Казанский (Приволжский) федеральный университет

М.С. МАЛАКАЕВ, Л.Р. СЕКАЕВА, О.Н. ТЮЛЕНЕВА

ОСНОВЫ РАБОТЫ С СИСТЕМОЙ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ MAXIMA

Учебно-методическое пособие

Часть 2

Казань

2013

УДК 510

Печатается по решению учебно-методической комиссии ФГАОУВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского
Протокол № 6 от 13 июня 2013 г.

заседания кафедры общей математики
Протокол № 9 от 30 мая 2013 г.

Авторы-составители:

ст. преп. Михаил Степанович Малакаев,
канд. физ.- мат. наук, доц. Лилия Раилевна Секаева,
канд. физ.- мат. наук, доц. Ольга Николаевна Тюленева

Научный редактор, рецензент

Доктор физ.- мат. наук, доц. Елена Александровна Широкова

Рецензент

Доктор физ.- мат. наук, проф. Николай Георгиевич Гурьянов

Основы работы с системой компьютерной алгебры Maxima: Учебно-методическое пособие / М.С. Малакаев, Л.Р. Секаева, О.Н. Тюленева. Казань: Казанский университет, 2013. – 61 с.

Данное пособие предназначено для студентов Института геологии и нефтегазовых технологий, содержит описание основных приемов работы с компьютерной программой *Maxima* для решения задач математического анализа.

СОДЕРЖАНИЕ

§1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ.

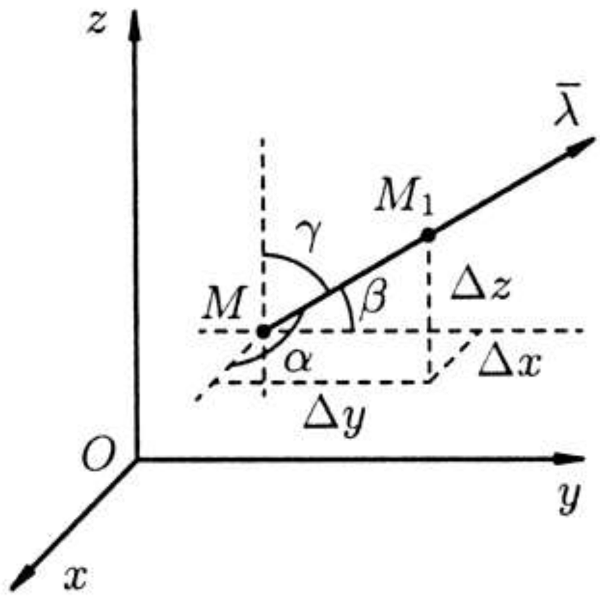
ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ

Возьмем в пространстве, где задано поле $U = U(x; y; z)$, некоторую точку M и найдем скорость изменения функции U при движении точки M в произвольном направлении $\vec{\lambda}$. Пусть вектор $\vec{\lambda}$ имеет начало в точке M и направляющие косинусы $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$.

Приращение функции U, возникающее при переходе от точки M к некоторой точке M_1 в направлении вектора $\vec{\lambda}$ определяется как

$$\Delta U = U(M_1) - U(M),$$

или $\Delta U = U(x + \Delta x; y + \Delta y; z + \Delta z) - U(x; y; z)$.



Производной скалярного поля $U = U(x; y; z)$ **по направлению** $\vec{\lambda}$, заданному вектором $\vec{\lambda} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\,\vec{j} + \Delta z\vec{k}$, вычисляется по формуле

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma, \qquad (1)$$

где

$$\cos\alpha = \frac{\Delta x}{\Delta\lambda},\ \cos\beta = \frac{\Delta y}{\Delta\lambda},\ \cos\gamma = \frac{\Delta z}{\Delta\lambda},$$

$$\Delta\lambda = |M M_1| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}\,.$$

В случае плоского поля $\cos\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$, $\cos\gamma = 0$ и

$$\frac{\partial U}{\partial\lambda} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\sin\alpha\,.$$

Пример. Найти производную плоского скалярного поля $U(M) = 5x^2 - 2y^2$ в точке $M(2;5;0)$ по направлению к точке $N(-2;2;0)$.

Решение. Данное направление определяется вектором

$$\overrightarrow{MN} = (-4;-3;0),$$

поэтому $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, $\cos\beta = -\frac{3}{5}$, $\cos\gamma = 0$.

Зададим данную функцию и точку M:

```
(%i1) U:5*x^2-2*y^2;
(%o1) 5 x^2 -2 y^2

(%i2) M: [x=2, y=5, z=0];
(%o2) [x=2 ,y=5 ,z=0]
```

Частные производные функции в точке M имеют значения:

```
(%i3) diff(U,x);
(%o3) 10 x

(%i4) at(%o3, M);
(%o4) 20

(%i5) diff(U,y);
(%o5) -4 y
```

```
(%i6) at(%o5, M);
(%o6) -20
```

```
(%i7) diff(U,z);
(%o7) 0
```

По формуле (1) получаем

```
(%i8) %o4*(-4/5)+%o6*(-3/5);
(%o8) -4
```

Ответ: $\dfrac{\partial U}{\partial \lambda} = -4$.

ГРАДИЕНТ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

Можно заметить, что правая часть равенства (1) представляет собой скалярное произведение единичного вектора $\vec{e} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$ и некоторого вектора $\vec{g} = \left(\dfrac{\partial U}{\partial x}; \dfrac{\partial U}{\partial y}; \dfrac{\partial U}{\partial z}\right)$.

Вектор, координатами которого являются значения частных производных функции $U = U(x; y; z)$ в точке $M(x; y; z)$, называют градиентом функции и обозначают $\mathrm{grad}\,U$, т.е. $\mathrm{grad}\,U = \left(\dfrac{\partial U}{\partial x}; \dfrac{\partial U}{\partial y}; \dfrac{\partial U}{\partial z}\right)$, или

$$\mathrm{grad}\,U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}. \qquad (2)$$

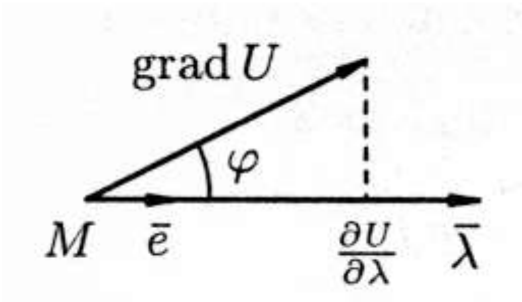
Отметим, что $\mathrm{grad}\,U$ есть векторная величина. Говорят: скалярное поле U порождает векторное поле градиента U. Теперь равенство (1) можно записать в виде

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \vec{e} \cdot \mathrm{grad}\,U,$$

или

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \left|\mathrm{grad}\,U\right| \cdot \cos\varphi, \tag{3}$$

где φ – угол между вектором $\mathrm{grad}\,U$ и направлением $\vec{\lambda}$.



Из формулы (3) сразу следует, что производная по направлению достигает наибольшего значения, когда $\cos\varphi = 1$, т.е. при $\varphi = 0$. Таким образом, направление градиента совпадает с направлением $\vec{\lambda}$, вдоль которого функция (поле) меняется быстрее всего, т.е. *градиент функции указывает направление наибыстрейшего возрастания функции*. Наибольшая скорость изменения функции U в точке M равна

$$\left|\mathrm{grad}\,U\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}. \tag{4}$$

В этом состоит физический смысл градиента.

Пример. Найти величину и направление градиента скалярного поля $U = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ в точке $M(2;1;-1)$.

Решение.

Зададим данную функцию и точку M:

```
(%i1) U:x^3+y^3+z^3-3*x*y*z;
(%o1) z^3-3 x y z+y^3+x^3

(%i2) M: [x=2, y=1, z=-1];
(%o2) [x=2,y=1,z=-1]
```

Найдем ее частные производные

```
(%i3) diff(U,x);
      diff(U,y);
      diff(U,z);
```

(%o3) $3\,x^2-3\,y\,z$

(%o4) $3\,y^2-3\,x\,z$

(%o5) $3\,z^2-3\,x\,y$

и их значения в точке M:

```
(%i6) at(%o3, M);
      at(%o4, M);
      at(%o5, M);
(%o6) 15
(%o7) 9
(%o8) -3
```

Следовательно, по формуле (2), имеем

$$\operatorname{grad} U(M) = 15\vec{i} + 9\vec{j} - 3\vec{k}.$$

Величина градиента определяется формулой (4):

```
(%i9) sqrt(%o6^2+%o7^2+%o8^2);
```

(%o9) $3\sqrt{35}$

Ответ: $\left|\operatorname{grad} U(M)\right| = 3\sqrt{35}.$

ДИВЕРГЕНЦИЯ ПОЛЯ

Дивергенцией (или расходимостью) **векторного поля**

$$\vec{a}(M) = P(x;y;z)\vec{i} + Q(x;y;z)\vec{j} + R(x;y;z)\vec{k}$$

в точке M называется скаляр вида $\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}$ и обозначается символом $\operatorname{div}\vec{a}(M)$, т.е.

$$\operatorname{div}\vec{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \qquad (5)$$

Пример. Найти дивергенцию векторного поля

$$\vec{a}=(2x^2y-3xz^3+5x^3yz)\vec{i}+(4y^3x+xyz+8z^2)\vec{j}+(6z^3xy^2-7z^2x+9zy)\vec{k}$$

в точке $M(1;1;1)$.

Решение. По условию

$$P=2x^2y-3xz^3+5x^3yz,\ Q=4y^3x+xyz+8z^2,\ R=6z^3xy^2-7z^2x+9zy.$$

Зададим P, Q, R, точку M и найдем частные производные в программе *Maxima*:

```
(%i1) P: 2*x^2*y-3*x*z^3+5*x^3*y*z;
      Q: 4*x*y^3+x*y*z+8*z^2;
      R: 6*z^3*x*y^2-7*x*z^2+9*y*z;
      M: [x=1, y=1, z=1];
(%o1) -3 x z^3+5 x^3 y z+2 x^2 y
(%o2) 8 z^2+x y z+4 x y^3
(%o3) 6 x y^2 z^3-7 x z^2+9 y z
(%o4) [x=1,y=1,z=1]
```

```
(%i5) diff(P,x);
      diff(Q,y);
      diff(R,z);
(%o5) -3 z^3+15 x^2 y z+4 x y
(%o6) x z+12 x y^2
(%o7) 18 x y^2 z^2-14 x z+9
```

Используя формулу (5) получим значение дивергенции в данной точке:

```
(%i8) at(%o5+%o6+%o7, M);
(%o8) 42
```

Ответ: $\operatorname{div}\vec{a}(M)=-42.$

РОТОР ПОЛЯ

Ротором (или вихрем) **векторного поля**

$$\vec{a}=P(x;y;z)\vec{i}+Q(x;y;z)\vec{j}+R(x;y;z)\vec{k}$$

называется вектор, обозначаемый $\operatorname{rot}\vec{a}(M)$ и определяемый формулой

$$\operatorname{rot}\vec{a}(M)=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}. \qquad (6)$$

Эту формулу можно записать с помощью символического определителя в виде, удобном для запоминания:

$$\operatorname{rot}\vec{a}(M)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}.$$

Пример. Найти ротор векторного поля $\vec{a}=y^2z^2\vec{i}+x^2z^2\vec{j}+x^2y^2\vec{k}$ в точке $N(1;2;3)$.

Решение. Поскольку $P=y^2z^2$, $Q=x^2z^2$, $R=x^2y^2$, то

```
(%i1) P: y^2*z^2;
      diff(P,x,1);
      diff(P,y,1);
      diff(P,z,1);
(%o1) y^2 z^2
 (%o2) 0
 (%o3) 2 y z^2
 (%o4) 2 y^2 z

(%i5) Q: x^2*z^2;
      diff(Q,x,1);
      diff(Q,y,1);
      diff(Q,z,1);
(%o5) x^2 z^2
 (%o6) 2 x z^2
 (%o7) 0
 (%o8) 2 x^2 z
```

```
(%i9) R: x^2*y^2;
      diff(R,x,1);
      diff(R,y,1);
      diff(R,z,1);
```

(%o9) $x^2\,y^2$

(%o10) $2\,x\,y^2$

(%o11) $2\,x^2\,y$

(%o12) 0

Далее,

```
(%i13) diff(R,y,1)-diff(Q,z,1);
       diff(P,z,1)-diff(R,x,1);
       diff(Q,x,1)-diff(P,y,1);
```

(%o13) $2\,x^2\,y-2\,x^2\,z$

(%o14) $2\,y^2\,z-2\,x\,y^2$

(%o15) $2\,x\,z^2-2\,y\,z^2$

поэтому в соответствии с формулой (6) находим общее выражение для ротора данного векторного поля в произвольной точке $M(x;y;z)$:

$$\operatorname{rot}\vec{a}=2x^2(y-z)\vec{i}+2y^2(z-x)\vec{j}+2z^2(x-y)\vec{k}\,.$$

Так как

```
(%i16) N: [x=1, y=2, z=3];
       at((%o13), N);
       at((%o14), N);
       at((%o15), N);
```

(%o16) $[x=1\,,y=2\,,z=3]$

(%o17) -2

(%o18) 16

(%o19) -18

то в точке N имеем

$$\operatorname{rot}\vec{a}=-2\vec{i}+16\vec{j}-18\vec{k}\,.$$

§1. ИНТЕГРИРОВАНИЕ.

ТАБЛИЦА НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ.

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ.

