УДК 517.9

Е. М. Карчевский, А. Г. Фролов

СОБСТВЕННЫЕ ВОЛНЫ СЛАБОНАПРАВЛЯЮЩЕГО ВОЛНОВОДА В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ[1]

Аннотация. Задача о собственных волнах слабонаправляющего диэлектрического волновода в полупространстве сведена к нелинейной спектральной задаче для фредгольмовой голоморфной оператор-функции. Поверхностные волны определяются как решение линейной задачи на собственные значения для интегрального оператора с симметричным, положительным, слабо полярным ядром. Изучаются качественные свойства спектра: локализация, существование, зависимость от параметров.

Ключевые слова: распространение электромагнитных волн в волноводе, задача на собственные значения, интегральные уравнения.

Abstract. The problem for eigenwaves of weakly guiding dielectric waveguide in the half-space is reduced to nonlinear eigenvalue problem for holomorphic Fredholm operator-valued function. The problem for surface waves is reduced to the linear eigenvalue problem for integral operator with symmetric, positive, weakly polar kernel. The existence, localization, and dependence on parameters of the spectrum are investigated.

Key words: propagation of electromagnetic waves in waveguides, eigenvalue problem, integral equations.

Введение

Задача о собственных волнах слабонаправляющего диэлектрического волновода в полупространстве возникает при математическом моделировании одного из базовых элементов оптических интегральных схем, которые в последнее время широко используются в радиоэлектронной промышленности вместо классических электрических [1]. Поэтому изучение качественных свойств спектра таких волноводов весьма актуально. Эффективным и универсальным методом теоретического исследования задач дифракции в неограниченных областях является метод интегральных уравнений (см., например, [2, 3]). В данной статье этим методом задача о собственных волнах слабонаправляющего волновода в полупространстве сводится к нелинейной спектральной задаче для фредгольмовой голоморфной оператор-функции. Изучаются качественные свойства спектра: локализация постоянных распространения на соответствующей поверхности Римана и их зависимость от частоты электромагнитных колебаний. Для поверхностных волн задача сводится к линейной спектральной задаче для интегрального оператора с симметричным, положительным, слабо полярным ядром. Доказывается теорема о существовании характеристических чисел и собственных функций.

1. Постановка задачи и локализация спектра

Задача о собственных волнах слабонаправляющего диэлектрического волновода в полупространстве заключается [4] в определении таких значений частоты электромагнитных колебаний $\omega > 0$ и комплексных постоянных рас-

[1] Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 09-01-97009.

пространений β, при которых существуют ненулевые функции u, удовлетворяющие уравнениям (рис. 1):

$$\Delta u + \chi^2 u = -\lambda p^2 u, \quad x \in \Omega; \tag{1}$$

$$\Delta u + \chi^2 u = 0, \quad x \in \Omega_\infty = \mathrm{R}_+^2 \setminus \bar{\Omega}; \tag{2}$$

$$u^+ = u^-, \quad \frac{\partial u^+}{\partial \nu} = \frac{\partial u^-}{\partial \nu}, \quad x \in \Gamma; \tag{3}$$

$$u = 0, \quad x \in L, \tag{4}$$

где Ω – область поперечного сечения волновода – ограниченная область в верхней полуплоскости $R_+^2 = \{-\infty < x_1 < \infty, x_2 > 0\}$, целиком лежащая в полукруге радиуса R с центром в начале координат. Через u^+ (u^-) обозначено предельное значение функции u извне (изнутри) контура Γ (границы области Ω); $\partial u / \partial \nu$ – производная по внешней нормали; $L = \{-\infty < x_1 < \infty, x_2 = 0\}$. Предполагается, что Γ – липшицева кривая, показатель преломления n непрерывен и непрерывно дифференцируем в области Ω, а также, что $n(x) > n_\infty$ при $x \in \Omega$, где $n_\infty > 0$ – постоянный показатель преломления окружающей среды. Использованы также следующие обозначения: $p^2(x) = \dfrac{n^2(x) - n_\infty^2}{n_+^2 - n_\infty^2} > 0$, где $n_+ = \max\limits_{x \in \Omega} n(x)$; $\lambda = k^2 \left(n_+^2 - n_\infty^2\right) > 0$; $\chi = \sqrt{k^2 n_\infty^2 - \beta^2}$ – поперечное волновое число; $k = \omega\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ – продольное волновое число; ε_0 (μ_0) – электрическая (магнитная) постоянная.

