xdx}{\sqrt{3-x}+1}$; г) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{4x-3}{x^2+5}\,dx$

Тема №7. Определители

Пусть задана таблица из девяти чисел:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Определителем 3-го порядка, соответствующим данной таблице, называется число, обозначаемое символом:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

и определяемое равенством

$$\Delta_3 = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}).$$

Данная формула называется правилом Саррюса или правилом треугольников.

Определение. Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя n-го порядка Δ_n называется определитель (n – 1)–го порядка Δ_{n-1} , полученный из Δ_n вычеркиванием i – строки и j-го столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}.

Определение. Алгебраическое дополнение A_{ij} элемента a_{ij} в определителе n-го порядка Δ_n определяется равенством:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

,

Свойства определителей.

1) Определитель n–го порядка равен сумме произведений элементов любой строки или столбца определителя на их алгебраические дополнения:

разложение по элементам i-ой строки

$$\Delta_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} (i = 1,2,\ldots,n)$$

разложение по элементам j-ого столбца

$$\Delta_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} (j = 1,2,\ldots,n)$$

Следствие 1.1. Если все элементы некоторой строки (столбца) определителя равны нулю, то определитель равен нулю.

2) Величина определителя не изменится при его транспонировании, т.е. при замене строки столбцом с тем же номером.

3) Величина определителя при перестановке двух любых строк (столбцов) меняет знак на противоположный, абсолютная величина остается неизменной.

Следствие 3.1.

Определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен 0.

4) Если все элементы строки (столбца) определителя умножить на одно и то же число, то и определитель умножится на это число.

Следствие 4.1.

Общий множитель элементов одной строки (столбца) можно вынести за знак определителя.

Следствие 4.2.

Определитель, у которого элементы двух строк (столбцов) пропорциональны, равен нулю.

5) Если каждый элемент некоторой строки (столбца) определителя представлен в виде суммы двух слагаемых, например,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21}+c_{21} & b_{22}+c_{22} & b_{23}+c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

то определитель можно представить в виде суммы двух определителей:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

6) Величина определителя не изменится, если ко всем элементам какой-либо строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же произвольное одинаковое число. Например, для столбцов определителя это свойство выражается равенством

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & \dots & a_{2i} & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i}+\lambda a_{1j} & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & \dots & a_{2i}+\lambda a_{2j} & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni}+\lambda a_{nj} & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

7) Если какая-либо строка (столбец) определителя является линейной комбинацией остальных строк (столбцов), то определитель равен нулю.

8) Сумма всех произведений элементов любой строки или столбца определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (столбца) равна нулю.

Если определитель имеет порядок выше третьего, то для вычисления значения такого определителя используют нижеописанные методы, основанные на свойствах определителей.

1) Метод разложения по строке или по столбцу:

$$\text{разложение по элементам i-ой строки}$$

$$\Delta_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \ldots + a_{in} A_{in} \, (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\text{разложение по элементам j-ого столбца}$$

$$\Delta_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \ldots + a_{nj} A_{nj} \, (j = 1, 2, \ldots, n)$$

2) Метод эффективного понижения порядка.

Сделав в каком-либо ряду Δ_n все элементы, кроме одного, равными нулю, вычисление Δ_n можно свести к вычислению одного определителя (n – 1)-го порядка.

Задания для самостоятельной работы

Вычислить определители.

1. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$

2. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \\ 9 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$

3. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \\ 5 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & -6 & 2 & 7 \end{vmatrix}.$

4. $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & 4 \\ -2 & 6 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$

5. $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 4 & 2 \\ 6 & 7 & -2 & -4 \end{vmatrix}.$

6. $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 7 & 1 \\ 3 & -5 & 2 & -6 \\ 0 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & -3 & 2 & 4 \end{vmatrix}.$

7. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 3 & -3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -4 \\ 2 & 6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

8. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 6 \\ -1 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & -2 \\ 4 & 4 & 7 & 1 \end{vmatrix}$.

9. $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -3 & 1 \\ 9 & -7 & 1 & 0 \\ -8 & 5 & -3 & 3 \end{vmatrix}$.

10. $\begin{vmatrix} -2 & 9 & 1 & 7 \\ -1 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & -5 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$.

11. $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -2 & -5 \\ 3 & 8 & 0 & -2 \\ 1 & -4 & 4 & 7 \end{vmatrix}$.

12. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 & -3 \\ 2 & -4 & 1 & -2 \\ -3 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

13. $\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 6 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

14. $\begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 3 \\ 6 & -1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \end{vmatrix}$.

15. $\begin{vmatrix} -4 & 3 & 1 & 3 \\ 6 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & 7 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & -2 & 2 \end{vmatrix}$.

16. $\begin{vmatrix} 6 & -2 & 5 & -3 \\ -5 & 3 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 9 & -1 & 3 \end{vmatrix}$.

17. $\begin{vmatrix} -1 & 9 & 0 & 4 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & -2 & 3 \\ -5 & 4 & 1 & 6 \end{vmatrix}$.

18. $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 6 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -3 & 4 & 5 \\ 8 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

19. $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & 5 & 2 \\ 4 & -7 & -6 & 3 \\ 8 & -9 & -15 & 4 \end{vmatrix}$.

20. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 8 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

21. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & -4 \\ -5 & 1 & -6 & 2 \\ 4 & -3 & 5 & 1 \end{vmatrix}$.

22. $\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 4 & -3 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 3 & -4 \end{vmatrix}$.

23. $\begin{vmatrix} -5 & 2 & 3 & -4 \\ 9 & -3 & 1 & 5 \\ -2 & 4 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

24. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 & 4 \\ -3 & 1 & -4 & -2 \\ 6 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 8 \end{vmatrix}$.

25. $\begin{vmatrix} -4 & 2 & 4 & 1 \\ 6 & -1 & 4 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -3 & 3 \end{vmatrix}$.

