УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОГО КЛАССА ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ И СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

© 2018 г. Б.Ф. Байрамов*, Ф.Д. Байрамов**

Методом функций Ляпунова исследуется устойчивость систем с распределенными и сосредоточенными параметрами, описываемых линейными уравнениями в частных и обыкновенных производных. Исходные уравнения в частных производных высокого порядка путем введения дополнительных переменных представляются системой эволюционных уравнений и уравнений связей в частных производных первого порядка. Переход к уравнениям в частных производных первого порядка совместно с записью обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши позволил конструктивно строить функцию Ляпунова в виде суммы интегральных и обычных квадратичных форм и разработать общую методику исследования устойчивости широкого класса систем с распределенными и сосредоточенными параметрами. В качестве примера рассмотрена устойчивость работы ветронасосного агрегата при учете упругости вала, передающего крутящий момент от ветряного двигателя насосу.

Ключевые слова: система с распределенными и сосредоточенными параметрами, устойчивость, метод функций Ляпунова, квадратичные формы

DOI: 10.31857/S003282350002739-2

Одним из основных методов исследования устойчивости систем с распределенными параметрами является метод функций (функционалов) Ляпунова. Имеются достаточно полные обзоры проблем в этой области [1–3]. Наряду с теоретическими исследованиями методом функций Ляпунова проводились исследования конкретных объектов с распределенными параметрами, например, упругих и аэроупругих объектов [3–5], химических реакторов [1], магнитодинамических процессов [1] и др. [1, 3]. Основной проблемой при использовании метода является построение самих функционалов Ляпунова, которые в приложениях обычно строились интуитивно, исходя из полной энергии, первых интегралов и других соображений. При решении задач устойчивости систем с распределенными параметрами был предложен новый подход [6], суть которого заключается в следующем. Уравнения в частных производных высокого порядка предварительно сводятся к системе уравнений первого порядка по времени и пространственным координатам. Далее для этой системы функционалы Ляпунова строятся по конкретным уравнениям в виде интегральных квадратичных форм, знакоопределенность которых можно проверять, применяя критерий Сильвестра. Такой подход позволяет конструктивно строить функционалы Ляпунова и значительно расширяет возможности использования метода функций Ляпунова в конкретных приложениях.

В данной работе вышеописанный подход применяется к исследованию устойчивости одного класса гибридных систем с распределенными и сосредоточенными параметрами. Для некоторых гибридных систем такой подход использовался и ранее [7, 8] при исследовании устойчивости по части переменных.

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему с одним распределенным и другими конечномерными звеньями, возмущенное состояние которой описывается уравнениями

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = A(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x} + A_0(x)\varphi, \quad B(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x} + B_0(x)\varphi = 0, \quad x \in (0,1) \tag{1.1}$$

$$\frac{dz}{dt} = Fz + F_0\varphi(0,t) + F_1\varphi(1,t) \tag{1.2}$$

$$\Gamma_1\varphi(0,t) = \Gamma_2 z, \quad \Gamma_3\varphi(1,t) = \Gamma_4 z, \; t \in I = (0,\infty) \tag{1.3}$$

где $\varphi = \varphi(x,t)$ — n-мерный вектор фазовых функций распределенного звена, $z = z(t)$ — m- мерный вектор фазовых функций конечномерных звеньев, $A(x)$ и $B(x)$ — $n \times n$- и $n_1 \times n$-мерные матрицы, элементы которых — непрерывно дифференцируемые функции, $A_0(x)$ и $B_0(x)$ — $n \times n$- и $n_1 \times n$-мерные матрицы, элементы которых — непрерывные функции, F, F_0, F_1, Γ_1, Γ_2, Γ_3 и Γ_4 — $m \times m$-, $m \times n$-, $m \times n$-, $n_2 \times n$-, $n_2 \times m$-, $n_3 \times n$- и $n_3 \times m$— мерные матрицы постоянных.

Предполагается, что при фиксированных начальных данных $\varphi(x,0)$ и $z(0)$ система (1.1) — (1.3) имеет единственное решение в классическом смысле. Нулевое решение $\varphi = z = 0$ соответствует невозмущенному состоянию.