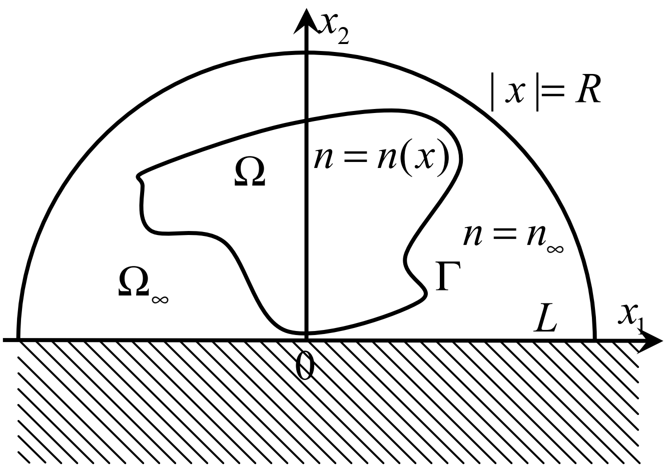

Рис. 1. Поперечное сечение волновода

Будем разыскивать нетривиальные решения u уравнений (1), (2), удовлетворяющие условиям (3), (4) в классе комплекснозначных функций, непрерывных и непрерывно дифференцируемых в $\bar{\Omega}$ и $\bar{\Omega}_\infty$, дважды непрерывно дифференцируемых в Ω и Ω_∞. Обозначим это множество функций через U. Дополнительно будем предполагать, что функция u, являющаяся решением уравнения Гельмгольца (2), удовлетворяет парциальным условиям излучения (см., например, [5]), т.е. что эта функция для всех $x \in \Omega_\infty, |x| \geq R$, разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся, допускающий почленное дифференцирование ряд следующего вида:

$$u = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l H_l^{(1)}(\chi(\beta) r) \sin(il\varphi). \tag{5}$$

Здесь $H_l^{(1)}$ – функции Ханкеля первого рода порядка l [6], через (r, φ) обозначены полярные координаты точки x.

Значения комплексного параметра β будем разыскивать на римановой поверхности Λ функции $\ln\chi(\beta)$. Поверхность Λ состоит из бесконечного числа листов и имеет две точки ветвления $\beta = \pm k n_\infty$. Всюду далее будем предполагать, что точки ветвления не принадлежат поверхности Λ. Обозначим символом $\Lambda_0^{(1)}$ главный («физический») лист римановой поверхности Λ, который определяется следующими условиями:

$$\Lambda_0^{(1)} = \{\beta \in \Lambda : -\pi/2 < \arg\chi(\beta) < 3\pi/2,\ \operatorname{Im}(\chi(\beta)) \geq 0\}.$$

С листом $\Lambda_0^{(1)}$ соединяется лист $\Lambda_0^{(2)}$, который называется «нефизическим» и определяется следующим образом:

$$\Lambda_0^{(2)} = \{\beta \in \Lambda : -\pi/2 < \arg\chi(\beta) < 3\pi/2,\ \operatorname{Im}(\chi(\beta)) < 0\}.$$

Ненулевую функцию $u \in U$ будем называть собственной функцией задачи (1)–(5), отвечающей собственным значениям $\omega > 0$, $\beta \in \Lambda$, если выполнены условия (1)–(5).

Теорема 1. При любом фиксированном $\omega > 0$ на $\Lambda_0^{(1)}$ собственные значения β задачи (1)–(5) могут принадлежать лишь множеству

$$G = \left\{\beta \in \Lambda_0^{(1)} : k n_\infty < |\beta| < k n_+, \operatorname{Im}\beta = 0\right\}.$$

Эта теорема доказывается аналогично теореме 3.9 в [3].