1. $\int 0\cdot dx = C$	$(C)' = 0$
2. $\int 1\cdot dx = \int dx = x + C$	$(x+C)' = 1$
3. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$	$\left(\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C\right)' = x^n \quad (n \neq -1)$
4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	$(\ln\lvert x\rvert + C)' = \dfrac{1}{x}$
5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$	$\left(\dfrac{a^x}{\ln a} + C\right)' = a^x$
6. $\int e^x dx = e^x + C$	$(e^x + C)' = e^x$
7. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$	$(-\cos x + C)' = \sin x$
8. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$	$(\sin x)' = \cos x$
9. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$	$(\operatorname{tg} x + C)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
10. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$	$(-\operatorname{ctg} x + C)' = \dfrac{1}{\sin^2 x}$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C =$ $= -\arccos x + C_1$	$(\arcsin x + C)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-\arccos x + C_1)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C =$ $= -\operatorname{arcctg} x + C_1$	$(\operatorname{arctg} x + C)' = \frac{1}{1+x^2}$ $(\operatorname{arcctg} x + C_1)' = -\frac{1}{1+x^2}$
13. а) $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left\|\frac{1+x}{1-x}\right\| + C$ б) $\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left\|\frac{x-1}{x+1}\right\| + C$	$\left(\frac{1}{2}\ln\left\|\frac{1+x}{1-x}\right\| + C\right)' = \frac{1}{1-x^2}$ $\left(\frac{1}{2}\ln\left\|\frac{x-1}{x+1}\right\| + C\right)' = \frac{1}{x^2-1}$
14. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0).$	$\left(\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C\right)' = \frac{1}{x^2+a^2} \quad (a \neq 0).$
15. а) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + C$ $(a \neq 0)$ б) $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{a+x}{a-x}\right\| + C$ $(a \neq 0)$	$\left(\frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + C\right)' = \frac{1}{x^2-a^2}$ $(a \neq 0)$ б) $\left(\frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{a+x}{a-x}\right\| + C\right)' = \frac{1}{a^2-x^2}$ $(a \neq 0)$
16. $\int \frac{x\,dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\ln\left\|x^2+a^2\right\| + C$ $\int \frac{x\,dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2}\ln\left\|x^2-a^2\right\| + C$	$\left(\frac{1}{2}\ln\left\|x^2+a^2\right\| + C\right)' = \frac{x}{x^2+a^2}$ $\left(\frac{1}{2}\ln\left\|x^2-a^2\right\| + C\right)' = \frac{x}{x^2-a^2}$

17. $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$ $(a>0)$	$\left(\arcsin\frac{x}{a}+C\right)'=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ $(a>0)$
18. а) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}=\ln\left\|x+\sqrt{x^2+k}\right\|+C$ $(k\neq0)$ б) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-k}}=\ln\left\|x+\sqrt{x^2-k}\right\|+C$ $(k\neq0)$	$\left(\ln\left\|x+\sqrt{x^2+k}\right\|+C\right)'=\frac{1}{\sqrt{x^2+k}}$ $(k\neq0)$ $\left(\ln\left\|x+\sqrt{x^2-k}\right\|+C\right)'=\frac{1}{\sqrt{x^2-k}}$ $(k\neq0)$

Вычисление неопределенных интегралов выполняется функцией *integrate(выражение, переменная интегрирования).* Далее нажать одновременно клавиши **Shift** и **Enter**. Ответ компьютер выдает в следующей после задания строке, но без произвольной постоянной С. Следует помнить, что некоторые математические функции имеют отличное от привычного выражение, например, **tg** заменен на **tan**, **ctg** – на **cot**, **arctg** – на **atan**. Функция **ln** имеет представление **log**, а логарифмы по основаниям, отличным от числа **e**, не рассматриваются, либо должны быть приведены к основанию **e**. Замечательные числа, такие как то же **e,** записываются со значком % перед ними. То есть, **e** записывается как **%e,** π – как **%pi**. Все функции записываются с маленькой буквы и переменные в функциях вводятся в скобках. Например, $\sin x$ запишется как **sin(x)**. Знак умножения вводится знаком *****. Степень вводится при помощи значка ^.

```
(%i1) integrate(3*x^2+1/x,x);
(%o1) log(x)+x^3
```

Командой (%i1) находится интеграл от функции $y=3x^2+\frac{1}{x}$ и в строке (%o1) записан ответ $lnx+x^3$.

Пример. Найти $\int x^2 * \sin(ax)\, dx$ и результат проверить дифференцированием

```
(%i1) f:x^2*sin(a*x);
(%o1) x^2 sin(a x)
(%i2) integrate(f,x);
(%o2) (2 a x sin(a x)+(2-a^2 x^2) cos(a x))/a^3
(%i3) factor(diff(%o2,x));
(%o3) x^2 sin(a x)
```

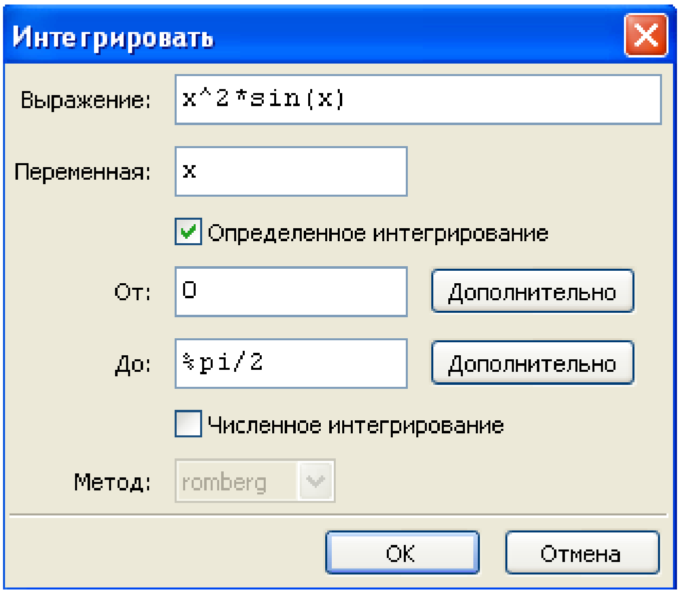
В приведенном решении команда (%i1) присваивает переменной f значение под интегральной функции, команда (%i2) вычисляет интеграл от f по переменной x и команда (%i3) производит два действия внутренняя функция *diff* вычисляет производную от полученного интеграла (%o2), а внешняя *factor* упрощает найденное выражение производной. Полученный результат (%o3) совпадает со значением f, что подтверждает правильность вычислений.

Определенное интегрирование проводится той же функцией *integrate(выражение, переменная интегрирования, a, b)*, что и неопределенное, только после переменной интегрирования указываются через запятую пределы интегрирования верхний, затем нижний.

```
(%i1) integrate(x^2*sin(x),x,0,%pi/2);
(%o1) π-2
```

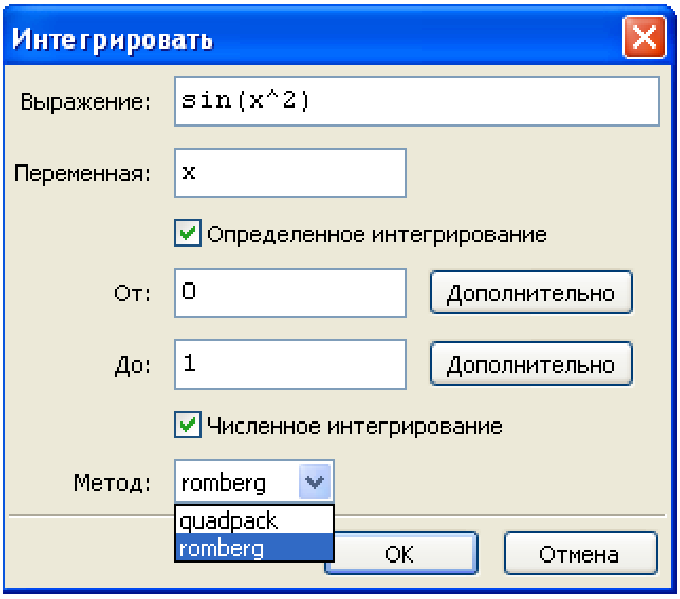
В приведенном примере командой (%i1) найдено значение интеграла $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx = \pi - 2$.

Возможен другой вариант ввода команды интегрирования. Используя меню, щелкнуть по кнопкам *«Анализ/Integrate»*. Появится окно, которое нужно заполнить и по команде «ОК» получить результат: $\pi - 2$.




```
(%i1) integrate(x^2*sin(x), x, 0, %pi/2);
(%o1) π−2
```

В случаях, когда интеграл не выражается через элементарные функции, используются методы численного интегрирования. Для этого в том же окне нужно установить флажок в окошечке численное интегрирование и выбрать один из методов *«romberg»* или *«quadpack»* (предпочтительнее первый). В приведенном ниже примере вычислено значение интеграла $\int_0^1 \sin x^2 dx$.




```
(%i1) romberg(sin(x^2), x, 0, 1);
(%o1) 0.31026884083166
```

§3. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Несобственные интегралы бывают двух типов (классов). Интегралы с бесконечными пределами и интегралы от неограниченных функций.

ИНТЕГРАЛЫ С БЕСКОНЕЧНЫМИ ПРЕДЕЛАМИ

Таких интегралов три, и вводятся они следующим образом.

I. $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$. Этот интеграл называется интегралом с бесконечным верхним пределом. Его называют сходящимся, если предел существует и имеет конечное значение. В противном случае он – расходящийся.

II. $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{a\to\infty}\int\limits_{-a}^{b} f(x)dx$. Этот интеграл с бесконечным нижним пределом является сходящийся, если предел существует и конечен, и расходящийся в противном случае.

III. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx$. Он сходится, если сходится каждый из интегралов, стоящих в правой части. Если хотя бы один из них расходящийся, расходится интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.

Рассмотрим интеграл $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}$ при различных показателях степени p.

Пусть $p=1$, тогда $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_1^b\frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to\infty}\left[\ln b - \ln 1\right] = \infty$. Интеграл расходящийся.

Пусть $p\neq 1$, тогда

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty}\int\limits_1^b x^{-p}dx = \lim_{b\to\infty}\left.\frac{x^{1-p}}{1-p}\right|_1^b = \frac{1}{(1-p)}\lim_{b\to\infty}\left[b^{1-p}-1\right] =$$

$$= \frac{1}{(1-p)}\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{b^{p-1}}-1\right].$$

Если $p>1$, то при $b\to\infty$ дробь $\dfrac{1}{b^{p-1}}$ стремится к нулю и интеграл равен $\dfrac{1}{p-1}$. Если $p<1$, то выражение b^{1-p} стремится к ∞, и интеграл – расходящийся. Итак,

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}=\begin{cases}\dfrac{1}{p-1}, & \text{если } p>1,\\ \text{расходится при } p\le 1.\end{cases}$$

Примеры. Вычислить несобственные интегралы:

1) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2+1}.$

```
(%i1) integrate(1/(x^2+1), x, 1, inf);
(%o1) %pi/4
```

Ответ: $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2+1}=\frac{\pi}{4}.$

2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{2}e^x dx.$

```
(%i2) integrate(%e^x, x, minf, 2);
(%o2) %e^2
```

Ответ: $\displaystyle\int_{-\infty}^{2}e^x dx=e^2.$

3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}.$

```
(%i3) integrate(1/(x^2+2*x+2), x, minf, inf);
(%o3) %pi
```

Ответ: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}=\pi.$

ИНТЕГРАЛЫ ОТ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Интегралов от неограниченных функций также три.

I. $\int_a^b f(x)dx$, причем $\lim\limits_{x\to b} f(x)=\pm\infty$, то есть подынтегральная функция имеет особенность на верхнем пределе. Этот интеграл вводится следующим образом $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$. Если предел конечен, то интеграл называется сходящимся, его значение равно вычисленному пределу. Если предел не существует или бесконечен, интеграл расходящийся.

II. $\int\limits_a^b f(x)dx$, причем $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$. Этот интеграл с особенностью на нижнем пределе. Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$. Интеграл сходящийся и равен значению предела, если этот предел конечен, и расходящийся, если предел не существует или равен $\pm\infty$.

III. $\int\limits_a^b f(x)dx$, причем $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \pm\infty$ $(a < c < b)$, то есть особая точка находится внутри отрезка интегрирования. Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$, и интеграл считается сходящимся, если сходится каждый из интегралов в правой части равенства по отдельности. В противном случае он – расходящийся.

Примеры. Вычислить:

1) $\int\limits_0^2 \frac{2xdx}{x^2-4}$

Если сразу вычислить данный интеграл, то ответ мы не получим

```
(%i1) integrate(2*x/(x^2-4), x, 0, 2);
```

(%o1) $2\int_0^2 \frac{x}{x^2-4}dx$

Поэтому поступим следующим образом. Вычислим сначала интеграл,

```
(%i2) integrate(2*x/(x^2-4), x, 0, 2-b);
Is  b-2  positive, negative, or zero?positive;
 Principal Value
```

(%o2) $2\left(\frac{\log(4)}{2} - \frac{\log(b^2-4\,b)}{2}\right)$

а затем предел

```
(%i3) limit(2*(log(4)/2-log(b^2-4*b)/2), b, 0);
(%o3) infinity
```

Получим ответ: интеграл расходящийся.

2) $\int\limits_0^1 \ln x\, dx$

```
(%i4) integrate(log(x), x, 0, 1);
(%o4) -1
```

Ответ: $\int\limits_0^1 \ln x\, dx = -1.$

3) $\int\limits_{-1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

```
(%i3) integrate(1/x^(1/3), x, -1, 8);
(%o3) 9/2
```

Ответ: $\int\limits_{-1}^{8} \frac{d\,x}{\sqrt[3]{x}} = \frac{9}{2}.$

§3. ПРИЛОЖЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА. ПЛОЩАДЬ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

При решении подобных задач следует:

1. Изобразить кривые, которые задают рассматриваемый объект.
2. Найти точки пересечения этих кривых.
3. При необходимости, разбить фигуру на области.
4. Вычислить определенные интегралы.
5. Записать ответ.

Примеры:

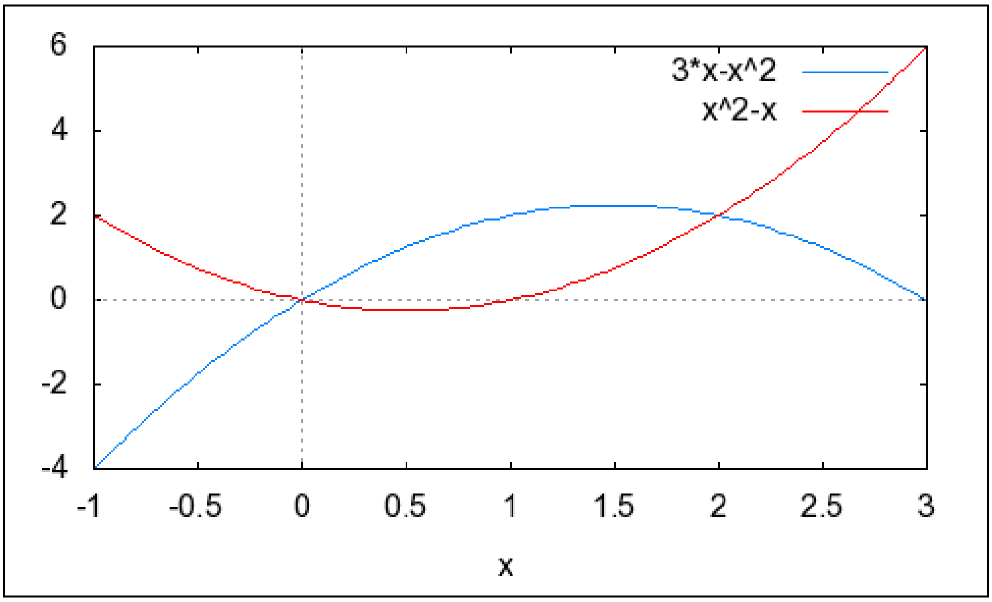
1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной следующими линиями

$$y = 3x - x^2 \text{ и } y = x^2 - x.$$

Решение:

Зададим функции и построим их графики

```
-->  ***********площадь криволинейной трапеции***************
(%i1) f(x):=3*x-x^2;
(%o1) f(x):=3 x-x^2
(%i2) g(x):=x^2-x;
(%o2) g(x):=x^2-x
(%i3) wxplot2d([f(x),g(x)], [x,-1,3])$
(%t3)
```



Из графика видно, что функции пересекаются в двух точках, и область является простой, т.е. ее не нужно делить на подобласти.

