А. М. Нигмедзянова

Казанский (Приволжский) федеральный университет,

aigmani@rambler.ru

ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ

В E_p^+ рассмотрим вырождающееся эллиптическое уравнение

$$T(U) = x_p^m \left(\sum_{j=1}^{p-1} \frac{\partial^2 U}{\partial {x_j}^2} \right) + \frac{\partial^2 U}{\partial x_p^2} + \lambda^2 x_p^m U = 0, \qquad (1)$$

где $m > 0$, $p \geqslant 3$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

С помощью замены переменных по формулам

$$\xi_j = x_j, \quad j = \overline{1, p-1}, \qquad \xi_p = \frac{2}{m+2} x_p^{\frac{m+2}{2}} \qquad (2)$$

уравнение (1) приводится к эллиптическому уравнению с положительным параметром

$$\sum_{j=1}^{p-1} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_j^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_p^2} + \frac{m}{m+2} \frac{1}{\xi_p} \frac{\partial U}{\partial \xi_p} + \lambda^2 U = 0. \qquad (3)$$

Решение уравнения (3) будем искать в виде

$$U(\xi) = V(r), \qquad r = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} \xi_i^2}. \qquad (4)$$

Подставляя функцию (4) в уравнение (3), получаем

$$V'' + \frac{p-1+\beta}{r} V' + \lambda^2 V = 0, \qquad (5)$$

где $\beta = \frac{m}{(m+2)}$. Ясно, что $0 < \beta < 1$ при $m > 0$.

Умножая уравнение на r^2, находим

$$r^2V'' + (p-1+\beta)\, rV' + \lambda^2 r^2 V = 0. \tag{6}$$

С помощью замены переменных по формулам

$$V(r) = \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{-\frac{p-2+\beta}{2}} W(t), \quad r = \frac{t}{\lambda} \tag{7}$$

уравнение (6) сводится к уравнению Бесселя

$$t^2W'' + tW' + \left(t^2 - \nu^2\right) W = 0, \tag{8}$$

где $\nu = \frac{p-2+\beta}{2}$. Известно [1], что общее решение уравнения (8) имеет вид

$$W(t) = C_1 J_\nu(t) + C_2 Y_\nu(t), \tag{9}$$

где $J_\nu(t)$ и $Y_\nu(t)$ – функции Бесселя первого и второго родов соответственно, C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Возвращаясь в (9) к переменной r, с учетом формул (7), получим решение уравнения (5)

$$V(r) = ar^{-\nu} \left(C_1 J_\nu(\lambda r) + C_2 Y_\nu(\lambda r)\right) \tag{10}$$

где a – нормирующая постоянная.

Из разложения функций $J_\nu(t)$ и $Y_\nu(t)$ в степенной ряд следует, что решение (10) может быть представлено в виде

$$V(r) = \frac{\tilde{a}}{2^\nu \pi} r^{-2\nu} + \psi(r), \tag{11}$$

где $\psi(r)$ – функция, имеющая в начале координат особенность вида $r^{-2\gamma}$ $(\gamma < \nu)$.

Для получения решения уравнения (3) с особенностью в точке ξ_0 применим к функции (11) оператор обобщенного сдвига $T_\xi^{\xi_0}$ и вернемся к переменной x. С учетом формул (2) найдем

$$\mathcal{E}(x;x_0) = \frac{\tilde{a} C_\beta (m+2)^{\frac{m}{4}}}{2^{1+\nu+\frac{m}{4}}\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)}{\Gamma(1-\nu)\Gamma(\nu)} \left(x_p x_{p_0}\right)^{-\frac{m}{4}} \rho_{xx_0}^{2-p} + \mathcal{E}^*(x;x_0), \tag{12}$$

где $\rho_{xx_0} = \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{p-1}(x_j - x_{j0})^2 + \left(\frac{2}{m+2}\right)^2\left(x_p^{\frac{m+2}{2}} - x_{p0}^{\frac{m+2}{2}}\right)^2}$, $\mathcal{E}^*(x, x_0)$ – регулярная в E_p^+ функция.

Отсюда следует, что решение (12) имеет степенную особенность вида ρ^{2-p} и, следовательно, является фундаментальным решением уравнения (1) с особенностью в точке x_0.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ватсон Г. Н. *Теория бесселевых функций. Ч.1.* – М.: ИЛ, 1949.

К. Г. Овсепян

Казанский государственный энергетический университет, karen.hovsep@gmail.com

ПОДАЛГЕБРЫ АЛГЕБРЫ ТЕПЛИЦА И ТИП АЛГЕБРЫ

Устанавливается связь между двумя C^*-подалгебрами $\mathcal{T}_n$ и $\mathcal{T}(n)$ алгебры Теплица, порожденными мономами индекса Фредгольма, кратного числу n. Также, используя тип алгебры, определенный в работе С. А. Григоряна [1], мы показываем конечность типа алгебры $\mathcal{T}_n$ относительно алгебры $\mathcal{T}(n)$.

Пусть T – оператор сдвига на $l^2(\mathbb{Z}_+)$, который относительно естественного базиса $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ определяется $Te_n = e_{n+1}$, и T^* – оператор сопряженный к оператору T. Алгеброй Теплица называется замкнутая подалгебра линейных, ограниченных операторов на гильбертовом пространстве $l^2(\mathbb{Z}_+)$, порожденная операторами T и T^*.

Конечное произведение таких операторов называется мономом [2]. Каждый моном имеет конечный индекс Фредгольма.