

Ю.А. Альпин

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И
КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

Казань — 2020

КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
им. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО

Ю.А. АЛЬПИН

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И
КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Казань – 2020

УДК 512

Печатается по решению
учебно-методической комиссии
Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского КФУ

Рецензент:
доктор физико-математических наук, доцент Абызов А.Н.

Альпин Ю.А.

Линейные операторы и квадратичные формы. Учебное пособие. — Казань:
Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2020. — 58 с.

Учебное пособие предназначено для студентов I курса Института
математики и механики им. Н.И. Лобачевского КФУ.

© Альпин Ю.А., 2020
© Казанский университет, 2020

Оглавление

ГЛАВА 1. Линейное пространство	4
§ 1. Линейное пространство. Базис, размерность, координаты	4
§ 2. Подпространства. Пересечение и сумма подпространств	7
§ 3. Прямая сумма подпространств	9
ГЛАВА 2. Линейные операторы	12
§ 1. Линейные отображения. Ядро и образ линейного отображения . .	12
§ 2. Изоморфизм линейных пространств	14
§ 3. Линейные операторы и их матрицы	15
§ 4. Алгебра операторов и алгебра матриц	17
§ 5. Инвариантные подпространства и собственные векторы	20
§ 6. Линейные операторы простой структуры. Диагонализуемость .	23
§ 7. Корневые подпространства	24
§ 8. Теорема Жордана	27
§ 9. Вычисление жордановой формы и её единственность	30
§ 10. Минимальный многочлен. Теорема Гамильтона–Кэли	32
ГЛАВА 3. Векторные пространства со скалярным произведением .	35
§ 1. Евклидовы пространства. Неравенство Коши–Буняковского . . .	35
§ 2. Ортонормированный базис. Ортогонализация системы векторов .	36
§ 3. Ортогональное дополнение	38
§ 4. Изоморфизм евклидовых пространств	39
§ 5. Эрмитовы пространства	40
ГЛАВА 4. Нормальные операторы	41
§ 1. Сопряжённый оператор. Существование и единственность	41
§ 2. Нормальные операторы	42
§ 3. Унитарные и ортогональные операторы	46
§ 4. Самосопряжённые операторы	47
§ 5. Теоремы о нормальных матрицах	48
ГЛАВА 5. Билинейные функции и квадратичные формы	51
§ 1. Билинейные функции	51
§ 2. Квадратичные формы. Теоремы Лагранжа и Якоби	52
§ 3. Закон инерции. Положительно определённые формы	55
§ 4. Приведение квадратичной формы к главным осям	57
Литература	58

ГЛАВА 1

Линейное пространство

§ 1. Линейное пространство. Базис, размерность, координаты

Определение 1. Линейным (или векторным) пространством над полем F называется множество V , снабженное операциями «сложения» $(+)$ и «умножения» $(\cdot)$ на элементы F , причём выполняются аксиомы:

- 1) $(a + b) + c = a + (b + c)$,
- 2) $a + b = b + a$,
- 3) существует элемент $0 \in V$, такой, что: $a + 0 = a \quad \forall a \in V$,
- 4) $\forall a \in V \exists b \in V : a + b = 0$ ($b = -a, a = -b$),
- 5) $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$ ($\lambda, \mu \in F$),
- 6) $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$,
- 7) $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$,
- 8) $1a = a, 1 \in F$.

Как видно из записи аксиом, знак умножения обычно опускается. Элементы V называются *векторами*, элементы F — *скалярами*, или просто числами.

Некоторые следствия из аксиом ($\lambda \in F; a, b \in V$):

- 1) $\lambda 0 = 0$ ($0 \in V$),
- 2) $\lambda(-a) = -\lambda a$,
- 3) $\lambda(a - b) = \lambda a - \lambda b$ (полагаем, что $a - b = a + (-b)$),
- 4) $0a = 0$ (слева $0 \in F$, справа $0 \in V$)

Определение 2. Векторы $a_1, \dots, a_n$ *линейно зависимы*, если существуют числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, не все равные нулю, такие, что

$$\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n = 0.$$

Из определения 2 немедленно вытекает условие полезное для проверки линейной независимости:

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Векторы $a_1, \dots, a_n$ линейно независимы тогда и только тогда, когда

$$\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0.$$

Определение 3. Вектор b называется линейной комбинацией векторов $a_1, \dots, a_n$, если существуют числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, такие, что

$$b = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n.$$

Свойства линейной зависимости:

1. Система $n \geq 2$ векторов линейно зависима $\Leftrightarrow$ один из векторов является линейной комбинацией остальных векторов.

2. Система векторов, содержащая линейно зависимую подсистему, линейно зависима.

Заметим, что, говоря о системе векторов, мы всегда имеем ввиду упорядоченный набор векторов, в котором есть первый вектор, второй и т. д. Меняя порядок векторов, получим новую систему векторов.

Определение 4. Конечная система векторов $a_1, \dots, a_n$ линейного пространства V называется *базисом* V , если

- 1) векторы $a_1, \dots, a_n$ линейно независимы,
- 2) любой вектор $b \in V$ является линейной комбинацией векторов $a_1, \dots, a_n$.

Линейное пространство, в котором существует конечный базис, называется *конечномерным*, в противном случае *бесконечномерным*.

Докажем, что базисы конечномерного линейного пространства содержат одинаковое число векторов. Для этого потребуется

Лемма 1. Если $a_1, \dots, a_n$ — базис, то любая система векторов $b_1, \dots, b_m$, в которой $m > n$, линейно зависима.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно определению базиса векторы второй системы являются линейными комбинациями базисных векторов:

$$b_i = \alpha_{i1}a_1 + \dots + \alpha_{in}a_n, \quad i = 1, \dots, m.$$

Очевидные преобразования приводят к равенству

$$\beta_1 b_1 + \dots + \beta_m b_m = (\alpha_{11}\beta_1 + \dots + \alpha_{m1}\beta_m)a_1 + \dots + (\alpha_{1n}\beta_1 + \dots + \alpha_{mn}\beta_m)a_n.$$

Равенство $\beta_1 b_1 + \dots + \beta_m b_m = 0$ равносильно системе равенств

$$\begin{aligned} \alpha_{11}\beta_1 + \dots + \alpha_{m1}\beta_m &= 0, \\ \dots & \\ \alpha_{1n}\beta_1 + \dots + \alpha_{mn}\beta_m &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Будем смотреть на соотношения (1), как на систему линейных однородных уравнений относительно неизвестных $\beta_1, \dots, \beta_m$. Число неизвестных больше числа уравнений, поэтому система (1) имеет ненулевое решение $\beta_1^0, \dots, \beta_m^0$, следовательно, имеется нетривиальная (среди коэффициентов есть ненулевые) линейная комбинация $\beta_1^0 b_1 + \dots + \beta_m^0 b_m = 0$. $\square$

Теорема 1. *Все базисы конечномерного линейного пространства содержат одинаковое количество векторов.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $a_1, \dots, a_n$ и $b_1, \dots, b_m$ — базисы. Допустим, например, что $m > n$. Тогда согласно лемме 1 вторая система векторов линейно зависима — противоречие. $\square$

Определение 5. Размерностью конечномерного пространства V называется число векторов в (любом!) его базисе. Обозначение размерности пространства: $\dim V$.

Лемма 2. *Система векторов $a_1 \neq 0, a_2, \dots, a_n$ линейно независима $\Leftrightarrow$ ни один из векторов не является линейной комбинацией предыдущих векторов.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. $\Rightarrow$ Утверждение очевидно ввиду свойства 2 линейной зависимости.

$\Leftarrow$ Предположим противное: существует нетривиальная линейная комбинация $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n = 0$. Пусть k — наибольший номер, для которого $\alpha_k \neq 0$. Тогда имеем равенство $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k = 0$, откуда следует, что вектор a_k можно выразить как линейную комбинацию векторов с меньшими номерами — противоречие. $\square$

Теорема 2. *Линейно независимая система $a_1, \dots, a_k$ векторов конечномерного линейного пространства либо является базисом, либо может быть дополнена до базиса.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если любой вектор пространства является линейной комбинацией векторов $a_1, \dots, a_k$, то эти векторы по определению образуют базис. Если же существует вектор, не являющийся линейной комбинацией данных векторов, то обозначим этот вектор через a_{k+1} и рассмотрим систему $a_1, \dots, a_k, a_{k+1}$. Исходная система векторов линейно независима, поэтому $a_1 \neq 0$ и любой из следующих векторов, включая a_k , не является линейной комбинацией предыдущих векторов. То же верно для добавленного вектора a_{k+1} . Согласно лемме 2 расширенная система $k+1$ векторов линейно независима. Рассуждая далее аналогично, на некотором шаге получим базис пространства. $\square$

Следствие 1. *Линейно независимая система $a_1, \dots, a_k$ тогда и только тогда является базисом пространства V , когда при любом $b \in V$ система $a_1, \dots, a_k, b$ линейно зависима.* $\square^{1)}$

Ввиду следствия 1, можно дать следующее определение базиса, эквивалентное определению 4:

Определение 6. Базисом линейного пространства называется любая максимальная по числу векторов линейно независимая система векторов.

¹⁾ Символ $\square$ в конце утверждения означает, что доказательство рекомендуется провести самостоятельно.

Пусть в пространстве V задан базис $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$. Любой вектор $a \in V$ можно представить в виде линейной комбинации:

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n. \quad (2)$$

Коэффициенты линейной комбинации в (2) называются *координатами* вектора a в базисе e .

Теорема 3. *Координаты вектора в фиксированном базисе определяются однозначно.*

Доказательство. Предположим, что для a есть отличное от (2) представление: $a = \alpha'_1 e_1 + \alpha'_2 e_2 + \dots + \alpha'_n e_n$. Вычитая это равенство из (2), получим нетривиальную линейную комбинацию базисных векторов, равную нулевому вектору, что противоречит определению базиса. $\square$

ПРИМЕР 1. В арифметическом пространстве столбцов F^n базисом является любая система n линейно независимых столбцов. В частности, система $e_i, i = 1, \dots, n$, где столбец e_i содержит единицу на i -м месте и нули на остальных местах, называется стандартным базисом.

ПРИМЕР 2. Множество $M_n(F)$ матриц порядка n над полем F является линейным пространством относительно известных операций сложения матриц и умножения матрицы на число из F . Легко проверить, что базисом, является, например, набор *матричных единиц* E_{ij} . В матрице E_{ij} на месте (i, j) стоит единица, а на остальных местах нули. Ясно, что $\dim M_n(F) = n^2$.

ПРИМЕР 3. Множество $\mathbb{R}[x]_n$ вещественных многочленов от x степени $\leq n$ является линейным пространством относительно известных операций сложения многочленов и умножения многочлена на вещественное число. Пример базиса — набор многочленов $1, x, \dots, x^n$. Размерность этого пространства равна $n + 1$.

ПРИМЕР 4. Пространство $\mathbb{R}[x]$ всех вещественных многочленов от x бесконечномерно.

ПРИМЕР 5. Множество F_∞ бесконечных последовательностей (строк) над полем F с покомпонентным сложением и покомпонентным умножением на числа из F является бесконечномерным пространством.

§ 2. Подпространства. Пересечение и сумма подпространств

Пусть V — линейное пространство над полем F .

Определение 1. Непустое множество векторов $L \subseteq V$ называется подпространством, если оно замкнуто относительно сложения векторов и умножения векторов на числа из F , т. е. если для любых $a, b \in L, \lambda \in F$

$$a + b, \lambda a \in L. \quad (1)$$

Легко доказывается

Предложение 1. Подпространство есть такое множество векторов, которое вместе с любым набором векторов $a_1, \dots, a_k$ содержит любую линейную комбинацию $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k$ этих векторов. $\square$

Подпространство, конечно, является линейным пространством. Заметим, что всякое пространство содержит нулевое подпространство, содержащее лишь вектор 0 . Оно обозначается тем же значком 0 и по определению имеет нулевую размерность.

Определение 2. Линейной оболочкой векторов $a_1, \dots, a_k$ называется множество $\langle a_1, \dots, a_k \rangle$ всевозможных линейных комбинаций этих векторов. Легко проверить, что линейная оболочка есть подпространство.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если система $a_1, \dots, a_k$ линейно независима, то она является базисом своей линейной оболочки, следовательно, $\dim \langle a_1, \dots, a_k \rangle = k$. Если система линейно зависима, то в ней можно выделить максимальную линейно независимую подсистему, которая будет базисом. В этом случае $\dim \langle a_1, \dots, a_k \rangle < k$.

Пересечение подпространств $L_1, \dots, L_k$ пространства V состоит из векторов, входящих во все эти подпространства.

Определение 3. Сумма подпространств $L_1, \dots, L_k$ есть множество векторов, представимых в виде

$$a = a_1 + \dots + a_k, \quad a_i \in L_i \quad (i = 1, \dots, k).$$

Обозначение: $L_1 + \dots + L_k$.

Теорема 1. (Формула Грассмана). Для любых подпространств $L, M \subseteq V$ справедлива формула

$$\dim(L + M) = \dim L + \dim M - \dim(L \cap M). \quad (2)$$

Доказательство. Пусть L и M имеют ненулевое пересечение и $a_1, \dots, a_k$ — базис $L \cap M$. Дополним его двумя способами:

$$a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_p \text{ — базис } L,$$

$$a_1, \dots, a_k, c_1, \dots, c_q \text{ — базис } M.$$

Рассмотрим объединение этих базисов:

$$a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_p, c_1, \dots, c_q. \quad (3)$$

Вначале заметим, что $\langle a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_p, c_1, \dots, c_q \rangle = L + M$. Теперь докажем, что векторы (3) линейно независимы. Пусть существует линейная комбинация

$$\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_p b_p + \gamma_1 c_1 + \dots + \gamma_q c_q = 0. \quad (4)$$

Вектор $x = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_p b_p$ лежит в L , вектор $y = \gamma_1 c_1 + \dots + \gamma_q c_q$ лежит в M , но $x = -y$, следовательно, $x \in M$. Значит, вектор $x \in L \cap M$ и представим в виде $x = \delta_1 a_1 + \dots + \delta_k a_k$. Вычитая второе выражение для x из первого, получим:

$$0 = (\alpha_1 - \delta_1)a_1 + \dots + (\alpha_k - \delta_k)a_k + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_p b_p.$$

Все коэффициенты этой комбинации равны нулю, в частности,

$$\beta_1 = \dots = \beta_p = 0.$$

Учитывая это, из равенства (4) получаем:

$$\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k + \gamma_1 c_1 + \dots + \gamma_q c_q = 0,$$

отсюда следует, что

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_k = \gamma_1 = \dots = \gamma_q = 0.$$

Итак, все коэффициенты в (4) равны нулю, следовательно (см. замечание 1 на с. 4), векторы (3) линейно независимы и образуют базис $L + M$. Подведём итог:

$$\begin{aligned} \dim(L + M) &= k + p + q = (k + p) + (k + q) - k = \\ &= \dim L + \dim M - \dim(L \cap M). \end{aligned}$$

Если $L \cap M = 0$, то $\dim(L \cap M) = 0$ и доказательство упрощается: объединение базисов L и M оказывается базисом суммы $L + M$, формула (2) остаётся верной. $\square$

§ 3. Прямая сумма подпространств

Рассмотрим сумму подпространств $L_1, \dots, L_k$ пространства V и объединение базисов этих подпространств:

$$e_{11}, \dots, e_{1n_1}, \dots, e_{k1}, \dots, e_{kn_k}, \quad (1)$$

где $n_i = \dim L_i$, $i = 1, \dots, k$. Линейная оболочка системы (1) совпадает с суммой $L_1 + \dots + L_k$, а её размерность (замечание 2.1 на с. 8) удовлетворяет неравенству

$$\dim(L_1 + \dots + L_k) \leq \dim L_1 + \dots + \dim L_k. \quad (2)$$

Определение 1. Сумма подпространств $L_1 + \dots + L_k$ называется прямой, если

$$\dim(L_1 + \dots + L_k) = \dim L_1 + \dots + \dim L_k,$$

т. е в неравенстве (2) достигается равенство.

Теорема 1. Следующие свойства суммы $L_1 + \dots + L_k$ равносильны:

- 1) сумма $L_1 + \dots + L_k$ — прямая;
- 2) объединение базисов подпространств $L_1, \dots, L_k$ является базисом суммы $L_1 + \dots + L_k$;
- 3) любые ненулевые векторы $a_i \in L_i$, $i = 1, \dots, k$ линейно независимы;
- 4) $a_1 + \dots + a_k = 0$ ($a_i \in L_i$) $\Rightarrow a_1 = \dots = a_k = 0$;
- 5) представление $a = a_1 + \dots + a_k$ ($a_i \in L_i$, $i = 1, \dots, k$) единственно для любого вектора $a \in L_1 + \dots + L_k$.