Найдем точки пересечения кривых, для этого решим уравнение:

```
(%i4) solve(f(x)=g(x),x);
(%o4) [x=0,x=2]
```

Теперь составим и вычислим определенный интеграл, результат которого и есть площадь данной фигуры:

```
(%i5) integrate(f(x)-g(x), x, 0, 2);
(%o5) 8/3
```

Ответ: Площадь искомой фигуры равна 8/3.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной следующими линиями

$$y = \frac{4}{x}, \mathrm{y} = 0,\ y = 4,\ x = 0,\ x = 4.$$

Решение:

Зададим функции $y = \frac{4}{x}$, $y = 0$, $y = 4$,

```
(%i1) f1(x):=4/x; f2(x):=0; f3(x):=4;
(%o1) f1(x):=4/x
(%o2) f2(x):=0
(%o3) f3(x):=4
```

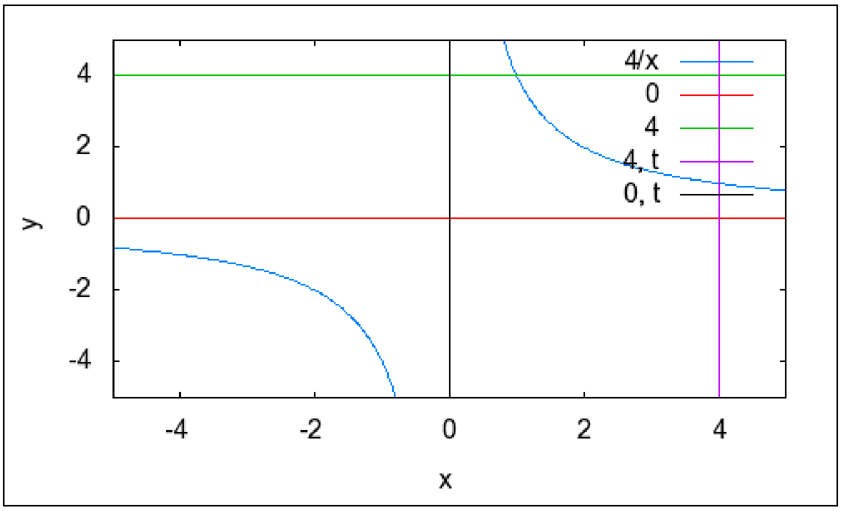
Вертикальные прямые $x = 4$ и $x = 0$ в Maxima можно построить только, представив их уравнения в параметрическом виде: $\begin{cases} x = 4, \\ y = t \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 0, \\ y = t. \end{cases}$

```
(%i4) r1(t):=4;  r2(t):=t;
(%o4) r1(t):=4
(%o5) r2(t):=t
(%i6) h1(t):=0;  h2(t):=t;
(%o6) h1(t):=0
(%o7) h2(t):=t
```

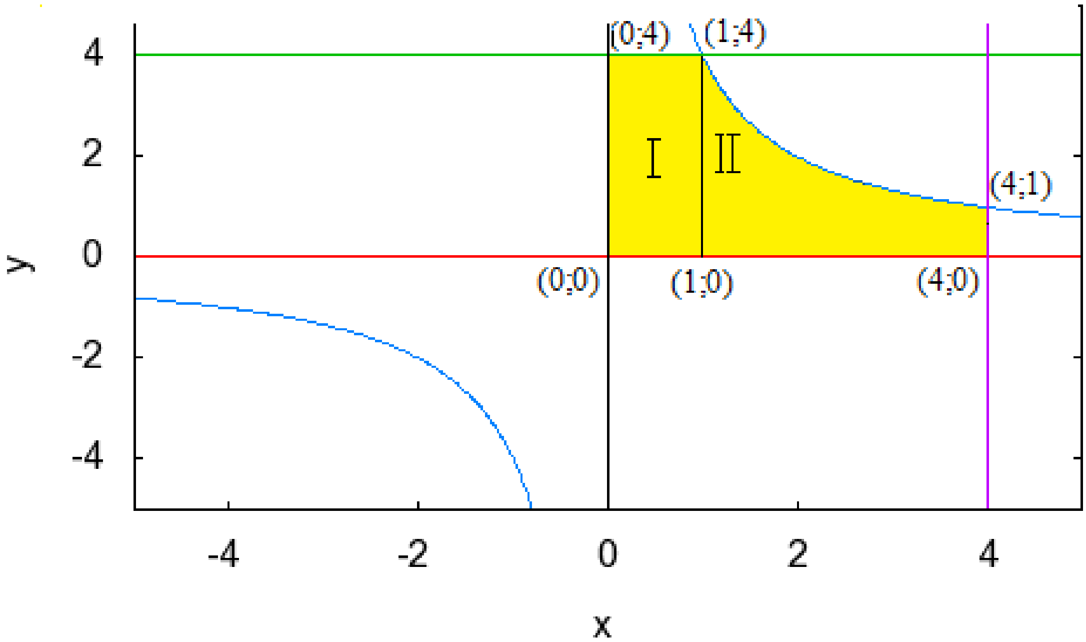
Теперь построим графики всех этих функций:

```
(%i8) wxplot2d([f1(x),f2(x),f3(x),
      ['parametric, r1(t), r2(t), [t, -6, 6], [nticks, 300]],
      ['parametric, h1(t), h2(t), [t, -6, 6], [nticks, 300]]],
       [x,-5,5],[y,-5,5])$
plot2d: expression evaluates to non-numeric value somewhere in plotting range.
  plot2d: some values were clipped.
```

(%t8)



Чтобы вычислить площадь интересующей нас фигуры, необходимо поделить область на две части:



Первая фигура является прямоугольником, ее площадь равна $S_1 = 4 \cdot 1 = 4$.

Площадь второй фигуры вычисляем с помощью определенного интеграла:

```
(%i9) integrate(f1(x), x, 1, 4);
(%o9) 4 log(4)
```

Ответ: Площадь искомой фигуры равна (4+4 $ln4$).

ДЛИНА ДУГИ

Длина дуги кривой $y = f(x),\ x \in [a,b]$ вычисляется по формуле:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx.$$

Если уравнение кривой задано в параметрическом виде

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ t \in [t_0, T],$$

то для вычисления длины этой кривой применяют формулу:

$$S = \int_{t_0}^{T} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt.$$

Для решения подобных задач в Maxima следует выполнить следующие действия:

1. Построить кривую.
2. Вычислить производные функции.
3. В зависимости от способа задания кривой, составить и вычислить определенный интеграл.
4. Записать ответ.

Примеры:

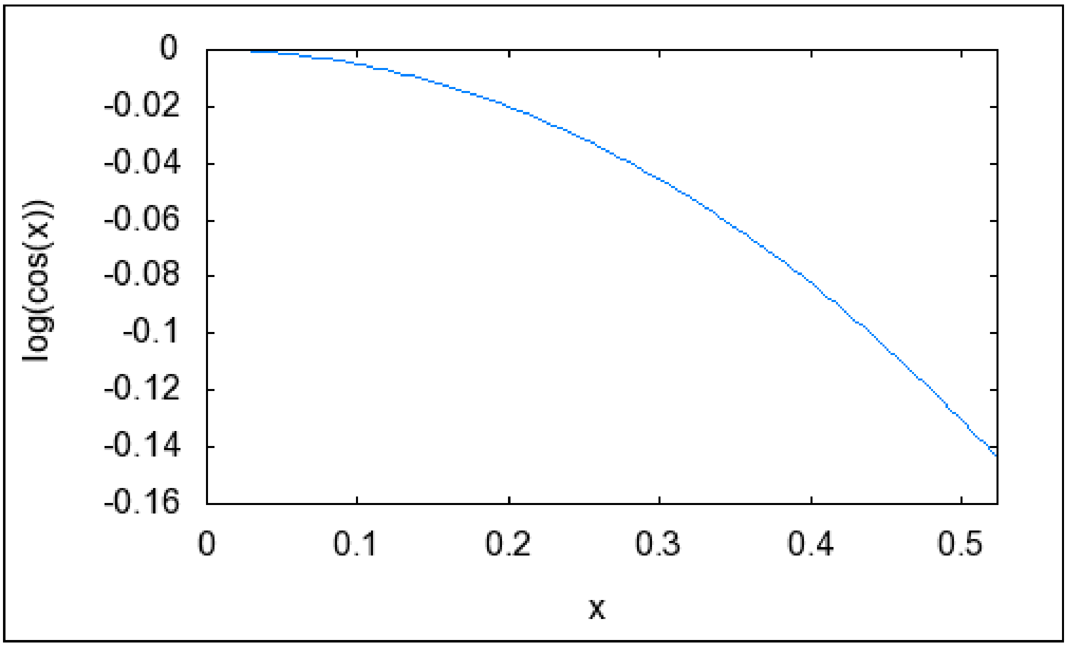
1. Вычислить длину дуги кривой $y = \ln(\cos x)$, отсеченной прямыми $x = 0$, $x = \frac{\pi}{6}$.

Решение:

Зададим функцию и построим ее график

```
 --> ******длина дуги******
(%i1) f(x):=log(cos(x));
(%o1) f(x):=log(cos(x))
(%i2) wxplot2d([f(x)], [x,0,%pi/6])$
```

(%t2)



Вычислим первую производную от данной функции:

```
(%i2) h(x):=diff(f(x),x,1);
      h(x);
(%o2) h(x):=diff(f(x),x,1)
```

$$(\%o3)\quad -\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Теперь вычислим определенный интеграл:

```
(%i4) q(x):=sqrt(1+h(x)^2);
      integrate(q(x), x, 0, %pi/6);
```

$$(\%o4)\quad q(x):=\sqrt{1+h(x)^2}$$

```
Is  cos(x)  positive or negative?
```

При вычислении интеграла на мониторе появляется вопрос о знаке функции *cos x*. Интегрирование мы проводим на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$, а здесь *cos x>0*, значит, набираем positive:

```
Is  cos(x)  positive or negative?positive;
```

$$(\%o5)\quad \operatorname{asinh}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

В ответе мы получили функцию $asinh\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ или $arsh\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, которая называет ареа-синус. Это обратная функция к гиперболическому синусу.

Ответ: длина дуги кривой $y = \ln(\cos x)$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{6}$ равна $arsh\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Математическая справка:

ареа-синус $arshx = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$,

ареа-косинус $archx = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$,

ареа-тангенс $arthx = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$,

ареа-котангенс $arcthx = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$,

синус гиперболический $shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$,

котангенс гиперболический $cthx = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.

косинус гиперболический $chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$,

тангенс гиперболический $thx = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$,

2. Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x = 2\,cos^3 t, \\ y = 2\,sin^3 t \end{cases}$ при $t = 0,\ \frac{\pi}{2}$.

Решение:

Зададим функцию и построим ее график:

```
(%i1) x(t):=2*cos(t)^3;
```

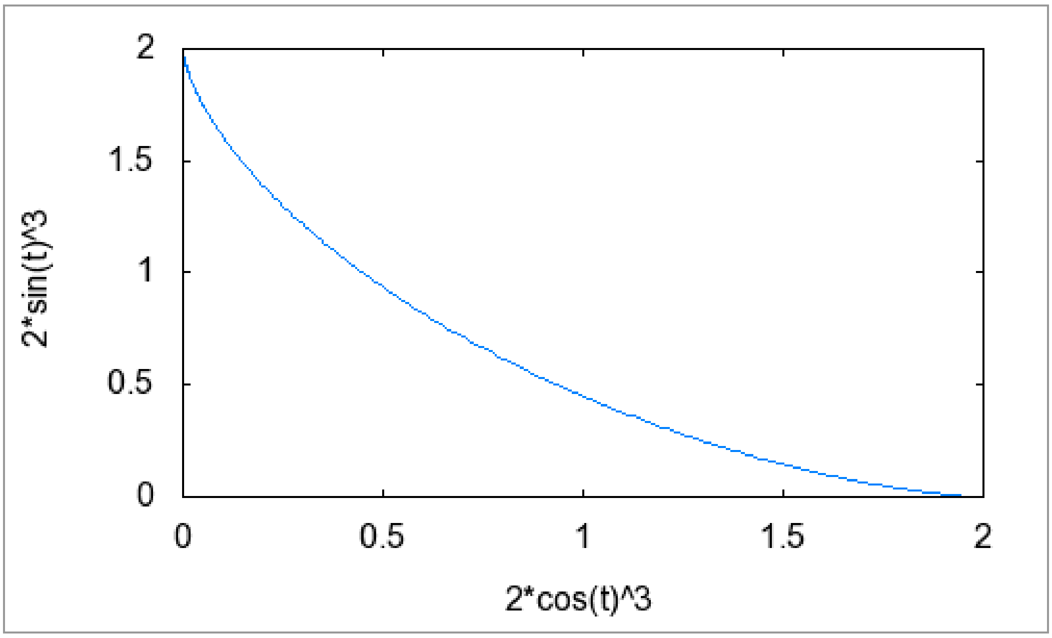
(%o1) $x(t):=2\cos(t)^3$

```
(%i2) y(t):=2*(sin(t))^3;
```

(%o2) $y(t):=2\sin(t)^3$

```
--> wxplot2d([['parametric, x(t), y(t), [t, 0, %pi/2.0],
    [nticks, 300]]], [x,0,2])$
```

(%t3)



Вычислим производные функций:

```
(%i4) g(t):=diff(x(t),t,1);g(t);
```

(%o4) $g(t):=\mathrm{diff}(x(t),t,1)$

(%o5) $-6\cos(t)^2\sin(t)$

```
(%i6) h(t):=diff(y(t),t,1);h(t);
```

(%o6) $h(t):=\mathrm{diff}(y(t),t,1)$

(%o7) $6\cos(t)\sin(t)^2$

Теперь вычислим определенный интеграл, который и является решением нашей задачи:

```
(%i8) r(t):=sqrt(g(t)^2+h(t)^2);
```
(%o8) $r(t):=\sqrt{g(t)^2+h(t)^2}$
```
(%i9) integrate(r(t), t, %pi/4,0);
```
(%o9) $\frac{3}{2}$

Ответ: длина дуги кривой равна 3/2.

ОБЪЕМ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

Если криволинейная трапеция, ограниченная кривой $y = f(x)$ и прямыми $y = 0,\ x = a,\ x = b$, вращается вокруг оси Ox, то объем тела вращения вычисляется по формуле

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

Если же вращается криволинейная трапеция, ограниченная кривой $x = \varphi(y)$ и прямыми $x = 0,\ y = c,\ y = d$, вокруг оси Oy, то объем тела вращения вычисляется по формуле

$$V_y = \pi \int_c^d x^2 dx.$$

Для решения подобных задач в Maxima следует выполнить следующие действия:

1. Построить криволинейную трапецию.
2. Найти точки пересечения кривых.
3. Составить и вычислить определенный интеграл.
4. Записать ответ.