26. $\begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 & 2 \\ 4 & -3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & -2 & 4 \end{vmatrix}$.

27. $\begin{vmatrix} 9 & -2 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 3 & 2 \\ 5 & -3 & 4 & -1 \\ 7 & -2 & 6 & 0 \end{vmatrix}$

28. $\begin{vmatrix} 7 & -6 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -4 & 2 \\ -3 & 5 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

29. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & 5 \\ 3 & 6 & 0 & 9 \\ -2 & 2 & 3 & 6 \end{vmatrix}$.

30. $\begin{vmatrix} -2 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 5 & -2 \\ 7 & 8 & 3 & -4 \end{vmatrix}$.

Тема №8. Матрица. Обратная матрица

Определение. Матрица A^{-1} называется *обратной* по отношению к квадратной матрице *A*, если при умножении этой матрицы на данную как справа, так и слева получается единичная матрица.

Определение. Если $|A|\neq 0$, то матрица называется *невырожденной*, или *неособенной*. В противном случае ($|A|=0$)– *вырожденной* или *особенной*.

Теорема *(необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы).* Для того, чтобы матрица A имела обратную A^{-1} необходимо и достаточно, чтобы она была невырожденной, т.е. $|A|\neq 0$.

Алгоритм вычисления обратной матрицы

1. Находим $|A|$, если $|A|\neq 0$, то матрица A не вырожденная и существует A^{-1}. Если $|A|=0$, то матрица A вырожденная и обратная матрица не существует.
2. Находим алгебраические дополнения A_{ij} ($i=1,2,\ldots,n; j=1,2,\ldots,n$) элементов a_{ij} определителя $|A|$.
3. Составляем из них присоединенную матрицу A^*, для чего алгебраические дополнения элементов строк записываем в соответствующие столбцы. При этом матрица A^* имеет вид:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{j1} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{j2} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{jn} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

4. Вычисляем обратную матрицу по формуле $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot A^*$.
5. Проверяем правильность $A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = E$

Задания для самостоятельной работы

Найти матрицу, обратную к матрице A, и выполнить проверку.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 6 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \\ 7 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

3. $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 5 \\ 6 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

5. $A=\begin{pmatrix} 4 & -5 & 5 \\ -3 & 2 & 0 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$

6. $A=\begin{pmatrix} -3 & 5 & -3 \\ 2 & 1 & 6 \\ -5 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$

7. $A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -4 & 5 & -3 \\ 6 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$

8. $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 2 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$

9. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

10. $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$

11. $A=\begin{pmatrix} 8 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$

12. $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$

13. $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$

14. $A=\begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$

15. $A=\begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$

16. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$

17. $A=\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$

18. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$

19. $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ -3 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$

20. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$

21. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$

22. $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$

23. $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ -4 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$

24. $A=\begin{pmatrix} -7 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

25. $A=\begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & -1 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$

26. $A=\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$

27. $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$

28. $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$

29. $A=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$

30. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & -5 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$

Тема №9. Основные понятия и теоремы теории вероятностей

Пусть событие A может появиться при наступлении одного из событий $B_1, B_2, \ldots B_n$, образующих полную группу событий. События B_i обычно называют *гипотезами.* Известны вероятности гипотез $P(B_i)$ и условные вероятности $P(A/B_i)$ $(i = 1 \ldots n)$. Требуется найти вероятность события A.

Теорема. Вероятность события A, которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, \ldots B_n$, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события A:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) P(A/B_i)$$

Полученная формула называется *формулой полной вероятности*.

Пусть событие A может наступить при появлении одного из событий B_1, $B_2, \ldots, B_n$, образующих полную группу. Предположим, что в результате испытания событие A наступило. Тогда условные вероятности $P(B_i /A)$ находятся как:

$$P(B_i / A) = \frac{P(B_i)P(A/B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A/B_i)} \quad (i = 1 \ldots n)$$

Полученная формула называется формулой *Байеса*. Она используется для переоценки вероятностей гипотез B_i после того, как событие A произошло.

Задания для самостоятельной работы

Используя формулу полной вероятности или формулу Байеса решить следующие задачи.

1. В урне 5 белых шаров и 8 красных. Один за другим вынимаются два шара. Найти вероятность того, что вторым по счету будет извлечен красный шар.
2. На складе готовой продукции 60% изделий, изготовленных на станках 1-го типа, а остальные изготовлены на станках 2-го типа. Известно, что среди изделий, изготовленных на станках 1-го типа, брак составляет 5%, а на станках 2-го типа – 7%. Наугад извлекается одно изделие. Найти вероятность того, что это изделие – стандартное.
3. В футбольной команде два лучших пенальтиста. Вероятность забить гол с пенальти для одного из них равна 0,9, а для другого – 0,85. Судья назначил пенальти. Найти вероятность того, что гол будет забит.

4.В группе 25 студентов, из них 15 девушек и 10 юношей. На занятии по математике преподаватель поочередно вызывает к доске двух студентов. Найти вероятность того, что вторым по счету будет вызван к доске юноша.

5.Две фирмы изготавливают однотипную продукцию и реализуют ее через одну и ту же торговую точку. 70% продукции первой фирмы и 60% продукции второй фирмы – высшего сорта. Первая фирма поставила в эту торговую точку 18 единиц этой продукции, а вторая фирма поставила 12 единиц. Наугад выбирается одно изделие этого типа. Найти вероятность того, что это изделие – высшего сорта.

6. В первой коробке 8 белых и 7 черных шаров, а во второй 6 белых и 9 черных шаров. Из первой коробки наугад извлекается один шар и переклады-вается во вторую, после чего из второй коробки так же наугад берется один шар и перекладывается в первую коробку. Какова вероятность того, что после этого состав шаров в каждой коробке окажется прежним?