Отметим, что вещественным собственным значениям $\beta \in G$ отвечают поверхностные собственные волны, а комплексным $\beta \in \Lambda_0^{(2)}$ – вытекающие. С уменьшением частоты электромагнитных колебаний ω постоянные распространения β могут перемещаться с физического листа поверхности Λ на нефизический. Другими словами, поверхностные собственные волны могут трансформироваться в вытекающие. Поэтому для приложений важно изучить зависимость функций $\beta = \beta(\omega)$.

Сведем задачу (1)–(5) к нелинейной спектральной задаче для интегрального уравнения по области поперечного сечения волновода. Рассуждая аналогично доказательству леммы 3.6 в [3], нетрудно показать, что если $u \in U$ – собственная функция задачи (1)–(5), отвечающая некоторым собственным значениям $\omega > 0$, $\beta \in \Lambda$, то

$$u(x) = \lambda(\omega) \int_{\Omega} \Phi(\omega, \beta; x, y) p^2(y) u(y) dy, \quad x \in \mathrm{R}_+^2, \tag{6}$$

где

$$\Phi(\omega, \beta; x, y) = \frac{i}{4} \left(H_0^{(1)}(\chi(\omega, \beta) |x - y|) - H_0^{(1)}(\chi(\omega, \beta) |x - y^*|) \right), \quad y^* = (y_1, -y_2).$$

Заметим, что равенство (6) при $x \in \Omega$ представляет собой интегральное уравнение, которое, обозначив

$$K(\omega, \beta; x, y) = \Phi(\omega, \beta; x, y) p(x) p(y), \; v(x) = p(x) u(x),$$

запишем в виде

$$v(x) = \lambda(\omega) \int_{\Omega} K(\omega, \beta; x, y) v(y) dy, \quad x \in \Omega. \tag{7}$$

2. Дискретность характеристического множества и зависимость характеристических значений β от ω

Пусть $\omega > 0$, $\beta \in \Lambda$. Введем в рассмотрение интегральный оператор правой части уравнения (7):

$$\left(T(\omega, \beta) \right) v(x) = \int_{\Omega} K(\omega, \beta; x, y) v(y) dy, \quad x \in \Omega.$$

Будем рассматривать оператор $T(\omega, \beta)$ как оператор, действующий в пространстве комплекснозначных интегрируемых с квадратом функций $L_2(\Omega)$ со стандартным скалярным произведением. Запишем уравнение (7) в операторном виде:

$$v = \lambda(\omega) \left(T(\omega, \beta) \right) v. \tag{8}$$

Будем искать такие $\omega > 0$, $\beta \in \Lambda$, при которых существуют ненулевые функции $v \in L_2(\Omega)$, удовлетворяющие уравнению (8). Для всех $\omega > 0$, $\beta \in \Lambda$ ядро K слабо полярно. Опираясь на известные свойства интегральных операторов со слабо полярными ядрами [7], аналогично доказательству теоремы 3.10 в [3] доказывается следующая теорема (отметим, что в ходе доказательства существенным образом используются требования гладкости контура Γ и функции n).

Теорема 2. Если $u \in U$ является собственной функцией задачи (1)–(5), отвечающей некоторым собственным значениям $\omega > 0$, $\beta \in \Lambda$, то $v = pu$ принадлежит пространству $L_2(\Omega)$ и дает нетривиальное решение уравнения (8) при тех же самых значениях параметров $\omega > 0$, $\beta \in \Lambda$. Если при некоторых значениях $\omega > 0$, $\beta \in \Lambda$ уравнение (8) имеет нетривиальное решение $v \in L_2(\Omega)$, то $u = v / p$ удовлетворяет уравнению (6), принадлежит множеству U и является собственной функцией задачи (1)–(5), отвечающей собственным значениям $\omega > 0$, $\beta \in \Lambda$.

