Известия вузов. Математика
2016, № 2, с. 62–76

http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@ksu.ru

С.Н. ТРОНИН

ОБ АЛГЕБРАХ НАД МУЛЬТИКАТЕГОРИЯМИ

Аннотация. Введено понятие моноидальных категорий над вербальными категориями. В таких категориях определяются алгебры над мультикатегориями над соответствующими вербальными категориями. Для двух конкретных классов мультикатегорий явно вычислены категории алгебр над ними.

We introduce a notion of a monoidal category over verbal category. In such categories we define algebras over multicategories over the same verbal categories. We also explicitly compute categories of algebras for two classes of multicategories.

Ключевые слова: вербальная категория, мультикатегория, мультифунктор, естественное мультипреобразование, алгебра над мультикатегорией, коммутативная операда.

verbal category, multicategory, multifunctor, natural multitransformation, algebra over multicategory, commutative operad.

УДК: 512

Введение

В данной работе продолжаем исследования, начатые в [1], [2]–[4]. Основной объект изучения — многосортные (цветные) операды, называемые также мультикатегориями. В работах автора было введено широкое обобщение мультикатегорий — мультикатегории над вербальными категориями. Для того чтобы иметь возможность изучать категории алгебр над такими мультикатегориями в ситуациях более общих, чем теоретико-множественная, необходимо ввести новый класс моноидальных (тензорных) категорий — моноидальные категории над вербальными категориями. Это позволяет определить понятие алгебры над мультикатегорией над вербальной категорией как объект такой моноидальной категории.

Поступила 08.07.2014

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта ведущих научных школ НШ-5383.2012.1, а также за счет средств субсидии, выделенной Казанскому федеральному университету для выполнения проектной части государственного задания в сфере научной деятельности (проект № 2045).

Данная работа состоит из трех разделов. В первом разделе вводится понятие моноидальной категории над вербальной категорией. Отмечены некоторые связи с теорией двойных категорий. Приведен ряд примеров. Во втором разделе показывается, что известный функтор, сопоставляющий моноидальной категории над вербальной категорией мультикатегорию, на самом деле строит мультикатегорию над соответствующей вербальной категорией. Далее определяется понятие алгебры над мультикатегорией над вербальной категорией как мультифунктор из данной мультикатегории в уже упомянутую мультикатегорию, строящуюся по моноидальной категории. Наконец, в третьем разделе введенные понятия применяются для явного вычисления категорий алгебр над двумя естественно определяемыми классами мультикатегорий (обобщения матричных операд и операд полугрупповых алгебр из [5]).

Обозначения и определения настоящей работы соответствуют работам автора [1], [3], [4].

1. Моноидальные категории над вербальными категориями

Начнем с леммы, в формулировке которой в сжатом виде (на языке двойных категорий [6]) содержится фактически определение мультикатегорий над вербальными категориями. На протяжении всей работы верхняя черта используется для обозначения конечной упорядоченной последовательности символов, чаще всего букв с индексами, например $\overline{x} = x_1x_2\dots x_n$. Другие названия таких последовательностей — строки или слова в некотором алфавите. Напомним также обозначение $[n] = \{0, 1, \dots, n\}$. Вербальные категории — это категории с объектами вида $[n]$. Морфизмы вербальных категорий — отображения вида $[n] \to [m]$, при которых нуль отображается в нуль, и никакой другой элемент в нуль не отображается. Все отображения с таким свойством являются морфизмами вербальной категории FSet. Другим важным примером вербальной категории является категория Σ, морфизмы которой — всевозможные биекции вида $[n] \to [n]$ (с учетом того, что было сказано про нуль). В частности, $\Sigma([n], [n]) = \Sigma_n$ — группа подстановок n-й степени. Точное определение вербальных категорий можно найти в [2] и [4]. Некоторые свойства вербальных категорий напоминаются ниже.

