ГЛАВА 8. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§1. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

Одна из основных задач линейной алгебры — задача решения ***линейного уравнения***

$$\mathcal{A}x = y.$$

Здесь

$$\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{Y}_m$$

есть линейный оператор, y — заданный элемент пространства $\mathbf{Y}_m$, а x — искомый элемент пространства $\mathbf{X}_n$.

.

Будем считать, что уравнение

$$\mathcal{A}x = y$$

имеет решение, и опишем структуру всех его возможных решений, т. е. получим представление *общего решения уравнения*.

.

Пусть x^1, x^2 — два решения уравнения

$$\mathcal{A}x = y$$

при одной и той же правой части y. Тогда, очевидно,

$$\mathcal{A}(x^1 - x^2) = 0,$$

т. е.

$$x^1 - x^2 \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A}).$$

Фиксируем некоторое решение уравнения

$$\mathcal{A}x = y$$

обозначим его через x^0 и будем называть ***частным решением неоднородного уравнения***:

$$\mathcal{A}x^0 = y.$$

Любое другое решение x уравнения $\mathcal{A}x = y$ имеет вид

$$x = x^0 + \widetilde{x},$$

где $\widetilde{x} \in \operatorname{Ker}(\mathcal{A})$. Действительно,

$$\mathcal{A}(x - x^0) = 0,$$

т. е.

$$\widetilde{x} = x - x^0 \in \operatorname{Ker}(\mathcal{A}).$$

.

Имеем

$$x = x^0 + \widetilde{x}, \quad \widetilde{x} \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A}).$$

Пусть φ^1, φ^2, $\ldots$, φ^p — некий базис в $\mathrm{Ker}(\mathcal{A})$. Тогда

$$x = x^0 + \sum_{k=1}^{p} c_k \varphi^k.$$

Это *общее решение неоднородного уравнения*. Меняя коэффициенты c_1, $\ldots$, c_p, можно получить любое решение уравнения

$$\mathcal{A}x = y.$$

.

Векторы

$$\varphi^1,\ \varphi^2,\ \ldots,\ \varphi^p$$

называют ***фундаментальной системой решений однородного уравнения***

$$\mathcal{A}x = 0.$$

Вектор

$$\widetilde{x} = \sum_{k=1}^{p} c_k \varphi^k$$

называют ***общим решением однородного уравнения***.

.

Итак, общее решение

$$x = x^0 + \widetilde{x}$$

неоднородного уравнения

$$\mathcal{A}x = y$$

есть сумма какого-либо частного решения x^0 этого уравнения и общего решения $\widetilde{x}$ однородного уравнения

$$\mathcal{A}x = 0.$$

§2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ. УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ

При фактическом построении решений уравнения

$$\mathcal{A}x = y$$

нужно ввести некоторые базисы

$$\mathcal{E}_n = \{e^k\}_{k=1}^n \subset \mathbf{X}_n, \quad \mathcal{Q}_m = \{q^k\}_{k=1}^m \subset \mathbf{Y}_m$$

и перейти к СЛАУ относительно коэффициентов ξ разложения

$$x = \mathcal{E}_n \xi,$$

считая известными коэффициенты η разложения

$$y = \mathcal{Q}_m \eta.$$

.

Подставим

$$x = \mathcal{E}\xi, \quad y = \mathcal{Q}\eta$$

в

$$\mathcal{A}x = y.$$

Получим

$$\mathcal{A}\mathcal{E}\xi = \mathcal{Q}\eta,$$

или

$$\mathcal{Q}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{E}\xi = \eta.$$

Т. е.

$$A_{eq}\xi = \eta,$$

где A_{eq} — матрица оператора $\mathcal{A}$.

.

Более подробная запись уравнения

$$A_{eq}\xi = \eta$$

дает

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(eq)}\xi_j = \eta_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Подчеркнем, что коэффициенты $a_{ij}^{(eq)}$ этой системы уравнений (элементы матрицы оператора $\mathcal{A}$) и столбец правой части $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ предполагаются известными, а числа $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ требуется найти.

.

Получим необходимые и достаточные условия существования решения $x \in \mathbb{C}^n$ СЛАУ

$$Ax = b,$$

где $A = A(m, n)$ — заданная прямоугольная матрица с комплексными, вообще говоря, элементами, b — заданный вектор из $\mathbb{C}^m$.

.

Обозначим через

$$(A, b)$$

матрицу размера $m \times (n+1)$, получающуюся присоединением к матрице A столбца b. Матрицу (A, b) принято называть расширенной матрицей системы

$$Ax = b.$$

.

<u>Теорема Кронекера — Капелли.</u> Для того, чтобы система уравнений

$$Ax = b$$

имела решение, необходимо и достаточно, чтобы ранги матриц A и (A, b) совпадали.

.

Доказательство. Добавление столбца не уменьшает ранга матрицы:

$$\operatorname{rank}(A) \leqslant \operatorname{rank}(A, b).$$

Ранг сохраняется тогда и только тогда, когда b есть линейная комбинация столбцов матрицы A. Последнее эквивалентно тому, что существует вектор $x \in \mathbb{C}^n$, являющийся решением системы

$$Ax = b. \quad \square$$

§3. ПОСТРОЕНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ СЛАУ

Опишем теперь некоторые способы, которые можно применять для фактического построения частного решения системы линейных уравнений

$$Ax = b$$

и для построения фундаментальной системы решений соответствующей однородной системы линейных уравнений.

.

Начнем с построения частного решения системы линейных уравнений

$$Ax = b.$$

Предположим, что условие разрешимости системы выполнено и положим

$$r = \operatorname{rank}(A, b).$$

.