Примеры:

Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{1}{x^2+1}$, $y = 0,\ x = 0,\ \ x = 1$ вокруг оси а) Ox, в) Oy.

Решение:

Зададим функции и построим их графики

```
(%i1) y1(x):=1/(1+x^2);y2(x):=0;
```

(%o1) $y1(x):=\frac{1}{1+x^2}$

(%o2) $y2(x):=0$

```
(%i3) g1(t):=0; g2(t):=t;
```

(%o3) $g1(t):=0$

(%o4) $g2(t):=t$

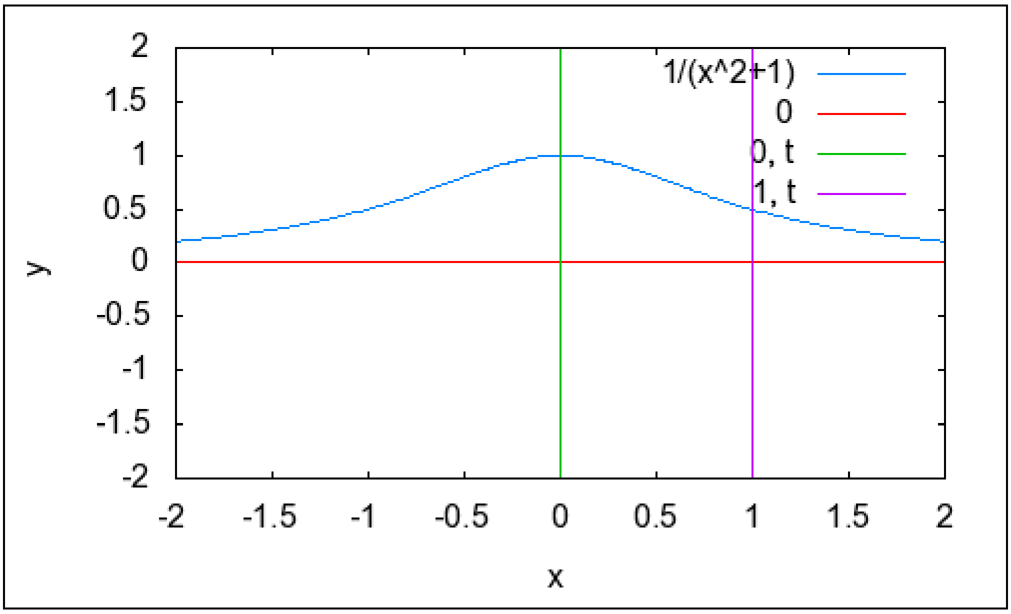
```
(%i5) h1(t):=1; h2(t):=t;
```

(%o5) $h1(t):=1$

(%o6) $h2(t):=t$

```
(%i7) wxplot2d([y1(x),y2(x),
      ['parametric, g1(t), g2(t), [t, -6, 6], [nticks, 300]],
      ['parametric, h1(t), h2(t), [t, -6, 6], [nticks, 300]]],
      [x,-2,2], [y,-2,2])$
```

(%t7)

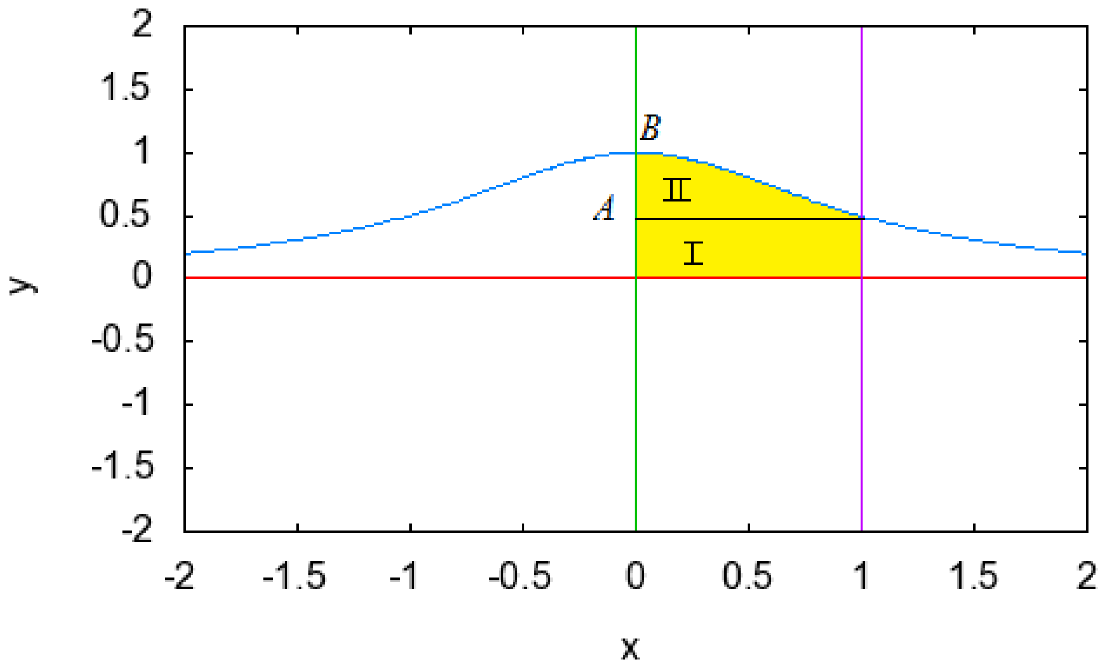


а) Если трапеция вращается вокруг оси *Ox*, тогда вычисляем интеграл:

```
(%i9) integrate(%pi*y1(x)^2, x, 0, 1);
```

(%o9) $\frac{\pi(\pi+2)}{8}$

б) Если трапеция вращается вокруг оси *Oy*, тогда область нужно разделить на две подобласти:



Найдем ординаты точек A и B:

```
(%i10)  y1(0);y1(1);
(%o10) 1
```

(%o11) $\frac{1}{2}$

Вычислим объем тела вращения:

```
(%i12) %pi*(integrate(1 , y, 0, 1/2)+integrate(1/y-1,y,1/2,1));
```

(%o12) $\pi\left(\frac{2\log(2)+1}{2}-\frac{1}{2}\right)$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

Если дуга гладкой кривой $y = f(x)$ $a \le x \le b$, вращается вокруг оси Ox, то площадь поверхности вращения вычисляется по формуле

$$S_x = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}dx.$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями

$$x = x(t),\ y = y(t) \quad (t_1 \le t \le t_2),$$

то

$$S_x = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}dt.$$

Для решения подобных задач в Maxima следует выполнить следующие действия:

1. Построить кривую.
2. Вычислить производные функции.
3. В зависимости от способа задания кривой, составить и вычислить определенный интеграл.
4. Записать ответ.

Пример: Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси *Ox* дуги кривой $y = \sin 2x$ от $x = 0$ до $x = \frac{\pi}{2}$.

Введем функцию и построим график

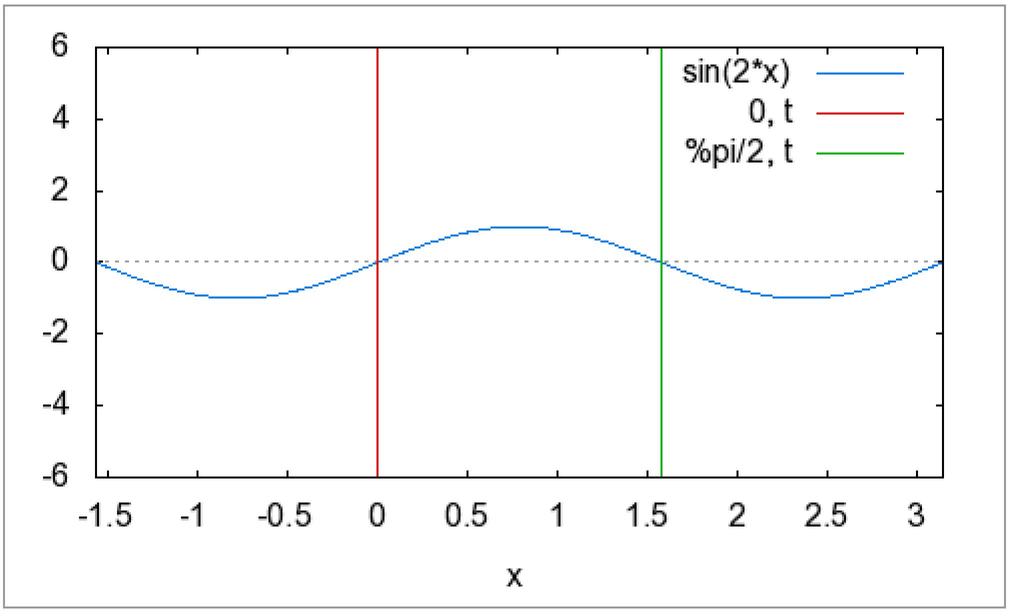
```
(%i1) y(x):=sin(2*x);
(%o1) y(x):=sin(2 x)

(%i2) g1(t):=0; g2(t):=t;
(%o2) g1(t):=0
 (%o3) g2(t):=t

(%i4) h1(t):=%pi/2; h2(t):=t;
(%o4) h1(t):=π/2
 (%o5) h2(t):=t
```

```
--> wxplot2d([y(x),
['parametric, g1(t), g2(t), [t, -6, 6], [nticks, 300]],
['parametric, h1(t), h2(t), [t, -6, 6], [nticks, 300]]],
[x,-%pi/2,%pi])$
```

(%t6)



Находим первую производную

```
(%i7) h(x):=diff(y(x),x,1); h(x);
(%o7) h(x):=diff(y(x),x,1)
(%o8) 2 cos(2 x)
```

Составляем и вычисляем интеграл:

```
(%i9) integrate(y(x)*sqrt(1+h(x)^2), x, 0, %pi/2);
```

(%o9) $\dfrac{\dfrac{\operatorname{asinh}(2)}{2}+\sqrt{5}}{2}$

Ответ: Площадь искомой поверхности вращения равна $\dfrac{\left(\frac{arsh\,2}{2}+\sqrt{5}\right)}{2}$.

§4. ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Для вычисления двойного интеграла $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left[\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right] dx$ с помощью пакета программ *Maxima* следует ввести команду

$$integrate(integrate(f(x,y),y,\varphi_1(x),\varphi_2(x)),x,a,b);$$

здесь $f(x,y)$– непрерывная функция в каждой точке области D, граница которой – непрерывная кривая.

Примеры:

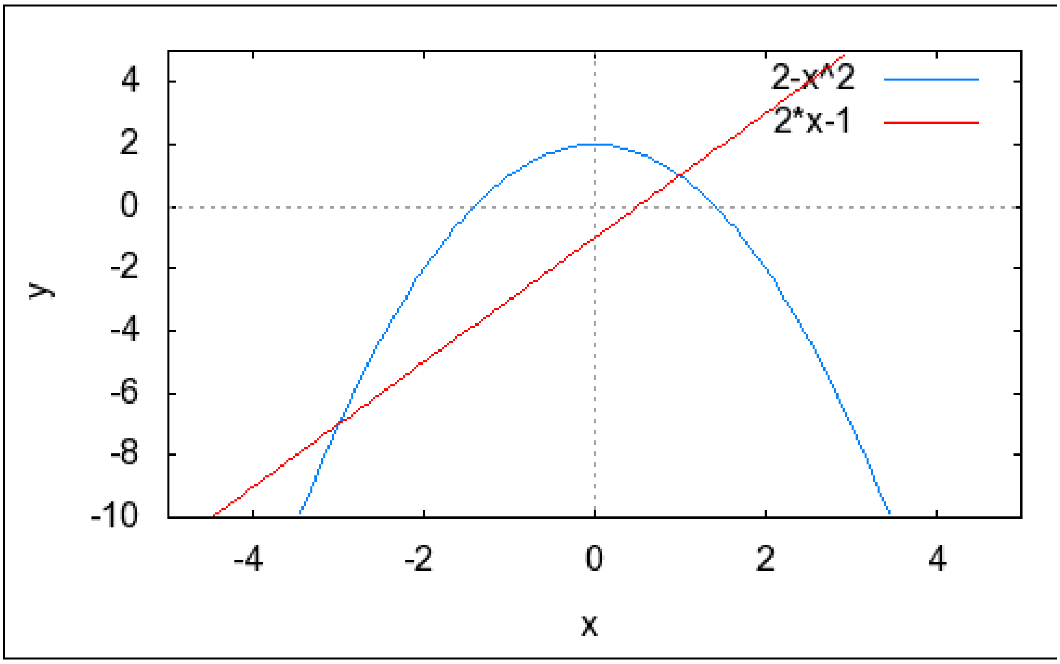
1. Вычислить $\iint\limits_D (x-y)dxdy$,

если область *D* ограниченна линиями $y = 2 - x^2$, $y = 2x - 1$.

Решение: Построим область *D*.

```
(%i1) fi1(x):=2-x^2;  fi2(x):=2*x-1;
(%o1) fi1(x):=2-x^2
(%o2) fi2(x):=2 x-1
(%i3) wxplot2d([fi1(x),fi2(x)], [x,-5,5], [y,-10,5])$
plot2d: some values were clipped.
plot2d: some values were clipped.
```

(%t3)



Найдем координаты точек пересечения, для этого решим систему уравнений:

```
(%i4) solve([y=fi1(x),y=fi2(x)],[x,y]);
(%o4) [[x=1,y=1],[x=-3,y=-7]]
```

От двойного интеграла перейдем к повторным интегралам

$$\iint\limits_D (x-y)dxdy = \int\limits_{-3}^{1} dx \int\limits_{2x-1}^{2-x^2} (x-y)dy$$

или

```
(%i5) integrate(integrate(x-y,y,fi2(x),fi1(x)),x,-3,1);
```

(%o5) $\frac{64}{15}$

Ответ: $\iint\limits_D (x-y)dxdy = \frac{64}{15}$,

где область D ограниченна линиями $y = 2 - x^2$, $y = 2x - 1$.