7.В среднем 80% телевизоров марки “Samsung”, 85% телевизоров марки “Sony” и 90% телевизоров марки “Toshiba” выдерживают гарантийный срок без поломки. В магазин завезли 12 телевизоров марки “Samsung”, 13 – марки “Sony” и 15 – марки “Toshiba”. Случайным образом выбирается один из телевизоров. Какова вероятность того, что этому телевизору не потребуется гарантийный ремонт?

8.За одно дежурство инспектор ГИБДД накладывает взыскания в среднем на 10% водителей легковых автомобилей, 15 % водителей грузовиков и 8% водителей других транспортных средств, проходящих мимо поста ГИБДД. Инспектор случайным образом останавливает одну машину. Найти вероятность того, что на ее водителя не будет наложено взыскание, если за одно дежурство мимо инспектора проходят в среднем 800 легковых автомобилей, 500 грузовиков и 300 других транспортных средств.

9. В корзине 14 красных, 16 зеленых и 10 желтых яблок, по форме неразличимых. 40% красных, 60% зеленых и 50% желтых яблок высокого качества. Наугад извлекается одно яблоко. Найти вероятность того, что оно – высокого качества.

10. В группе 16 девушек и 9 юношей. В среднем 12% девушек и 30 % юношей выполняют контрольную работу по математике неудовлетворительно. Наугад извлекается одна работа. Найти вероятность того, что эта работа выполнена на положительную оценку.

11. 60% сотрудников фирмы моложе 30 лет. Среди них 70% сотрудников – высокой квалификации. Среди сотрудников старше 30 лет 80% – высокой квалификации. Случайным образом выбирается один из сотрудников. Какова вероятность того, что этот сотрудник имеет низкую квалификацию?

12. В цехе 5 станков 1-го типа, 9 станков 2-го типа и 6 станков 3-го типа. Вероятность того, что в течение рабочей смены выйдет из строя станок 1-го типа, равна 0,1, 2-го типа – 0,15, 3-го типа – 0,09. Наугад выбирается один станок. Какова вероятность того, что в течение рабочей смены этот станок не выйдет из строя.

13. В овощном магазине 45% арбузов из Астрахани, а остальные – из Волгограда. В среднем 80% астраханских и 70% волгоградских арбузов – спелые. Наудачу выбирается один арбуз. Какова вероятность того, что этот арбуз – спелый?

14. Вероятность того, что экскурсия состоится 15 мая, равна 0,3, 16 мая – 0,3, а 17 мая – 0,4. Вероятность хорошей погоды 15 мая равна 0,5, 16 мая – 0,6, а 17 мая 0,4. Найти вероятность того, что во время экскурсии будет хорошая погода.

15. В бригаде 6 токарей 4-го разряда, 3 токаря 5-го и 1 токарь 6-го разряда. Вероятность изготовления стандартной детали токарем 4-го разряда равна 0,92, 5-го разряда – 0,95, 6-го разряда – 0,98. Какова вероятность того, что деталь, изготовленная этой бригадой, окажется стандартной?

16. В урне 7 белых шаров и 10 красных. Один за другим вынимаются два шара. Найти вероятность того, что вторым по счету будет извлечен красный шар.

17. На складе готовой продукции 70% изделий, изготовленных на станках 1-го типа, а остальные изготовлены на станках 2-го типа. Известно, что среди изделий, изготовленных на станках 1-го типа, брак составляет 6%, а на станках 2-го типа – 4%. Наугад извлекается одно изделие. Найти вероятность того, что это изделие – стандартное.

18. В футбольной команде два лучших пенальтиста. Вероятность забить гол с пенальти для одного из них равна 0,8, а для другого – 0,75. Судья назначил пенальти. Найти вероятность того, что гол будет забит.

19. В группе 25 студентов, из них 17 девушек и 8 юношей. На занятии по математике преподаватель поочередно вызывает к доске двух студентов. Найти вероятность того, что вторым по счету будет вызван к доске юноша.

20. Две фирмы изготавливают однотипную продукцию и реализуют ее через одну и ту же торговую точку. 80% продукции первой фирмы и 70% продукции второй фирмы – высшего сорта. Первая фирма поставила в эту торговую точку 20 единиц этой продукции, а вторая фирма поставила 15 единиц. Наугад выбирается одно изделие этого типа. Найти вероятность того, что это изделие – высшего сорта.

21. В первой коробке 9 белых и 5 черных шаров, а во второй 7 белых и 6 черных шаров. Из первой коробки наугад извлекается один шар и переклады-вается во вторую, после чего из второй коробки так же наугад берется один шар и перекладывается в первую коробку. Какова вероятность того, что после этого состав шаров в каждой коробке окажется прежним?

22. В среднем 90% телевизоров марки “Samsung”, 80% телевизоров марки “Sony” и 88% телевизоров марки “Toshiba” выдерживают гарантийный срок без поломки. В магазин завезли 15 телевизоров марки “Samsung”, 12 – марки “Sony” и 13 – марки “Toshiba”. Случайным образом выбирается один из телевизоров. Какова вероятность того, что этому телевизору не потребуется гарантийный ремонт?

23. За одно дежурство инспектор ГИБДД накладывает взыскания в среднем на 15% водителей легковых автомобилей, 12 % водителей грузовиков и 10% водителей других транспортных средств, проходящих мимо поста ГИБДД. Инспектор случайным образом останавливает одну машину. Найти вероятность того, что на ее водителя не будет наложено взыскание, если за одно дежурство мимо инспектора проходят в среднем 900 легковых автомобилей, 400 грузовиков и 500 других транспортных средств.

24. В корзине 12 красных, 15 зеленых и 13 желтых яблок, по форме неразличимых. 60% красных, 70% зеленых и 50% желтых яблок высокого качества. Наугад извлекается одно яблоко. Найти вероятность того, что оно – высокого качества.