Фиксируем некоторое значение $\omega > 0$. Положим,

$$A(\beta) = I - \lambda T(\beta), \tag{9}$$

где I – единичный оператор в $L_2(\Omega)$. Для всех $\beta \in \Lambda$ ядро K слабо полярно, следовательно, оператор $T(\beta)$ вполне непрерывен, а оператор $A(\beta)$ – фредгольмов [7].

Ненулевую функцию $v \in L_2(\Omega)$ будем называть собственной функцией оператор-функции $A(\beta)$, отвечающей характеристическому значению $\beta \in \Lambda$, если выполнено уравнение

$$A(\beta)v = 0. \tag{10}$$

Характеристическим множеством оператор-функции $A(\beta)$ будем называть множество чисел $\beta \in \Lambda$, для которых оператор $A(\beta)$ не имеет ограниченного обратного в $L_2(\Omega)$. Это множество будем обозначать символом $\sigma(A)$. Обозначим множество регулярных точек оператора $A(\beta)$ через $\rho(A) = \left\{\beta \in \Lambda : \exists A^{-1}(\beta) : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)\right\}$.

Теорема 3. Регулярное множество определенной в (9) оператор-функции $A(\beta)$ не пусто, а именно $\Lambda_0^{(1)} \setminus G \subset \rho(A)$. Характеристическое множество оператор-функции $A(\beta)$ может состоять лишь из изолированных точек, являющихся характеристическими значениями оператор-функции $A(\beta)$. Каждое характеристическое значение β оператор-функции $A(\beta)$ непрерывно зависит от параметра $\omega > 0$. Кроме того, с изменением $\omega > 0$ характеристические значения оператор-функции $A(\beta)$ могут появляться и исчезать только на границе поверхности Λ, т.е. в точках $\pm k n_\infty$ и на бесконечности.

Доказательство. Рассуждая аналогично [8, с. 459], нетрудно показать, что оператор-функция $A(\beta)$ голоморфна по $\beta \in \Lambda$ и непрерывна как функция двух переменных $\beta \in \Lambda$ и $\omega > 0$. В силу фредгольмовости оператора $A(\beta)$, теоремы 1 о локализации собственных значений задачи (1)–(5) и теоремы 2 о спектральной эквивалентности задач (1)–(5) и (8) оператор $A(\beta)$ обратим для любых $\omega > 0$ и $\Lambda_0^{(1)} \setminus G$. Таким образом, справедливость теоремы вытекает из теоремы [9] об изолированности характеристических значений фредгольмовой голоморфной оператор-функции $A(\beta)$ при наличии в области ее голоморфности хотя бы одной регулярной точки и теоремы [10] о поведении характеристических значений такой оператор-функции в зависимости от изменения вещественного параметра ω в случае, если оператор-функция является совместно непрерывной функцией β и ω. Теорема доказана.

3. Существование поверхностных волн

Поверхностные волны отвечают $\omega > 0$ и $\beta \in G$. В этом случае вещественная часть поперечного волнового числа χ равна нулю, а мнимая часть положительна: $\chi = i\sigma$, где $\sigma > 0$. Тогда ядро интегрального уравнения (7) становится не только слабо полярным, но и симметричным:

$$K(\omega,\beta;x,y) = \Phi(\sigma(\omega,\beta);x,y)p(x)p(y),$$

$$\Phi(\sigma(\omega,\beta);x,y) = \frac{1}{2\pi}\Big(K_0(\sigma(\omega,\beta)\,|x-y|) - K_0(\sigma(\omega,\beta)\,|x-y^*|)\Big).$$

Здесь K_0 – функция Макдональда (см., например, [6]). Действительно, для любых $x, y \in \Omega$ в силу очевидных равенств $|x-y| = |y-x|$, $\left|x-y^*\right| = \left|y-x^*\right|$ имеем $K(x,y) = K(y,x)$. Потребуем дополнительно, чтобы область Ω не касалась прямой L. Тогда ядро становится положительным: $K(x,y) > 0$. Действительно, функция Макдональда монотонно убывает на положительной полуоси, а для любых $x, y \in \Omega$ имеем $|x-y| < |x-y^*|$.