С математической точки зрения задача (1.1) — (1.3) — это краевая задача для уравнений в частных производных при сложных граничных условиях. Уравнения (1.1) представляют собой общую форму записи любого гиперболического уравнения в частных производных второго порядка в виде системы уравнений в частных производных первого порядка. Для преобразования уравнений высокого порядка к виду (1.1) следует принять низшие производные за дополнительные переменные и в этих переменных записать исходное уравнение и условие интегрируемости.

Равенства (1.3) — простые граничные условия, связывающие граничные значения компонентов $\varphi(x,t)$ между собой или с переменной z (см. третье и четвертое равенства (3.1) в примере). Уравнение динамики (1.2) конечномерных звеньев, расположенных на обоих концах распределенного звена, содержит граничные значения $\varphi(x,t)$ и представляет собой сложное граничное условие в дифференциальном виде (первое равенство (3.1)).

Уравнениями типа (1.1) — (1.3) описываются, например, системы, имеющие трансмиссионные валы значительной длины между двигателем и рабочей машиной (генератор, насос, компрессор и др.) [7, 9], системы, содержащие электрические цепи [9, 10] или достаточно длинные трубопроводы (магистрали), в которых необходимо учитывать распределенный характер течения жидкости или газа [1, 8, 9], и т. п.

Введем меру

$$\rho = \int_0^1 \varphi^T\varphi\, dx$$

характеризующую возмущенное состояние распределенного звена, и рассмотрим асимптотическую устойчивость решения $\varphi = z = 0$ системы (1.1) — (1.3) по переменным z, ρ.

2. Исследование устойчивости. Для решения поставленной задачи рассмотрим функцию Ляпунова

$$V = V_1 + V_2 = \int_0^1 \varphi^T(x,t)\, v(x)\, \varphi(x,t)\, dx + z^T(t) Q\, z(t) \tag{2.1}$$

где $v(x)$ и Q − симметричные матрицы; элементы Q − постоянные, а элементы $v(x)$ − ограниченные непрерывно дифференцируемые функции.

Особенностью системы (1.1) − (1.3) является то, что второе уравнение (1.1) и равенства (1.3) не содержат производных по времени t. Это не позволяет непосредственно вычислить производную V в силу всей системы.

Здесь воспользуемся подходом, приведенным ранее [6], и сначала вычислим производную dV/dt в силу первого уравнения (1.1) и уравнения (1.2):

$$\frac{dV}{dt} = \int_0^1 \left[\varphi^T v \left(A \frac{\partial\varphi}{\partial x} + A_0 \varphi \right) + \left(\frac{\partial\varphi^T}{\partial x} A^T + \varphi^T A_0^T \right) v\varphi \right] dx +$$

$$+ z^T \left(QF + F^T Q \right) z + 2\varphi^T(0,t) F_0^T Q\, z + 2\varphi^T(1,t) F_1^T Q\, z$$

Следуя методу множителей Лагранжа, прибавим к этой производной величину

$$\int_0^1 \left[\varphi^T P \left(B \frac{\partial\varphi}{\partial x} + B_0 \varphi \right) + \left(\frac{\partial\varphi^T}{\partial x} B^T + \varphi^T B_0^T \right) P^T \varphi \right] dx$$

равную нулю в силу второго уравнения (1.1). Здесь $P = P(x)$ − пока произвольная матрица, элементы которой − непрерывно дифференцируемые функции, выражения $\varphi^T P$ и $P^T \varphi$ играют роль множителей Лагранжа.

Выполняя интегрирование по частям, получим

$$\frac{dV}{dt} = \int_0^1 \left[-\varphi^T w \varphi + \frac{\partial\varphi^T}{\partial x} \left(A^T v + B^T P^T - vA - PB \right) \varphi \right] dx + \varphi^T(1,t) \times$$

$$\times \left[v(1) A(1) + P(1)\, B(1) \right] \varphi(1,t) - \varphi^T(0,t) \left[v(0) A(0) + P(0)\, B(0) \right] \times \tag{2.2}$$

$$\times \varphi(0,t) + z^T \left(QF + F^T Q \right) z + 2\varphi^T(0,t) F_0^T Q\, z + 2\varphi^T(1,t) F_1^T Q\, z$$