25. В группе 16 девушек и 10 юношей. В среднем 10% девушек и 12% юношей выполняют контрольную работу по математике неудовлетворительно. Наугад извлекается одна работа. Найти вероятность того, что эта работа выполнена на положительную оценку.

26. 40% сотрудников фирмы моложе 30 лет. Среди них 60% сотрудников – высокой квалификации. Среди сотрудников старше 30 лет 80% - высокой квалификации. Случайным образом выбирается один из сотрудников. Какова вероятность того, что этот сотрудник имеет низкую квалификацию?
27. В цехе 6 станков 1-го типа, 8 станков 2-го типа и 6 станков 3-го типа. Вероятность того, что в течение рабочей смены выйдет из строя станок 1-го типа, равна 0,2, 2-го типа – 0,1, 3-го типа – 0,15. Наугад выбирается один станок. Какова вероятность того, что в течение рабочей смены этот станок не выйдет из строя.
28. В овощном магазине 60% арбузов из Астрахани, а остальные – из Волгограда. В среднем 90% астраханских и 80% волгоградских арбузов – спелые. Наудачу выбирается один арбуз. Какова вероятность того, что этот арбуз – спелый?
29. Вероятность того, что экскурсия состоится 22 мая, равна 0,4, 23 мая – 0,4, а 24 мая – 0,2. Вероятность хорошей погоды 22 мая равна 0,6, 23 мая – 0,4, а 24 мая 0,5. Найти вероятность того, что во время экскурсии будет хорошая погода.
30. В бригаде 5 токарей 4-го разряда, 3 токаря 5-го и 2 токаря 6-го разряда. Вероятность изготовления стандартной детали токарем 4-го разряда равна 0,91, 5-го разряда – 0, 94, 6-го разряда – 0,98. Какова вероятность того, что деталь, изготовленная этой бригадой, окажется бракованной?

Тема №10. Повторные независимые испытания

Определение. Испытания, проводящиеся в одних и тех же условиях с одинаковой вероятностью появления события A в каждом испытании, называются *повторными независимыми испытаниями* относительно события A.

Теорема Бернулли. Вероятность того, что в результате n $(n \le 10)$ независимых испытаний событие A появится ровно m раз обозначается $P_{n,m}$ и определяется как:

$$P_{n,m} = C_{n,m} p^m q^{n-m}$$

где
$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. При этом 1!=1, 0!=1

Определение. Число $m = m_0$, при котором вероятность $P_{n,m}$ наступления события A *в* n независимых испытаниях m раз - наибольшая, называется *наивероятнейшим числом (наивероятнейшей частотой)* наступления события A.

Наивероятнейшее число m_0 определяется из двойного неравенства:

$$np - q \le m_0 \le np + p$$

Если число испытаний $\boldsymbol{n}$ **> 10**, то вероятность $P_{n,m}$ определяется по локальной теореме Лапласа.

Локальная теорема Лапласа. Если вероятность p появления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_{n,m}$ того, что событие A появится в n испытаниях m раз, приближенно равна (тем точнее, чем больше n):

$$P_{n,m} \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}, \qquad \text{где} \qquad x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}.$$

Значения функции $\varphi(x)$ табулированы (см. Приложение 1).

Интегральная теорема Лапласа. Если вероятность P наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность того, что событие A появится в n $(n > 10)$ испытаниях от a до b раз, выражается интегральной формулой Лапласа:

$$P(a \le m \le b) \approx \frac{1}{2}[\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)]$$

$$\alpha = \frac{a-np}{\sqrt{npq}}; \beta = \frac{b-np}{\sqrt{npq}}$$

Значения функции $\Phi(x)$ табулированы (см. Приложение 2).

Задания для самостоятельной работы

1. Вероятность покупки автомобиля за неделю в автосалоне «ТТС» равна p=0,4. Найти вероятность того, что на текущей неделе из 7 автомобилей куплено 5 автомобилей.
2. Хлебзавод №3 изготавливает булочки.Вероятность того, что в булочке есть изюм, равна p=0,9. Найти вероятность, что из 70 булочек поступивших в магазин, в 60 есть изюм.
3. Вероятность того, что сотовый телефон потребует ремонта в течение гарантийного срока, равна p=0,5 . Найти вероятность того, что из 20 купленных телефонов потребуют ремонта от 15 до 18 телефонов.
4. Вероятность стрелка попасть в цель при одном выстреле равна p=0,7. Найти вероятность того, что при 5 выстрелах стрелок попадает в цель 3 раза.
5. Вероятность того, что завод выпускает изделие высшего сорта, равна p=0,8. Предприятие приобретает 60 изделий. Найти наивероятнейшее число изделий высшего сорта и вероятность того, что именно это число изделий высшего сорта приобретено предприятием?
6. Вероятность того, что абитуриент вуза, окончивший школу, станет студентом ИУЭиФ, равна p=0,6. Найти вероятность того, что среди 70 абитуриентов вуза, окончивших школу, студентами станут от 50 до 65 человек.
7. На прием к врачу записались 8 человек. Вероятность того, что пациенту потребуется сдать кровь на анализ, равна p=0,6. Найти вероятность того, что 5 пациентам необходимо сдать кровь на анализ.
8. В лесопосадочной полосе посажено 80 молодых елочек. Вероятность того, что одна елочка приживется равна p=0.8. Найти вероятность, что приживутся 70 елочек.

9. Вероятность изготовления на станке стандартной детали равна p=0. 7. Изготовлено 100 деталей. Найти вероятность того, что будет изготовлено от 50 до 70 стандартных деталей.

10. Вероятность попадания в кольцо для данного начинающего баскетболиста, равна p=0.5. Найти вероятность того, что из 6 бросков он попадет 4 раза.

11. Вероятность того, что стиральная машина сломается в период гарантийного ремонта, равна p=0,1. Найти вероятность того, что из 60 купленных стиральных машин сломаются 50.