Сопоставлением определения мультикатегорий над вербальными категориями ([1], определение 3) с определением двойных категорий доказывается

Лемма 1. *Пусть R — мультикатегория над вербальной категорией W ([1], [4]). Существует двойная категория $\mathcal{D}R_W$, которая описывается следующим образом. Объекты $\mathcal{D}R_W$ — конечные упорядоченные последовательности (строки) объектов R. Горизонтальные стрелки $\overline{x} = x_1 \dots x_n \to y_1 \dots y_m$ суть строки $\omega_1 \dots \omega_m$, где $\omega_i : \overline{x}_i \to y_i$ — мультистрелки R, и $\overline{x}_1 \dots \overline{x}_m = \overline{x}$. Вертикальные стрелки имеют вид $f : y_1 \dots y_m \to y_{f(1)} \dots y_{f(k)}$, где $f \in W^{\mathrm{op}}([k], [m])$ — морфизм двойственной к W категории (представленный отображением* *из $[k]$ в $[m]$). Квадраты $\mathcal{D}R_W$ по определению имеют вид*

$$
\begin{array}{ccc}
\overline{x}_{f(1)}\dots\overline{x}_{f(k)} & \xrightarrow{\omega_{f(1)}\cdots\omega_{f(k)}} & y_{f(1)}\dots y_{f(k)} \\
{\scriptstyle f^*\alpha}\uparrow & & {\scriptstyle f}\uparrow \\
\overline{x}_1\dots\overline{x}_m & \xrightarrow{\omega_1\dots\omega_m} & y_1\dots y_m,
\end{array}
$$

здесь $\alpha = \binom{\overline{x}_1\dots\overline{x}_m}{y_1\dots y_m}$.

Категорию, которой принадлежат горизонтальные стрелки двойной категории $\mathcal{D}R_W$, обозначим через $\mathcal{C}R$. Это — строго моноидальная категория, в которой $\overline{x}\otimes\overline{y} = \overline{x}\,\overline{y}$, аналогично для морфизмов. Ее роль будет пояснена позже.

Перейдем к формулировке определения основного понятия данной работы. Определение и минимум необходимых сведений о моноидальных категориях можно найти в ([7], с. 188-191, и [8], с. 292-294). Бифунктор "тензорного произведения", который в ([7], с. 188) обозначается значком квадрата, будем записывать как $\otimes$. Известно, что любая моноидальная категория эквивалентна строго моноидальной, т. е. такой, что $(x\otimes y)\otimes z = x\otimes(y\otimes z)$. Доказательство можно найти в ([9], теорема 1.2.15). Далее, как правило, будут рассматриваться именно строго моноидальные категории.

Рассмотрим строго моноидальную категорию K, и пусть $S = \mathrm{Ob}(K)$. Определим категорию K^*, объекты которой — конечные строки $\overline{x} = x_1\dots x_n$, где $x_i \in S$, а морфизмы из $\overline{x}$ в $\overline{y} = y_1\dots y_m$ — морфизмы категории K вида $\omega : x_1\otimes\dots\otimes x_n \to y_1\otimes\dots\otimes y_m$. Имеются естественным образом определяемые функторы $K \to K^*$ (объект x отображается в строку x длины единица) и $K^* \to K$ (объект-строка $x_1\dots x_n$ отображается в объект $x_1\otimes\dots\otimes x_n$), и легко проверяется, что это эквивалентность категорий. В приводимом ниже определении используются понятия и обозначения из работы автора [4]. В частности, если W — вербальная категория [2] и S — некоторый класс символов, то W_S — это категория, объекты которой — конечные последовательности символов из S, а морфизмы имеют вид $f : \overline{s} = s_1\dots s_n \to s_{f(1)}\dots s_{f(k)} = \overline{s}f$, где $f \in W^{\mathrm{op}}([k],[n])$. Будем говорить [4], что этот морфизм представлен отображением f, и ради простоты обозначим его также через f. Если имеются два морфизма $f_i : [n_i] \to [m_i]$ $(i = 1,2)$ из вербальной категории W, то отображение $f_1 \sqcup f_2 : [n_1+n_2] \to [m_1+m_2]$, переводящее нуль в нуль, элементы j $(1 \le j \le n_1)$ — в элементы $f_1(j)$, а элементы $k+n_1$ — в $f_2(k)+m_1$ (где $1 \le k \le n_2$), принадлежит W согласно определению вербальной категории. Если имеются два морфизма W_S, представленные f_1 и f_2 (морфизмами W), и они имеют вид $f_i : \overline{x}_i \to \overline{x}_i f_i$, то определен морфизм категории W_S, имеющий вид $\overline{x}_1\overline{x}_2 \to (\overline{x}_1 f_1)(\overline{x}_2 f_2) = (\overline{x}_1\overline{x}_2)(f_1\sqcup f_2)$, который представлен морфизмом $f_1\sqcup f_2$ из W, и будет также обозначаться через $f_1\sqcup f_2$.