Здесь

$$w = \frac{d(vA + PB)}{dx} - vA_0 - A_0^T v - PB_0 - B_0^T P^T \tag{2.3}$$

Для учета уравнений (1.3) также воспользуемся методом множителей Лагранжа. К выражению (2.2) прибавим равенство

$$\left[\varphi^T(0,t) R_1 + z^T R_2 \right] \left[\Gamma_1 \varphi(0,t) - \Gamma_2 z \right] + \left[\varphi^T(0,t) \Gamma_1^T - z^T \Gamma_2^T \right] \times$$

$$\times \left[R_1^T \varphi(0,t) + R_2^T z \right] = 0 \tag{2.4}$$

и аналогичное равенство при замене $\varphi(0,t)$, R_1, R_2, Γ_1 и Γ_2 на $\varphi(1,t)$, R_3, R_4, Γ_3 и Γ_4, где R_1, … , R_4 − пока произвольные постоянные матрицы.

Пусть матрицы v, P, Q, R_1, … , R_4 удовлетворяют уравнению

$$vA + PB = A^T v + B^T P^T, \qquad x \in (0,1) \tag{2.5}$$

и граничным условиям

$$
\begin{aligned}
&x=0: \quad v(0)A(0)+P(0)B(0)-R_1\Gamma_1-\Gamma_1^T R_1^T=0\\
&QF_0+R_2\Gamma_1-\Gamma_2^T R_1^T=0\\
&x=1: \quad v(1)A(1)+P(1)B(1)+R_3\Gamma_3+\Gamma_3^T R_3^T=0\\
&QF_1+R_4\Gamma_3-\Gamma_4^T R_3^T=0
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

Тогда для производной dV/dt в силу системы (1.1) – (1.3) получим выражение

$$
\frac{dV}{dt}=-\int_0^1 \varphi^T w\,\varphi\,dx-z^T H z \tag{2.7}
$$

т.е. квадратичную форму того же вида, что и для V (2.1). Здесь

$$
H=-\left(QF+F^T Q\right)+R_2\Gamma_2+\Gamma_2^T R_2^T+R_4\Gamma_4+\Gamma_4^T R_4^T \tag{2.8}
$$

Полученные результаты позволяют решать задачу построения квадратичной формы V (2.1). Для этого следует задаться симметричной матрицей $w(x)$ и решить уравнения (2.3) и (2.5) относительно матриц $v(x)$ и $P(x)$ при граничных условиях, вытекающих из условий (2.6). Однако в отличие от задачи построения квадратичных форм в случае линейных обыкновенных дифференциальных уравнений здесь не всегда все элементы матрицы w могут быть заданы произвольно, некоторые из них определяются по ходу решения задачи (см. пример). Из первых двух (последних двух) уравнений (2.6) найдем также матрицы R_1, R_2 (R_3, R_4) и элементы матрицы Q, относящиеся к концу $x=0$ ($x=1$) распределенного звена.

Согласно методу функций Ляпунова [1, 11], нулевое решение системы (1.1) – (1.3) будет асимптотически устойчивым по переменным z, ρ, если интегральная квадратичная форма V_1 (2.1) непрерывна и определенно положительна по мере ρ, квадратичная форма V_2 (2.1) определенно положительна, а производная dV/dt (2.7) определенно отрицательна по переменным z, ρ.

Непрерывность интегральной формы V_1 по мере ρ непосредственно следует из ограниченности элементов матрицы $v(x)$. Остальные условия этого утверждения будут выполняться, если матрицы Q и H – определенно положительные, а $v(x)$ и $w(x)$ – определенно положительные при $x\in[0,1]$, т.е.

$$
Q>0, \quad H>0; \quad v(x)>0, \quad w(x)>0, \quad x\in[0,1] \tag{2.9}
$$

3. Пример. Рассмотрим устойчивость работы ветродвигателя роторного типа с вертикальной осью вращения совместно с насосом. Вал, передающий крутящий момент ветродвигателя насосу, имеет значительную длину, поэтому задача решается с учетом упругости этого вала.

Отметим перспективность использования экологически чистых ветронасосных агрегатов, позволяющих снизить энергетические затраты. Ветродвигатель роторного типа не требует системы ориентации на ветер, бесшумен, безопасен и, в отличие от пропеллерных ветродвигателей, может быть размещен вблизи населенных пунктов и зданий.