Доказательство. Эквивалентность $1 \Leftrightarrow 2$ доказывается применением замечания 1 (с. 8) к линейной оболочке системы (1).

$2 \Rightarrow 3$. Подставив в равенство $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k = 0$ вместо каждого a_i его представление в виде (нетривиальной) линейной комбинации базисных векторов L_i , получим линейную комбинацию векторов (1):

$$\alpha_1 \beta_{11} e_{11} + \dots + \alpha_1 \beta_{1n_1} e_{1n_1} + \dots + \alpha_k \beta_{k1} e_{k1} + \dots + \alpha_k \beta_{kn_k} e_{kn_k} = 0.$$

Векторы (1) линейно независимы, следовательно, все коэффициенты этой комбинации равны 0. Поскольку для каждого α_i существует $\beta_{il} \neq 0$, то получаем: $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$. Согласно замечанию 1 (с. 4), векторы $a_i \in L_i$, $i = 1, \dots, k$ линейно независимы.

$3 \Rightarrow 2$. Докажите самостоятельно.

$3 \Rightarrow 4$. Очевидно.

$4 \Rightarrow 5$. Пусть для некоторого $b \in L_1 + \dots + L_k$ есть два выражения:

$$b = a_1 + \dots + a_k, \quad b = a'_1 + \dots + a'_k \quad (a_i, a'_i \in L_i, \quad i = 1, \dots, k).$$

Вычитая второе равенство из первого, получим:

$$0 = (a_1 - a'_1) + \dots + (a_k - a'_k), \quad \text{где } (a_i - a'_i) \in L_i.$$

Вследствие 4) отсюда вытекает, что $a_i = a'_i$, $i = 1, \dots, k$.

$5 \Rightarrow 3$. Предположим, что для ненулевых $a_i \in L_i$ имеется равенство $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k = 0$. В этой сумме $\alpha_i a_i \in L_i$. Для нулевого вектора имеется представление в виде суммы k нулевых векторов и это представление единственно, поэтому $\alpha_i a_i = 0$, а так как $a_i \neq 0$, то $\alpha_i = 0$ для всех i . $\square$

Предложение 1. Сумма подпространств L и M прямая тогда и только тогда, когда $L \cap M = 0$.

Доказательство вытекает из формулы Грассмана:

$$\dim(L + M) = \dim L + \dim M \Leftrightarrow \dim(L \cap M) = 0 \Leftrightarrow L \cap M = 0. \quad \square$$

По аналогии с предложением 1 можно подумать, что сумма $L_1 + \dots + L_k$ прямая, если $L_i \cap L_j = 0$ для любых $i, j = 1, \dots, k$. Однако правильным аналогом предложения 1 является следующее утверждение:

Предложение 2. Сумма подпространств $L_1 + \dots + L_k$ является прямой тогда и только тогда, когда пересечение любого из этих подпространств с суммой остальных подпространств содержит лишь нулевой вектор. $\square$

Если сумма $L_1 + \dots + L_k$ прямая, то пишут: $L_1 \oplus \dots \oplus L_k$.

Предложение 3. Для любого подпространства L пространства V существует прямое дополнение — такое подпространство M , что $L \oplus M = V$.

Доказательство. Пусть $\dim L = p$, $\dim V = n$ ($p < n$). Дополним базис $b_1, \dots, b_p$ пространства L до базиса $b_1, \dots, b_p, b_{p+1}, \dots, b_n$ пространства V . Это возможно согласно теореме 2 на с. 6. Положим, что $M = \langle b_{p+1}, \dots, b_n \rangle$. Тогда $L \oplus M = V$ согласно п. 2 теоремы 2. $\square$

ПРИМЕР 1. Пусть $L_n(F)$, $D_n(F)$, $U_n(F)$ — пространства, соответственно, нижних нильтреугольных, диагональных и верхних нильтреугольных матриц порядка n над полем F . Тогда

$$M_n(F) = L_n(F) \oplus D_n(F) \oplus U_n(F).$$

ПРИМЕР 2. Если $e_1, e_2, \dots, e_n$ — базис линейного пространства V , то

$$V = \langle e_1 \rangle \oplus \langle e_2 \rangle \oplus \dots \oplus \langle e_n \rangle.$$

ГЛАВА 2

Линейные операторы

§ 1. Линейные отображения. Ядро и образ линейного отображения

Пусть V, W — линейные пространства над полем F .

Определение 1. Отображение $\varphi : V \rightarrow W$ называется линейным, если для любых $a, b \in V, \lambda \in F$ выполняются равенства

$$\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b), \quad \varphi(\lambda a) = \lambda \varphi(a).$$

Из определения 1 легко выводятся свойства линейного отображения:

Свойство 1. $\varphi(0) = 0$.

Свойство 2. $\varphi(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k) = \lambda_1 \varphi(a_1) + \dots + \lambda_k \varphi(a_k)$.

ПРИМЕР 1. Любая $(m \times n)$ -матрица A над F задаёт отображение $\varphi_A : F^n \rightarrow F^m$ по правилу $\varphi_A(x) = Ax$. Это отображение линейно, поскольку равенства

$$A(x + y) = Ax + Ay, \quad A(\lambda x) = \lambda Ax,$$

суть известные свойства действий с матрицами.

ПРИМЕР 2. Отображение пространства $M_n(F)$ в одномерное пространство F , сопоставляющее матрице $A \in M_n(F)$ её след $\text{tr} A \in F$, линейно: легко проверить, что $\text{tr}(A + B) = \text{tr} A + \text{tr} B$, $\text{tr}(\lambda A) = \lambda \text{tr} A$.

ПРИМЕР 3. Отображение $\det : M_n(F) \rightarrow F$ нелинейно.

Определим *ядро* и *образ* отображения $\varphi : V \rightarrow W$:

$$\text{Ker} \varphi = \{a, \varphi(a) = 0\} \subseteq V, \quad \text{Im} \varphi = \{\varphi(a), a \in V\} \subseteq W.$$

Предложение 1. Ядро и образ линейного отображения являются подпространствами.

Доказательство для $\text{Ker} \varphi$ оставим в виде легкого упражнения и перейдем к $\text{Im} \varphi$. Для любых $\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_k) \in \text{Im} \varphi$ по свойству 2 имеем

$$\lambda_1 \varphi(a_1) + \dots + \lambda_k \varphi(a_k) = \varphi(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k) \in \text{Im} \varphi.$$

Получили, что линейные комбинации векторов из $\text{Im} \varphi$ лежат в $\text{Im} \varphi$, значит, $\text{Im} \varphi$ — подпространство (см. предложение 1 на с. 8). $\square$

Предложение 2. Если $e_1, \dots, e_n$ — базис V , то

$$\operatorname{Im} \varphi = \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \rangle.$$

Доказательство. Поскольку $\operatorname{Im} \varphi$ — подпространство, то

$$\langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \rangle \subseteq \operatorname{Im} \varphi.$$

С другой стороны, из представления $a = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ вектора $a \in V$ следует, что $\varphi(a) = \lambda_1 \varphi(e_1) + \dots + \lambda_n \varphi(e_n)$, значит,

$$\operatorname{Im} \varphi \subseteq \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \rangle. \quad \square$$

Теорема 1. Для линейного отображения $\varphi : V \rightarrow W$

$$\dim \operatorname{Ker} \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi = \dim V. \quad (1)$$

Доказательство. Пусть $\dim V = n$, векторы $e_1, \dots, e_k$ — базис $\operatorname{Ker} \varphi$. Дополним его до базиса пространства V :

$$e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n. \quad (2)$$

Вследствие предложения 2 и того, что первые k векторов отображаются в 0, получаем: $\operatorname{Im} \varphi = \langle \varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n) \rangle$. Докажем, что векторы $\varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n)$ линейно независимы. Пусть

$$\lambda_1 \varphi(e_{k+1}) + \dots + \lambda_{n-k} \varphi(e_n) = 0.$$

По свойству 2 имеем $\varphi(\lambda_1 e_{k+1} + \dots + \lambda_{n-k} e_n) = 0$, следовательно, вектор $\lambda_1 e_{k+1} + \dots + \lambda_{n-k} e_n$ принадлежит ядру и для него существует разложение по базису ядра:

$$\lambda_1 e_{k+1} + \dots + \lambda_{n-k} e_n = \gamma_1 e_1 + \dots + \gamma_k e_k.$$

Но векторы (2) линейно независимы, следовательно,

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-k} = \gamma_1 = \dots = \gamma_k = 0.$$

Это значит, что векторы $\varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n)$ линейно независимы и образуют базис $\operatorname{Im} \varphi$. Следовательно, $\dim \operatorname{Im} \varphi = n - k$. Учитывая, что $k = \dim \operatorname{Ker} \varphi$, $n = \dim V$, получаем (1). $\square$

ПРИМЕР 4 (продолжение примера 1). $\operatorname{Ker} \varphi_A = \{x \in F^n, Ax = 0\}$, т. е. $\operatorname{Ker} \varphi_A$ — это пространство решений системы линейных однородных уравнений $Ax = 0$ (m уравнений, n неизвестных). Изучим теперь $\operatorname{Im} \varphi_A$. Пусть $e_1, \dots, e_n$ — стандартный базис в F^n . Тогда $\operatorname{Im} \varphi_A = \langle Ae_1, \dots, Ae_n \rangle$ по предложению 2. Но столбец Ae_i равен i -му столбцу матрицы A ($i = 1, \dots, n$). Следовательно, $\operatorname{Im} \varphi_A$ есть линейная оболочка столбцов A , рассматриваемых как векторы пространства F^m . Максимальная линейно независимая подсистема системы столбцов A является базисом $\operatorname{Im} \varphi_A$. Как известно, число столбцов в указанной системе равно $\operatorname{rk} A$, следовательно, $\dim \operatorname{Im} \varphi_A = \operatorname{rk} A$. Теорема 1 превращается для данного примера в известный факт: размерность пространства решений системы линейных однородных уравнений $Ax = 0$ равна $n - \operatorname{rk} A$.

§ 2. Изоморфизм линейных пространств

Пусть снова V, W — линейные пространства над полем F .

Линейное отображение $\varphi : V \rightarrow W$ называется *изоморфизмом*, если оно инъективно и сюръективно, т. е. биективно. Линейные пространства V и W , для которых существует изоморфизм, называются *изоморфными*.

Рассмотрим важный пример изоморфизма. Пусть V — линейное n -мерное пространство, в котором задан базис $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$. Напомним, что любой вектор $a \in V$ представляется в виде линейной комбинации:

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n. \quad (1)$$

Коэффициенты комбинации (1), т. е. координаты a в базисе e , определяются однозначно (теорема 3 на с. 7).

Предложение 1. Пусть в пространстве V задан базис $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$. Отображение $\mathcal{K} : a \mapsto (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T$, сопоставляющее каждому вектору столбец его координат, является изоморфизмом пространства V в пространство F^n .

Доказательство. Для любых векторов $a, b \in V$ существуют представления $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$ и $b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n$. Складывая равенства, получим

$$\begin{aligned} a + b &= (\alpha_1 + \beta_1)e_1 + (\alpha_2 + \beta_2)e_2 + \dots + (\alpha_n + \beta_n)e_n \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathcal{K}(a + b) = \mathcal{K}a + \mathcal{K}b. \end{aligned}$$

(Пишем $\mathcal{K}a$ вместо $\mathcal{K}(a)$ ради краткости.) Для любых $a \in V$, $\lambda \in F$ имеем:

$$\lambda a = (\lambda\alpha_1)e_1 + (\lambda\alpha_2)e_2 + \dots + (\lambda\alpha_n)e_n \Rightarrow \mathcal{K}(\lambda a) = \lambda(\mathcal{K}a).$$

Линейность отображения $\mathcal{K}$ доказана. Осталось доказать его биективность. Инъективность очевидна: если координаты двух векторов одинаковы, то и векторы равны. Сюръективность следует из того, что любой вектор $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T \in F^n$ имеет прообраз — вектор $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$. $\square$

Свойство линейности отображения $\mathcal{K}$ легко запомнить в следующей формулировке: при сложении векторов их координаты складываются, при умножении вектора на число — умножаются на это число.

Индукцией по k доказывается

Следствие 1. Пусть $x_1, \dots, x_k$ — векторы, $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ — числа из F . Тогда $\mathcal{K}(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k) = \alpha_1(\mathcal{K}x_1) + \dots + \alpha_k(\mathcal{K}x_k)$. $\square$

Теорема 1. Пространства V и W изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности равны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть дан изоморфизм $\varphi : V \rightarrow W$ и $e_1, \dots, e_n$ — базис V . Докажем, что векторы

$$\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \quad (2)$$

составляют базис W , следовательно, $\dim V = \dim W$. Пусть

$$\lambda_1 \varphi(e_1) + \dots + \lambda_n \varphi(e_n) = 0. \quad (3)$$

По свойствам 1) и 2) на с. 12 имеем $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) = 0$. Из инъективности φ следует, что $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0$, значит, по свойству базиса, $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$, что доказывает линейную независимость векторов (2). В силу предложения 2 (с. 13) и сюръективности φ получаем:

$$\operatorname{Im} \varphi = \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \rangle = W.$$

Это значит, что любой вектор из W является линейной комбинацией векторов (2).

Теперь пусть $\dim V = \dim W$. Выберем в пространствах V и W какие-нибудь базисы $e_1, \dots, e_n$ и $g_1, \dots, g_n$ и положим, что

$$\varphi(e_i) = g_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Доопределим отображение $\varphi : V \rightarrow W$, полагая, что образом вектора $a = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ является вектор $\varphi(a) = \lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_n g_n$. Доказательство линейности и биективности отображения φ аналогично доказательству предложения 1 и оставляется в виде упражнения. $\square$

§ 3. Линейные операторы и их матрицы

Далее мы будем изучать линейные отображения линейного пространства V в себя, будем называть такие отображения линейными операторами в пространстве V .

ПРИМЕР 1. Матрица A порядка n над F задаёт линейный оператор, действующий в пространстве F^n по правилу $x \mapsto Ax$.

ПРИМЕР 2. Очевидными примерами линейных операторов являются *нулевой оператор* $\mathcal{O}$ ($\mathcal{O}x = 0 \quad \forall x \in V$) и *тождественный оператор* $\mathcal{E}$ ($\mathcal{E}x = x \quad \forall x \in V$).

Пусть в пространстве V задан линейный оператор $\mathcal{A}$ и выбран базис $e = (e_1, \dots, e_n)$. Разложим образы базисных векторов по базису:

$$\mathcal{A}e_j = \alpha_{1j}e_1 + \dots + \alpha_{nj}e_n \quad (j = 1, \dots, n). \quad (1)$$

Определение 1. Матрицей линейного оператора $\mathcal{A}$ в базисе e называется матрица $A = (\alpha_{ij})$. Из равенств (1) видно, что j -й столбец A равен столбцу координат вектора $\mathcal{A}e_j$, т. е. равен $\mathcal{K}(\mathcal{A}e_j)$.

УПРАЖНЕНИЕ 1. Докажите, что матрицей нулевого оператора $\mathcal{O}$ в любом базисе является нулевая матрица 0 , а матрицей тождественного оператора $\mathcal{E}$ — единичная матрица E .

Из следующей теоремы видно, что матрица оператора полностью определяет этот оператор.

Теорема 1. Пусть в пространстве V над полем F выбран базис $e = (e_1, \dots, e_n)$. Тогда линейному оператору $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ соответствует единственная матрица A порядка n , такая, что для любого $x \in V$

$$\mathcal{K}(\mathcal{A}x) = A(\mathcal{K}x). \quad (2)$$

Доказательство. Единственность матрицы оператора следует из однозначного определения координат векторов $\mathcal{A}e_j$, см. теорему 3 (с. 7). Для любого вектора $x = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n$ согласно следствию 1 (с. 14) имеем:

$$\mathcal{K}(\mathcal{A}x) = \beta_1 \mathcal{K}(\mathcal{A}e_1) + \dots + \beta_n \mathcal{K}(\mathcal{A}e_n) = A(\beta_1, \dots, \beta_n)^T = A(\mathcal{K}x). \quad \square$$

Перемена базиса. Пусть выбран новый базис $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ и даны разложения вектора x по базисам e и e' :

$$x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n, \quad (3)$$

$$x = \alpha'_1 e'_1 + \dots + \alpha'_n e'_n. \quad (4)$$

Выясним, как связаны координаты вектора в разных базисах. Разложим векторы нового базиса по старому базису:

$$e'_j = \sum_{i=1}^n p_{ij} e_i \quad (j = 1, \dots, n). \quad (5)$$

Подставив эти выражения в равенство (4), получим после очевидных преобразований:

$$x = \sum_{j=1}^n \alpha'_j \left(\sum_{i=1}^n p_{ij} e_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n p_{ij} \alpha'_j \right) e_i. \quad (6)$$

Сравнивая представления (3) и (6) для вектора x и учитывая единственность разложения вектора по базису, получаем:

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} \alpha'_j, \quad i = 1, \dots, n$$

или, в матричном виде,

$$X = PX', \quad \text{где } X = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T, \quad X' = (\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)^T, \quad P = (p_{ij}).$$

Определение 2. Матрица $P = (p_{ij})$ называется *матрицей перехода* от базиса e к базису e' . Из равенств (5) видно, что j -й столбец P равен столбцу координат вектора e'_j в базисе e .