12. В районе 50 предприятий, финансовую деятельность которых проверяет налоговая инспекция. Вероятность того, что по результатам проверки предприятию будут предъявлены штрафные санкции, равна p=0,4. Найти вероятность того, что штрафные санкции будут предъявлены от 15 до 35 предприятиям.

13. В одном из отделов магазина продают одежду. Вероятность, что покупатель купит брюки или рубашку или свитер, равна 0,3. Найти вероятность того, что из 7 покупателей покупку совершат 4 человека.

14. Всхожесть семян помидора равна p=0,7. Посажено 120 семян. Найти наивероятнейшее число взошедших семян помидора и вероятность того, что именно это количество семян взойдет.

15. Детский новогодний подарок состоит из 40 видов конфет. Вероятность того, что в подарочном пакете попадется конфета «Мишка на севере», равна 0,8. Найти вероятность того, что в подарочном пакете «Мишка на севере» от 10 до 15 штук.

16. Вероятность выигрыша по лотерейному билету, равна 0,1. Найти вероятность того, что из 6 купленных билетов 2 будут выигрышными.

17. Вероятность того, что в составе торта есть сгущенное молоко, равна p=0,6. Найти вероятность, что в 15 тортах, поступивших в продажу, сгущенка есть в 6 тортах.

18. Вероятность изготовления на станке детали первого сорта равна $p=0,2$. Изготовлено 120 деталей. Найти вероятность того, что деталей первого сорта будет изготовлено от 30 до 50 штук.

19. Вероятность покупки автомобиля за неделю в автосалоне «ТТС» равна =0,5. Найти вероятность того, что на текущей неделе из 8 автомобилей куплено 6 автомобилей.

20. Хлебзавод №3 изготавливает булочки. Вероятность того, что в булочке есть изюм, равна $p=0,8$. Найти вероятность, что из 80 булочек поступивших в магазин, в 65 есть изюм.

21. Вероятность того, что сотовый телефон потребует ремонта в течение гарантийного срока, равна $p=0,6$. Найти вероятность того, что из 30 купленных телефонов потребуют ремонта от 15 до 20 телефонов.

22. Вероятность стрелка попасть в цель при одном выстреле равна $p=0,3$. Найти вероятность того, что при 7 выстрелах стрелок попадает в цель 3 раза.

23. Вероятность того, что завод выпускает изделие высшего сорта, равна $p=0,9$. Предприятие приобретает 90 изделий. Найти наивероятнейшее число изделий высшего сорта и вероятность того, что именно это число изделий высшего сорта приобретено предприятием?

24. Вероятность того, что абитуриент вуза, окончивший школу, станет студентом ИУЭиФ, равна $p=0,7$. Найти вероятность того, что среди 100 абитуриентов вуза, окончивших школу, студентами станут от 80 до 90 человек.

25. На прием к врачу записались 5 человек. Вероятность того, что пациенту потребуется сдать кровь на анализ, равна $p=0,9$. Найти вероятность того, что 4 пациентам необходимо сдать кровь на анализ.

26. В лесопосадочной полосе посажено 130 молодых елочек. Вероятность того, что одна елочка приживется равна $p=0.9$. Найти вероятность, что приживутся 100 елочек.

27. Вероятность изготовления на станке стандартной детали равна $p=0.6$. Изготовлено 140 деталей. Найти вероятность того, что будет изготовлено от 90 до 100 стандартных деталей.

28. Вероятность попадания в кольцо для данного начинающего баскетболиста, равна p=0.2. Найти вероятность того, что из 8 бросков он попадет 5 раз.

29. Вероятность того, что стиральная машина сломается в период гарантийного ремонта, равна p=0,3. Найти вероятность того, что из 40 купленных стиральных машин сломаются 10.

30. В районе 60 предприятий, финансовую деятельность которых проверяет налоговая инспекция. Вероятность того, что по результатам проверки предприятию будут предъявлены штрафные санкции, равна p=0,5. Найти вероятность того, что штрафные санкции будут предъявлены от 25 до 45 предприятиям.

Тема №11. Дискретные и непрерывные случайные величины и их числовые характеристики

Определение. Величина, которая в зависимости от результатов испытаний принимает то или иное численное значение, называется *случайной величиной*.

Определение. *Дискретной* (прерывной) называется такая случайная величина, которая принимает конечное или бесконечное (счетное) множество значений.

Определение. *Законом распределения дискретной случайной величины* называется соответствие между возможными значениями случайной величины и вероятностями их появления.

Существует две формы задания закона распределения: табличная и графическая. Табличная форма, называемая рядом распределения, представляется в виде двух строк (столбцов). В первой строке записываются все возможные значения случайной величины x, в порядке возрастания, во второй - вероятности p_i появления этих значений. Сумма всех значений вероятностей равна единице, то есть $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Графическая форма задания закона распределения - это полигон (или многоугольник) распределения вероятностей. Он представляет собой ломаную линию, соединяющую точки (x_i, p_i) прямоугольной системы координат.

Определение. *Математическим ожиданием $M(X)$* дискретной случайной величины X называется сумма произведений всех возможных значений случайной величины x_i, на соответствующие значения вероятностей p_i, (i= 1… *n).*

$$M(x) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_n \cdot p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$$

Математическое ожидание интерпретируется как среднее значение случайной величины, вокруг которого распределены все возможные значения случайной величины.

Определение. *Дисперсией $D(X)$* дискретной случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения значений случайной величины от ее математического ожидания $D(X)= M[X-M(X)]^2$.

$$D(x) = \sigma^2(X) = \sum_{i=1}^{n} [x_i - M(X)]^2 \cdot p_i$$

Чаще применяют другую, более удобную для расчетов формулу дисперсии. Выведем ее, используя свойства математического ожидания

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i \right)^2$$

Дисперсия случайной величины означает разброс или рассеяние значений случайной величины около ее среднего значения (математического ожидания).