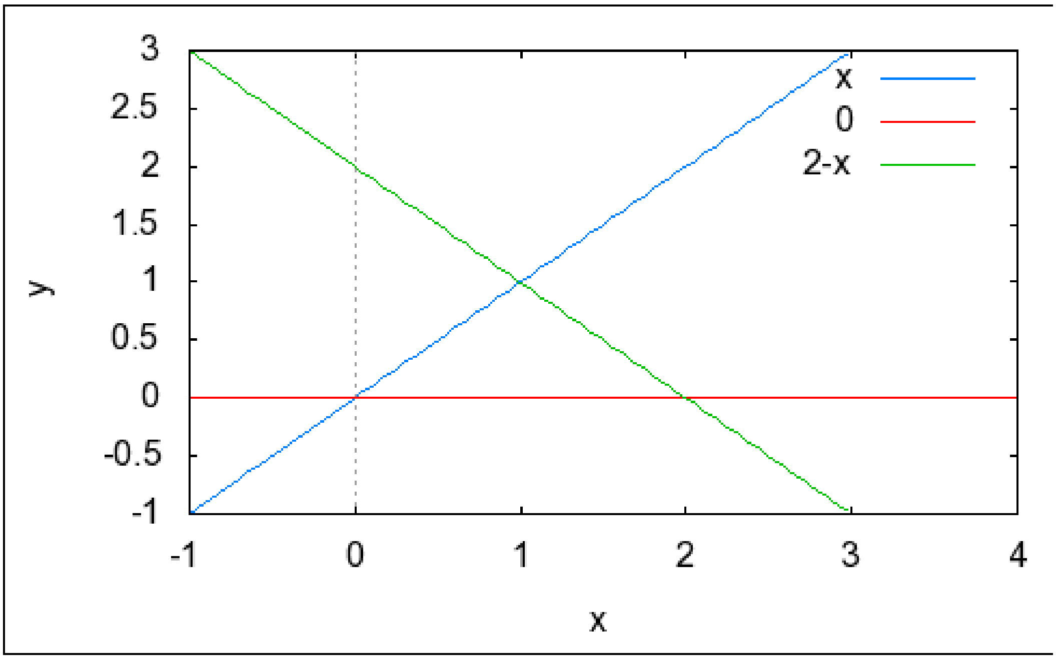
2. Вычислить $\iint\limits_D (x+2y)dxdy$,

если область D ограниченна линиями $y = x$, $y = 0$, $x + y - 2 = 0$.

Решение: Построим область D

```
(%i1) wxplot2d([x,0,-x+2], [x,-1,4], [y,-1,3])$
plot2d: some values were clipped.
 plot2d: some values were clipped.
```

(%t1)



Найдем точки пересечения кривых:

```
(%i2) solve([y=x,x+y-2=0],[x,y]);
(%o2) [[x=1,y=1]]
```

Заметим, что область D правильная в направлении оси Ox. Для вычисления данного двойного интеграла перейдем к повторным интегралам

$$\iint\limits_D (x+2y)dxdy = \int_0^1 dy \int_y^{2-y} (x+2y)dx$$

```
(%i3) integrate(integrate(x+2*y,x,y,2-y),y,0,1);
(%o3) 5/3
```

Ответ: Искомый двойной интеграл равен 5/3.

ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Для вычисления интеграла $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz$ с помощью пакета программ *Maxima* следует ввести команду:

integrate(integrate(integrate(f(x,y,z),z,$\psi_1(x,y)$, $\psi_2(x,y)$),y,$\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$),x,a,b);

здесь *f*(*x*,*y*,*z*) – непрерывная функция в каждой точке ограниченной замкнутой пространственной области Ω.

Пример:

Вычислить $\iiint\limits_{V}(x+z)dxdydz$,

где область *V* ограниченна плоскостями

$$x = 0,\ y = 0,\ z = 1,\ x + y + z = 2.$$

Решение:

Чтобы вычислить тройной интеграл перейдем к повторным интегралам:

$$\iiint\limits_{V}(x+z)dxdydz = \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{1-x} dy \int\limits_{1}^{2-x-y} (x+z)dz\,.$$

В *Maxima* это выражение можно записать:

```
(%i4) integrate(integrate(integrate(x+z,z,1,2-x-y),y,0,1-x),x,0,1);
(%o4) 1/4
```

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПЕРВОГО РОДА

Криволинейный интеграл первого рода по длине дуги AB, имеющей уравнение $y = \varphi(x)$ $(a \le x \le b)$ вычисляется по формуле

$$\int_{AB} f(x,y)\,dl = \int_a^b f(x,\phi(x))\sqrt{1+(\phi'(x))^2}\,dx,$$

где $f(x,y)$ определена и непрерывна на всей кривой AB, а $\varphi(x)$ имеет непрерывную на отрезке $(a \le x \le b)$ первую производную.

Если кривая AB задана параметрическими уравнениями

$$x = x(t),\ y = y(t) \quad (t_1 \le t \le t_2),$$

то

$$\int_{AB} f(x,y)\,dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt.$$

Примеры:

1. Вычислить $\int_{AB}(x-y)\,dl$, где AB – отрезок прямой $y = \frac{3}{4}x$, $0 \le x \le 4$.

Решение:

Зададим уравнение кривой и вычислим производную от этой функции:

```
(%i1) y(x):=3/4*x;
      yy(x):=diff(y(x),x,1);yy(x);
```

$$\text{(\%o1)}\quad y(x):=\frac{3}{4}x$$

```
(%o2) yy(x):=diff(y(x),x,1)
```

$$\text{(\%o3)}\quad \frac{3}{4}$$

Составим и вычислим определенный интеграл:

```
(%i4) integrate((x-y(x))*sqrt(1+yy(x)^2), x, 0, 4);
```

$$\text{(\%o4)}\quad \frac{5}{2}$$

Ответ: $\int_{AB}(x-y)\,dl = \frac{5}{2}$.

2. Найти массу M дуги кривой $x = t,\ y = \frac{t^2}{2}$ $(0 \le t \le 1)$, линейная плотность которой меняется по закону $\rho(x, y) = x$.

Решение: Масса дуги кривой вычисляется с помощью криволинейного интеграла I рода:

$$\int\limits_{AB} x\,dl, \text{ где } AB:\quad x = t,\ y = \frac{t^2}{2},\quad (0 \le t \le 1).$$

Зададим уравнения кривой и вычислим производные от этой функции:

```
(%i1) x(t):=t; y(t):=t^2/2;
(%o1) x(t):=t
```

$$\text{(\%o2)}\quad y(t) := \frac{t^2}{2}$$

```
(%i3) xx(t):=diff(x(t),t,1);xx(t);
(%o3) xx(t):=diff(x(t),t,1)
(%o4) 1
(%i5) yy(t):=diff(y(t),t,1);yy(t);
(%o5) yy(t):=diff(y(t),t,1)
(%o6) t
```

Затем, составим и вычислим интеграл:

```
(%i7) integrate(x(t)*sqrt(xx(t)^2+yy(t))^2, t, 0, 1);
```

$$\text{(\%o7)}\quad \frac{5}{6}$$

Ответ: масса равна 5/6 ед.массы.

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ВТОРОГО РОДА

Криволинейный интеграл второго рода по направленной дуге AB, имеющей уравнение $y = \varphi(x)$ $(a \le x \le b)$ вычисляется по формуле

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_a^b \left\{P(x,\phi(x)) + \phi'(x)\,Q(x,\phi(x))\right\} dx,$$

где функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – непрерывны на AB, а функция $\varphi(x)$ имеет непрерывную на отрезке $(a \le x \le b)$ первую производную.

Если кривая AB задана параметрическими уравнениями

$$x = x(t),\ y = y(t)\quad (t_1 \le t \le t_2),$$

то

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left\{ P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t) \right\} dt\,.$$

Механический смысл: Криволинейный интеграл второго рода есть работа, совершаемая переменной силой

$$\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$$

на криволинейном пути AB.

.

Примеры:

1. Вычислить $\int\limits_{AB} (x^2 - y^2)\,dx + xy\,dy$, где AB – отрезок прямой $y = \frac{3}{4}x$, $0 \le x \le 4$.

Решение:

Зададим уравнение кривой и вычислим первую производную:

```
(%i1) y(x):=3/4*x;
      yy(x):=diff(y(x),x,1);yy(x);
```

$$\text{(\%o1)}\quad y(x) := \frac{3}{4}x$$

```
(%o2) yy(x):=diff(y(x),x,1)
```

$$\text{(\%o3)}\quad \frac{3}{4}$$

Составим и вычислим определенный интеграл:

```
(%i4) integrate((x^2-y(x)^2)+x*y(x)*yy(x), x, 0, 4);
```

$$\text{(\%o4)}\quad \frac{64}{3}$$

Ответ: $\int\limits_{AB} (x^2 - y^2)\,dx + xy\,dy = \frac{64}{3}$.

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

ПОВЕРХНОСТНЫЙ ИНТЕГРАЛ ПЕРВОГО РОДА

Вычислим $\iint\limits_S f(x,y,z)ds$, где функция $f(x,y,z)$ непрерывна на поверхности S. Поверхность S задана параметрически: $\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v), \end{cases}$ $(u,v) \in [0,U] \times [0,V]$, где функции $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ имеют непрерывные в прямоугольнике $[0,U] \times [0,V]$ частные производные первого порядка. Формула для вычисления поверхностного интеграла имеет вид:

$$\iint\limits_S f(x,y,z)ds =$$
$$= \iint\limits_{[0,U]\times[0,V]} f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot$$
$$\cdot \sqrt{\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2} dudv.$$

В частности, когда поверхность задана в явном виде: $z = g(x,y), (x,y) \in D,$ мы имеем формулу

$$\iint\limits_S f(x,y,z)ds = \iint\limits_D f(x,y,g(x,y))\sqrt{1 + {g'_x}^2 + {g'_y}^2}\,dx\,dy.$$

ПОВЕРХНОСТНЫЙ ИНТЕГРАЛ ВТОРОГО РОДА

Пусть требуется вычислить

$\iint\limits_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy$, где функции $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ непрерывны на поверхности S.

Поверхность S задана параметрически: $\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v), \end{cases}$

$(u,v) \in [0,U] \times [0,V]$, где функции $x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)$ имеют непрерывные в прямоугольнике $[0,U] \times [0,V]$ частные производные первого порядка, причем $\sqrt{(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)})^2 + (\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)})^2 + (\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)})^2} \neq 0,$ $(u,v) \in [0,U] \times [0,V]$. В этом случае формула для вычисления поверхностного интеграла второго рода имеет вид

$$\iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy =$$

$$= \pm \iint_{[0,U]\times[0,V]} [P(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} +$$

$$+Q(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} +$$

$$+R(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}]dudv.$$

Выбор знаков «+» или «–» определяется выбором стороны поверхности.

Примеры:

Вычислить $\iint_S |xy|\, ds$, где S – часть параболоида $z = x^2 + y^2$, отсекаемая плоскостью $z = 1$.

Решение:

Запишем параметрическое уравнение параболоида:

$$\begin{cases} x = r\cos\phi, \\ x = r\sin\phi, \quad r \in [0,1],\ \ \phi \in [0,2\pi]. \\ x = r^2, \end{cases}$$

```
(%i1) x(r,fi):=r*cos(fi);
(%o1) x(r,fi):=r cos(fi)
(%i2) y(r,fi):=r*sin(fi);
(%o2) y(r,fi):=r sin(fi)
(%i3) z(r,fi):=r^2;
(%o3) z(r,fi):=r^2
```

Теперь вычислим входящие в формулу якобианы:

```
(%i4) d1:determinant(jacobian ([x(r,fi), y(r,fi)], [r, fi]));
(%o4) sin(fi)^2 r+cos(fi)^2 r
(%i5) d2:determinant(jacobian ([y(r,fi), z(r,fi)], [r, fi]));
(%o5) -2 cos(fi) r^2
(%i6) d3:determinant(jacobian ([z(r,fi), x(r,fi)], [r, fi]));
(%o6) -2 sin(fi) r^2
(%i7) d:sqrt(d1^2+d2^2+d3^2);
(%o7) sqrt((sin(fi)^2 r+cos(fi)^2 r)^2+4 sin(fi)^2 r^4+4 cos(fi)^2 r^4)
(%i8) trigsimp(%);
(%o8) sqrt(4 r^4+r^2)
```

Теперь зададим подынтегральную функцию:

```
(%i9) f(x,y):=x*y;
(%o9) f(x,y):=x y
(%i10) ff:f(x(r,fi),y(r,fi));
(%o10) cos(fi) sin(fi) r^2
```

Теперь получим представление исходного поверхностного интеграла через двойной интеграл:

$$\iint\limits_S |xy|\, ds = \int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^1 r^2 |\sin\phi \cos\phi| \sqrt{4r^4 + r^2}\, dr = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int\limits_0^1 \sin\phi \cos\phi \, r^3 \sqrt{4r^2 + 1}\, dr$$

или в MAXIMA

```
(%i11) 4*integrate(integrate(ff*d,r,0,1),fi,0,%pi/2);
(%o11) (sqrt(5)+125)/(12 5^(3/2))
```

Ответ: $\iint\limits_S |xy|\, ds = \dfrac{\sqrt{5}+125}{125^{3/2}}$.

§5. РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Система компьютерной математики Maxima решает дифференциальные уравнения первого порядка: с разделяющимися переменными, линейные, нелинейные уравнения, однородные, неоднородные. Виды уравнений второго порядка: с постоянными коэффициентами, линейные однородные с непостоянными коэффициентами, которые могут быть преобразованы к уравнению с постоянным коэффициентам, уравнение Эйлера, уравнения, разрешимые методом вариации постоянных, и уравнения, которые допускают понижение порядка.

Для нахождения общего решения дифференциального уравнения в системе Maxima используется функция *ode2(уравнение, y, x)* она предназначена для решения обыкновенных линейных дифференциальных уравнений первого и второго порядка и принимает три аргумента: само дифференциальное уравнение, зависимая переменная *y*- искомая функция, и независимая переменная *x*- аргумент. Данная функция может возвращать решение в явном и неявном виде. Функция и переменная обозначаются одиночными буквами, обозначения вида y(x) не нужны.

Пример 1. Найти общее решение уравнения $x^2y' + y = 0$.

В ячейке ввода переменной *eq* присвоим значение данного уравнения. Следует иметь ввиду, что перед записью производной следует поставить апостроф `'diff(y,x)`, это блокирует ее вычисление.

```
(%i1) eq:x^2*'diff(y,x)+y=0;
```

(%o1) $x^2\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)+y=0$

Теперь решим уравнение, набрав в ячейке ввода команду *ode2(eq,y,x)*.

```
(%i2) ode2(eq,y,x);
```

(%o2) $y=\%c\,\%e^{1/x}$

Здесь произвольная константа обозначается через *%c*.

Пример 2. Найти общее решение дифференциального уравнения второго порядка $y'' + y'tgx = sin2x$.

Набираем в ячейке ввода заданное уравнение.

```
(%i1) 'diff(y,x,2)+'diff(y,x)*tan(x)=sin(2*x);
```

(%o1) $$\frac{d^2}{d\,x^2}\,y+\tan(x)\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)=\sin(2\,x)$$

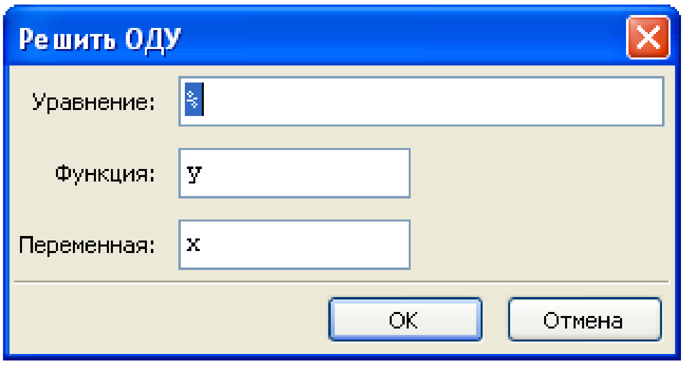
Решаем уравнение, указав его адрес как результат предыдущей операции.

```
(%i2) ode2(%,y,x);
```

(%o2) $$y=-\frac{\sin(2\,x)}{2}+\%k1\,\sin(x)-x+\%k2$$

В полученном ответе символами *%k1* и *%k2* обозначены произвольные константы общего решения.