Координатные столбцы базисных векторов e'_j линейно независимы, следовательно, матрица P перехода от базиса e к базису e' невырожденная.

Как связаны матрицы оператора в различных базисах? Пусть A — матрица оператора $\mathcal{A}$ в базисе e , A' — матрица в базисе e' . Равенство $\mathcal{A}x = y$ эквивалентно в базисе e матричному равенству $AX = Y$, в базисе e' — равенству $A'X' = Y'$. Учитывая, что $X = PX'$, $Y = PY'$, получим

$$APX' = PY' \Rightarrow P^{-1}APX' = Y' \Rightarrow P^{-1}APX' = A'X'.$$

Подставляя вместо X' столбцы единичной матрицы E , убедимся, что $A' = P^{-1}AP$.

Матрицы A и B одного порядка над полем F называются *подобными*, если существует такая невырожденная матрица P над F , что $B = P^{-1}AP$. Нами доказано

Предложение 1. *Матрицы линейного оператора, заданные в различных базисах, подобны. А именно, если A — матрица оператора $\mathcal{A}$ в базисе e , A' — матрица в базисе e' , P — матрица перехода от e к e' , то $A' = P^{-1}AP$.*

Докажите следующие свойства подобия матриц.

УПРАЖНЕНИЕ 2. Бинарное отношение подобия на множестве $M_n(F)$ рефлексивно, симметрично и транзитивно, т. е. является отношением эквивалентности.

УПРАЖНЕНИЕ 3. Определители подобных матриц равны.

УПРАЖНЕНИЕ 4. Ранги подобных матриц равны.

§ 4. Алгебра операторов и алгебра матриц

В этом параграфе вводится понятие алгебры и устанавливается изоморфизм алгебры линейных операторов и алгебры матриц. Некоторые утверждения приведены без доказательства, полезно доказать их самостоятельно.

Пусть V — линейное пространство над полем F , $L(V)$ — множество всех линейных операторов на пространстве V . Суммой операторов $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in L(V)$ называется оператор $\mathcal{A} + \mathcal{B}$, определяемый условием:

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})(x) = \mathcal{A}x + \mathcal{B}x$$

для всех $x \in V$. Произведение $\alpha\mathcal{A}$ оператора $\mathcal{A}$ на число $\alpha \in F$ определяется равенством:

$$(\alpha\mathcal{A})(x) = \alpha(\mathcal{A}x).$$

Предложение 1. Операторы $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ и $\alpha\mathcal{A}$ — линейные. $\square$

Предложение 2. Множество $L(V)$ образует линейное пространство относительно операций сложения и умножения на числа из F . $\square$

Произведение линейных операторов определяется стандартно, как умножение отображений: для всех $x \in V$

$$(\mathcal{AB})(x) = \mathcal{A}(\mathcal{B}x).$$

Предложение 3. Оператор $\mathcal{AB}$ — линейный.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно,

$$\begin{aligned} (\mathcal{AB})(\alpha x + \beta y) &= \mathcal{A}(\mathcal{B}(\alpha x + \beta y)) = \mathcal{A}(\alpha(\mathcal{B}x) + \beta(\mathcal{B}y)) = \\ &= \alpha\mathcal{A}(\mathcal{B}x) + \beta\mathcal{A}(\mathcal{B}y) = \alpha(\mathcal{AB})(x) + \beta(\mathcal{AB})(y). \quad \square \end{aligned}$$

Введём понятие алгебры. Линейное пространство V над полем F , для элементов которого определена ассоциативная операция умножения, называется *алгеброй* над F , если для всех $a, b, c \in V$ и $\lambda \in F$ выполняются равенства

$$(a + b)c = ac + bc, c(a + b) = ca + cb, (\lambda a)b = a(\lambda b) = \lambda(ab). \quad (1)$$

Примером алгебры является множество матриц $M_n(F)$ с известными операциями сложения и умножения матриц, а также умножения матрицы на число.

Предложение 4. Множество $L(V)$ с операциями сложения и умножения операторов, а также умножения операторов на числа из F , является алгеброй.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ввиду предложения 2 требуется установить лишь свойства алгебры, связанные с умножением операторов. Известно, что умножение отображений множеств ассоциативно, это верно, в частности, и для линейных отображений. Из свойств (1) докажем в качестве примера первое свойство дистрибутивности. Пусть даны линейные операторы $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$. Для любого $x \in V$ имеем

$$\begin{aligned} ((\mathcal{A} + \mathcal{B})\mathcal{C})(x) &= (\mathcal{A} + \mathcal{B})(\mathcal{C}x) = \mathcal{A}(\mathcal{C}x) + \mathcal{B}(\mathcal{C}x) = \\ &= (\mathcal{AC})(x) + (\mathcal{BC})(x) = (\mathcal{AC} + \mathcal{BC})(x) \Rightarrow (\mathcal{A} + \mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{AC} + \mathcal{BC}. \quad \square \end{aligned}$$

Алгебры $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ над F называются *изоморфными*, если существует изоморфизм линейных пространств $\varphi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$, удовлетворяющий для любых $a, b \in \mathbb{A}$ условию $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.

Напомним, что символом $\mathcal{K}$ обозначается отображение, сопоставляющее, при заданном базисе, каждому вектору столбец его координат. Согласно предложению 1 (с.14) отображение $\mathcal{K} : V \rightarrow F^n$ есть изоморфизм линейных пространств. По теореме 1 (с.16) матрицу A оператора $\mathcal{A}$ можно определить как матрицу, удовлетворяющую условию:

$$\mathcal{K}(\mathcal{A}x) = A(\mathcal{K}x). \quad (2)$$

Теорема 1. Пусть V — линейное пространство над полем F , в котором фиксирован базис $e = (e_1, \dots, e_n)$. Тогда отображение φ , которое ставит в соответствие каждому оператору $\mathcal{A} \in L(V)$ его матрицу $A \in M_n(F)$ в базисе e , является изоморфизмом алгебр $L(V)$ и $M_n(F)$.

Доказательство. Из равенства (2) видно, что координаты $\mathcal{A}x$ для любого $x \in V$ однозначно определяются матрицей A , тем самым матрица A оператора $\mathcal{A}$ однозначно определяет этот оператор. Это доказывает инъективность отображения φ . Теперь пусть A — любая матрица из $M_n(F)$. Определим $\mathcal{A}$ как оператор, который вектору $x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$ ставит в соответствие вектор

$$\mathcal{A}x = \left(\sum_{j=1}^n a_{1j} \alpha_j \right) e_1 + \dots + \left(\sum_{j=1}^n a_{nj} \alpha_j \right) e_n.$$

Легко проверить, что $\mathcal{A}$ — линейный оператор, имеющий в базисе e матрицу A . Это доказывает сюръективность φ .

Приводимые ниже равенства 1) доказывают, что биекция φ является линейным отображением, следовательно, изоморфизмом пространств $L(V)$ и $M_n(F)$, а равенства 2) доказывают мультипликативное свойство φ . В доказательстве используется равенство (2) и обозначения $\varphi(\mathcal{A}) = A$, $\varphi(\mathcal{B}) = B$.

$$1) \mathcal{K}((\alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{B})x) = \mathcal{K}(\alpha(\mathcal{A}x) + \beta(\mathcal{B}x)) = \alpha\mathcal{K}(\mathcal{A}x) + \beta\mathcal{K}(\mathcal{B}x) = \\ = \alpha A(\mathcal{K}x) + \beta B(\mathcal{K}x) = (\alpha A + \beta B)(\mathcal{K}x) \Rightarrow \varphi(\alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{B}) = \alpha A + \beta B.$$

$$2) \mathcal{K}((\mathcal{A}\mathcal{B})x) = \mathcal{K}(\mathcal{A}(\mathcal{B}x)) = A(\mathcal{K}(\mathcal{B}x)) = A(B(\mathcal{K}x)) = \\ = (AB)(\mathcal{K}x) \Rightarrow \varphi(\mathcal{A}\mathcal{B}) = AB. \quad \square$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Теорема 1 означает, что между операторами и их матрицами (в фиксированном базисе) существует такое взаимно однозначное соответствие, что матрица суммы операторов равна сумме их матриц, при умножении оператора на число его матрица умножается на это число, наконец, матрицей произведения операторов является произведение их матриц.

Приведём примеры использования языка алгебры операторов и теоремы 1.

1. Как известно, для биективного отображения множества в себя существует обратное отображение. Для биективного линейного оператора $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ обратное отображение $\mathcal{A}^{-1}$ тоже линейно. Действительно, для любых $a, b \in V$ пусть $c, d \in V$ таковы, что $\mathcal{A}c = a$, $\mathcal{A}d = b$. Тогда $\mathcal{A}(c + d) = a + b$, следовательно,

$$\mathcal{A}^{-1}(a + b) = c + d = \mathcal{A}^{-1}a + \mathcal{A}^{-1}b.$$

Второе свойство линейности: $\mathcal{A}^{-1}(\lambda a) = \lambda \mathcal{A}^{-1}a$, проверяется аналогично.

2. Для биективности линейного оператора достаточно инъективности ($\text{Ker } \mathcal{A} = 0$) или сюръективности ($\text{Im } \mathcal{A} = V$). Этот факт сразу следует из теоремы 1 на с. 13.

3. Биективный линейный оператор $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ называется *обратимым* или *невырожденным*. Пусть A — матрица невырожденного оператора $\mathcal{A}$, B — матрица оператора $\mathcal{A}^{-1}$. Равенство $\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{E}$ равносильно матричному равенству $AB = E$, откуда видно, что $B = A^{-1}$. Таким образом, матрица оператора $\mathcal{A}^{-1}$ равна A^{-1} .

4. По многочлену $f(t) = \alpha_0 t^n + \alpha_1 t^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} t + \alpha_n$ можно определить операторный многочлен

$$f(\mathcal{A}) = \alpha_0 \mathcal{A}^n + \alpha_1 \mathcal{A}^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} \mathcal{A} + \alpha_n \mathcal{E}.$$

Если A — матрица оператора $\mathcal{A}$, то

$$f(A) = \alpha_0 A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} A + \alpha_n E$$

— матрица оператора $f(\mathcal{A})$.

§ 5. Инвариантные подпространства и собственные векторы

Пусть на пространстве V размерности $n \geq 1$ над полем F задан линейный оператор $\mathcal{A}$. Подпространство $L \subseteq V$ называется *инвариантным* относительно $\mathcal{A}$, если $\forall x \in L \mathcal{A}x \in L$. Ограничением $\mathcal{A}$ на L называется оператор $\mathcal{A}|_L$, определённый на пространстве L и действующий на L , как $\mathcal{A}$.

Предложение 1. Ядро и образ линейного оператора являются инвариантными подпространствами. $\square$

Наличие инвариантных подпространств можно отразить в матрице оператора и тем самым упростить его изучение. Пусть подпространство $L \subseteq V$ инвариантно относительно $\mathcal{A}$. Составим базис $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ так, чтобы первые k векторов были базисом L . Тогда матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе имеет верхний блочно-треугольный вид $\begin{pmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, где A_1 — матрица $\mathcal{A}|_L$ в базисе $e_1, \dots, e_k$. Если пространство $M = \langle e_{k+1}, \dots, e_n \rangle$ инвариантно, то матрица имеет блочно-диагональный вид $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$. Здесь A_2 — матрица $\mathcal{A}|_M$.

Если пространство V разлагается в прямую сумму инвариантных подпространств: $V = L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_k$, то в базисе V , составленном из базисов этих подпространств, матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix}, \text{ где } A_i \text{ — матрица оператора } \mathcal{A}|_{L_i}, i = 1, \dots, k.$$

Определение 1. Вектор $x \neq 0$ называется *собственным вектором* оператора $\mathcal{A}$, если $\mathcal{A}x = \lambda x$ для некоторого $\lambda \in F$. Число λ в этом равенстве называется *собственным значением* оператора $\mathcal{A}$, отвечающим собственному вектору x . Собственный вектор вместе с отвечающим ему собственным значением называют *собственной парой* оператора $\mathcal{A}$.

Определение собственной пары можно начать «с другого конца»: число $\lambda \in F$ называется собственным значением оператора $\mathcal{A}$, если существует такой вектор $x \neq 0$, что $\mathcal{A}x = \lambda x$. Вектор x называется собственным вектором, отвечающим собственному значению λ .

УПРАЖНЕНИЕ 1. Вектор $x \neq 0$ — собственный для оператора $\mathcal{A}$ в точности тогда, когда одномерное подпространство $\langle x \rangle$ инвариантно относительно $\mathcal{A}$.

Вычисление собственных векторов и собственных значений. Многочлен $|A - tE|$ степени n от переменной t называется *характеристическим многочленом матрицы* $A \in M_n(F)$. Докажем, пользуясь теоремой об умножении определителей, что *характеристические многочлены подобных матриц равны*. Пусть $A = P^{-1}BP$, тогда

$$\begin{aligned} |A - tE| &= |P^{-1}BP - P^{-1}tEP| = |P^{-1}(B - tE)P| = \\ &= |P^{-1}||B - tE||P| = |B - tE|. \end{aligned}$$

Поскольку матрицы оператора в различных базисах подобны (предложение 1, с. 17), то корректно определяется *характеристический многочлен оператора* $\mathcal{A}$ — это характеристический многочлен его матрицы (в любом базисе).

Предложение 2. Собственными значениями оператора $\mathcal{A}$ являются корни его характеристического многочлена, принадлежащие полю F , и только они.

Действительно, пусть A — матрица оператора $\mathcal{A}$ в некотором базисе e . Тогда (см. теорему 1 на с. 16):

$$\mathcal{A}x = \lambda x \Leftrightarrow \mathcal{K}(\mathcal{A}x) = \mathcal{K}(\lambda x) \Leftrightarrow A(\mathcal{K}x) = \lambda(\mathcal{K}x) \Leftrightarrow (A - \lambda E)(\mathcal{K}x) = 0.$$

Из этих соотношений видно, что $x \in V, \lambda \in F$ — собственная пара, если столбец координат $\mathcal{K}x$ является ненулевым решением системы уравнений $(A - \lambda E)X = 0$. Такое решение существует в точности тогда, когда $|A - \lambda E| = 0$, т. е. когда $\lambda \in F$ — корень характеристического многочлена $|A - tE|$. $\square$

Из предложения 2 и его доказательства вытекает следующий метод вычисления собственных значений и собственных векторов оператора $\mathcal{A}$, заданного в некотором базисе матрицей A . Вначале находят собственные значения — корни характеристического многочлена $|A - tE|$, лежащие в поле F . Если таких корней нет, то собственных

пар не существует. В противном случае вычисление координат собственных векторов, отвечающих собственному значению λ , сводится к решению системы линейных однородных уравнений $(A - \lambda E)X = 0$.