Определение 1. Пусть дана многосортная вербальная категория W_S (где W — соответствующая односортная вербальная категория) и определен контравариантный функтор $\mathcal{F} : W_S \to K^*$, обладающий следующими свойствами:

1) функтор $\mathcal{F}$ тождественен на объектах;
2) $\mathcal{F}(f \sqcup g) = \mathcal{F}(f) \otimes \mathcal{F}(g)$;
3) коммутативны все диаграммы вида

$$\begin{array}{ccc} \overline{x}_{f(1)} \dots \overline{x}_{f(k)} & \xrightarrow{\omega_{f(1)} \otimes \dots \otimes \omega_{f(k)}} & y_{f(1)} \dots y_{f(k)} \\ \uparrow{\scriptstyle \mathcal{F}(f^*\alpha)} & & \uparrow{\scriptstyle \mathcal{F}(f)} \\ \overline{x}_1 \dots \overline{x}_m & \xrightarrow{\omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_m} & y_1 \dots y_m. \end{array} \tag{1}$$

Здесь через $\overline{x}_i$ обозначается строка $x_{i,1} \dots x_{i,k_i}$, $f : [k] \to [m]$ — морфизм W, $\alpha = \binom{\overline{x}_1 \dots \overline{x}_m}{y_1 \dots y_m}$.

При выполнении этих условий будем говорить, что K является *строго моноидальной W-категорией*, или что на K задана *W-структура*.

Пример 1. Если строго моноидальная категория K является симметрической, то на ней определена структура строго моноидальной Σ-категории. Разумеется, любая строго моноидальная категория является строго моноидальной над тривиальной вербальной категорией.

Пример 2. Пусть K — категория с конечными прямыми произведениями и финальным объектом, и $S = \mathrm{Ob}(K)$. Категорию K можно считать строго моноидальной с $\otimes = \times$, причем на ней естественным образом определяется FSet-структура. Именно, пусть $f : x_1 \dots x_n \to z_1 \dots z_m$ — морфизм из FSet_S, т. е. f можно считать отображением из $\{1, \dots, n\}$ в $\{1, \dots, m\}$ таким, что $x_i = z_{f(i)}$ для всех i. Ввиду этого определен единственный морфизм $\mathcal{F}(f) : z_1 \times \dots \times z_m \longrightarrow x_1 \times \dots \times x_n = z_{f(1)} \times \dots \times z_{f(n)}$ такой, что если $\pi_i : z_1 \times \dots \times z_m \to z_i$ и $\pi'_j : z_{f(1)} \times \dots \times z_{f(n)} \to z_{f(j)}$ суть естественные проекции, то для каждого j, $1 \le j \le n$ имеется равенство $\pi'_j \mathcal{F}(f) = \pi_{f(j)}$. Легко проверяется, что соответствие $f \mapsto \mathcal{F}(f)$ есть контравариантный функтор из W_S в K^*, тождественный на объектах и обладающий всеми свойствами из определения.

Пример 3. Если R есть мультикатегория над W, то на строго моноидальной категории $\mathcal{C}R$ естественным образом можно определить структуру строго моноидальной W-категории. Это можно показать, явно прописывая подробности (несложные) доказательства леммы 1.