Можно пользоваться другим способом. Для этого на панели инструментов нужно нажать кнопки *уравнение/solve ODE* появится диалоговое окно, в котором в строке *Уравнение* набрать данное уравнение и по нажатии кнопки *OK* получить ответ.



Предлагаем читателю проделать это самостоятельно.

В дополнение к функции *ode2* существуют три функции для поиска частных решений по заданным условиям. То есть, эти функции, получая конкретные условия относительно значения функции-решения в заданной точке, находят исходя из этих значений соответствующие им величины интегральных констант.

1. *ic1(решение,* $x = x_0, y = y_0$ *)* — предназначена для нахождения решения дифференциального уравнения первого порядка с начальными условиями. Принимает три аргумента: первый – само общее решение, в том виде, в котором его находит функция *ode2*, второй – начальное значение независимой переменной в форме $x = x_0$, третий – значение функции при указанном значении $x = x_0$, в виде $y = y_0$. Находит частное решение, проходящее через точку с заданными координатами $(x_0, y_0,)$.

2. *ic2(решение,*$x = x_0, y = y_0\ 'diff(y,x) = y'_0$*)* - предназначена для нахождения решения дифференциального уравнения второго порядка с начальными условиями. Принимает четыре аргумента: *решение* - общее решение уравнения, найденное с помощью функции ode2, $x = x_0$, - начальное значение независимой переменной, $y = y_0$- начальное значение зависимой переменной и $'diff(y,x) = y'_0$- начальное значение для первой производной зависимой переменной относительно независимой переменной.

3. *bc2(решение,* $x = x_1,\ y = y_1,\ x = x_2,\ y = y_2$*)* — предназначена для нахождения решения граничной задачи для дифференциального уравнения второго порядка. Здесь *решение* - общее решение уравнения, найденное с помощью функции *ode2*, $x = x_1$ — значение независимой переменной в первой граничной точке. $y = y_1$ — соответственно значение зависимой переменной в точке $x_{1,}$ также $x = x_2,\ y = y_2$ – вторая граничная точка, задается в той же форме, что и первая точка.

Приме 3. Найти решение уравнения $xy' - 2y = x$, удовлетворяющее условию $y(1) = 1$.

Введем уравнение и решим его.

```
(%i1) eg:x*'diff(y,x)-2*y=x;
```

(%o1) $x\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)-2\,y=x$

```
(%i2) ode2(eg,y,x);
```

(%o2) $y=\left(\%c-\frac{1}{x}\right)x^2$

Далее применяя функцию *ic1,* и задавая начальные условия найдем частное решение.

```
(%i3) ic1(%,x=1,y=1);
```

(%o3) $y=2\,x^2-x$

Пример 4. Найти решение дифференциального уравнения $y'' + xy = 0$, удовлетворяющее условию $y' = 1, y = 1$ при $x = 0$.

```
(%i1) eg:'diff(y,x,2)+y=cos(x);
```

(%o1) $\frac{d^2}{d\,x^2}\,y+y=\cos(x)$

```
(%i2) ego:ode2(eg,y,x);
```

(%o2) $y=\frac{x\sin(x)+\cos(x)}{2}+\%k1\,\sin(x)+\%k2\,\cos(x)$

```
(%i3) ic2(ego,x=0,y=1,'diff(y,x)=1);
```

(%o3) $y=\frac{x\sin(x)+\cos(x)}{2}+\sin(x)+\frac{\cos(x)}{2}$

Пример 5. Найти решение уравнения $y'' - 4y' + 4y = sinx - e^x$, удовлетворяющее граничным условиям: $y = 1$ при $x = 0$ и $y = 0$ при $x = 0$.

Запишем уравнение, обозначив его g1.

```
(%i1) g1:'diff(y,x,2)-4*'diff(y,x)+4*y=sin(x)-%e^x;
```

(%o1) $\frac{d^2}{d\,x^2}\,y-4\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)+4\,y=\sin(x)-\%e^x$

Найдем его общее решение.

```
(%i2) ode2(g1,y,x);
```

(%o2) $y=\frac{3\sin(x)+4\cos(x)-25\,\%e^x}{25}+(\%k2\,x+\%k1)\,\%e^{2\,x}$

Используя функцию bc2, получим искомое решение.

```
(%i3) bc2(%,x=0,y=1,x=1,y=0);
```

$$(\%o3)\quad y=\frac{3\sin(x)+4\cos(x)-25\,\%e^{x}}{25}+\left(\frac{46}{25}-\frac{\%e^{-2}\left(3\sin(1)+4\cos(1)+46\,\%e^{2}-25\,\%e\right)x}{25}\right)\%e^{2x}$$

Для нахождения частного решения дифференциальных уравнений первого и второго порядка, а также для нахождения частного решения систем линейных дифференциальных уравнений первого и второго порядка в Maxima имеется еще одна функция: *desolve*. Синтаксис её следующий:

desolve(egn,y(x)) или *desolve([egn_1,…,egn_n],[x(t)_1,…,x(t)_n])*.

Эта функция имеет два аргумента, первый – уравнение или список уравнений, второй – одна переменная или список переменных, относительно которых решается задача. Следует иметь в виду, что переменная (функция, относительно которой решается уравнение) и ее производная должны быть записаны в виде *y(x)* и *'diff(y(x),x)* соответственно и прежде чем решать уравнение или систему уравнений, необходимо функцией *atvalue* задать начальные условия. *(atvalue(y(x),x=0,2)* задает условие, что $y(0)=2$).

Пример 6. Решить уравнение $y'-2y=e^{-x}$, при условии, что $y(0)=-1$.

```
(%i1) atvalue(y(x),x=0,-1);desolve('diff(y(x),x)-2*y(x)=%e^-x,y(x));
(%o1) -1
```

$$(\%o2)\quad y(x)=-\frac{2\,\%e^{2x}}{3}-\frac{\%e^{-x}}{3}$$

Команда (%i1) содержит две функции, первая *atvalue* – задает начальное условие $y(0)=-1$) и вторая *desolve* - находит частное решение уравнения $y'-2y=e^{-x}$.

Пример 7. Решить уравнение второго порядка $y''-2y'=x^2-x$; при $y(0)=-1$ и $y'(0)=1$.

Задаем начальные условия (%i1) и решаем уравнение (%i3)

```
(%i1) atvalue(y(x),x=0,-1);atvalue('diff(y(x),x),x=0,1);
(%o1) -1
(%o2) 1
```

```
(%i3) desolve('diff(y(x),x,2)-2*'diff(y(x),x)=x^2-x,y(x));
```

$$(\%o3)\ y(x)=\frac{\%e^{2x}}{2}-\frac{x^3}{6}-\frac{3}{2}$$

Пример 8. Решить систему уравнений $\begin{cases} x' + 3x + y = 0, \\ y' - x + y = 0, \end{cases}$ при $t = 0$ $x = 1, y = 1.$

Задаем начальные условия для $x(0) = 1$ и $y(0) = 1.$

```
(%i1) atvalue(x(t),t=0,1);atvalue(y(t),t=0,1);
(%o1) 1
(%o2) 1
```

Решаем систему при заданных условиях.

```
(%i3) desolve(['diff(x(t),t)+3*x(t)+y(t)=0,
      'diff(y(t),t)-x(t)+y(t)=0],[x(t),y(t)]);
```

$$(\%o3)\ [x(t)=\%e^{-2t}-2\,t\,\%e^{-2t},\ y(t)=2\,t\,\%e^{-2t}+\%e^{-2t}]$$

В Maxima имеется функция *contrib_ode(eng,y,x)*, которая позволяет решать нелинейные дифференциальные уравнения первого и второго порядка. Подключение ее производится командой *load(contrib_ode)* и она содержит три аргумента: *eng*- уравнение, которое нужно решить, *y*- имя зависимой переменной – искомой функции, x - имя независимой переменной – аргумента функции. Если система может решить уравнение, то она представляет решение или список решений в одном из видов: в явном, неявном или в параметрическом.

Пример 9. Найти решение уравнение $y'^2 - (y + x)^2 = 0.$

Подключаем пакет *contrib_ode* и решаем уравнение.

```
(%i1) load(contrib_ode);
(%o1)
C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.1/share/maxima/5.25.1/share/contrib/diffequations/contrib_ode.ma
```

```
(%i2) contrib_ode('diff(y,x)^2-(y+x)^2=0,y,x);
```

$$(\%t2)\ \left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)^2-(y+x)^2=0$$

first order equation not linear in y'

$$(\%o2)\ [y=\left((-x-1)\,\%e^{-x}+\%c\right)\%e^{x},\ y=\%e^{-x}\left(\%c-(x-1)\,\%e^{x}\right)]$$

Уравнение имеет два решения, которые записаны в явном виде.

Пример 10. Решить уравнение $y'^2 + xy' + y = 0$.

```
(%i3) contrib_ode('diff(y,x)^2+'diff(y,x)*x+y=0,y,x);
```

(%t3) $\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)^2 + x\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right) + y = 0$

first order equation not linear in y'

(%o3) $[[x = \%e^{-\frac{\log(\%t)}{2}}\left(\%c - \frac{2\,\%e^{\frac{3\log(\%t)}{2}}}{3}\right), y = -\%t\,x - \%t^2]]$

Получено решение, представленное в параметрическом виде.

Пример 11. Найти решение уравнения $y'^2 - xy^2 = 0$.

```
(%i4) contrib_ode('diff(y,x)^2-x*y^2=0,y,x);
```

(%t4) $\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)^2 - x\,y^2 = 0$

first order equation not linear in y'

(%o4) $[-\log\left(\%e^{\frac{2\,x^{3/2}}{3}}\,y - \%c\right) = \%c]$

Найден общий интеграл данного уравнения.

ПОСТРОЕНИЕ ТРАЕКТОРИЙ И ПОЛЯ НАПРАВЛЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Строить траектории и поле направлений дифференциального уравнения первого порядка и автономных систем двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка позволяет функция *plotdf*, которая подключается командой *load(plotdf)*. Эта функция установки модуля *Openmath*, который входит в пакет xMaxima. Для построения поля направлений уравнение и система должны быть записаны в виде: $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ и $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x,y), \\ \frac{dy}{dt} = G(x,y) \end{cases}$ соответственно.

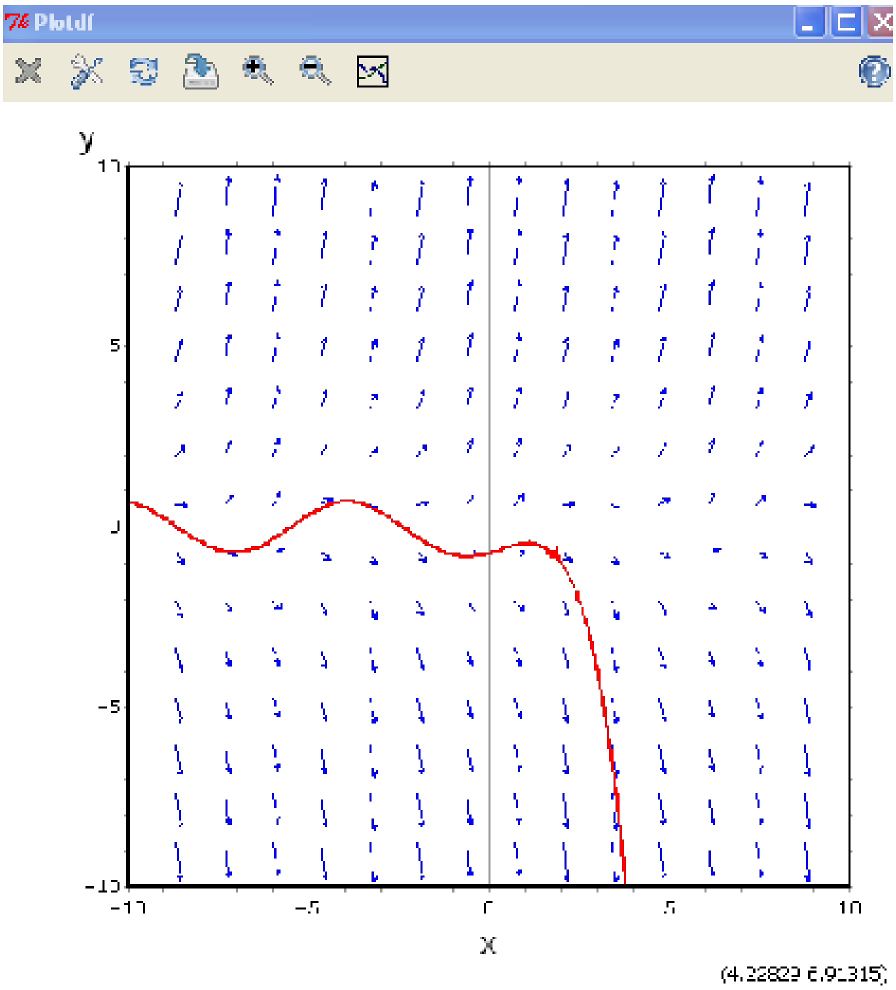
Синтаксис функции

plotdf(f(x,y),…options…); plotdf([F(x,y),G(x,y),…options…],[x,y]).

Здесь *f(x,); F(x,y)* и *G(x,y)*- выражения содержащие *x* и y, а *options*- дополнительные опции, которые можно брать в меню или набирать вручную.

Пример 1. Построить интегральную кривую уравнения $\frac{dy}{dx} = cosx + y$, проходящую через точку $(2, -1)$ и поле направлений.

