Ф. Г. Авхадиев, Р. Г. Насибуллин
Казанский(Приволжский) федеральный университет,
favhadiev@ksu.ru, nasibullinramil@gmail.com

НЕРАВЕНСТВА ТИПА ХАРДИ В ОБЛАСТЯХ С ОГРАНИЧЕННЫМ ВНУТРЕННИМ РАДИУСОМ

Пусть Ω – открытое собственное подмножество $\mathbb{R}^n$, $C_0^1(\Omega)$ – пространство непрерывно дифференцируемых функций с компактным носителем в Ω и $\delta = \delta(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$ – функция расстояния до границы области. Ф.Г. Авхадиев в статье [1] доказал следующее утверждение: *пусть Ω – открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \mathbb{R}^n$. Если $1 \leq p < \infty$ и $n < s < \infty$, то*

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|f|^p}{\delta^s} dx \leq \left(\frac{p}{s-n}\right)^p \int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla f|^p}{\delta^{s-p}} dx \quad \forall f \in C_0^1(\Omega), \tag{1}$$

причем постоянная $p^p(s-n)^{-p}$ является точной для ряда областей Ω.

Неравенство (1) является прямым аналогом классического одномерного неравенства типа Харди (см. [2]).

Используя методы статьи [1], мы доказали аналог неравенства (1) в том случае, когда $s < n$ и $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ является произвольной областью с конечным внутренним радиусом $\delta_0(\Omega)$, где

$$\delta_0(\Omega) := \sup\{\delta(x, \Omega) : x \in \Omega\}.$$

А именно, доказали следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – произвольное открытое множество, причем $\delta_0(\Omega) < \infty$, и пусть $p \in [1, +\infty)$ и $l \in [1, p]$. Тогда для любого $s \in (-\infty, n)$ и для любой функции $f \in C_0^1(\Omega)$ имеет место неравенство*

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|f|^p}{\delta^s} dx \leq \left(\frac{p\delta_0^{n-s}}{n-s}\right)^l \int\limits_{\Omega} \frac{|f|^{p-l}|\nabla f|^l}{\delta^{s+l(n-1-s)}} dx. \tag{2}$$

В случае, когда Ω – выпуклая область в $\mathbb{R}^n$, имеет место следующий результат.

Теорема 2. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – *открытое множество, компоненты которого являются выпуклыми множествами, с конечным внутренним радиусом* $\delta_0(\Omega)$, *и пусть* $\delta := \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$. *Если* $1 \le p < \infty$ *и* $-\infty < s < 1$, *то*

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|f|^p}{\delta^s} dx \le \left(\frac{p}{1-s} \right)^p \delta_0(\Omega)^{p(1-s)} \int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla f|^p}{\delta^{s-sp}} dx \quad \forall f \in C_0^1(\Omega). \quad (3)$$

Причем, константа неравенства (3) при $p = 1$ является точной.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 11-01-00762-а и 12-01-00636-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Avkhadiev F. G., *Hardy type inequalities in higher dimensions with explicit estimate of constants* // Lobachevskii J. Math. – 2006. – 21. –p. 3–31.

2. Hardy G. H., Littlewood J. E. and Polya G. *Inequalities.* Cambridge: Cambridge University Press, 1973. – 340 p.