Определение. *Средним квадратическим (стандартным) отклонением* $\sigma(X)$ дискретной случайной величины X называется квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

Задания для самостоятельной работы

Доказать, что закон распределения составлен правильно. Вычислить числовые характеристики: математическое ожидание M(X), дисперсию D(X), среднее квадратическое отклонение σ(X).

1.

x	1	2	3
p	0,2	0,7	0,1

2.

x	2	3	4
p	0,3	0,2	0,5

3.

x	1	2	3
p	0,1	0,2	0,7

4.

x	1	2	3
p	0,7	0,1	0,2

5.

x	2	3	4
p	0,3	0,4	0,3

6.

x	2	3	4
p	0,5	0,1	0,4

7.

x	1	2	3
p	0,4	0,4	0,2

8.

x	1	2	3
p	0,2	0,2	0,6

9.

x	2	3	5
p	0,2	0,5	0,3

10.

x	1	2	3
p	0,4	0,1	0,5

11.

x	2	3	4
p	0,8	0,1	0,1

12.

x	1	2	3
p	0,4	0,5	0,1

13.

x	1	2	3
p	0,6	0,3	0,1

14.

x	2	3	4
p	0,1	0,6	0,3

15.

x	3	4	5
p	0,3	0,5	0,2

16.

x	1	2	3
p	0,4	0,2	0,4

17.

x	3	4	5
p	0,8	0,1	0,1

18.

x	2	3	4
p	0,2	0,1	0,5

19.

x	2	3	4
p	0,3	0,1	0,6

20.

x	1	2	3
p	0,8	0,1	0,1

21.

x	1	2	3
p	0,2	0,7	0,1

22.

x	2	3	4
p	0,3	0,2	0,5

23.

x	1	2	3
p	0,1	0,2	0,7

24.

x	1	2	3
p	0,7	0,1	0,2

25.

x	2	3	4
p	0,3	0,4	0,3

26.

x	2	3	4
p	0,5	0,1	0,4

27.

x	1	2	3
p	0,4	0,4	0,2

28.

x	1	2	3
p	0,2	0,2	0,6

29.

x	2	3	5
p	0,2	0,5	0,3

30.

x	1	2	3
p	0,4	0,1	0,5

Тема №12. Основные законы распределения случайной величины.

Определение. *Нормальным* называется распределение непрерывной случайной величины, плотность распределения которой определяется формулой

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},\ x\in R$$

Нормальное распределение определяется двумя параметрами a и σ. Здесь параметры $a = M(x)$ – это математическое ожидание, σ - среднеквадратическое отклонение случайной величины X.

Теорема 1. Вероятность того, что нормально распределенная случайная величина X примет значения из интервала $(c;d)$, равна

$$P(c < X < d) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{d-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{c-a}{\sigma}\right)\right]$$

Теорема 2. Вероятность того, что отклонение нормального распределения случайной величины X от ее математического ожидания $M(X)=a$ не превзойдет по абсолютной величине $\alpha > 0$ (где α – некоторое малое положительное число), равна

$$P(|X - a| \leq \alpha) = \Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right)$$

Определение. Дискретная случайная величина называется *распределенной по закону Пуассона*, если она принимает счетное множество значений 0,1,2,… с вероятностями p_i.

Это распределение содержит один параметр a и вычисляется по формуле:

$$P_m \approx a^m \frac{e^{-a}}{m!}$$

Если $n \to \infty$ и при этом $p \to 0$, но произведение np остается постоянным, а именно $np=a$. Как правило, распределение Пуассона дает удовлетворительные результаты, когда n имеет порядок сотен единиц, а произведение np заключено в пределах 1 и 10. Так как $p \to 0$, то распределение Пуассона часто называют «распределением редких явлений».

Смысл параметра a заключается в следующем: $M(X) = D(X) = a$.

Примерами дискретных случайных величин являются X - число вызовов на станцию скорой помощи, X - число автомашин, проходящих ночью мимо поста

ГАИ, X - число авиалайнеров, прибывающих в аэропорт, X- число требований на выплату страховых сумм за некоторый период времени. Они имеют распределение Пуассона с параметром $a = \lambda t$, где λ – интенсивность движения, а t -время.

Определение. *Непрерывная* случайная величина называется распределенной по показательному (экспоненциальному) закону распределения, если ее плотность распределения *f(x)* имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0 \end{cases}$$

где λ –положительный параметр распределения.

Интегральная функция распределения *F(x)* имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ 1 - \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0 \end{cases}$$

Математическое ожидание и дисперсию случайной величины X, имеющей показательное распределение:

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}, D(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$$

Вероятность попадания случайной величины X, имеющей показательное распределение в интервал *(a;b):*

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = (1 - e^{-\lambda b}) - (1 - e^{-\lambda a}) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

Показательное распределение имеет непрерывная случайная величина, являющаяся промежутком времени между появлениями двух событий в простейшем потоке. При этом λ– интенсивность потока. Показательное распределение имеют случайные величины: время между двумя вызовами на станции скорой помощи, время между появлениями двух автомобилей у поста ГАИ, время между двумя требованиями выплаты страховых сумм. Показательное распределение находит широкое применение в вопросах надежности.

Время безотказной работы отдельных элементов, узлов различных устройств, например, есть случайная величина, имеющая *показательное* распределение.

Задания для самостоятельной работы

Решить следующие задачи.