Если $F = \mathbb{C}$, то, поскольку комплексный многочлен всегда имеет комплексный корень, справедливо

Следствие 1. *Линейный оператор в комплексном пространстве всегда имеет собственное значение и, следовательно, собственный вектор.*

Если $F = \mathbb{R}$, то собственными значениями оператора в вещественном пространстве являются лишь вещественные корни характеристического многочлена. Каждому же комплексному корню отвечает двумерное инвариантное подпространство. Точнее, имеет место

Предложение 3. *Пусть $\alpha + i\beta$ ($\beta \neq 0$) — корень характеристического многочлена оператора $\mathcal{A}$ в вещественном пространстве V , столбец $Z \neq 0$ — решение системы уравнений $(A - (\alpha + i\beta)E)X = 0$. Представим Z в виде $Z = G + iH$, где G и H вещественные столбцы. Пусть $g, h \in V$ — векторы с координатами G и H соответственно. Тогда линейная оболочка $\langle g, h \rangle$ является двумерным инвариантным подпространством оператора $\mathcal{A}$.*

Доказательство. Справедливы следующие импликации:

$$\begin{aligned} (A - (\alpha + i\beta)E)Z = 0 &\Rightarrow AZ = (\alpha + i\beta)Z \Rightarrow A(G + iH) = (\alpha + i\beta)(G + iH) \\ &\Rightarrow AG + iAH = (\alpha G - \beta H) + i(\beta G + \alpha H) \end{aligned}$$

Приравняем вещественные и мнимые части последнего равенства:

$$AG = \alpha G - \beta H, AH = \beta G + \alpha H,$$

или, в векторном виде,

$$\mathcal{A}g = \alpha g - \beta h, \mathcal{A}h = \beta g + \alpha h. \quad (1)$$

Подпространство $\langle g, h \rangle$ инвариантно, так как для любого вектора $y = \gamma_1 g + \gamma_2 h \in \langle g, h \rangle$ имеем: $\mathcal{A}y = \mathcal{A}(\gamma_1 g + \gamma_2 h) = \gamma_1 \mathcal{A}g + \gamma_2 \mathcal{A}h = \gamma_1(\alpha g - \beta h) + \gamma_2(\beta g + \alpha h) = (\gamma_1 \alpha + \gamma_2 \beta)g + (\gamma_2 \alpha - \gamma_1 \beta)h$. Векторы g и h линейно независимы. Допустим противное: $g = \gamma h$. Подставив это выражение в равенства (1), получим

$$\gamma \mathcal{A}h = \alpha \gamma h - \beta h, \mathcal{A}h = \beta \gamma h + \alpha h.$$

Умножив второе равенство на γ и приравнявая правые части, получим: $\alpha \gamma h - \beta h = \beta \gamma^2 h + \alpha \gamma h$, откуда следует равенство $-1 = \gamma^2$, невозможное при $\gamma \in \mathbb{R}$. Следовательно, $\dim \langle g, h \rangle = 2$. $\square$

Суммируя упражнение 1 и предложение 3, получаем

Следствие 2. *Для всякого линейного оператора, действующего в вещественном пространстве существует одномерное или двумерное инвариантное подпространство.*

§ 6. Линейные операторы простой структуры. Диагонализируемость

Пусть в пространстве V размерности n над полем F задан линейный оператор $\mathcal{A}$. Если существует базис, в котором матрица оператора имеет диагональную форму $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, то говорят, что оператор $\mathcal{A}$ имеет *простую структуру* или что он *диагонализируем*.

Легко видеть, что оператор диагонализируем в точности тогда, когда существует *собственный базис* пространства V , т. е. базис, составленный из собственных векторов. Выясним, при каких условиях существует собственный базис.

Лемма 1. *Собственные векторы линейного оператора $\mathcal{A}$, отвечающие различным собственным значениям $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, линейно независимы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применим индукцию по k . При $k = 1$ утверждение очевидно. Пусть оно верно для некоторого $k - 1$ и предположим, что собственные векторы $e_1, \dots, e_{k-1}, e_k$, отвечающие различным собственным значениям $\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_k$, линейно зависимы:

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_{k-1} e_{k-1} + \alpha_k e_k = 0. \quad (1)$$

Применив к обеим частям этого равенства оператор $\mathcal{A}$, получим

$$\alpha_1 \lambda_1 e_1 + \dots + \alpha_{k-1} \lambda_{k-1} e_{k-1} + \alpha_k \lambda_k e_k = 0.$$

Вычтем из этого равенства равенство (1), умноженное на λ_k :

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_k) e_1 + \dots + \alpha_{k-1} (\lambda_{k-1} - \lambda_k) e_{k-1} = 0.$$

Все коэффициенты этой комбинации равны нулю, поскольку векторы $e_1, \dots, e_{k-1}$ линейно независимы по предположению индукции. Из условия леммы следует, что разности $\lambda_1 - \lambda_k, \dots, \lambda_{k-1} - \lambda_k$ не равны нулю, следовательно, $\alpha_1 = \dots = \alpha_{k-1} = 0$, а тогда из (1) имеем и $\alpha_k = 0$. Итак, в выражении (1) все коэффициенты линейной комбинации необходимо равны нулю. Это значит (см. замечание 1 на с. 4), что векторы $e_1, \dots, e_{k-1}, e_k$ линейно независимы. $\square$

Следствие 1. *Линейный оператор в n -мерном пространстве, имеющий n различных собственных значений, диагонализируем.* $\square$

Собственным подпространством, отвечающим собственному значению λ оператора $\mathcal{A}$ называется множество V_λ всех собственных векторов, отвечающих λ , т. е. $V_\lambda = \ker(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})$. Легко проверить, что V_λ инвариантно относительно $\mathcal{A}$.

Из леммы 1 и теоремы 1 (с. 9) непосредственно вытекает

Следствие 2. *Сумма собственных подпространств, отвечающих различным собственным значениям, прямая.*

Размерность собственного подпространства V_λ называется *геометрической кратностью* собственного значения λ в отличие от его алгебраической кратности как корня характеристического многочлена $\mathcal{A}$.

Лемма 2. *Геометрическая кратность собственного значения не больше его алгебраической кратности.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть первые k векторов базиса V образуют базис V_λ , тогда матрица оператора имеет вид $\begin{pmatrix} \lambda E_k & B \\ 0 & C \end{pmatrix}^2$, а его характеристический многочлен равен $(\lambda - t)^k |C - tE_{n-k}|$, из чего видно, что алгебраическая кратность λ не меньше k . $\square$

Теорема 1. *Линейный оператор $\mathcal{A}$ диагонализировать тогда и только тогда, когда:*

- 1) *его характеристический многочлен разлагается на линейные множители над полем F ,*
- 2) *геометрическая кратность каждого собственного значения совпадает с его алгебраической кратностью.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ — все различные собственные значения оператора $\mathcal{A}$. Обозначим алгебраическую кратность λ_i через n_i . По лемме 2

$$\dim V_{\lambda_i} \leq n_i \quad (i = 1, \dots, s). \quad (2)$$

В силу леммы 1 максимальное количество линейно независимых собственных векторов равно $\dim V_{\lambda_1} + \dots + \dim V_{\lambda_s}$. Из неравенств

$$\dim V_{\lambda_1} + \dots + \dim V_{\lambda_s} \leq n_1 + \dots + n_s \leq n \quad (3)$$

следует, что собственный базис существует в точности тогда, когда нестрогие неравенства в (3) являются равенствами. Для завершения доказательства заметим, что

а) $n_1 + \dots + n_s = n \Leftrightarrow$ многочлен $|\mathcal{A} - t\mathcal{E}|$ имеет n корней в поле F (с учетом кратности), т. е. выполняется условие 1);

б) $\dim V_{\lambda_1} + \dots + \dim V_{\lambda_s} = n_1 + \dots + n_s \Leftrightarrow$ все нестрогие неравенства (2) являются равенствами, т. е. выполняется условие 2). $\square$

Из теоремы 1 вытекает способ вычисления собственного базиса диагонализированного оператора, если такой базис существует. Для каждого собственного значения нужно найти базис собственного подпространства. Объединение этих базисов и является искомым собственным базисом. Если объединение базисов содержит меньше, чем $n = \dim V$ векторов, то оператор недиагонализировать.

§ 7. Корневые подпространства

Пусть линейный оператор $\mathcal{A}$ действует в пространстве V размерности n над полем F . Вектор x называется *корневым вектором*, отвечающим собственному значению λ оператора $\mathcal{A}$, если для некоторого

²⁾ Нижний индекс обозначает порядок единичной матрицы.

показателя k

$$(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^k x = 0.$$

Наименьший из таких показателей называется *высотой* корневого вектора. Собственные векторы суть корневые векторы высоты 1. Будем считать нулевой вектор корневым вектором высоты 0 (отвечающим любому λ). Легко проверить, что корневые векторы, отвечающие корню λ , образуют подпространство. Оно называется *корневым подпространством* и обозначается V^λ .

Лемма 1. *Линейные операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A} - \mu \mathcal{E}$ при любом $\mu \in F$ имеют одни и те же инвариантные подпространства. $\square$*

Лемма 2. *Корневое подпространство V^λ инвариантно относительно $\mathcal{A}$ и совпадает с ядром оператора $\text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^m$, где m — наибольшая из высот корневых векторов.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Корневые векторы высоты $\leq k$ составляют ядро оператора $(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^k$. Если x — корневой вектор высоты k , то вектор $(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})x$ — корневой вектор высоты $k - 1$. Подпространство $\text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^k$ инвариантно относительно оператора $\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E}$, следовательно, по лемме 1, инвариантно относительно $\mathcal{A}$. Имеется цепочка $\mathcal{A}$ -инвариантных подпространств

$$\text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E}) \subseteq \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^2 \subseteq \dots \quad (1)$$

Поскольку пространство V конечномерно, в этой цепочке, начиная с некоторого показателя m , имеют место равенства и, значит, $\text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^m = V^\lambda$. Ясно, что показатель m равен максимальной высоте корневых векторов. Как все пространства в (1), пространство V^λ инвариантно относительно $\mathcal{A}$. $\square$

Построим базис $e_1, \dots, e_k$ пространства V^λ следующим способом: выберем базис $\text{ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})$, дополним его до базиса $\text{ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^2$ и так далее. В этом базисе вектор $(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})e_j$ является линейной комбинацией векторов $e_1, \dots, e_{j-1}$, следовательно, матрица оператора $(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})|_{V^\lambda}$ имеет верхний нильтреугольный вид, а матрица оператора $\mathcal{A}|_{V^\lambda}$ — верхняя треугольная с числом λ на диагонали. Отсюда вытекают два следствия.

Следствие 1. *Характеристический многочлен оператора $\mathcal{A}|_{V^\lambda}$ равен $(\lambda - t)^k$, где $k = \dim V^\lambda$.*

Следствие 2. *При $\mu \neq \lambda$ оператор $(\mathcal{A} - \mu \mathcal{E})|_{V^\lambda}$ невырожден.*

Предложение 1. *Размерность корневого подпространства V^λ равна алгебраической кратности корня λ .*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть в базисе $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ первые k векторов составляют базис V^λ . Тогда матрица оператора $\mathcal{A}$

имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

где A_1 — матрица $\mathcal{A}|_{V^\lambda}$ в базисе $e_1, \dots, e_k$. По следствию 1

$$|\mathcal{A} - t\mathcal{E}| = (\lambda - t)^k |A_2 - tE_{n-k}|.$$

Предложение будет доказано, если мы установим, что λ не является корнем многочлена $|A_2 - tE_{n-k}|$. Предположим противное, тогда существует такой ненулевой столбец $Y = (\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n)^T$, что $(A_2 - \lambda E)Y = 0$, т. е. $A_2 Y = \lambda Y$. Пусть $A_{12}Y = X = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)^T$, тогда, используя блочную структуру матрицы A , получим равенство

$$A \begin{pmatrix} 0_k \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ \lambda Y \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Положим, что $x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k$, $y = \alpha_{k+1} e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n$. Тогда матричное равенство (2) эквивалентно векторному равенству

$$\mathcal{A}y = x + \lambda y, \text{ или } (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})y = x.$$

Вектор x корневой, значит, ввиду последнего равенства, вектор y тоже корневой. Следовательно,

$$y \in \langle e_1, \dots, e_k \rangle \cap \langle e_{k+1}, \dots, e_n \rangle \Rightarrow y = 0$$

в противоречии с тем, что $y \neq 0$ по построению. $\square$

Лемма 3. *Корневые векторы $e_1, \dots, e_k$ высоты ≥ 1 , отвечающие различным собственным значениям $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, линейно независимы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $k = 1$ утверждение очевидно. Шаг индукции от $k - 1$ до k : допустим, что

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_{k-1} e_{k-1} + \alpha_k e_k = 0, \quad e_i \in V^{\lambda_i}.$$

Подействуем на обе части равенства оператором $(\mathcal{A} - \lambda_k \mathcal{E})^m$, где m — высота e_k . Мы получим:

$$\alpha_1 (\mathcal{A} - \lambda_k \mathcal{E})^m e_1 + \dots + \alpha_{k-1} (\mathcal{A} - \lambda_k \mathcal{E})^m e_{k-1} = 0.$$

Так как оператор $(\mathcal{A} - \lambda_k \mathcal{E})^m$ по следствию 2 невырожден на подпространствах V^{λ_i} ($i = 1, \dots, k - 1$), то $\alpha_1 = \dots = \alpha_{k-1} = 0$. Но тогда и $\alpha_k = 0$. $\square$

Лемма 3 означает, что для корневых векторов выполняется условие 3) теоремы 1 на с. 9. Тем самым доказано

Следствие 3. Сумма корневых подпространств, отвечающих различным собственным значениям $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, прямая.

Из предложения 1 и следствия 3 вытекает

Теорема 1. Если характеристический многочлен оператора $\mathcal{A}$ разлагается на линейные множители над полем F , то пространство V , в котором действует оператор, разлагается в прямую сумму корневых инвариантных подпространств:

$$V = V^{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V^{\lambda_s},$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ — все различные собственные значения оператора $\mathcal{A}$.

§ 8. Теорема Жордана

Линейный оператор $\mathcal{N}$ в пространстве V называется *нильпотентным*, если существует показатель m , при котором $\mathcal{N}^m = \mathcal{O}$. Наименьший из таких показателей называется *высотой* нильпотентного оператора.

Например, оператор $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})|_{V^\lambda}$, где λ — собственное значение оператора $\mathcal{A}$, нильпотентен, т. к. по предложению 2 (с. 25) существует такой показатель m , что $V^\lambda = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^m$, т. е. $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^m x = 0$ для всех $x \in V^\lambda$.

Пусть $\mathcal{N}$ — нильпотентный оператор. *Высотой* вектора a относительно $\mathcal{N}$ называется наименьшее m , для которого $\mathcal{N}^m a = 0$, т. е. высота вектора a как корневого вектора оператора $\mathcal{N}$, отвечающего корню 0. Ясно, что высота оператора $\mathcal{N}$ равна максимальной из высот векторов. Обозначим высоту вектора a через $\text{ht } a$.

Лемма 1. Если $\text{ht } a = m > 0$, то векторы $a, \mathcal{N}a, \dots, \mathcal{N}^{m-1}a$ линейно независимы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $m = 1$ утверждение очевидно. Предположим, что оно верно для векторов высоты $m - 1$ и докажем его для векторов высоты m . Пусть имеется линейная комбинация

$$\alpha_1 a + \alpha_2 \mathcal{N}a + \dots + \alpha_m \mathcal{N}^{m-1}a = 0.$$

Применив к обеим частям оператор $\mathcal{N}$, получим

$$\alpha_1 \mathcal{N}a + \alpha_2 \mathcal{N}^2 a + \dots + \alpha_{m-1} \mathcal{N}^{m-1}a = 0.$$

Высота вектора $\mathcal{N}a$ равна $m - 1$, значит, $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{m-1} = 0$ по предположению индукции, но тогда и $\alpha_m = 0$. $\square$

Пространство $\langle a, \mathcal{N}a, \dots, \mathcal{N}^{m-1}a \rangle$, где a — вектор высоты m , называется *циклическим подпространством*, порождённым вектором a . Легко проверить, что циклическое подпространство инвариантно относительно $\mathcal{N}$. Ограничение оператора $\mathcal{N}$ на подпростран-

ство $\langle a, \mathcal{N}a, \dots, \mathcal{N}^{m-1}a \rangle$ в базисе $(\mathcal{N}^{m-1}a, \dots, \mathcal{N}a, a)$ задаётся матрицей

$$J(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

которая называется *нильпотентной жордановой клеткой*.

Заметим, что любой вектор подпространства $\langle e, \mathcal{N}e, \dots, \mathcal{N}^{m-1}e \rangle$, не принадлежащий подпространству $\langle \mathcal{N}e, \dots, \mathcal{N}^{m-1}e \rangle$, имеет высоту m , следовательно, порождает то же циклическое подпространство.