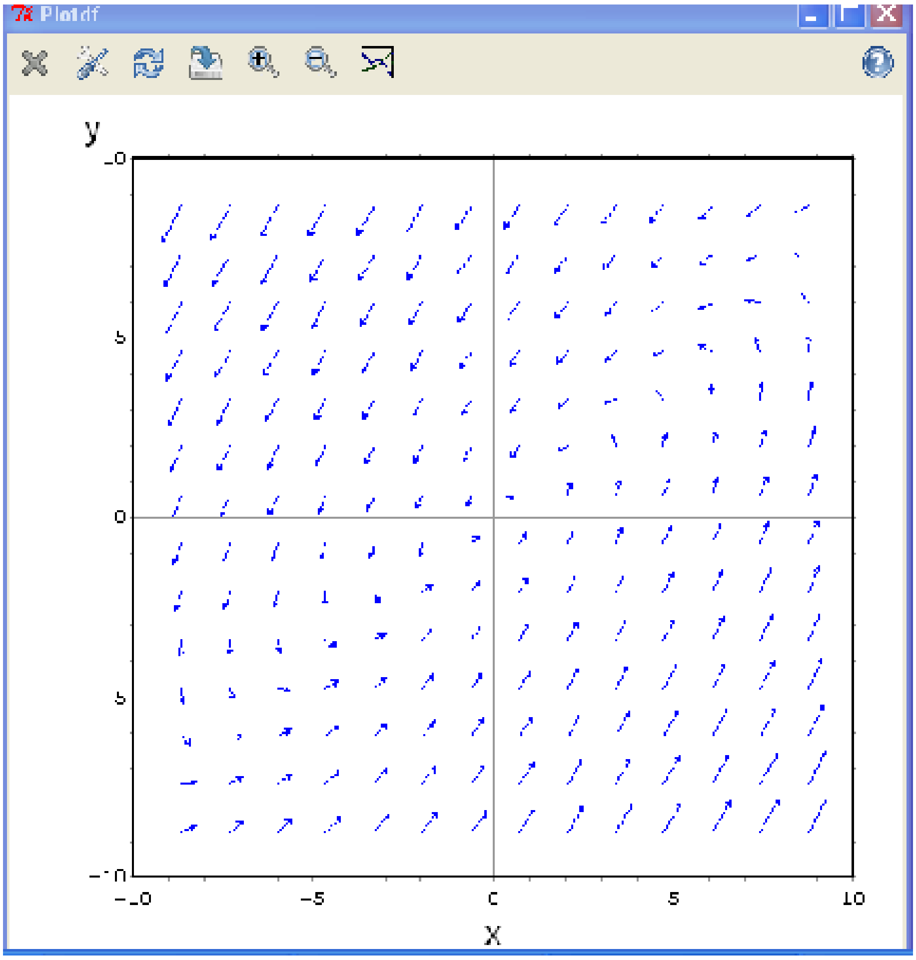
```
(%i1) load(plotdf);plotdf(cos(x)+y,[trajectory_at,2,-1]);
(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.1/share/maxima/5.25.1/share/dynamics/plotdf.lisp
 (%o2) Structure [EXTERNAL-PROCESS]
```



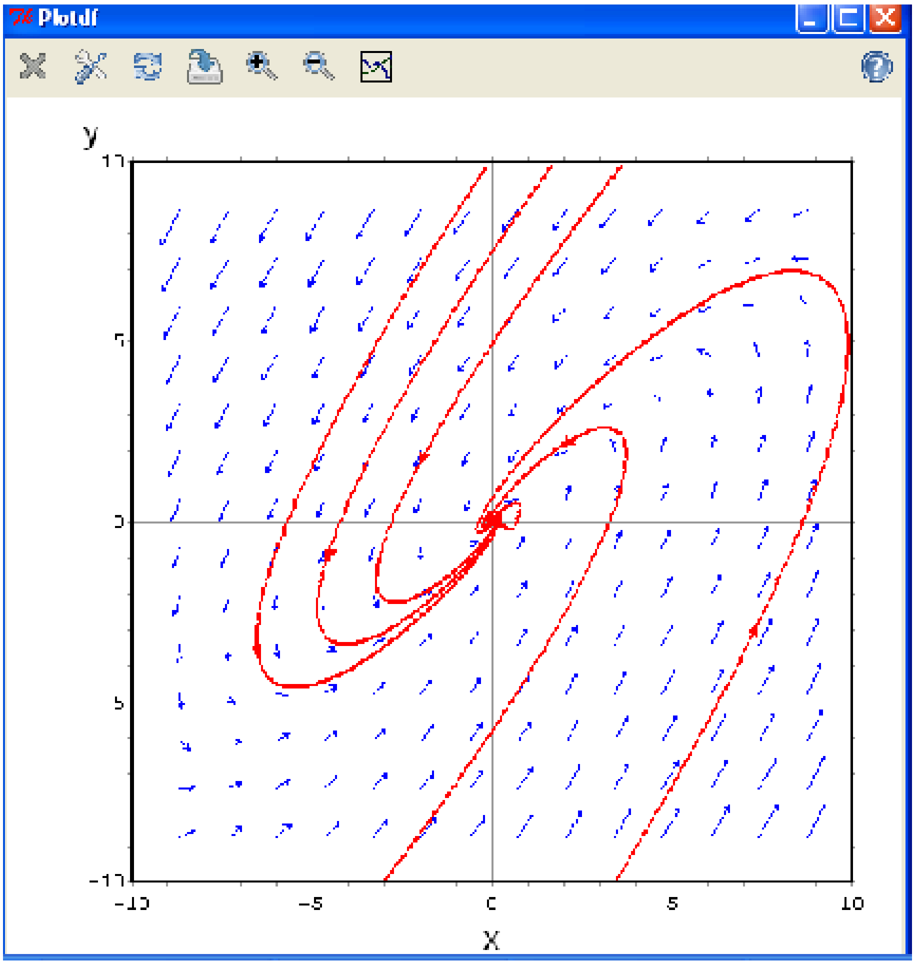
Пример 2. Построить поле направлений системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x - 6y. \end{cases}$ После ввода команды

```
(%i8) load(plotdf);plotdf([2*x-4*y,5*x-6*y]);
(%o8) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.1/share/maxima/5.25.1/share/dynamics/plotdf.lisp
(%o9) Structure [EXTERNAL-PROCESS]
```

в окне появится изображение поля направлений системы.



Для построения траекторий решения, проходящих через заданные точки, нужно в опциях (как в примере 1) указать координаты точки или на изображении поля направлений подвести указатель к выбранной точке и щелкнуть левой кнопкой мыши. На приведенном ниже рисунке изображены несколько траекторий, проходящих через точки, отмеченные на линиях стрелками.



§6. РЯДЫ.

СУММИРОВАНИЕ РЯДОВ

Maxima позволяет находить значение суммы конечного числа членов ряда, а также суммировать ряды с переменным верхним пределом и бесконечные ряды (однако не всегда) с помощью оператора $sum(a_i, i,$ начальное значение $i,$ конечное значение $i)$

Пример 1. Конечная сумма.

```
(%i1) sum(1/(i*(i+1)),i,1,5);
(%o1) 5/6
```

Находит сумму $\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{i(i+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{5\cdot 6}=\frac{5}{6}$.

Или

```
(%i2) sum(sin(1/i^2),i,1,10),numer;
(%o2) 1.388356739884459
```

Находит сумму $\sum_{i=1}^{10} sin\frac{1}{i^2} = 1{,}388356739884459$.

Пример 2. Ряд с переменным верхним пределом.

```
(%i2) sum(1/2^i,i,1,n);
```

$$(\%o2)\quad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i}$$

Если добавить опцию *simpsum*, то Maxima упростит выражение суммы.

Пример 3.

```
(%i3) sum(1/2^i,i,1,n),simpsum;
```

$$(\%o3)\quad -2\left(2^{-n-1}-\frac{1}{2}\right)$$

.

Пример 4. Нахождение суммы бесконечного числового ряда.

```
(%i5) sum(1/2^i,i,1,inf),simpsum;
(%o5) 1
```

РЯД ТЕЙЛОРА

Разложение в ряд Тейлора - операция несложная, но очень утомительная. Maxima помогает ускорить этот процесс, а также упростить полученное выражение. Разложить в степенной ряд можно двумя способами: разложить функцию в ряд до заданной степени аргумента, либо получить общее выражение для всего ряда.

Первый способ выполняет оператор *taylor(f(x),x,a,n)*. Здесь *f(x)*- раскладываемая функция, *a*- точка в окрестности которой находим разложение, *n*- определяет степень $(x-a)^n$ до которой производится разложение.

Пример 1.

```
(%i1) taylor(sin(x),x,0,8);
```

(%o1)/T/ $x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040}+...$

Нахождение общего члена разложения и запись ряда в обычном виде производит оператор *powerseries(f (x), x, a)*, его лучше применять совместно с функцией *niceindices*, которая приводит индексы в нормальный вид.

Пример 2.

```
(%i2) niceindices(powerseries(sin(x), x,0));
```

(%o2) $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!}$

РЯДЫ ФУРЬЕ

Нахождение коэффициентов ряда Фурье в Maxima выполняет оператор ***fourier(f(x),x,T)***. Его синтаксис: *f*(*x*)- функция, *x*-аргумент, *T* -период. Перед его использованием необходимо загрузить дополнительный модуль командой ***load(fourie)***.

Пример 1. Разложить функцию $f(x) = (x-1)^2$ в ряд Фурье на отрезке [-π,π].

```
(%i1) load(fourie);
(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.1/share/maxima/5.25.1/share/calculus/fourie.mac
```

```
(%i2) fourier((x-1)^2,x,%pi);
```

$$(\%t2)\quad a_0=\frac{\frac{2\pi^3}{3}+2\pi}{2\pi}$$

$$(\%t3)\quad a_n=\frac{\frac{2\pi^2\sin(\pi n)}{n}+\frac{2\sin(\pi n)}{n}-\frac{4\sin(\pi n)}{n^3}+\frac{4\pi\cos(\pi}{n^2}}{\pi}$$

$$(\%t4)\quad b_n=\frac{\frac{4\pi\cos(\pi n)}{n}-\frac{4\sin(\pi n)}{n^2}}{\pi}$$

$$(\%o4)\quad [\%t2,\%t3,\%t4]$$

Для того, чтобы не только вычислить коэффициенты ряда Фурье, но и получить разложение функции $f(x)$, заданной на отрезке $[-T,T]$ и T-периодически продолженной на всю вещественную ось в ряд Фурье, следует

ввести **load(fourie); totalfourier (*f(x)*,*x*,*T*).**

```
(%i5) totalfourier((x-1)^2,x,%pi);
```

(%t5) $a_0=\dfrac{\frac{2\pi^3}{3}+2\pi}{2\pi}$

(%t6) $a_n=\dfrac{\frac{2\pi^2\sin(\pi n)}{n}+\frac{2\sin(\pi n)}{n}-\frac{4\sin(\pi n)}{n^3}+\frac{4\pi\cos(\pi n)}{n^2}}{\pi}$

(%t7) $b_n=\dfrac{\frac{4\pi\cos(\pi n)}{n}-\frac{4\sin(\pi n)}{n^2}}{\pi}$

(%t8) $a_0=\dfrac{\pi^2+3}{3}$

(%t9) $a_n=\dfrac{4(-1)^n}{n^2}$

(%t10) $b_n=\dfrac{4(-1)^n}{n}$

(%o10) $4\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin(n x)}{n}\right)+4\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos(n x)}{n^2}\right)+\frac{\pi^2+3}{3}$

Maxima не только вычислила коэффициенты разложения, но и упростила их, а так же записала общий вид разложения.

Отметим, что частные суммы ряда Фурье приближают исходную функцию, в отличие от ряда Тейлора, не в конкретных точках, а «в среднем по отрезку».

Для примера рассмотрим разложение функции $f(x)=x\cdot e^x$ в ряд Фурье на отрезке $[-\pi,\pi]$ и ряд Тейлора в окрестности точки ноль. Построим графики, полученных разложений и сравним их с графиком $f(x)=x\cdot e^x$.

```
(%i2) totalfourier(x*%e^x,x,%pi);
```

(%t2)
$$a_0=\frac{-\%e^{\pi}+\pi\,\%e^{-\pi}+\%e^{-\pi}+\%e^{\pi}\,\pi}{2\,\pi}$$

(%t3)
$$a_n=\left(-\frac{\pi\,n^3\sin(\pi n)}{\%e^{\pi}n^4+2\,\%e^{\pi}n^2+\%e^{\pi}}-\frac{\pi\,n\sin(\pi n)}{\%e^{\pi}n^4+2\,\%e^{\pi}n^2+\%e^{\pi}}-\frac{2\,n\sin(\pi n)}{\%e^{\pi}n^4+2\,\%e^{\pi}n^2+\%e^{\pi}}+\frac{\%e^{\pi}\pi\,n^3\sin(\pi n)}{n^4+2\,n^2+1}+\frac{\%e^{\pi}\pi\,n\sin(\pi n)}{n^4+2\,n^2+1}-\frac{2\,\%e^{\pi}n\sin(\pi n)}{n^4+2\,n^2+1}+\frac{\pi\,n^2\cos(\pi n)}{\%e^{\pi}n^4+2\,\%e^{\pi}n^2+\%e^{\pi}}-\frac{n^2\cos(\pi n)}{\%e^{\pi}n^4+2\,\%e^{\pi}n^2+\%e^{\pi}}+\frac{\pi\cos(\pi n)}{\%e^{\pi}n^4+2\,\%e^{\pi}n^2+\%e^{\pi}}-\frac{\cos(\pi n)}{\%e^{\pi}n^4+2\,\%e^{\pi}n^2+\%e^{\pi}}+\frac{\%e^{\pi}\pi\,n^2\cos(\pi n)}{n^4+2\,n^2+1}+\frac{\%e^{\pi}n^2\cos(\pi n)}{n^4+2\,n^2+1}+\frac{\%e^{\pi}\pi\cos(\pi n)}{n^4+2\,n^2+1}-\frac{\%e^{\pi}\cos(\pi n)}{n^4+2\,n^2+1}\right)/\pi$$

(%t4)
$$b_n=\left(-\frac{\pi\,n^2\sin(\pi n)}{\%e^{\pi}n^4+2\,\%e^{\pi}n^2+\%e^{\pi}}+\frac{n^2\sin(\pi n)}{\%e^{\pi}n^4+2\,\%e^{\pi}n^2+\%e^{\pi}}-\frac{\pi\sin(\pi n)}{\%e^{\pi}n^4+2\,\%e^{\pi}n^2+\%e^{\pi}}-\frac{\sin(\pi n)}{\%e^{\pi}n^4+2\,\%e^{\pi}n^2+\%e^{\pi}}+\frac{\%e^{\pi}\pi\,n^2\sin(\pi n)}{n^4+2\,n^2+1}+\frac{\%e^{\pi}n^2\sin(\pi n)}{n^4+2\,n^2+1}+\frac{\%e^{\pi}\pi\sin(\pi n)}{n^4+2\,n^2+1}-\frac{\%e^{\pi}\sin(\pi n)}{n^4+2\,n^2+1}-\frac{\pi\,n^3\cos(\pi n)}{\%e^{\pi}n^4+2\,\%e^{\pi}n^2+\%e^{\pi}}-\frac{\pi\,n\cos(\pi n)}{\%e^{\pi}n^4+2\,\%e^{\pi}n^2+\%e^{\pi}}-\frac{2\,n\cos(\pi n)}{\%e^{\pi}n^4+2\,\%e^{\pi}n^2+\%e^{\pi}}-\frac{\%e^{\pi}\pi\,n^3\cos(\pi n)}{n^4+2\,n^2+1}-\frac{\%e^{\pi}\pi\,n\cos(\pi n)}{n^4+2\,n^2+1}+\frac{2\,\%e^{\pi}n\cos(\pi n)}{n^4+2\,n^2+1}\right)/\pi$$