1. Рост студентов института подчиняется закону нормального распределения с математическим ожиданием, равным 174 см и средним квадратическим отклонением 16 см. Определить вероятность того, что рост случайно выбранного студента будет заключен в пределах от 170 см до 180 см. Найти выражение интегральной и дифференциальной функций.
2. В месяц в Татарстане рождается 1000 детей. Вероятность того, что один из детей будет негритенком, равна 0,004. Какова вероятность того, что за месяц родятся два темнокожих ребенка?
3. Интенсивность поступления жалоб на работу жилищно-коммунальной службы равна 21 жалобе в неделю. Найти вероятность того, что в текущей неделе не будет ни одной жалобы.
4. Глубина проникания реагента в пропитываемый образец почвы подчиняется закону нормального распределения с математическим ожиданием 14 см и дисперсией 1,44. Определить вероятность того, что в случайно выбранной опытной колонке с почвой реагент проникнет на глубину от 14 см до 15 см.
5. В месяц на АЗС «Татнефть» заправляются около 2500 машин. Вероятность того, что водитель уедет, не расплатившись за бензин, равна 0,002. Найти вероятность того, что четыре водителя сэкономят на бензине (не заплатят за бензин).
6. Интенсивность звонков на «горячую линию» – 2 звонка в минуту. Найти вероятность того, что интервал между двумя звонками будет от 0,6 до 2 минут.
7. Ошибка взвешивания – случайная нормально распределенная величина с дисперсией 100. Весы заранее настроены на обвес 20 г. Найти вероятность того, что ошибка взвешивания находится в пределах от 15 до 30 г.

8. Численность новобранцев в дивизии 1000 человек. Вероятность того, что новобранец с первого выстрела попадет в «яблочко», равна 0,002. Какова вероятность того, что точно в цель попадут пять новобранцев?

9. Среднее время безотказной работы батарейки (наработки на отказ) равно 700 часов. Найти вероятность того, что батарейка проработает от 750 до 800 часов.

10. Вес бычка в стаде – случайная нормально распределенная величина. При взвешивании животных обнаружилось, что среднее квадратическое отклонение этой величины равно 6 кг. Найти математическое ожидание этой величины и вероятность ее попадания в интервал (83 кг,89 кг), симметричный относительно математического ожидания.

11. Интенсивность движения поездов – 10 поездов в час. Найти вероятность того, что в течение 10 минут не будет поезда.

12. Интенсивность приезда – отъезда машин на склад – 2 машины в час. Найти вероятность того, что промежуток времени между двумя машинами будет от 0,5 до 2 часов.

13. Вес студенток института подчиняется закону нормального распределения с математическим ожиданием, равным 59 кг и дисперсией 81. Определить вероятность того, что вес случайно выбранной студентки будет заключен в пределах от 60 до 65 кг.

14. Продано 1200 лотерейных билетов. Вероятность выиграть квартиру равна 0,005. Какова вероятность того, что два человека получат ключи от квартиры?

15. Среднее время безотказной работы телевизора (наработки на отказ) равно 36 месяцев. Какова вероятность того, что телевизор проработает без отказа от 40 до 48 месяцев?

16. Случайная величина подчинена закону нормального распределения с математическим ожиданием 120 и дисперсией 49. С вероятностью 0,9973 определить границы изменения значений случайной величины.

17. На станции скорой помощи поток вызовов имеет интенсивность вызова в минуту. Найти вероятность того, что за три минуты будет четыре вызова.

18. Интенсивность звонков в справочное бюро 2 звонка в минуту. Найти вероятность того, что между двумя звонками пройдет от 3 до 5 минут.

19. Средний размер ступни солдата – новобранца 43 см, а среднее квадратическое отклонение размера равно 4 см. Считая размер ступни солдата нормально распределенной случайной величиной, определить диапазон, в который с вероятностью 0,9545 попадет размер сапог случайно выбранного солдата

20. На базу поступило 6000 бутылок сока. Вероятность, что при транспортировке бутылка разобьется, равна 0,0005. Найти вероятность того, что при транспортировке разобьются четыре бутылки.

21. Среднее время безотказной работы стиральной машины (наработки на отказ) равно 24 месяца. Найти вероятность того, что стиральная машина проработает без отказа от 30 до 36 месяцев.

22. Длина хвоста арабского скакуна подчиняется закону нормального распределения с математическим ожиданием 94 см и дисперсией 36. Определить вероятность того, что длина хвоста случайно выбранного из питомника скакуна будет заключена в пределах от 92 см до 100 см.

23. Интенсивность аварий на дорогах 12 аварий в день. Найти вероятность того, что в течение двух дней не будет аварий.

24. Среднее время безотказной работы игрушечного электропоезда (наработки на отказ) равно 600 часов. Найти вероятность того, что игрушка не сломается за 700 часов.

25. Диаметр ствола строевого леса – случайная величина с нормальным распределением. При измерении диаметра ствола обнаружилось, что ее среднее квадратическое отклонение равно 5 см. Найти математическое ожидание этой величины и вероятность попадания в интервал (26 см, 34 см), симметричный относительно математического ожидания.

26. В 2005 году в экономический ВУЗ поступило 800 абитуриентов. Вероятность того, что один из них в будущем станет доктором экономических наук, равна 0,00125. Какова вероятность того, что докторами наук станут три человека из числа поступивших в 2005 году?

27. Интенсивность посещения паспортного стола 15 человек в час. Какова вероятность того, что между двумя посещениями пройдет от 3 до 5 минут?
28. Вес яблока в партии яблок, поступивших в магазин, – случайная нормально распределенная величина с математическим ожиданием 90 гр. С вероятностью 0,9545 определить среднее квадратическое отклонение случайной величины, если отклонение веса яблок от среднего веса по абсолютной величине не превосходит 10 гр.
29. Ежегодно за границу на учебу выезжают 1500 студентов. Вероятность того, что студент останется за границей на постоянное жительство, равна 0,002. Какова вероятность того, что восемь студентов выехавших на учебу, станут гражданами другой страны?
30. Среднее время безотказной работы утюга (наработки на отказ) равно 12 месяцев. Какова вероятность того, что утюг не перегорит за 24 месяца?