В этом случае интегральный оператор правой части уравнения (7) удобно рассматривать как оператор

$$\big(T(\sigma)\big)v(x) = \int\limits_{\Omega} K(\sigma;x,y)v(y)dy, \quad x \in \Omega, \tag{11}$$

действующий в пространстве вещественных функций $L_2(\Omega)$ со стандартным скалярным произведением, а задачу (7) – как линейную спектральную задачу определения характеристических чисел λ и собственных функций v оператора $T(\sigma)$:

$$v = \lambda T\big(\sigma\big)v. \tag{12}$$

Если $\omega > 0$ и $\beta \in G$, то параметры σ и λ должны удовлетворять следующим условиям: $\lambda > 0$, $0 < \sigma < \sqrt{\lambda}$. Итак, требуется найти такие $(\lambda,\sigma) \in \Psi$, где $\Psi = \{(\lambda,\sigma) : 0 < \sigma < \sqrt{\lambda}, \lambda > 0\}$, и ненулевые функции $v \in L_2(\Omega)$, удовлетворяющие равенству (12).

При $\chi = i\sigma$, где $\sigma > 0$, решения задачи (1)–(5) следует разыскивать в классе вещественных функций U. Задачи (12) и (1)–(5) спектрально эквивалентны, а именно справедлива

Теорема 4. Если ненулевая функция $u \in U$ и параметры $\omega > 0$ и $\beta \in G$ удовлетворяют условиям (1)–(5), то

$$v = pu \in L_2(\Omega), \quad \lambda = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 (n_+^2 - n_\infty^2),$$

$$\sigma = \sqrt{\beta^2 - \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 n_\infty^2}$$

удовлетворяют равенству (12). С другой стороны, если для ненулевой функции $v \in L_2(\Omega)$ и $(\lambda,\sigma) \in \Psi$ выполняется равенство (12), то

$$u = v / p, \quad \beta = \left(\sigma^2 + \lambda \frac{n_\infty^2}{n_+^2 - n_\infty^2} \right)^{1/2}, \quad \omega = \left(\frac{\lambda}{\varepsilon_0 \mu_0 (n_+^2 - n_\infty^2)} \right)^{1/2}$$

удовлетворяют уравнению (6), функция u принадлежит множеству U и является собственной функцией задачи (1)–(5), отвечающей собственным значениям β и ω.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1 [11] и основано на свойствах интегральных операторов со слабо полярными ядрами [7].

Относительно существования решений задачи (12) справедлива

Теорема 5. Для любого $\sigma > 0$ справедливы следующие утверждения:

1. Существует счетное множество положительных характеристических чисел λ_i, $i = 1, 2, \ldots$, с единственной точкой накопления на бесконечности.

2. Система собственных функций $\{v_i\}_{i=1}^{\infty}$ может быть выбрана ортонормированной.

3. Наименьшее по модулю характеристическое число λ_1 положительное и простое, соответствующая собственная функция v_1 положительна в $\bar{\Omega}$.

4. $\lambda_1 \to c > 0$ при $\sigma \to 0$.

Доказательство. Первые три утверждения теоремы непосредственно следуют из результатов спектральной теории интегральных операторов с симметричными, положительными, слабо полярными ядрами [7]. Отметим, что предположение о том, что область Ω не касается прямой L, требуется лишь для доказательства утверждения 3 (оно основано на теореме Ентча, справедливой для интегральных операторов с положительными ядрами). Утверждения 1, 2 и 4 имеют место и без этого предположения, так как оператор $T(\sigma)$ остается положительным. Докажем четвертое утверждение, т.е. что $\lambda_1 \to c > 0$ при $\sigma \to 0$. Используем вариационный принцип для первого характеристического числа [7]:

$$\lambda_1 = \inf_{f \in L_2(\Omega)} \frac{(f, f)}{(T(\sigma) f, f)}.$$

В силу непрерывной зависимости ядра оператора T от σ функция $\lambda_1 = \lambda_1(\sigma)$ непрерывна на положительной полуоси. Нетрудно видеть, что для любой функции $f \in L_2(\Omega)$ имеем $(T(\sigma) f, f) \to M < \infty$ при $\sigma \to 0$. Действительно, справедливы равенства

$$K_0(\sigma | x - y |) = \ln \frac{1}{\sigma} + f(\sigma | x - y |),$$

$$K_0(\sigma | x - y^* |) = \ln \frac{1}{\sigma} + f^*(\sigma | x - y |),$$

где функции f и f^* не имеют особенности при $\sigma \to 0$. Следовательно (рассуждая аналогично [3, с. 141]), заключаем, что $\lambda_1 \to c > 0$ при $\sigma \to 0$. Теорема доказана.

Утверждение 4 этой теоремы устанавливает, что у слабонаправляющего волновода в полупространстве не существует фундаментальной собственной волны (поверхностной волны, распространяющейся при любой положительной частоте). В этом заключается принципиальное отличие спектральных характеристик волновода в полупространстве от волновода в однородной окружающей среде, у которого фундаментальная собственная волна существует [11].

Список литературы

1. **Lifante, G.** Integrated photonics: fundamentals / G. Lifante. – John Wiley and Sons, 2003. – 184 p.
2. **Смирнов, Ю. Г.** Математические методы исследования задач электродинамики / Ю. Г. Смирнов. – Пенза : Инф.-изд. центр ПензГУ, 2009. – 268 с.
3. **Даутов, Р. З.** Метод интегральных уравнений и точные нелокальные граничные условия в теории диэлектрических волноводов / Р. З. Даутов, Е. М. Карчевский. – Казань : Изд-во Казан. гос. ун-та, 2009. – 271 с.
4. **Войтович, Н. Н.** Собственные волны диэлектрических волноводов сложного сечения / Н. Н. Войтович, Б. З. Каценеленбаум, А. Н. Сивов, А. Д. Шатров // Радиотехника и электроника. – 1979. – Т. 24, № 7. – С. 1245–1263.
5. **Shestopalov, Yu. V.** Logarithmic integral equations in electromagnetics / Yu. V. Shestopalov, Yu. G. Smirnov, E. V. Chernokozhin. – VSP, 2000. – 117 p.
6. **Янке, Е.** Специальные функции / Е. Янке, Ф. Эмде., Ф. Леш. – М. : Наука, 1968. – 344 с.
7. **Владимиров, В. С.** Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – М. : Наука, 1976. – 527 с.
8. **Като, Т.** Теория возмущений линейных операторов / Т. Като. – М. : Мир, 1972. – 740 с.
9. **Гохберг, И. Ц.** Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов / И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн // Успехи матем. наук. – 1957. – Т. 12, № 2. – С. 44–118.
10. **Steinberg, S.** Meromorphic families of compact operators / S. Steinberg // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1968. – V. 31, № 5. – P. 372–379.
11. **Карчевский, Е. М.** Численное решение задачи о распространении электромагнитных волн в слабонаправляющих волноводах / Е. М. Карчевский, А. Г. Фролов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2011. – № 1 (17). – С. 47–57.

Карчевский Евгений Михайлович
доктор физико-математических наук, профессор, кафедра прикладной математики, Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: Alexander_ksu@mail.ru

Karchevsky Evgeny Mikhaylovich
Doctor of physical and mathematical sciences, professor, sub-department of applied mathematics, Kazan (Volga region) Federal University

Фролов Александр Геннадьевич
аспирант, Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: Alexander_ksu@mail.ru

Frolov Alexander Gennadyevich
Postgraduate student, Kazan (Volga region) Federal University

УДК 517.9

Карчевский, Е. М.

Собственные волны слабонаправляющего волновода в полупространстве / Е. М. Карчевский, А. Г. Фролов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2012. – № 1 (21). – С. 22–30.