Приведем матрицу

$$(A, b)$$

к такому виду, что главный минор порядка r этой матрицы будет отличен от нуля, а все строки преобразованной матрицы (A, b), начиная с $(r+1)$-й есть линейные комбинации первых r строк.

.

Выполняемые указанным способом преобразования приводят к эквивалентной системе линейных уравнений, причем последние

$$m - r$$

уравнений преобразованной системы — следствия первых r уравнений.

.

Отбросим эти последние уравнения, а в оставшихся r уравнениях перенесем слагаемые, содержащие переменные с $(r+1)$**-й** и до n**-й** (эти переменные принято называть ***<u>свободными</u>***), в правую часть.

.

Придадим свободным переменным любые значения (чаще всего, нет никаких причин не брать их равными нулю). В результате получим систему из r уравнений с r неизвестными, определитель которой по построению отличен от нуля.

.

Решив эту крамеровскую систему уравнений, найдем

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_r.$$

Таким образом, будет построен вектор

$$x = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_r,\quad x_{r+1},\ \ldots,\ x_n),$$

являющийся решением системы

$$Ax = b.$$

<u>Пример.</u> Найдем частное решение системы уравнений

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4,$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8,$$

$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 20.$$

Имеем

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 10 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 20 \end{vmatrix} = 0.$$

Поэтому

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A, b) = 2.$$

Чтобы найти частное решение исходной системы, достаточно решить систему из первых двух ее уравнений:

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4,$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8.$$

придавая x_3, x_4 произвольные значения. Положим $x_3 = x_4 = 0$:

$$x_1 - x_2 = 4,$$

$$x_1 + x_2 = 8.$$

Находим

$$x_1 = 6, \quad x_2 = 2,$$

следовательно, решение исходной системы:

$$x = (6,\ 2,\ 0,\ 0).$$

Обратимся теперь к задаче построения фундаментальной системы решений однородной системы уравнений

$$A(m,n)\,x(n,1) = 0.$$

Пусть

$$\mathrm{rank}(A) = r.$$

Вследствие

$$\dim(\mathrm{Ker}(A)) = n - \mathrm{rank}(A)$$

достаточно построить любые

$$n - r$$

линейно независимых решений. Естественно, предположим, что

$$n > r.$$

.

Приведем систему уравнений

$$A(m,n)\,x(n,1) = 0$$

к эквивалентной системе вида

$$A(r,r)\,x(r,1) + B(r,(n-r))\,y((n-r),1) = 0.$$

Здесь $A(r,r)$ — невырожденная матрица, столбец

$$y((n-r),1)$$

соответствует свободным переменным.

.

Выберем векторы

$$y^1((n-r),1), \quad y^2((n-r),1), \ \ldots, \quad y^{n-r}((n-r),1)$$

так, чтобы они были линейно независимы (проще всего их взять как векторы стандартного базиса пространства $\mathbb{C}^{(n-r)}$).

.

По этим векторам из уравнений

$$A(r,r)\,x^k(r,1) + B(r,(n-r))\,y^k((n-r),1) = 0,$$

где $k = 1,\ \ldots,\ n-r$, **однозначно определятся векторы**

$$x^1(r,1), \quad x^2(r,1), \ \ldots, \quad x^{n-r}(r,1).$$

Образуем теперь векторы $z^k(n,1)$, приписывая к компонентам векторов $x^k(r,1)$ компоненты векторов $y^k((n-r),1)$:

$$z^k(n,1) = (x^k(r,1),\ y^k((n-r),1)), \quad k = 1,\ \ldots,\ n-r.$$

.

По построению

$$A(m,n)\,z^k(n,1) = 0$$

для $k = 1,\ \ldots,\ n-r$, кроме того, очевидно, векторы

$$z^k(n,1), \quad k = 1,\ \ldots,\ n-r,$$

линейно независимы, так как векторы

$$y^1((n-r),1), \quad y^2((n-r),1),\ \ldots, \quad y^{n-r}((n-r),1)$$

линейно независимы.

.

Таким образом, векторы

$$z^k(n,1), \quad k = 1, \ \ldots, \ n-r,$$

образуют фундаментальную систему линейно независимых решений однородной системы уравнений

$$A(m,n)\,x(n,1) = 0.$$

.

<u>Пример.</u> Найдем фундаментальную систему решений однородной системы уравнений

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0,$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0,$$

$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 0.$$

Ранг матрицы этой системы равен двум. Поэтому нужно построить два линейно независимых решения этой системы.

.

Последнее уравнение системы — следствие первых двух. Полагая

$$x_3 = 1, \quad x_4 = 0$$

в уравнениях

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0,$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0,$$

получим

$$x_1 - x_2 + 1 = 0,$$

$$x_1 + x_2 + 2 = 0,$$

откуда

$$x_1 = -3/2, \quad x_2 = -1/2.$$

.

Полагая же

$$x_3 = 0, \quad x_4 = 1$$

в уравнениях

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0,$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0,$$

будем иметь

$$x_1 - x_2 - 1 = 0,$$

$$x_1 + x_2 + 3 = 0,$$

откуда

$$x_1 = -1, \quad x_2 = -2.$$

.

Поэтому векторы

$$x^1 = (-3/2,\ -1/2,\ 1,\ 0),$$

$$x^2 = (-1,\ -2,\ 0,\ 1)$$

образуют фундаментальную систему решений системы уравнений

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0,$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0,$$

$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 0.$$

.

Любой вектор

$$x = c_1(-3/2,\ -1/2,\ 1,\ 0) + c_2(-1,\ -2,\ 0,\ 1),$$

где c_1, c_2 — произвольные числа, есть решение системы

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0,$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0,$$

$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 0,$$

и наоборот, любое ее решение представимо в этом виде при некоторых $c_1,\ c_2$.