Теорема 1. *Пространство V , на котором задан nilпотентный оператор $\mathcal{N}$, является прямой суммой циклических подпространств оператора $\mathcal{N}$. Число слагаемых в этой сумме равно $\dim \text{Ker} \mathcal{N}$.*

Доказательство — индукцией по $n = \dim V$. При $n = 1$ утверждение тривиально верно, предположим, что оно верно при некотором $n - 1$. Пусть $\dim V = n$ и $U \subseteq V$ — какое-нибудь $(n - 1)$ -мерное подпространство, содержащее $\text{Im} \mathcal{N}$. Очевидно, что U инвариантно относительно $\mathcal{N}$. По предположению индукции

$$U = U_1 \oplus \dots \oplus U_k, \quad (1)$$

где $U_1, \dots, U_k$ — циклические подпространства. Возьмём любой вектор $e \in V \setminus U$. Тогда

$$\mathcal{N}e = u_1 + \dots + u_k \quad (u_i \in U_i). \quad (2)$$

Можно считать, что ненулевые u_i не принадлежат $\mathcal{N}U_i$, т. е. имеют максимальную высоту в U_i . Если же $u_i \in \mathcal{N}U_i$, то заменим e на вектор $(e - v_i) \in V \setminus U$, где $v_i \in U_i$, $\mathcal{N}v_i = u_i$. Тогда в разложении типа (2) вектора $\mathcal{N}(e - v_i)$ слагаемое с номером i будет нулевым.

Итак, в равенстве (2) для любого i либо $u_i = 0$, либо $u_i \notin \mathcal{N}U_i$. Если $u_i = 0$ для всех i , т. е. $\mathcal{N}e = 0$, то

$$V = \langle e \rangle \oplus U_1 \oplus \dots \oplus U_k.$$

Пусть теперь $\mathcal{N}e \neq 0$. Легко видеть, что $\text{ht } \mathcal{N}e = \max_i \text{ht } u_i$. Для простоты обозначений будем считать, что $\text{ht } \mathcal{N}e = \text{ht } u_1 = m$. Тогда $\text{ht } e = m + 1$.

Докажем, что сумма k подпространств

$$\langle e, \mathcal{N}e, \dots, \mathcal{N}^m e \rangle + U_2 + \dots + U_k \quad (3)$$

— прямая. Предположим, что сумма векторов, взятых по одному из каждого подпространства, равна нулю:

$$(\alpha_1 e + \alpha_2 \mathcal{N}e + \dots + \alpha_{m+1} \mathcal{N}^m e) + w_2 + \dots + w_k = 0. \quad (4)$$

Докажем, что все слагаемые (выражение в скобках считается одним слагаемым) в левой части равенства (4) равны 0. Согласно теореме 1 (с. 9) это значит, что сумма (3) — прямая.

Вначале заметим, что $\alpha_1 = 0$, т. к. в противном случае из равенства (4) имели бы

$$e = -\alpha_1^{-1}(\alpha_2 \mathcal{N}e + \dots + \alpha_{m+1} \mathcal{N}^m e + w_2 + \dots + w_k).$$

Все слагаемые в скобках принадлежат U , следовательно, $e \in U$, что противоречит выбору e . Подставим в (4) выражение $\mathcal{N}e$ из (2), откроем скобки и для каждого i сложим векторы из U_i :

$$\begin{aligned} \alpha_2(u_1 + \dots + u_k) + \dots + \alpha_{m+1} \mathcal{N}^{m-1}(u_1 + \dots + u_k) + w_2 + \dots + w_k = \\ = u'_1 + u'_2 + \dots + u'_k = 0, \end{aligned}$$

где $u'_1 = \alpha_2 u_1 + \alpha_3 \mathcal{N}u_1 + \dots + \alpha_{m+1} \mathcal{N}^{m-1}u_1$. Поскольку сумма (1) прямая, то $u'_1 = u'_2 = \dots = u'_k = 0$. Из равенства

$$u'_1 = \alpha_2 u_1 + \alpha_3 \mathcal{N}u_1 + \dots + \alpha_{m+1} \mathcal{N}^{m-1}u_1 = 0$$

и того, что векторы $u_1, \mathcal{N}u_1, \dots, \mathcal{N}^{m-1}u_1$ линейно независимы, получаем $\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_{m+1} = 0$. Следовательно, в сумме (4) первое слагаемое (в скобках) равно 0, а остальные слагаемые равны 0 потому, что сумма $U_2 + \dots + U_k$ — прямая. Доказали, что сумма (3) прямая, а поскольку её размерность равна $\dim U + 1 = \dim V$, то искомое разложение получено:

$$V = \langle e, \mathcal{N}e, \dots, \mathcal{N}^m e \rangle \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_k.$$

Докажем второе утверждение теоремы. Пусть дано разложение пространства V в прямую сумму циклических подпространств оператора $\mathcal{N}$:

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k.$$

Нетрудно понять, что

$$\text{Ker } \mathcal{N} = \text{Ker } \mathcal{N}|_{V_1} \oplus \dots \oplus \text{Ker } \mathcal{N}|_{V_k}.$$

Так как $\dim \mathcal{N}|_{V_i} = 1$ при любом i , то $\dim \text{Ker } \mathcal{N} = k$. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Возвращаясь к произвольному линейному оператору $\mathcal{A}$, заметим, что в циклическом пространстве нильпотентного оператора $\mathcal{N} = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})|_{V^\lambda(\mathcal{A})}$ оператор $\mathcal{A}$ задаётся в подходящем базисе матрицей вида

$$J(\lambda) = J(0) + \lambda E = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Матрица (5) называется *жордановой клеткой* с собственным значением λ . Матрица типа $J = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_t)$, с жордановыми клетками на диагонали, называется *жордановой матрицей*.

Добавляя замечание 1 к теоремам 1 на с. 27 и 1, приходим к теореме о жордановой форме:

Теорема 2. *Если характеристический многочлен линейного оператора A разлагается на линейные множители над полем F , то существует базис, в котором оператор A имеет жорданову матрицу.*

Поскольку для операторов в пространстве над полем $\mathbb{C}$ условие теоремы 2 выполняется, то имеет место

Следствие 1. *Для любого линейного оператора в комплексном пространстве существует базис, в котором его матрица A имеет жорданову форму.*

Следствие 2. *Любая квадратная комплексная матрица подобна жордановой матрице. $\square$*

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Согласно теореме 1 корневое подпространство V^λ оператора A раскладывается в прямую сумму инвариантных циклических подпространств нильпотентного оператора $N = (A - \lambda E)|_{V^\lambda}$. Эти циклические подпространства инвариантны также относительно оператора A , причём в каждом из них A задаётся жордановой клеткой. Следовательно, *сумма размеров жордановых клеток с собственным значением λ в жордановой матрице оператора A равна $\dim V^\lambda$, т. е. кратности корня λ характеристического многочлена.* Из второй части теоремы 1 следует, что *количество клеток, отвечающих λ , равно $\dim V_\lambda$.*

§ 9. Вычисление жордановой формы и её единственность

Предположим, что для линейного оператора A , заданного в некотором базисе матрицей A , выполнены условия теоремы 2 (с. 30) и собственные значения известны. Здесь мы выведем формулу для вычисления жордановой формы матрицы A .

Лемма 1. *Пусть $J = J(\lambda)$ — жорданова клетка порядка m . Тогда*

$$\text{rk} J^k = \begin{cases} m, & \text{если } \lambda \neq 0; \\ m - k, & \text{если } \lambda = 0, k < m; \\ 0, & \text{если } \lambda = 0, k \geq m. \end{cases} \quad (1)$$

Доказательство.

1) Если $\lambda \neq 0$, то $J^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda^k \end{pmatrix}$, следовательно, $\text{rk} J^k = m$ при $k = 1, 2, \dots$

2) При $\lambda = 0, k < m$, индукцией по k доказываем, что

$$J^k = \begin{pmatrix} 0 & E_{m-k} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

следовательно, $\text{rk} J^k = m - k$.

3) При $\lambda = 0, k \geq m$ имеем $J^k = 0$, значит, $\text{rk} J^k = 0$. $\square$

Из (1) следует, что

$$\text{rk} J^{k-1} - \text{rk} J^k = \begin{cases} 1, & \text{если } J \text{ — нильпотентная клетка и } k \leq m; \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases} \quad (2)$$

(Примем, что ранг A^0 равен порядку A .) Для произвольной жордановой матрицы имеем

$$J^k = \text{diag}(J_1^k, J_2^k, \dots, J_s^k), \quad \text{rk} J^k = \text{rk} J_1^k + \dots + \text{rk} J_s^k.$$

Отсюда и из формулы (2) следует:

1) число нильпотентных клеток порядка $\geq k$ равно

$$\text{rk} J^{k-1} - \text{rk} J^k = \sum_i \text{rk} J_i^{k-1} - \sum_i \text{rk} J_i^k = \sum_i (\text{rk} J_i^{k-1} - \text{rk} J_i^k).$$

2) число нильпотентных клеток порядка $\geq k+1$ равно

$$\text{rk} J^k - \text{rk} J^{k+1}.$$

Из 1) и 2) получаем:

3) число нильпотентных клеток порядка k равно

$$\text{rk} J^{k-1} - 2\text{rk} J^k + \text{rk} J^{k+1}.$$

Пусть J — произвольная жорданова матрица, λ — её собственное значение. При переходе от J к $J - \lambda E$ клетки с собственным значением λ , и только они, перейдут в нильпотентные клетки. Следовательно, применяя утверждение 3), получим, что *число клеток порядка k с собственным значением λ в жордановой матрице J равно*

$$\text{rk}(J - \lambda E)^{k-1} - 2\text{rk}(J - \lambda E)^k + \text{rk}(J - \lambda E)^{k+1}. \quad (3)$$

Пусть матрица $A \in M_n(F)$ подобна жордановой матрице J , т. е. $A = P^{-1}JP$. Тогда $(A - \lambda E)^k = P^{-1}(J - \lambda E)^kP$. Поскольку ранги подобных матриц равны (см. упражнение 4, с.17), то

$$\text{rk}(A - \lambda E)^k = \text{rk}(J - \lambda E)^k.$$

Отсюда и из (3) окончательно получаем:

Теорема 1. В жордановой форме матрицы A число клеток порядка k с собственным значением λ равно

$$\operatorname{rk}(A - \lambda E)^{k-1} - 2\operatorname{rk}(A - \lambda E)^k + \operatorname{rk}(A - \lambda E)^{k+1}. \quad (4)$$

Если известно разложение характеристического многочлена матрицы $A \in M_n(F)$ на линейные множители, то по формулам (4) однозначно (с точностью до расположения жордановых клеток на диагонали) определяется её жорданова форма.

Учитывая замечание 2 (с. 30), можно провести вычисление жордановой формы более экономно, чем буквальным применением формулы (4).

§ 10. Минимальный многочлен. Теорема Гамильтона–Кэли

Пусть A — матрица порядка n над полем F . Для любого многочлена над F

$$f(t) = \alpha_0 t^m + \alpha_1 t^{m-1} + \dots + \alpha_{m-1} t + \alpha_m$$

можно определить матрицу $f(A)$ по формуле

$$f(A) = \alpha_0 A^m + \alpha_1 A^{m-1} + \dots + \alpha_{m-1} A + \alpha_m E.$$

Если $f(A) = 0$, то говорят, что многочлен $f(t)$ *аннулирует* матрицу A . Аннулирующий многочлен существует для любой матрицы. Действительно, пусть $A \in M_n(F)$. Поскольку $\dim M_n(F) = n^2$, то существует нетривиальная линейная комбинация

$$\alpha_0 A^{n^2} + \alpha_1 A^{n^2-1} + \dots + \alpha_{n^2} A + \alpha_{n^2} E = 0.$$

Многочлен наименьшей степени, аннулирующий матрицу A , называется её *минимальным многочленом*.

Предложение 1. Пусть $f(t)$ — любой многочлен, аннулирующий матрицу A , $g(t)$ — её минимальный многочлен. Тогда $f(t)$ делится на $g(t)$.

Доказательство. Существуют многочлены $q(t)$ и $r(t)$, такие, что $f(t) = q(t)g(t) + r(t)$, где $r(t) = 0$ или степень $r(t)$ меньше степени $g(t)$. Предположим, что $r(t) \neq 0$. Тогда из равенств $f(A) = 0$ и $g(A) = 0$ следует, что $r(A) = 0$ в противоречии с тем, что $g(t)$ минимальный многочлен. $\square$

Из предложения 1 следует, что каждый из двух минимальных многочленов делится на другой, значит, они отличаются лишь скалярным множителем. Чтобы определить минимальный многочлен матрицы однозначно, будем считать, что его старший коэффициент равен единице.

Лемма 1. *Минимальный многочлен жордановой клетки J порядка m с собственным значением λ равен $(t - \lambda)^m$.*

Доказательство. Из доказательства леммы 1 (с. 30) видно, что

$$1) (J - \lambda E)^m = 0, \quad 2) (J - \lambda E)^{m-1} \neq 0.$$

Равенство 1) означает, что $(t - \lambda)^m$ — аннулирующий многочлен. Согласно предложению 1 минимальный многочлен нужно искать среди его делителей, но из неравенства 2) следует, что никакой собственный делитель не является аннулирующим многочленом. Значит, $(t - \lambda)^m$ — минимальный многочлен. $\square$

Лемма 2. *Если $A = \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_k)$ — блочно-диагональная матрица, $f(t)$ — любой многочлен, то*

$$f(A) = \text{diag}(f(A_1), f(A_2), \dots, f(A_k)). \quad \square$$

Теорема 1. *Пусть A комплексная матрица и $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ — все различные корни характеристического многочлена A . Тогда минимальный многочлен матрицы A равен*

$$\prod_{i=1}^s (t - \lambda_i)^{m_i}, \quad (1)$$

где m_i — наибольший из порядков жордановых клеток с собственным значением λ_i в жордановой форме матрицы A .

Доказательство проведём в предположении, что матрица A приведена к жордановой форме $J = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_k)$. Многочлен (1) аннулирует все клетки J с собственным значением λ_i , поскольку он содержит сомножитель $(t - \lambda_i)^{m_i}$, аннулирующий, по лемме 1, все такие клетки. Это утверждение верно для всех λ_i , откуда и из леммы 2 следует, что многочлен (1) аннулирует матрицу J .

Теперь пусть $f(t)$ — любой многочлен, аннулирующий матрицу J . Он обязан аннулировать клетку порядка m_i с собственным значением λ_i , следовательно, делится на минимальный многочлен этой клетки, равный $(t - \lambda_i)^{m_i}$. Эти многочлены, отвечающие различным собственным значениям, взаимно просты, следовательно, $f(t)$ делится на произведение этих многочленов, т. е. на многочлен (1). Это доказывает, что (1) — минимальный многочлен. $\square$

Минимальный многочлен матрицы является, очевидно, делителем её характеристического многочлена. Отсюда вытекает утверждение, известное как теорема Гамильтона–Кэли:

Следствие 1. *Любая комплексная матрица аннулируется своим характеристическим многочленом.*

Нужно заметить, что теорема Гамильтона–Кэли верна для матриц над любым полем. Доказательство можно найти, например, в учебнике Д.К. Фаддеева — см. список литературы.

В силу известного изоморфизма алгебры операторов и алгебры матриц (см. §4), все приведённые выше утверждения могут быть переведены на операторный язык. Полезно проделать это как упражнение.

ГЛАВА 3

Векторные пространства со скалярным произведением

§ 1. Евклидовы пространства. Неравенство Коши–Буняковского

Вещественное линейное пространство V называется *евклидовым*, если на нём определено скалярное произведение — двухместная функция (a, b) с вещественными значениями, удовлетворяющая аксиомам:

- 1) $(\alpha_1 a + \alpha_2 b, c) = \alpha_1(a, c) + \alpha_2(b, c)$ ($\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$);
- 2) $(a, b) = (b, a)$;
- 3) $(a, a) \geq 0$, причём $(a, a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

Скалярное произведение векторов определяется их координатами и скалярными произведениями базисных векторов:

Следствие 1. Пусть $e_1, \dots, e_n$ — базис пространства V . Если $a = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$, $b = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n$, то

$$(a, b) = (\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n, \beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \beta_j (e_i, e_j). \quad (1)$$

Доказательство проводится применением аксиом 1) и 2). $\square$

Векторы a и b евклидова пространства называются *ортogonalными*, если $(a, b) = 0$.

УПРАЖНЕНИЕ 1. Докажите, что

$$(a, b) = 0 \text{ для всех } b \in V \Leftrightarrow a = 0. \quad \square$$

Число $\|a\| = \sqrt{(a, a)}$ называется *длиной (нормой)* вектора a . Заметим, что $\|\alpha a\| = |\alpha| \cdot \|a\|$, поэтому ненулевой вектор можно *нормировать*: умножить на число $\|a\|^{-1}$ и получить вектор единичной длины.