Уравнения динамики ветронасосного агрегата с упругим передаточным валом, полученные ранее [7], запишем с дополнительным учетом упругости заделки конца передаточного вала в вал насоса в относительных отклонениях от номинального режима работы агрегата

$$\frac{dz}{dt} = kz + \left.\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0}, \quad \frac{\partial^2\varphi(x,t)}{\partial t^2} = a\frac{\partial^2\varphi(x,t)}{\partial x^2}, \quad x \in (0,1)$$

$$x = 0: \frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t} = k_3 z, \quad x = 1: \frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x} = -k_1\varphi(1,t) - k_2\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t} \tag{3.1}$$

Здесь

$$x = \frac{y}{\ell}, \quad z = \frac{\omega - \omega_*}{\omega_*}, \quad \varphi(x,t) = \frac{\psi(x,t) - \psi_*(x,t)}{\psi_{\max *}}, \quad \psi_{\max *} = \frac{M_*\ell}{GI}$$

$$a = \frac{GI}{J\ell^2}, \quad k = \frac{1}{J_b}\left(\frac{\partial M_b}{\partial\omega}\right)_*, \quad k_1 = \frac{\lambda}{GI}, \quad k_2 = \frac{\ell}{GI}\left(\frac{\partial M}{\partial\omega}\right)_*, \quad k_3 = \frac{GI\omega_*}{\ell M_*}$$

y − координаты поперечных сечений передаточного вала, ω − угловая скорость ветродвигателя, $\psi(x,t)$, ℓ, J и GI − абсолютный угол поворота сечений, длина, погонный момент инерции и жесткость на кручение передаточного вала, M_b и M − крутящие моменты ветродвигателя и насоса, J_b − момент инерции ветродвигателя, $\psi_{\max *}$ − максимальный угол закручивания передаточного вала в номинальном режиме, λ − коэффициент упругости заделки конца передаточного вала в вал насоса, звездочкой отмечены значения величин в номинальном режиме работы агрегата, когда $\omega_* =$ const, $M_b = M = M_* =$ const и передаточный вал имеет постоянную по длине статическую деформацию $\partial\psi_*/\partial x = M_*/GI$ [7].

Вводя новые переменные $\varphi_1 = \varphi(x,t)$, $\varphi_2 = \partial\varphi/\partial t$, $\varphi_3 = \partial\varphi/\partial x$ и учитывая условие интегрируемости

$$\frac{\partial\varphi_3}{\partial t} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}$$

запишем уравнения (3.1) в виде системы (1.1) − (1.3), где

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad A_0 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad B_0 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}$$

$$F = k, \ F_0 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \ \Gamma_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \ \Gamma_2 = k_3, \ \Gamma_3 = \begin{Vmatrix} k_1 & k_2 & 1 \end{Vmatrix}$$

а матрицы F_1 и Γ_4 нулевые.

Построим функционал (2.1), где в данном примере примем $V_2 = qz^2$, q = const > 0. Запишем равенства (2.4), (2.3) в скалярном виде

$$P_{21} = v_{13}, \quad P_{31} = a\,v_{12}, \quad v_{33} = a\,v_{22} \tag{3.2}$$

$$\begin{gathered} P_{11}' = w_{11}, \quad v_{23}' - 2v_{12} = w_{22}, \quad av_{23}' + 2a\,v_{12} = w_{33} \\ av_{22}' = w_{23}, \quad av_{12}' + P_{11} = w_{13}, \quad v_{13}' - v_{11} = w_{12} \end{gathered} \tag{3.3}$$

где P_{ij}, v_{ij} и w_{ij} − элементы матриц P, v и w, штрихом обозначена производная по x.

Равенства (2.6) дают следующие граничные условия:

$$x = 0: \quad P_{11}(0) = v_{12}(0) = v_{23}(0) = v_{13}(0) = 0 \tag{3.4}$$

$$x = 1: \quad \text{а)}\ P_{11}(1) - 2ak_1 v_{12}(1) - ak_1^2 v_{23}(1) = 0$$

b) $\left(1+ak_2^2\right)v_{23}(1)-2ak_2v_{22}(1)=0$ (3.5)

c) $v_{13}(1)-ak_2v_{12}(1)-k_1\left[v_{33}(1)-ak_2v_{23}(1)\right]=0$

и значение для постоянной q:

$$q = ak_3v_{22}(0) \tag{3.6}$$

Положим

$$w_{11} = \text{const},\ w_{22} = 1,\ w_{33} = a,\ w_{13} = P_{11},\ w_{12} = w_{23} = 0$$