Определение 2. Пусть R и K — строго моноидальные категории, снабженные W-структурами (соответствующие функторы обозначим через $\mathcal{F}_R$ и $\mathcal{F}_K$), и пусть $A : R \to K$ — моноидальный функтор (не обязательно строго моноидальный). Это означает, что определено естественное преобразование вида $\rho_{x,y} : A(x) \otimes A(y) \to A(x \otimes y)$, удовлетворяющее известным свойствам согласованности. Обозначим через $\rho_{x_1,\dots,x_n} : A(x_1) \otimes \dots \otimes A(x_n) \to A(x_1 \otimes \dots \otimes x_n)$ очевидным образом определяемую итерацию этого естественного преобразования. Будем говорить, что функтор A *сохраняет W-структуру*, если для каждого $f:[m]\to[n]$ из W коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A(x_1)\otimes\cdots\otimes A(x_n) & \xrightarrow{\mathcal{F}_K(f)} & A(x_{f(1)})\otimes\cdots\otimes A(x_{f(m)}) \\ {\scriptstyle \rho_{x_1,\dots,x_n}}\downarrow & & {\scriptstyle \rho_{x_{f(1)},\dots,x_{f(n)}}}\downarrow \\ A(x_1\otimes\cdots\otimes x_n) & \xrightarrow{A(\mathcal{F}_R(f))} & A(x_{f(1)}\otimes\cdots\otimes x_{f(m)}). \end{array} \qquad (2)$$

На основании определений обосновывается

Лемма 2. *Предположим, что K — строго моноидальная W-категория. Существует двойная категория $\mathcal{D}K^*$ с теми же объектами, что и K^*, горизонтальные стрелки которой — морфизмы K^*, а вертикальные — морфизмы W_S^{op}, где $S=\mathrm{Ob}(K)$. Квадраты в $\mathcal{D}K^*$ — коммутативные диаграммы вида* (2).

2. Алгебры над мультикатегориями

Напомним построение мультикатегории, исходя из строго моноидальной категории K. Объекты у левой мультикатегории $\mathcal{M}K$ те же самые, что и у K, и для любых объектов $x_1,\dots,x_n,y$ полагаем

$$\mathcal{M}K(x_1\dots x_n,y)=K(x_1\otimes\cdots\otimes x_n,y).$$

Операция композиции в $\mathcal{M}K$: если даны стрелки $\omega: y_1\dots y_m\to z$, $\overline{x}_i\to y_i$, $1\le i\le m$, $\omega_i:\overline{x}_i=x_{i,1}\dots x_{i,n_i}$, то $\omega\omega_1\dots\omega_m=\omega(\omega_1\otimes\cdots\otimes\omega_m)$. Единичные морфизмы в $\mathcal{M}K$ те же, что и в K.

Отметим, что данная конструкция является обобщением операды эндоморфизмов, которая впервые была введена и исследована в работе [10] под названием “клон полилинейных операций”.

Напомним, что функтор $A:K_1\to K_2$, где K_1 и K_2 — строго моноидальные категории, называется *моноидальным*, если задано естественное преобразование $\rho_{x,y}:A(x)\otimes A(y)\to A(x\otimes y)$, обладающее рядом свойств. Итерация ρ приводит к естественным преобразованиям вида $\rho_{x_1,\dots,x_n}: A(x_1)\otimes\cdots\otimes A(x_n)\to A(x_1\otimes\cdots\otimes x_n)$, которые не зависят от способа итерации, и для любого семейства $\{z_{1,1},\dots,z_{1,k_1},\dots,z_{n,1},\dots,z_{n,k_n}\}$ объектов категории K_1 коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A(z_{1,1})\otimes\cdots\otimes A(z_{n,k_n}) & \xrightarrow{\rho} & A(z_{1,1}\otimes\cdots\otimes z_{1,k_1}\otimes\cdots\otimes z_{n,1}\otimes\cdots\otimes z_{n,k_n}) \\ \| & & {\scriptstyle\rho}\uparrow \\ A(z_{1,1})\otimes\cdots\otimes A(z_{n,k_n}) & \xrightarrow{\rho\otimes\cdots\otimes\rho} & A(z_{1,1}\otimes\cdots\otimes z_{1,k_1})\otimes\cdots\otimes A(z_{n,1}\otimes\cdots\otimes z_{n,k_n}). \end{array}$$

Индексы у ρ очевидным образом восстанавливаются из контекста. Предполагается, что $\rho_x: A(x)\to A(x)$ — тождественный морфизм. В определение моноидального функтора входит существование морфизма вида $e_2\to A(e_1)$ (где e_1, e_2 — единицы моноидальных категорий

K_1 и K_2 соответственно), обладающего рядом хорошо известных свойств. Функтор называется *строго моноидальным*, если $\rho_{x,y}$ является равенством для всех объектов x, y, и $A(e_1) = e_2$.