ПРИМЕР 1. В линейном пространстве $\mathbb{R}^n$ стандартное скалярное произведение определяется так:

$$a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T, b = (\beta_1, \dots, \beta_n)^T \Rightarrow (a, b) = \alpha_1 \beta_1 + \dots + \alpha_n \beta_n.$$

Выполнение аксиом скалярного произведения легко проверяется. Длина вектора в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ выражается формулой

$$\|a\| = \sqrt{(a, a)} = \sqrt{\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2}.$$

В дальнейшем всегда будем считать, что скалярное произведение в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ задано стандартно.

Предложение 1. (*Неравенство Коши–Буняковского*). Для любых векторов a, b евклидова пространства

$$(a, b)^2 \leq (a, a)(b, b). \quad (2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если хотя бы один из векторов равен 0, то неравенство верно, поэтому дальше будем считать, что оба вектора ненулевые. В силу аксиом скалярного произведения

$$(ta - b, ta - b) = t^2(a, a) - 2t(a, b) + (b, b) \geq 0 \quad \text{для любого } t \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Но квадратный трёхчлен принимает неотрицательные значения при всех $t \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда его дискриминант D неположителен, т. е. выполняется неравенство (2). $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Равенство в (2) имеет место только если a и b линейно зависимы. Действительно, $(a, b)^2 = (a, a)(b, b) \Leftrightarrow D = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \exists t_0 : (t_0 a - b)(t_0 a - b) = 0 \Leftrightarrow \exists t_0 : t_0 a - b = 0$.

Неравенство Коши–Буняковского равносильно неравенству $|(a, b)| \leq \|a\| \cdot \|b\|$ или неравенству

$$-1 \leq \frac{(a, b)}{\|a\| \cdot \|b\|} \leq 1.$$

Углом между векторами a и b называется угол φ ($0 \leq \varphi \leq \pi$), однозначно определяемый условием $\cos \varphi = \frac{(a, b)}{\|a\| \cdot \|b\|}$.

§ 2. Ортонормированный базис. Ортогонализация системы векторов

Система векторов евклидова пространства называется *ортогональной*, если любые два различных вектора системы ортогональны. Систему из одного вектора будем считать ортогональной.

Предложение 1. *Ортогональная система ненулевых векторов $e_1, \dots, e_k$ линейно независима.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k = 0$. Умножая обе части равенства скалярно на вектор e_i , получим $\alpha_i (e_i, e_i) = 0$ ($i = 1, \dots, k$). $\square$

Базис пространства называется *ортогональным*, если его векторы образуют ортогональную систему. При исследовании евклидовых

пространств наиболее удобен *ортонормированный базис*, т. е. ортогональный базис с векторами единичной длины. Другими словами, базис $e = (e_1, \dots, e_n)$ — ортонормированный, если

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j; \\ 1, & \text{если } i = j. \end{cases} \quad (1)$$

Пусть $e_1, \dots, e_n$ — ортонормированный базис и даны векторы $a = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$ и $b = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n$. Докажите в качестве упражнения следующие свойства ортонормированного базиса.

Свойство 1. $(a, b) = \alpha_1 \beta_1 + \dots + \alpha_n \beta_n$.

Свойство 2. $\|a\| = \sqrt{(a, a)} = \sqrt{\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2}$.

Свойство 3. Координаты вектора a задаются формулами:

$$\alpha_i = (a, e_i) \quad (i = 1, \dots, n).$$

Предложение 2. Для любых векторов $g_1, \dots, g_m$ евклидова пространства существует ортогональный базис линейной оболочки $\langle g_1, \dots, g_m \rangle$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Описываемое ниже построение ортогонального базиса называется *процессом ортогонализации*.

1. $e_1 = g_1$.

2. $e_2 = \alpha_{21} e_1 + g_2$, где $\alpha_{21} = -\frac{(g_2, e_1)}{(e_1, e_1)}$. Если $e_1 = 0$, то полагаем $\alpha_{21} = 0$. Легко проверить, что

$$(e_1, e_2) = 0, \quad \langle e_1, e_2 \rangle = \langle g_1, g_2 \rangle.$$

3. Пусть уже построены такие попарно ортогональные векторы $e_1, \dots, e_{k-1}$, такие что

$$\langle e_1, \dots, e_{k-1} \rangle = \langle g_1, \dots, g_{k-1} \rangle. \quad (2)$$

Следующий вектор ортогональной системы определим равенством:

$$e_k = g_k + \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_{ki} e_i, \quad (3)$$

где $\alpha_{ki} = -\frac{(g_k, e_i)}{(e_i, e_i)}$, но если $e_i = 0$, то $\alpha_{ki} = 0$. Умножая равенство (3) скалярно на векторы e_j при $j = 1, \dots, k-1$, можно убедиться, что e_k ортогонален каждому из них. Из равенства (3) видно, что g_k линейно выражается через векторы $e_1, \dots, e_{k-1}, e_k$, следовательно, $\langle g_1, \dots, g_{k-1}, g_k \rangle \subseteq \langle e_1, \dots, e_{k-1}, e_k \rangle$. С другой стороны, в силу

равенства (2), векторы $e_1, \dots, e_{k-1}$ линейно выражаются через векторы $g_1, \dots, g_{k-1}$. Подставляя эти выражения в (3), получим, что e_k — линейная комбинация векторов $g_1, \dots, g_{k-1}, g_k$. Значит, имеет место обратное вложение $\langle e_1, \dots, e_{k-1}, e_k \rangle \subseteq \langle g_1, \dots, g_{k-1}, g_k \rangle$. Таким образом, $\langle e_1, \dots, e_{k-1}, e_k \rangle = \langle g_1, \dots, g_{k-1}, g_k \rangle$. Продолжая аналогичные построения, получим ортогональную систему векторов e_i , такую, что $\langle e_1, \dots, e_m \rangle = \langle g_1, \dots, g_m \rangle$.

4. Система $e_1, \dots, e_m$ может содержать нулевые векторы. Удалив их, получим искомым ортогональный базис пространства $\langle g_1, \dots, g_m \rangle$. $\square$

Следствие 1. В каждом евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

Действительно, пусть $g_1, \dots, g_m$ — базис евклидова пространства. Применив к нему процесс ортогонализации, получим ортогональный базис $e_1, \dots, e_m$, затем нормируем каждый вектор e_i . $\square$

Следствие 2. Любую ортонормированную систему векторов $e_1, \dots, e_k$ можно дополнить до ортонормированного базиса $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вначале дополним данную систему до какого-нибудь базиса $e_1, \dots, e_k, e'_{k+1}, \dots, e'_n$. Это возможно по теореме 1 (с. 6). Затем проведём процесс ортогонализации. $\square$

§ 3. Ортогональное дополнение

Пусть V — евклидово пространство, L — его подпространство. Множество векторов

$$L^\perp = \{b \mid (a, b) = 0 \text{ для всех } a \in L\},$$

называется *ортогональным дополнением* подпространства L .

УПРАЖНЕНИЕ 1. Пусть $e_1, \dots, e_k$ — базис подпространства L . Тогда

$$b \in L^\perp \Leftrightarrow (e_i, b) = 0, \quad i = 1, \dots, k.$$

Теорема 1. Если L — подпространство n -мерного евклидова пространства V , то

1) $L^\perp$ — подпространство,

2) $V = L \oplus L^\perp$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение 1) легко проверить. Докажем 2). Пусть $x \in L \cap L^\perp$, тогда $(x, x) = 0$, следовательно, $x = 0$. Это значит (предложение 1, с. 10), что сумма $L + L^\perp$ прямая. В силу этого

$$\dim(L \oplus L^\perp) = \dim L + \dim L^\perp \leq \dim V. \quad (1)$$

Выберем в L ортонормированный базис $e_1, \dots, e_k$ и дополним его до ортонормированного базиса $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ пространства V . Это возможно по следствию 2 (с. 38). Векторы $e_{k+1}, \dots, e_n$ принадлежат $L^\perp$ (см. упр. 1), поэтому $\dim L^\perp \geq n - k = \dim V - \dim L$. Следовательно, $\dim L^\perp = n - k$, т. е. $L^\perp = \langle e_{k+1}, \dots, e_n \rangle$. Отсюда $V = L \oplus L^\perp$. $\square$

§ 4. Изоморфизм евклидовых пространств

Говорят, что евклидовы пространства V и V' изоморфны, если существует изоморфизм $\varphi : V \rightarrow V'$ линейных пространств, сохраняющий скалярное произведение, т. е. $(\varphi(a), \varphi(b)) = (a, b)$ для всех $a, b \in V$.

ПРИМЕР 1. Согласно предложению 1 (с. 14) отображение $\mathcal{K}$, ставящее в соответствие каждому вектору вещественного n -мерного пространства V столбец его координат в данном базисе, является изоморфизмом линейных пространств V и $\mathbb{R}^n$. Пусть V — евклидово пространство, в котором задан ортонормированный базис $e_1, \dots, e_n$, в пространстве $\mathbb{R}^n$ задано стандартное скалярное произведение (пример 1 на с. 35). Из формулы (1) на с. 35 с очевидностью следует, что отображение $\mathcal{K}$ сохраняет скалярное произведение и тем самым является изоморфизмом евклидовых пространств.

Предложение 1. *Евклидовы пространства V и V' изоморфны тогда и только тогда, когда $\dim V = \dim V'$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Что изоморфные линейные пространства имеют одинаковую размерность, уже доказано (теорема 1, с. 14).

Теперь пусть дано, что евклидовы пространства V и V' имеют одинаковую размерность. Выберем в этих пространствах ортонормированные базисы $e_1, \dots, e_n$ и $g_1, \dots, g_n$. Для произвольного вектора $a = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ положим, что $\varphi(a) = \sum_{i=1}^n \alpha_i g_i$. Согласно вышеупомянутой теореме отображение φ определяет изоморфизм линейных пространств V и V' . Осталось доказать, что сохраняется скалярное произведение. Действительно, для $a = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ и $b = \sum_{j=1}^n \beta_j e_j$, учитывая следствие 1 (с. 35), имеем:

$$(\varphi(a), \varphi(b)) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i g_i, \sum_{j=1}^n \beta_j g_j \right) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \beta_j (g_i, g_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i = (a, b). \quad \square$$

§ 5. Эрмитовы пространства

Комплексное линейное пространство V называется *эрмитовым* (или *унитарным*), если на нём определено скалярное произведение — двухместная функция (a, b) с комплексными значениями, удовлетворяющая аксиомам:

- 1) $(\alpha_1 a + \alpha_2 b, c) = \alpha_1(a, c) + \alpha_2(b, c);$
- 2) $(a, b) = \overline{(b, a)};$
- 3) $(a, a) \geq 0$, причём $(a, a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

Следствие 1. $(c, \alpha_1 a + \alpha_2 b) = \overline{\alpha_1}(c, a) + \overline{\alpha_2}(c, b).$ $\square$

Векторы a и b эрмитова пространства называются *ортogonalными*, если $(a, b) = 0$.

Как в евклидовом пространстве, вектор a эрмитова пространства ортогонален любому вектору пространства только если $a = 0$.

Величина $\|a\| = \sqrt{(a, a)}$ называется *длиной* (*нормой*) вектора a .

ПРИМЕР 1. В линейном пространстве $\mathbb{C}^n$ *стандартное* скалярное произведение определяется так:

$$a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T, b = (\beta_1, \dots, \beta_n)^T \Rightarrow (a, b) = \alpha_1 \overline{\beta_1} + \dots + \alpha_n \overline{\beta_n}.$$

Выполнение аксиом 1-3 легко проверяется. Длина вектора в эрмитовом пространстве $\mathbb{C}^n$ определяется формулой

$$\|a\| = \sqrt{(a, a)} = \sqrt{|\alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_n|^2}.$$

В эрмитовом пространстве справедливо и неравенство Коши–Буняковского: $|(a, b)| \leq \|a\| \cdot \|b\|$. Понятие угла обычно не вводится.

По существу вся теория евклидова пространства, рассмотренная выше, без изменения определений и схем доказательств переносится на эрмитово пространство. Мы будем пользоваться фактами этой теории в эрмитовом случае без дальнейших оговорок.

ГЛАВА 4

Нормальные операторы

§ 1. Сопряжённый оператор. Существование и единственность

Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор на евклидовом или эрмитовом пространстве V . Линейный оператор $\mathcal{A}^* : V \rightarrow V$ называется *сопряжённым* с $\mathcal{A}$, если

$$(\mathcal{A}^*x, y) = (x, \mathcal{A}y) \quad \text{для любых } x, y \in V. \quad (1)$$

Говорят, что оператор $\mathcal{A}$ *нормальный*, если $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$.

Определим сопряженные и нормальные матрицы. Пусть A — комплексная прямоугольная матрица. *Сопряжённой* с A , называется матрица A^* , которая получается транспонированием A и последующей заменой каждого элемента на комплексно сопряжённый. Если A — вещественная матрица, то $A^* = A^T$. Говорят, что матрица A *нормальная*, если $AA^* = A^*A$.

Следующие равенства доказываются простыми вычислениями:

$$(A + B)^* = A^* + B^*, \quad (AB)^* = B^*A^*, \quad (\lambda A)^* = \bar{\lambda}A^*, \quad (A^*)^* = A. \quad (2)$$

(Подразумевается, что размеры матриц позволяют их складывать и перемножать).

Приведём пример использования сопряжённых матриц. Пусть векторы x, y имеют в ортонормированном базисе евклидова или эрмитова пространства V координатные столбцы $X = (x_1, \dots, x_n)^T$, $Y = (y_1, \dots, y_n)^T$, тогда скалярное произведение записывается в виде произведения матриц:

$$(x, y) = x_1\bar{y}_1 + \dots + x_n\bar{y}_n = Y^*X. \quad (3)$$

Теорема 1. *Для любого линейного оператора $\mathcal{A}$ в евклидовом или эрмитовом пространстве V существует единственный сопряжённый оператор.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть A — матрица оператора $\mathcal{A}$ в ортонормированном базисе $e = (e_1, \dots, e_n)$. Положим, что $\mathcal{A}^*$ — оператор, имеющий в базисе e матрицу A^* . Для произвольных векторов $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$, $y = y_1e_1 + \dots + y_ne_n$ проверим выполнение условия (1), пользуясь равенствами (2) и (3):

$$(\mathcal{A}^*x, y) = Y^*(A^*X) = (Y^*A^*)X = (AY)^*X = (x, \mathcal{A}y).$$

Докажем единственность сопряженного оператора. Пусть оператор $\mathcal{B}$ тоже удовлетворяет условию (1), тогда для любых $x, y \in V$

$$(\mathcal{A}^*x, y) = (\mathcal{B}x, y) \Rightarrow ((\mathcal{A}^* - \mathcal{B})x, y) = 0.$$

В частности, при любом $x \in V$

$$((\mathcal{A}^* - \mathcal{B})x, (\mathcal{A}^* - \mathcal{B})x) = 0 \Rightarrow (\mathcal{A}^* - \mathcal{B})x = 0 \Rightarrow \mathcal{A}^* - \mathcal{B} = 0 \Rightarrow \mathcal{A}^* = \mathcal{B}. \quad \square$$

§ 2. Нормальные операторы

Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор в евклидовом или эрмитовом пространстве.

Предложение 1. *Оператор $\mathcal{A}$ нормален в точности тогда, когда в некотором ортонормированном базисе его матрица A нормальная.*

Доказательство. Пусть A — матрица оператора $\mathcal{A}$ в ортонормированном базисе e . Из доказательства теоремы 1 (с. 41) видно, что матрицей оператора $\mathcal{A}^*$ в том же базисе является матрица A^* . В силу изоморфизма алгебры операторов и алгебры матриц (см. теорему 1 на с. 19 и следующее за ней замечание) матрицей оператора $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ является матрица AA^* , оператор $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ имеет матрицу A^*A . Очевидно, что равенство $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$ равносильно равенству $AA^* = A^*A$. $\square$

Напомним, что следом квадратной матрицы называется сумма её диагональных элементов. Следующие свойства следа доказываются непосредственными вычислениями.

Лемма 1. $\text{tr}(A + B) = \text{tr}A + \text{tr}B$, $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

Если $A = (a_{ij})$, то $\text{tr}(AA^*) = \sum_{i,j} |a_{ij}|^2$. $\square$

Лемма 2. Если матрица $A = \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix}$ с квадратными блоками B и C — нормальная, то $D = 0$.