(%t5)
$$a_0=\frac{\%e^{-\pi}(\pi\,\%e^{2\pi}-\%e^{2\pi}+\pi+1)}{2\,\pi}$$

(%t6)
$$a_n=\frac{\%e^{-\pi}(\pi\,\%e^{2\pi}n^2+\%e^{2\pi}n^2+\pi\,n^2-n^2+\pi\,\%e^{2\pi}-\%e^{2\pi}+\pi+1)(-1)^n}{\pi\,(n^2+1)^2}$$

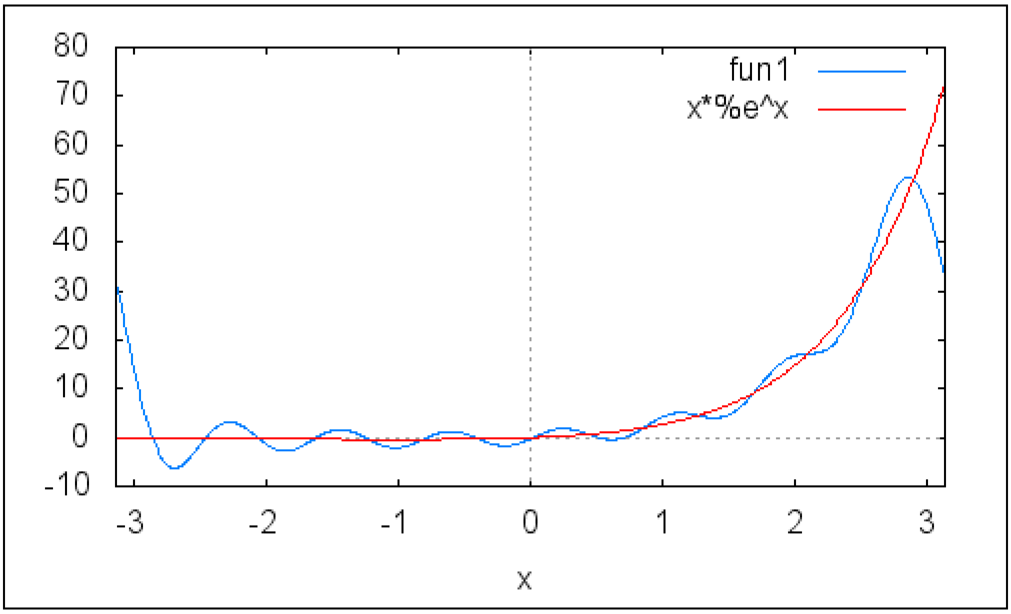
(%t7)
$$b_n=-\frac{\%e^{-\pi}n(\pi\,\%e^{2\pi}n^2+\pi\,n^2+\pi\,\%e^{2\pi}-2\,\%e^{2\pi}+\pi+2)(-1)^n}{\pi\,(n^2+1)^2}$$

(%o7)
$$-\frac{\%e^{-\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(\pi\,\%e^{2\pi}n^2+\pi\,n^2+\pi\,\%e^{2\pi}-2\,\%e^{2\pi}+\pi+2)(-1)^n\sin(n\,x)}{(n^2+1)^2}}{\pi}+\frac{\%e^{-\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\pi\,\%e^{2\pi}n^2+\%e^{2\pi}n^2+\pi\,n^2-n^2+\pi\,\%e^{2\pi}-\%e^{2\pi}+\pi+1)(-1)^n\cos(n\,x)}{(n^2+1)^2}}{\pi}+\frac{\%e^{-\pi}(\pi\,\%e^{2\pi}-\%e^{2\pi}+\pi+1)}{2\,\pi}$$

```
(%i9) g(x):= -(%e^(-%pi)*sum((n*(%pi*%e^(2*%pi)*n^2+%pi*n^2+%pi*%e^(2*%pi)
      -2*%e^(2*%pi)+%pi+2)*(-1)^n*sin(n*x))/(n^2+1)^2,n,1,7))/%pi+
      (%e^(-%pi)*sum(((%pi*%e^(2*%pi)*n^2+%e^(2*%pi)*n^2+%pi*n^2-n^2+
      %pi*%e^(2*%pi)-%e^(2*%pi)+%pi+1)*(-1)^n*cos(n*x))/(n^2+1)^2,n,1,7))/
      %pi+(%e^(-%pi)*(%pi*%e^(2*%pi)-%e^(2*%pi)+%pi+1))/(2*%pi);
```

(%o9) $$g(x):=\frac{-\%e^{-\pi}\sum_{n=1}^{7}\frac{n\left(\pi\,\%e^{2\pi}n^2+\pi\,n^2+\pi\,\%e^{2\pi}+(-2)\,\%e^{2\pi}+\pi+2\right)(-1)^n\sin(n\,x)}{(n^2+1)^2}}{\pi}+$$
$$\frac{\%e^{-\pi}\sum_{n=1}^{7}\frac{\left(\pi\,\%e^{2\pi}n^2+\%e^{2\pi}n^2+\pi\,n^2-n^2+\pi\,\%e^{2\pi}-\%e^{2\pi}+\pi+1\right)(-1)^n\cos(n\,x)}{(n^2+1)^2}}{\pi}+\frac{\%e^{-\pi}\left(\pi\,\%e^{2\pi}-\%e^{2\pi}+\pi+1\right)}{2\,\pi}$$

```
(%i11) wxplot2d([g(x),x*%e^x],[x,-%pi,%pi]);
```

(%t11) 

(%o11)

Здесь **(%i2)** находит разложение функции в ряд Фурье, **(%i9)** присваивает функции $g(x)$ значение частной суммы при n=7, **(%i11)** рисует графики функций $g(x)$ и $x \cdot e^x$.

Для ряда Тейлора последовательность операций аналогична.

```
(%i12) niceindices(powerseries(x*%e^x,x,0));
```

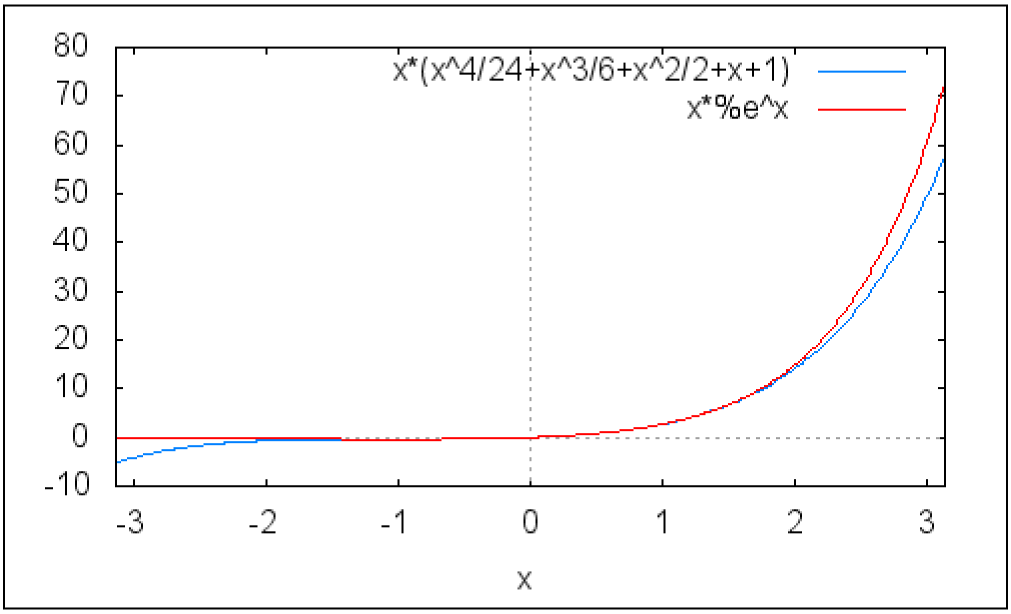
(%o12) $$x\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!}$$

```
(%i13) t(x):=x*sum(x^i/i!,i,0,4);
```

$$(\%o13)\quad t(x):=x\sum_{i=0}^{4}\frac{x^i}{i!}$$

```
(%i14) wxplot2d([t(x),x*%e^x],[x,-%pi,%pi]);
```

(%t14)



(%o14)

Замечание. Проверить, как приближаются графики при увеличении числа слагаемых.

§7. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Вычислить площадь фигуры, ограниченной следующими линиями

1. $y = (x+2)^3, y = 12x + 8$.
2. $y = (x-1)^2, y^2 = x - 1$.
3. $y = 3 + 2x - x^2, y = 4x + 2$.
4. $y = x^3, y^2 = x^2$.
5. $x - y^2 + 2y + 1 = 0, y = \frac{1}{2}x + 2$.
6. $y = x^4, y = 2x^2 - 3$.

Вычислить длину дуги кривой

1. $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, (-2 \le x \le 2)$.

2. $\begin{cases} x = 8cos^3 t, \\ y = 8sin^3 t. \end{cases}$ $\left(0 \le t \le \frac{\pi}{4}\right)$.

3. $\begin{cases} x = 2tcost + (t^2 - 2)sint, \\ y = 2tsint - (t^2 - 2)cost. \end{cases}$ $(0 \le t \le 3\pi)$.

4. $\begin{cases} x = e^t cost, \\ y = e^t sint. \end{cases}$ $(0 \le t \le 1)$.

5. $y = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{\ln x}{2}$ $(1 \le x \le 2)$

6.

$$\begin{cases} x = 4(\cos t + t\sin t) \\ y = 3(\sin t - t\cos t), \quad (0 \le t \le 2). \end{cases}$$

Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями

1. $y = 2x - x^2,\ y = x$ вокруг оси OX
2. $y = x^2,\ y = \sqrt{x}$ вокруг оси OX
3. $y = 4 - x^2,\ y = 0,\ x \ge 0$ вокруг оси OY
4. $y = x^2 + 1,\ y = 0,\ x = 1,\ x = 2$ вокруг оси OY
5. $x - y + 1 = 0, y = \cos x,\ y = 0$ вокруг оси OX
6. $y = 2\sqrt{x+1},\ y = \sqrt{4 - 2x},\ y = 0$ вокруг оси OX

Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кривой

1. $y = 2\, ch\left(\frac{x}{2}\right)$ от $x = 0$ до $x = 2$.
2. $y = x^3$ от $x = 0$ до $x = 1/2$.
3. $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases}$ где $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.
4. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b}=1$.

Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy$ по области D с заданной границей ∂D:

1. $f(x,y)=y\,e^{xy/2}, \quad \partial D:\{x=2,\ x=4,\ y=\ln 2,\ y=\ln 3\}$

2. $f(x,y)=y^2\cos(xy), \quad \partial D:\left\{x=0,\ y=\sqrt{\pi},\ y=x\right\}$

3. $f(x,y)=y\cos(2xy), \quad \partial D:\left\{x=\frac{1}{2},\ x=1,\ y=\frac{\pi}{2},\ y=\pi\right\}$

4. $f(x,y)=6xy+24x^3y^3, \partial D:\left\{x=1,\ y=-x^2,\ y=\sqrt{x}\right\}$

5. $f(x,y)=\frac{x^2}{y^2}, \quad \partial D:\{x=2,\ xy=1,\ y=x\}$

6. $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}, \partial D:\left\{x=0,\ x=2,\ y=x,\ y=\frac{x}{2}\right\}$

Вычислить с помощь тройного интеграла тела, ограниченного указанными поверхностями

1. $z=0, \quad z=2x, \quad x+y=3, \quad x=\sqrt{\frac{y}{2}}.$

2. $x=0, \ y=0, \ z=0, \ x+y=2, \ y=\sqrt{1-z}.$

3. $z=0, \ y=0, \ z=1-x^2, \ y=3-x.$

4. $z=0, \ z=1-y, \ y=x^2.$

5. $x=0, \ y=0, \ z=0, \ x+y=1, \ z=x^2+3y^2.$

6. $z=0, \ y=0, \ x=0, \ y+z=1, \ x=y^2+1.$

Вычислить криволинейный интеграл

1. $\int\limits_{AB}\frac{e^{3y}}{\sqrt{1+e^{2y}}}ds$, где AB - дуга кривой $x=1+e^y$, заключенная между точками $A(2;0)$ и $B(3;\ln 2)$.

2. $\int\limits_{L}\left(x+\dfrac{y}{4}\right)^{-3}dx+\sqrt{y}\,e^{-(x/4+y/16)}dy$, где $L-$ломаная с вершинами $A(-2\,;0)$, $B(-4\,;0)$, $C(-8\,;16)$.

3. $\int\limits_{AB}\left(4x^4y+2x^2y^3+3y^5\right)ds$, где AB - полуокружность $y=\sqrt{2x-x^2}$.

4. $\int\limits_{L}(x+5y)\,dx+(-x+4y)\,dy$, где $L-$четверть окружности

$$\begin{cases} x=4\cos t \\ y=4\sin t \end{cases}\quad \left(0\le t\le\frac{\pi}{2}\right).$$

5. $\int\limits_{AB}\dfrac{6xy^4-4xy^3}{\sqrt{1+4x^2y^4}}\,ds$, где AB - дуга кривой $y=\dfrac{4}{4x^2+1}$, заключенная между точками $A(0\,;4)$ и $B\left(\dfrac{1}{2}\,;2\right)$,

6. $\int\limits_{L}\sqrt{x-\dfrac{y}{3}}\,dx+y\,e^{(x/3-y/9)}dy$, где L - ломаная с вершинами $A(4\,;0)$, $B(3\,;0)$, $C(6\,;9)$

Вычислить поверхностный интеграл

1. $\iint\limits_{S}(x^2+y^2)\,ds$, где S – часть конической поверхности $z^2=x^2+y^2$, заключенной между плоскостями $z=0$ и $z=1$.

2. $\iint\limits_{S}xyz\,ds$, где S – часть поверхности $z=x^2+y^2$, заключенной между плоскостями $z=0$ и $z=1$.

3. Найти координаты центра тяжести части поверхности $2z=9-(x^2+y^2)$, расположенной над плоскостью XOY.

4. $\iint\limits_{S}(x^2+y^2+z-2)\,ds$, где S – часть поверхности $z=x^2+y^2$, заключенной между плоскостями $z=0$ и $z=1$.

5. $\iint\limits_S -x\,dy\,dz + z\,dz\,dx + 5\,dx\,dy$, где S – верхняя часть плоскости $2x - 3y + z = 6$, лежащая в IV октанте.
6. $\iint\limits_S -4z\,dy\,dz + (y - x + z)\,dz\,dx + (3x - 7)\,dx\,dy$, где S – верхняя часть плоскости $2x - y - 2z = -2$,отсеченная плоскостями $x = 0$, $y = 0$ и $z = 0$.
7. $\iint\limits_S (x + y)\,dy\,dz + (x - z)\,dz\,dx + (2y - 2z)\,dx\,dy$, где S – верхняя часть плоскости $2x - 3y - 2z = 6$,отсеченная плоскостями $x = 0$, $y = 0$ и $z = 0$.