и введем обозначения

$$\delta_\pm = \frac{1 \pm ak_2^2}{2k_2}$$

Решая первые пять уравнений (3.3) при граничных условиях (3.4), (3.5 a) и (3.5 b), получим

$$v_{22} = \frac{\delta_+}{a},\ v_{12} = 0,\ v_{23} = x,\ P_{11} = w_{11}x,\ w_{11} = P_{11}(1) = ak_1^2,\ w_{13} = ak_1^2x$$

Из последнего равенства (3.2) и равенств (3.6) и (2.8) следует

$$v_{33} = \frac{q}{k_3} = -\frac{H}{2k_3k} = \delta_+$$

Функции v_{11} и v_{13} входят только в последнее уравнение (3.3). Полагая $v_{11}=$ const, из этого уравнения и последнего граничного условия (3.5) найдем

$$v_{11} = \delta_-k_1,\quad v_{13} = v_{11}x$$

Функционал V (2.1) и его производная dV/dt (2.7) в силу системы (3.1) запишутся в виде

$$V = \int_0^1 \left[\delta_-k_1\left(\varphi_1^2 + 2x\varphi_1\varphi_3\right) + \frac{\delta_+}{a}\left(\varphi_2^2 + a\varphi_3^2\right) + 2x\varphi_2\varphi_3\right]dx + \delta_+k_3z^2$$

$$\frac{dV}{dt} = -\int_0^1 \left[ak_1^2\left(\varphi_1^2 + 2x\varphi_1\varphi_3\right) + \varphi_2^2 + a\varphi_3^2\right]dx + 2\delta_+k_3kz^2$$

Так как $k_1 > 0$, $k_3 > 0$, то из неравенств (2.9) найдем условия асимптотической устойчивости работы ветронасосного агрегата с учетом упругости передаточного вала и выражения для коэффициента k в виде

$$\left(\frac{\partial M_b}{\partial\omega}\right)_* < 0,\quad 0 < k_2 < \frac{1}{\sqrt{a}}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сиразетдинов Т.К.* Устойчивость систем с распределенными параметрами. Новосибирск: Наука. Сиб. отд., 1987. 231 с.
2. *Wang P.K.C.* Theory of stability and control for distributed parameter systems // Int. J. Control. 1968. V. 7. No. 2. P. 101–116. (Bibliography).
3. *Байрамов Ф.Д.* Устойчивость и оптимальная стабилизация систем с распределенными параметрами. М.: Машиностроение, 1995. 160 с.

4. *Parks P.C.* A stability criterion for a panel flutter problem via the second method of Liapunov // J.K. Hale and J.P. LaSalle (eds.). Differential Equations and Dynamical Systems. N.Y.; L.: Academic Press, 1967. P. 287–298.
5. *Мовчан А.А.* О прямом методе Ляпунова в задачах устойчивости упругих систем // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 3. С. 484–493.
6. *Байрамов Ф.Д., Сиразетдинов Т.К.* Условие знакоопределенности интегральных квадратичных форм и устойчивость систем с распределенными параметрами // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 4. С. 567–575.
7. *Байрамов Ф.Д., Байрамов Б.Ф., Мардамшин И.Г.* Математическое моделирование и устойчивость гидравлической системы с ветронасосным агрегатом // Вестник Казанск. гос. техн. ун-та им. А.Н. Туполева. 2009. № 4. С. 42–47.
8. *Байрамов Ф.Д.* Стабилизация установившегося режима работы двухкомпонентного жидкостного ракетного двигателя // Изв. вузов. Авиац. техн. 1991. № 1. С. 4–10.
9. *Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н.* Сборник задач по математической физике. Уч. пособие. изд. 3-е. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1980. 688 с.
10. *Brayton R.K., Miranker W.L.* A stability theory for nonlinear mixed initial boundary value problems // Arch. for Rat. Mech. and Analysis. 1964. V. 17. No. 5. P. 358–376.
11. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: Гостехиздат, 1952. 432 с.

Набережночелнинский институт (филиал)
Казанского (Приволжского)
федерального университета,
Набережные Челны

Поступила в редакцию
31.III.2017 г.

e-mail: bbairamov@gmail.com,
fbairamovd@gmail.com