Доказательство. В силу нормальности A следующие две матрицы равны:

$$AA^* = \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^* & 0 \\ D^* & C^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BB^* + DD^* & DC^* \\ CD^* & CC^* \end{pmatrix},$$

$$A^*A = \begin{pmatrix} B^* & 0 \\ D^* & C^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^*B & B^*D \\ D^*B & D^*D + C^*C \end{pmatrix}.$$

В частности, $BB^* + DD^* = B^*B$. Пользуясь леммой 1, получаем:

$$\text{tr}(BB^* + DD^*) = \text{tr}(BB^*) + \text{tr}(DD^*) = \text{tr}(B^*B) \Rightarrow \text{tr}(DD^*) = 0,$$

следовательно, $D = 0$. $\square$

Лемма 3. Если подпространство L инвариантно относительно нормального оператора $\mathcal{A}$, то его ортогональное дополнение $L^\perp$ тоже инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ — базис пространства V , в котором первые k векторов составляют базис L . В этом базисе матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет форму $A = \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix}$.

Согласно лемме 2 на самом деле $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$. Следовательно, подпространство $\langle e_{k+1}, \dots, e_n \rangle$ инвариантно. В доказательстве теоремы 1 (с. 38), установлено, что $\langle e_{k+1}, \dots, e_n \rangle = L^\perp$. $\square$

Подпространства L и M евклидова или эрмитова пространстве V называются ортогональными, если ортогональны любые векторы $x \in L$, $y \in M$. Сумма ортогональных подпространств называется ортогональной.

Лемма 4. Ортогональная сумма подпространств есть прямая сумма.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Объединение ортогональных базисов подпространств $L_1, \dots, L_k$ представляет собой ортогональную систему ненулевых векторов. Такая система по предложению 1 (с. 36) линейно независима, следовательно, является базисом суммы $L_1 + \dots + L_k$. Согласно теореме 1 (с. 9) это значит, что сумма прямая. $\square$

Инвариантное подпространство $L \subseteq V$ линейного оператора $\mathcal{A}$ называется *приводимым*, если оно содержит нетривиальное (отличное от 0 и L) инвариантное подпространство. В противном случае будем говорить, что подпространство L *неприводимо*.

Теорема 1. Пусть нормальный линейный оператор $\mathcal{A}$ действует в евклидовом или эрмитовом пространстве V . Тогда пространство V разлагается в ортогональную сумму неприводимых инвариантных подпространств: $V = L_1 \oplus \dots \oplus L_k$.

В пространстве V существует ортонормированный базис, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет блочно-диагональную форму

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_k \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где блок A_i ($i = 1, \dots, k$) представляет собой матрицу ограничения оператора $\mathcal{A}$ на неприводимое подпространство L_i .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если V неприводимо, то утверждение очевидно. В противном случае по лемме 3 пространство V разлагается в ортогональную сумму двух инвариантных подпространств. Если одно из них приводимо, то разложим его аналогичным образом. Продолжая разложение слагаемых подпространств пока это возможно,

получим представление V в виде ортогональной (по лемме 4 — прямой) суммы неприводимых инвариантных подпространств. Составим ортонормированный базис V , объединив ортонормированные базисы подпространств $L_1, \dots, L_k$. В этом базисе матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет форму (1). $\square$

Лемма 5. *Для линейного оператора $\mathcal{A}$, действующего в комплексном пространстве V , неприводимые инвариантные подпространства одномерны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть L — инвариантное подпространство. Оператор $\mathcal{A}|_L$ имеет собственный вектор (следствие 1 на с. 22), следовательно, имеет одномерное инвариантное подпространство. Поэтому L неприводимо, лишь если $\dim L = 1$. $\square$

Теорема 2. *Линейный оператор $\mathcal{A}$ в n -мерном эрмитовом пространстве V нормален тогда и только тогда, когда существует ортонормированный базис, в котором матрица $\mathcal{A}$ имеет диагональный вид*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение теоремы для нормального оператора следует из теоремы 1 и леммы 5. Действительно, выбрав в каждом из одномерных подпространств L_i по одному нормированному вектору, получим собственный ортонормированный базис. Матрица в этом базисе имеет вид (2) с собственными значениями на диагонали.

Теперь предположим, что в некотором ортонормированном базисе матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет диагональный вид (2). Тогда матрица оператора $\mathcal{A}^*$ имеет диагональный вид $A^* = \text{diag}(\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_n)$. Ясно, что $AA^* = A^*A$, следовательно, $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$. $\square$

Перейдём к изучению нормальных операторов в евклидовом пространстве.

Лемма 6. *Пусть C — нормальная матрица, $Z \in \mathbb{C}^n$. Тогда*

$$CZ = 0 \Rightarrow C^*Z = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$$(C^*Z)^*(C^*Z) = Z^*CC^*Z = Z^*C^*CZ = (CZ)^*(CZ) = 0 \Rightarrow C^*Z = 0. \quad \square$$

Лемма 7. *Пусть A — нормальная матрица. Тогда*

$$AZ = \lambda Z \Rightarrow A^*Z = \bar{\lambda}Z \quad (Z \in \mathbb{C}^n, \lambda \in \mathbb{C}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нужно доказать, что $(A^* - \bar{\lambda}E)Z = 0$. Из нормальности A следует, что матрица $A - \lambda E$ тоже нормальная, а сопряжённая с ней равна $A^* - \bar{\lambda}E$. Для завершения доказательства достаточно применить лемму 6 к матрице $C = A - \lambda E$. $\square$

Теорема 3. *Линейный оператор $\mathcal{A}$ в евклидовом пространстве V нормален тогда и только тогда, когда в некотором ортонормированном базисе матрица оператора имеет блочно-диагональную форму $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_k)$, где каждый блок A_i представляет собой либо матрицу порядка 1, либо матрицу порядка 2 вида*

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \beta \neq 0. \quad (3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{A}$ — нормальный оператор, пространство V разложено в ортогональную сумму неприводимых инвариантных подпространств: $V = L_1 \oplus \dots \oplus L_k$, выбран ортонормированный базис, в котором матрица оператора имеет вид (1). По следствию 2 (с.22) линейный оператор в вещественном пространстве всегда имеет одномерное или двумерное инвариантное подпространство. Следовательно, неприводимыми могут быть лишь подпространства размерности 1 или 2. Соответственно, клетки в матрице (1) могут быть порядка 1 или 2. Если λ — вещественный корень характеристического многочлена, то ему отвечают одномерные подпространства $L_i = \langle e_i \rangle$ — линейные оболочки собственных векторов, отвечающих λ , соответственно, матрица A_i есть просто число λ . Двумерное неприводимое подпространство L_i существует, если характеристический многочлен имеет комплексный корень $\lambda = \alpha + \beta i$, $\beta \neq 0$ (а также корень $\bar{\lambda} = \alpha - \beta i$). Далее используем предложение 3 (с.22) и введённые там обозначения. Покажем, что векторы g и h , заданные в ортонормированном базисе пространства V координатными столбцами G и H , ортогональны. С одной стороны, для ненулевого комплексного столбца $Z = G + iH$ имеем $AZ = \lambda Z$, следовательно,

$$Z^T A Z = Z^T (\lambda Z) = \lambda Z^T Z,$$

с другой стороны, учитывая лемму 7,

$$Z^T A Z = (A^T Z)^T Z = \bar{\lambda} Z^T Z.$$

Поскольку $\lambda \neq \bar{\lambda} \neq 0$, то $Z^T Z = 0$. Значит,

$$(G^T + iH^T)(G + iH) = (G^T G - H^T H) + i(G^T H + H^T G) = 0.$$

Приравнявая нулю вещественные и мнимые части, получаем:

$$G^T G = H^T H, \quad G^T H = 0 \quad (\text{т. к. } G^T H = H^T G).$$

В переводе на векторный язык эти равенства означают: $(g, g) = (h, h)$, $(g, h) = 0$. Следовательно, $\|g\|^{-1}g, \|h\|^{-1}h$ — ортонормированный базис L_i . В этом базисе матрица A_i оператора $\mathcal{A}|_{L_i}$ имеет вид (3). Легко проверить, что матрицы такого типа нормальны.

Выбрав в каждом одномерном L_i нормированный собственный вектор, и в каждом двумерном L_i ортонормированный базис описанного выше типа, составим ортонормированный базис пространства V , в котором матрица $\mathcal{A}$ имеет вид, указанный в формулировке теоремы.

Обратное утверждение теоремы следует из того, что матрица $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_k)$ с нормальными блоками A_i является нормальной матрицей. $\square$

§ 3. Унитарные и ортогональные операторы

Линейный оператор $\mathcal{A}$ в эрмитовом пространстве V называется *унитарным*, если сопряжённый с ним является обратным:

$$\mathcal{A}^* \mathcal{A} = \mathcal{A} \mathcal{A}^* = \mathcal{E}. \quad (1)$$

Оператор в евклидовом пространстве, удовлетворяющий равенству (1), называется *ортогональным*. Ясно, что унитарный и ортогональный операторы являются нормальными.

Комплексная матрица A называется *унитарной*, если сопряжённая с ней является обратной: $A^* A = A A^* = E$. вещественная матрица A называется *ортогональной*, если $A^T A = A A^T = E$. Очевидно, что оператор унитарен (ортогонален) в точности тогда, когда его матрица в некотором ортонормированном базисе унитарна (ортогональна).

Нормальный линейный оператор $\mathcal{A}$ в эрмитовом пространстве унитарен, если модули его собственных значений равны единице. Более подробная формулировка:

Теорема 1. *Линейный оператор $\mathcal{A}$ в эрмитовом пространстве V унитарен тогда и только тогда, когда в некотором ортонормированном базисе матрица оператора имеет вид:*

$$A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad |\lambda_1| = \dots = |\lambda_n| = 1. \quad (2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{A}$ — унитарный, следовательно, нормальный, оператор. Применяя теорему 2 (с. 44) и учитывая, что в комплексной диагональной унитарной матрице диагональные элементы равны единице по модулю, получаем в некотором (собственном) ортонормированном базисе форму (2). Обратное утверждение ввиду упомянутой выше теоремы 2 не требует доказательства. $\square$

Теорема 2. *Линейный оператор $\mathcal{A}$ в евклидовом пространстве V ортогонален тогда и только тогда, когда в некотором ортонормированном базисе его матрица имеет блочно-диагональную*

форму $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_k)$, причём матрицы A_i первого порядка равны 1 или -1 , а матрицы A_i второго порядка имеют вид

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \sin \varphi \neq 0.$$

Доказательство вытекает из теоремы 3 (с. 45) и следующих соображений:

1) матрица $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_k)$ ортогональна $\Leftrightarrow$ каждый блок A_i ортогонален;

2) ортогональных матриц порядка 1 всего две: 1 и -1 ;

3) матрица $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ ортогональна $\Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 1 \Leftrightarrow$ существует такой угол φ , что $\cos \varphi = \alpha$, $\sin \varphi = \beta$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. $\square$

Теорема 3. Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор в эрмитовом или евклидовом пространстве V . Следующие условия эквивалентны:

1) $\mathcal{A}$ — унитарный (ортогональный) оператор;

2) $(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (x, y)$ для любых $x, y \in V$;

3) если $e_1, \dots, e_n$ — ортонормированный базис, то и $\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n$ — ортонормированный базис.

Доказательство.

$1 \Rightarrow 2$ следует из равенств $(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (\mathcal{A}^* \mathcal{A}x, y) = (x, y)$.

$2 \Rightarrow 3$. $(\mathcal{A}e_i, \mathcal{A}e_j) = (e_i, e_j) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ 1, & \text{если } i = j. \end{cases}$

$3 \Rightarrow 1$. Если $e_1, \dots, e_n$ — ортонормированный базис, то для любых i, j

$$(\mathcal{A}e_i, \mathcal{A}e_j) = (\mathcal{A}^* \mathcal{A}e_i, e_j) = (e_i, e_j) \Rightarrow ((\mathcal{A}^* \mathcal{A} - \mathcal{E})e_i, e_j) = 0.$$

Вектор, ортогональный всем базисным векторам, равен 0, следовательно, $(\mathcal{A}^* \mathcal{A} - \mathcal{E})e_i = 0$ для всех i . Линейный оператор, обращающий в 0 все базисные векторы, есть нулевой оператор, значит, $\mathcal{A}^* \mathcal{A} = \mathcal{E}$. Равенство $\mathcal{A} \mathcal{A}^* = \mathcal{E}$ доказывается аналогично. $\square$

§ 4. Самосопряжённые операторы

Линейный оператор $\mathcal{A}$ в эрмитовом или евклидовом пространстве V называется *самосопряжённым*, если $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$. Другими словами, оператор $\mathcal{A}$ самосопряжён, если $(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}y)$ для любых $x, y \in V$. Самосопряжённые операторы очевидно нормальны.

Комплексная матрица A называется *самосопряжённой*, если $A^* = A$. Ясно, что оператор $\mathcal{A}$ самосопряжён, если в некотором ортонормированном базисе его матрица A самосопряжённая. Вещественная самосопряжённая матрица называется *симметричной*. Самосопряженные операторы в евклидовом пространстве часто называют *симметрическими*.

Теорема 1. *Линейный оператор $\mathcal{A}$ в эрмитовом или евклидовом пространстве V является самосопряжённым тогда и только тогда, когда в некотором ортонормированном базисе пространства V оператор имеет вещественную диагональную матрицу.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В эрмитовом случае применяем теорему 2 (с. 44) и учитываем, что комплексная диагональная матрица самосопряжена лишь если все диагональные элементы вещественны.

В евклидовом случае применяем теорему 3 (с. 45) и учитываем, что клетки типа (3) отсутствуют, поскольку они несимметричны. $\square$

Приведём условие самосопряженности оператора, эквивалентное теореме 1, но в другой формулировке.

Теорема 2. *Линейный оператор $\mathcal{A}$ в эрмитовом или евклидовом пространстве V самосопряжён тогда и только тогда, когда все корни его характеристического многочлена вещественны и существует ортонормированный базис пространства V , составленный из собственных векторов $\mathcal{A}$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть самосопряжённый оператор $\mathcal{A}$ задан в некотором ортонормированном базисе матрицей A . Как видно из теорем этого параграфа, оператор $\mathcal{A}$ диагонализуем. Чтобы найти ортонормированный базис, составленный из собственных векторов, вначале можно вычислить какой-нибудь собственный базис, а затем с помощью процесса ортогонализации и нормирования превратить его ортонормированный собственный базис.

§ 5. Теоремы о нормальных матрицах

Говорят, что комплексная матрица A *унитарно подобна* матрице B , если существует такая унитарная матрица P , что $P^*AP = B$. Вещественная матрица A *ортогонально подобна* матрице B , если существует ортогональная матрица P , такая, что $P^TAP = B$.

Лемма 1. *Если e и e' — ортонормированные базисы в эрмитовом (евклидовом) пространстве, то матрица $P = (p_{ij})$ перехода от e к e' унитарна (ортогональна).*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$$(e'_i, e'_j) = \left(\sum_k p_{ki} e_k, \sum_l p_{lj} e_l \right) = \sum_k p_{ki} \overline{p_{kj}} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j; \\ 1 & \text{при } i = j. \end{cases} \quad (1)$$

Равенства (1) доказывают унитарность P , поскольку число $\sum_k p_{ki} \overline{p_{kj}}$ есть (j, i) -элемент матрицы P^*P . Это доказательство верно и для евклидова пространства, с тем отличием, что знаки комплексного сопряжения отсутствуют и вместо P^* можно писать P^T . $\square$

Теорема 1. *Верны следующие утверждения.*

1. *Комплексная матрица нормальна тогда и только тогда, когда она унитарно подобна диагональной матрице.*

2. *Если вещественная матрица нормальна, то она ортогонально подобна матрице $\text{diag}(A_1, \dots, A_k)$, где каждая подматрица A_i либо является числом либо имеет вид $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$, $\beta \neq 0$. Верно и обратное утверждение.*

3. *Комплексная матрица унитарна тогда и только тогда, когда она унитарно подобна диагональной матрице, диагональные элементы которой по модулю равны единице.*

4. *Если вещественная матрица ортогональна, то она ортогонально подобна матрице $\text{diag}(A_1, \dots, A_k)$, где подматрица A_i равна 1, или -1 , или является матрицей типа $\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$, $\sin \varphi \neq 0$. Обратное утверждение тоже верно.*

5. *Комплексная матрица самосопряжена тогда и только тогда, когда она унитарно подобна вещественной диагональной матрице.*

6. *Вещественная матрица симметрична тогда и только тогда, когда она ортогонально подобна вещественной диагональной матрице.*

Доказательство. Все утверждения теоремы доказываются однотипно. Докажем только первое и последнее из них.