Рекомендуемая литература

1. http://do.kpfu.ru/course/view.php?id=1983
2. http://do.kpfu.ru/enrol/index.php?id=1972
3. Математика: учебное пособие по математике для экономических специальностей вузов. Ч.1./ Под редакцией Р.Ш. Марданова. – Казань: Изд-во КФЭИ, 1999.- 532 с.
4. Математика для экономических специальностей вузов. Ч. 2 / Под ред. Р.Ш. Марданова – Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001.- 283 с.
5. Математика для экономических специальностей вузов. Ч. 3 / Под ред. Р.Ш. Марданова – Казань: Изд-во КГУ, 2007.-320 с.
6. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов / Р.Ш. Марданов, А.Ю.Хасанова, Р.А. Султанов, А.Г. Фатыхов; под научной ред. проф. Р.Ш. Марданова. – Казань: Казан.гос.ун-т, 2009. -575 с.
7. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. – М.: Наука, 2006. – 352 с.
8. Сборник задач по высшей математике для экономистов: учебное пособие/ Под ред. В. И. Ермакова – М.: ИНФРА-М, 2005. – 575 с.

Приложение 1

Таблица значений функции $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3879	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3726	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3411	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2037	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1827	0,1804	0,1781	0,1759	0,1736
1,3	0,1714	0,1692	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0271	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0159	0,0155	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0089	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0049	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001
4,0	0,0001	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Приложение 2

Таблица значений функции $\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0080	0,0160	0,0239	0,0319	0,0399	0,0478	0,0558	0,0638	0,0717
0,1	0,0797	0,0876	0,0955	0,1034	0,1113	0,1192	0,1271	0,1350	0,1428	0,1507
0,2	0,1585	0,1663	0,1741	0,1819	0,1897	0,1974	0,2051	0,2128	0,2205	0,2282
0,3	0,2358	0,2434	0,2510	0,2586	0,2661	0,2737	0,2812	0,2886	0,2961	0,3035
0,4	0,3108	0,3182	0,3255	0,3328	0,3401	0,3473	0,3545	0,3616	0,3688	0,3759
0,5	0,3829	0,3899	0,3969	0,4039	0,4108	0,4177	0,4245	0,4313	0,4381	0,4448
0,6	0,4515	0,4581	0,4647	0,4713	0,4778	0,4843	0,4907	0,4971	0,5035	0,5098
0,7	0,5161	0,5223	0,5285	0,5346	0,5407	0,5467	0,5527	0,5587	0,5646	0,5705
0,8	0,5753	0,5821	0,5878	0,5935	0,5991	0,6047	0,6102	0,6157	0,6211	0,6265
0,9	0,6319	0,6372	0,6424	0,6476	0,6528	0,6579	0,6629	0,6679	0,6729	0,6778
1,0	0,6827	0,6875	0,6923	0,6970	0,7017	0,7063	0,7109	0,7154	0,7199	0,7243
1,1	0,7287	0,7339	0,7373	0,7415	0,7457	0,7499	0,7540	0,7580	0,7620	0,7660
1,2	0,7699	0,7737	0,7775	0,7813	0,7850	0,7887	0,7923	0,7959	0,7995	0,8029
1,3	0,8064	0,8098	0,8132	0,8165	0,8198	0,8230	0,8262	0,8293	0,8324	0,8355
1,4	0,8385	0,8415	0,8444	0,8473	0,8501	0,8529	0,8557	0,8584	0,8611	0,8638
1,5	0,8664	0,8690	0,8715	0,8740	0,8764	0,8789	0,8812	0,8835	0,8859	0,8882
1,6	0,8904	0,8926	0,8948	0,8969	0,8990	0,9011	0,9031	0,9051	0,9070	0,9090
1,7	0,9109	0,9127	0,9146	0,9164	0,9181	0,9199	0,9216	0,9233	0,9249	0,9285
1,8	0,9281	0,9297	0,9312	0,9327	0,9342	0,9357	0,9371	0,9385	0,9399	0,9412
1,9	0,9426	0,9439	0,9451	0,9464	0,9476	0,9488	0,9500	0,9512	0,9523	0,9534
2,0	0,9545	0,9556	0,9566	0,9576	0,9586	0,9596	0,9606	0,9616	0,9625	0,9634
2,1	0,9643	0,9651	0,9660	0,9668	0,9676	0,9684	0,9692	0,9700	0,9707	0,9715
2,2	0,9722	0,9729	0,9736	0,9743	0,9749	0,9756	0,9762	0,9768	0,9774	0,9780
2,3	0,9786	0,9791	0,9797	0,9802	0,9807	0,9812	0,9817	0,9822	0,9827	0,9832
2,4	0,9836	0,9840	0,9845	0,9849	0,9853	0,9857	0,9861	0,9865	0,9869	0,9872
2,5	0,9876	0,9879	0,9883	0,9886	0,9889	0,9892	0,9895	0,9898	0,9901	0,9904
2,6	0,9907	0,9909	0,9912	0,9915	0,9917	0,9920	0,9922	0,9924	0,9926	0,9928
2,7	0,9931	0,9933	0,9935	0,9937	0,9939	0,9940	0,9942	0,9944	0,9946	0,9947
2,8	0,9949	0,9950	0,9952	0,9953	0,9955	0,9956	0,9958	0,9959	0,9960	0,9961
2,9	0,9963	0,9964	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972
3,0	0,9973	0,9974	0,9975	0,9976	0,9976	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980
3,1	0,9981	0,9981	0,9982	0,9983	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986
3,2	0,9986	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,3	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,4	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995	0,9995
3,5	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997	0,9997
3,6	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9998
3,7	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
4,0	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

Учебное издание

Воронцова Валерия Леонидовна
Зайнуллина Лейсан Наилевна

УЧЕБНО - МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

по дисциплине **«Математика»**
для организации самостоятельной работы
со студентами, обучающимися по направлению
38.03.02 «Менеджмент»

420008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37
тел. (843) 233-73-59, 233-73-28