1. Нормальную матрицу A можно рассматривать как матрицу нормального оператора в некотором ортонормированном базисе e эрмитова пространства V . По теореме 2 (с. 44) существует ортонормированный базис e' , в котором матрица D оператора — диагональная. Матрицы A и D связаны известным соотношением $P^{-1}AP = D$, где P — матрица перехода от e к e' . По лемме 1 матрица P унитарная, следовательно, можем писать $P^*AP = D$.

Обратно, пусть $A = PDP^*$, где P — унитарная, D — диагональная матрица. Тогда $A^* = PD^*P^*$ и свойство нормальности A легко проверяется.

6. Вещественную симметричную матрицу A можно рассматривать как матрицу самосопряжённого оператора в некотором ортонормированном базисе e евклидова пространства V . По теореме 1 (с. 48) существует ортонормированный базис e' , в котором матрица D оператора — диагональная. Матрицы A и D связаны равенством $P^{-1}AP = D$,

где P — матрица перехода от e к e' . По лемме 1 матрица P ортогональная, поэтому $P^T A P = D$.

Обратно, пусть $A = P D P^T$, где P — ортогональная, D — диагональная матрица. Симметричность A легко проверить. $\square$

ГЛАВА 5

Билинейные функции и квадратичные формы

§ 1. Билинейные функции

Пусть V — линейное пространство над полем F . Двухместная функция $f : V \times V \rightarrow F$ называется *билинейной*, если она линейна по каждому аргументу, т. е. для любых $x, y, z \in V$, $\lambda \in F$

- 1) $f(x + y, z) = f(x, z) + f(y, z)$, $f(\lambda x, z) = \lambda f(x, z)$;
- 2) $f(x, y + z) = f(x, y) + f(x, z)$, $f(x, \lambda y) = \lambda f(x, y)$.

ПРИМЕР 1. Скалярное произведение в евклидовом пространстве является билинейной функцией.

ПРИМЕР 2. Пусть A — матрица порядка n над F . Тогда функция $f(X, Y) = X^T A Y$ ($X, Y \in F^n$) — билинейная функция на F^n .

Пусть в пространстве V выбран базис $e = (e_1, \dots, e_n)$. Тогда для векторов $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, $y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$ из аксиом 1) и 2) вытекает, что

$$f(x, y) = f(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, y_1 e_1 + \dots + y_n e_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i y_j, \quad (1)$$

где $a_{ij} = f(e_i, e_j)$.

Матрица $A = (a_{ij})$ называется *матрицей билинейной функции* f в базисе e . Формулу (1) удобно записывать в матричной форме:

$$f(x, y) = X^T A Y. \quad (2)$$

где $X = (x_i)$, $Y = (y_j)$ — столбцы координат векторов x, y в базисе e . Пусть в пространстве V выбран новый базис $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$. Координатные столбцы векторов x, y в новом базисе связаны со старыми координатами формулами

$$X = P X', \quad Y = P Y' \quad (P — матрица перехода от e к e').$$

Подставляя эти выражения в (2), получаем

$$f(x, y) = (P X')^T A P Y' = (X')^T (P^T A P) Y',$$

откуда следует, что в базисе e' матрица функции f равна

$$A' = P^T A P. \quad (3)$$

О матрицах, связанных равенством (3), где P невырожденная матрица, говорят, что они *конгруэнтны*, или что матрица A' получена *конгруэнтным преобразованием* матрицы A .

Ранги конгруэнтных матриц равны, поскольку умножение на невырожденную матрицу не меняет ранг данной матрицы. Поэтому корректно следующее определение: *ранг билинейной функции f равен рангу её матрицы* (в любом базисе). Обозначение: $\text{rk}(f)$.

Билинейная функция f называется *симметрической*, если для всех $x, y \in V$

$$f(x, y) = f(y, x).$$

Например, скалярное произведение в евклидовом пространстве — симметрическая функция.

Легко понять, что билинейная функция является симметрической в точности тогда, когда её матрица симметрична. Симметрическая билинейная функция f определяет *квадратичную функцию* $q : V \rightarrow F$, по формуле

$$q(x) = f(x, x).$$

Квадратичные функции называют также *квадратичными формами*. В координатах квадратичная форма записывается в виде

$$q(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j, \quad (4)$$

т. е. в виде однородного многочлена второй степени от переменных $x_1, \dots, x_n$.

Симметрическая билинейная функция $f(x, y)$ восстанавливается по соответствующей квадратичной форме $q(x)$ по формуле

$$f(x, y) = \frac{1}{2}[q(x + y) - q(x) - q(y)]. \quad (5)$$

Таким образом, имеется взаимно однозначное соответствие между симметрическими билинейными функциями и квадратичными формами. Ввиду этого соответствия все понятия, относящиеся к симметрическим билинейным функциям — матрица, ранг и т. д. — переносят на квадратичные формы.

§ 2. Квадратичные формы. Теоремы Лагранжа и Якоби

Говорят, что квадратичная форма имеет в данном базисе *канонический вид*, если в формуле (4) присутствуют лишь квадраты переменных. Очевидно, что форма имеет канонический вид, если её матрица диагональна. Следующая теорема принадлежит Лагранжу.

Теорема 1. Для любой квадратичной формы существует базис, в котором форма имеет канонический вид.

Доказательство. Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица формы в базисе e . Для доказательства теоремы достаточно найти такую невырожденную матрицу $P = (p_{ij})$, что $P^T A P$ — диагональная матрица. Действительно, положив

$$e'_j = p_{1j}e_1 + \dots + p_{nj}e_n \quad (j = 1, \dots, n),$$

получим базис e' , в котором форма имеет диагональную матрицу.

Воспользуемся индукцией по порядку n . При $n = 1$ утверждение верно. Предположим, оно верно при $n - 1$ и пусть A — симметричная матрица порядка n . Возможны три случая.

1. $a_{11} \neq 0$. Применим к матрице A конгруэнтное преобразование с невырожденной матрицей

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \text{ и получим } Q^T A Q = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

где B — симметричная матрица порядка $n - 1$. По предположению индукции существует такая невырожденная матрица R , что $R^T B R$ — диагональная матрица. Положим, что $P = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$. Тогда

$$\begin{aligned} P^T A P &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^T \end{pmatrix} Q^T A Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & R^T B R \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Получили диагональную матрицу.

Теорема доказана для матриц, у которых элемент в верхнем левом углу не равен нулю. Покажем, что к этому случаю сводятся остальные возможные случаи.

2. $a_{11} = 0$, но $a_{ii} \neq 0$ для некоторого i . Поменяем местами i -ю и 1-ю строки, затем i -й и 1-й столбцы. Результат равен $R^T A R$, где R — невырожденная матрица (запишите её), причём $(R^T A R)_{11} = a_{ii}$.

3. $a_{ii} = 0$ для всех i , но существует $a_{ij} \neq 0$. Прибавим i -й столбец матрицы A к j -му и вычтем j -й столбец из i -го. Эту операцию можно совершить умножением матрицы A справа на невырожденную (докажите это) матрицу $S = E + E_{ij} - E_{ji}$. Аналогичные операции сделаем со строками A . Результат можно записать в виде $S^T A S$, причём $(S^T A S)_{jj} = 2a_{ij}$. Мы свели случай 3 к случаю 2.

Итак, от данной матрицы можно конгруэнтными преобразованиями перейти к матрице с ненулевым элементом в верхнем левом углу. Но для этого случая теорема уже доказана. $\square$

Иногда коэффициенты формы можно выразить через миноры её матрицы. Следующее утверждение называется теоремой Якоби.

Теорема 2. *Если в матрице $A = (a_{ij})$ квадратичной формы $q(x)$ не равны нулю все угловые миноры:*

$$\delta_1 = a_{11}, \quad \delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \delta_n = |A|,$$

то в некотором базисе форма имеет канонический вид

$$q(x) = \frac{\delta_1}{\delta_0} x_1^2 + \frac{\delta_2}{\delta_1} x_2^2 + \dots + \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} x_n^2 \quad (\delta_0 = 1 \text{ по определению}). \quad (1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применим индукцию по порядку матрицы. При $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть утверждение верно для матриц порядка $n - 1$, докажем его для матрицы A порядка n . Поскольку $a_{11} \neq 0$, то к матрице A применимо конгруэнтное преобразование из п. 1 доказательства теоремы 1, приводящее к матрице

$$Q^T A Q = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1,n-1} \\ 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & \dots & b_{n-1,n-1} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Угловые миноры матрицы (2) равны соответствующим угловым минорам матрицы A . Действительно, умножение A на Q справа производит элементарные преобразования столбцов A , не меняющие угловых миноров. Сохраняются также угловые миноры матрицы AQ при умножении на Q^T слева.

Обозначим через $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$ угловые миноры матрицы B . Из строения матрицы (2) видно, что

$$\delta_k = \delta_1 \gamma_{k-1}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (3)$$

Из этих равенств следуют соотношения:

$$\frac{\gamma_k}{\gamma_{k-1}} = \frac{\delta_{k+1}}{\delta_k}, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Из (3) следует также, что угловые миноры матрицы B не равны нулю. По предположению индукции существует такая невырожденная матрица R , что

$$R^T B R = \text{diag}\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_0}, \dots, \frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_{n-2}}\right) = \text{diag}\left(\frac{\delta_2}{\delta_1}, \dots, \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}}\right),$$

следовательно,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^T \end{pmatrix} Q^T A Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & R^T B R \end{pmatrix} = \text{diag}\left(\frac{\delta_1}{\delta_0}, \frac{\delta_2}{\delta_1}, \dots, \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}}\right). \quad \square$$

§ 3. Закон инерции. Положительно определённые формы

В этом параграфе рассматриваются квадратичные формы, заданные на вещественном линейном пространстве V и принимающие вещественные значения.

Пусть выбран базис $e = (e_1, \dots, e_n)$, в котором квадратичная форма $q(x)$ имеет канонический вид

$$q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2.$$

Обозначим через k количество положительных, через l — количество отрицательных коэффициентов в каноническом виде. Поделим базисный вектор e_i на число $\sqrt{\lambda_i}$, если $\lambda_i > 0$, а если $\lambda_i < 0$, то поделим его на $\sqrt{-\lambda_i}$. Затем переставим базисные векторы так, чтобы в новом базисе $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ форма q получила так называемый *нормальный* вид:

$$q(x) = (x'_1)^2 + \dots + (x'_k)^2 - (x'_{k+1})^2 - \dots - (x'_{k+l})^2 \quad (k+l = \text{rk}(q) \leq n) \quad (1)$$

Заметим, что количество положительных и отрицательных слагаемых при переходе от канонической формы к нормальной не изменилось.

Квадратичная форма q называется *положительно определённой*, если $q(x) > 0$ для всех $x \in V$, $x \neq 0$. Нормальный вид положительно определённой квадратичной формы есть, очевидно, $(x'_1)^2 + \dots + (x'_n)^2$.

Вещественная билинейная функция называется *положительно определённой*, если положительно определена соответствующая ей квадратичная форма.

Например, скалярное умножение векторов евклидова пространства является положительно определённой симметрической билинейной функцией.

Говорят, что квадратичная форма q положительно определена на подпространстве $L \subseteq V$, если $q(x) > 0$ для всех $x \in L$, $x \neq 0$.

Теорема 1. Число k в нормальном виде (1) квадратичной формы q равно максимальной размерности подпространства, на котором форма q положительно определена.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ясно, что q положительно определена на k -мерном подпространстве $\langle e'_1, \dots, e'_k \rangle$. Пусть L — произвольное

подпространство, на котором форма q положительно определена. На подпространстве $M = \langle e'_{k+1}, \dots, e'_n \rangle$ форма q принимает только неположительные значения, значит, сумма $L + M$ — прямая. По свойству прямой суммы

$$\dim(L + M) = \dim L + \dim M = \dim L + (n - k) \leq n \Rightarrow \dim L \leq k. \quad \square$$

Следствие 1. (Закон инерции.) Числа k и l в нормальном виде (1) квадратичной формы q не зависят от выбора базиса, в котором форма имеет нормальный вид.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Максимальная размерность подпространства, на котором форма q положительно определена, не зависит от выбора базиса. Следовательно, число k в нормальном виде квадратичной формы (как и ранг формы) не зависит от выбора базиса. То же верно и для числа $l = \operatorname{rk}(q) - k$. $\square$

Числа k и l называются, соответственно, *положительным* и *отрицательным индексами инерции* квадратичной формы q (и соответствующей симметрической билинейной функции f). Пара (k, l) называется *сигнатурой* формы q (и функции f).

Пусть $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ — последовательность ненулевых вещественных чисел. Если знаки чисел α_{i-1} , α_i различны, то говорят, что в i -том элементе последовательности происходит перемена знака.

Лемма 1. Предположим, что все угловые миноры $\delta_1, \dots, \delta_n$ матрицы A квадратичной формы q отличны от нуля. Тогда отрицательный индекс инерции формы равен числу перемен знака в последовательности $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_n$.

Действительно, коэффициент $\frac{\delta_i}{\delta_{i-1}}$ в выражении (1) отрицателен в точности тогда, когда числа δ_{i-1} и δ_i имеют различные знаки.

Пусть $L \subseteq V$ — подпространство и $q(x) \neq 0$ для всех $x \in L$, $x \neq 0$, тогда говорят, что q невырождена на L . При $L = V$ форма называется *невырожденной*.

Нетрудно видеть, что невырожденными являются формы, имеющие (в любом базисе) невырожденную матрицу.

Теорема 2. (Критерий Сильвестра.) Пусть квадратичная форма q имеет в базисе $e = (e_1, \dots, e_n)$ матрицу A . Форма q положительно определена тогда и только тогда, когда все угловые миноры $\delta_1, \dots, \delta_n$ положительны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть q положительно определена, т. е. $q(x) > 0$ для всех $x \in V$, $x \neq 0$. Тогда, очевидно, она положительно определена (следовательно, и невырождена) на подпространствах

$\langle e_1, \dots, e_k \rangle$, $k = 1, \dots, n$. Это означает, что все угловые миноры матрицы A отличны от нуля. Применяя лемму 1, получаем, что все они положительны.

Если все угловые миноры положительны, то, в частности, они отличны от нуля, и применение теоремы 2 (с. 54) доказывает, что форма q положительно определена. $\square$

§ 4. Приведение квадратичной формы к главным осям

Теорема 1. Пусть квадратичная форма q определена в евклидовом пространстве V и в ортонормированном базисе $e = (e_1, \dots, e_n)$ имеет матрицу A . Существует такой ортонормированный базис, в котором форма имеет канонический вид

$$q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2, \quad (1)$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — собственные значения матрицы A .

Доказательство. Для симметричной матрицы A существует ортогональная матрица P , такая, что

$$P^T A P = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad (2)$$

(п. 6 теоремы 1 на с. 49). Определим базис e' формулами:

$$e'_j = p_{1j}e_1 + \dots + p_{nj}e_n \quad (j = 1, \dots, n).$$

Базис e' — ортонормированный, это доказывается равенствами (1) на с. 48. Поскольку $P^T = P^{-1}$, то матрицы A и $P^T A P = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ подобны. Следовательно, коэффициенты в каноническом виде (1) являются собственными значениями матрицы A . $\square$

Переход к ортонормированному базису, в котором квадратичная форма имеет вид (1), называется приведением формы к главным осям.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Вычисление ортогональной матрицы P , удовлетворяющей равенству (2), сводится к известной задаче. Действительно, обозначим j -й столбец матрицы P через p_j . Равенство (2) равносильно совокупности равенств $A p_j = \lambda_j p_j$, $j = 1, \dots, n$. Следовательно, столбцы матрицы P суть координатные столбцы векторов собственного ортонормированного базиса самосопряжённого оператора A в евклидовом пространстве V , заданного в базисе e матрицей A . Как вычислять этот базис, известно, — см. замечание 1 на с. 48.

Литература

1. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Ч.1. Основы алгебры. – М.: МЦНМО, 2009.
2. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Ч.2. Линейная алгебра. – М.: МЦНМО, 2009.
3. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. – М.: Наука, 1984.
4. Винберг Э.Б. Курс алгебры. – М.: МЦНМО, 2013.
5. Корешков Н.А. Линейные операторы. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2004.
6. Ермолаев Ю.Б. Линейные преобразования. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1987.
7. Ермолаев Ю.Б. Линейные операторы в унитарных и евклидовых пространствах – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1994.
8. Карчевский Е.М., Карчевский Е.М. Лекции по линейной алгебре и аналитической геометрии. – СПб.: Изд-во «Лань», 2018.
9. Ильин С.Н. Элементы алгебры: матрицы, комплексные числа, системы линейных уравнений, многочлены. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2018.