Напомним, что если A и B — моноидальные функторы, то естественное преобразование $\xi : A \to B$ называется *моноидальным*, если для любых объектов x, y имеются коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd} A(x)\otimes A(y) \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\xi_x\otimes\xi_y"'] & A(x\otimes y) \arrow[d, "\xi_{x\otimes y}"'] \\ B(x)\otimes B(y) \arrow[r, "\rho"] & B(x\otimes y), \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A(a_1) \arrow[r, "\xi_{e_1}"] & B(e_1) \\ e_2 \arrow[u] \arrow[r, equal] & e_2. \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Моноидальные функторы превращаются в мультифункторы следующим образом. Если $A : K_1 \to K_2$ — моноидальный функтор, то $\mathcal{M}A : \mathcal{M}K_1 \to \mathcal{M}K_2$ действует на $\omega \in \mathcal{M}K_1(x_1 \dots x_n, y)$ (т. е. фактически $\omega : x_1 \otimes \dots \otimes x_n \to y$ есть морфизм K_1) по формуле $\mathcal{M}A(\omega) = A(\omega)\rho_{x_1,\dots,x_n}$. Из приведенной выше коммутативной диаграммы без труда выводится, что $\mathcal{M}A(\omega\omega_1 \dots \omega_n) = \mathcal{M}A(\omega)\mathcal{M}A(\omega_1)\dots\mathcal{M}A(\omega_n)$.

В общем случае, однако, нельзя утверждать, что если $A : K_1 \to K_2$, $B : K_2 \to K_3$ суть два моноидальных функтора, то $\mathcal{M}(BA) = (\mathcal{M}B)(\mathcal{M}A)$. Это так, если речь идет о строго моноидальных функторах. Поэтому определен функтор

$$\mathcal{M} : \mathrm{MonCat} \to \mathrm{Multicat}, \quad K \mapsto \mathcal{M}K,$$

где MonCat — категория строго моноидальных категорий и строго моноидальных функторов, Multicat — категория мультикатегорий над тривиальной вербальной категорией и соответствующих мультифункторов.

Правый аналог функтора $\mathcal{M}$ устроен так: если K — строго моноидальная категория, то $\mathcal{M}K(x, y_1 \dots y_n) = K(x, y_1 \otimes \dots \otimes x_n)$. Таким образом, существуют правые аналоги всех определений и утверждений, касающихся $\mathcal{M}K$.

Заметим, что соответствие $R \mapsto \mathcal{C}R$ есть функтор из Multicat в MonCat, сопряженный к функтору $K \mapsto \mathcal{M}K$ слева (например, [14]).

Если рассматриваются Σ-мультикатегории (а это так в большинстве работ по мультикатегориям и операдам), то вместо MonCat надо рассмотреть ее полную подкатегорию SMonCat, состоящую из *симметрических* строго моноидальных категорий (в симметрических моноидальных категориях определен естественный изоморфизм $x \otimes y \cong y \otimes x$, не обязательно являющийся строгим равенством). Ограничение описанного выше функтора на SMonCat есть функтор

$$\mathrm{SMonCat} \to \mathrm{Multicat}_\Sigma, \quad K \mapsto \mathcal{M}K,$$

Структура Σ-мультикатегории на $\mathcal{M}K$ определяется таким правилом. Если $\sigma \in \Sigma_m$, то из определения симметрической моноидальной категории следует существование естественного изоморфизма вида

$$\mathcal{F}(\sigma) : x_1 \otimes \dots \otimes x_m \longrightarrow x_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes x_{\sigma(m)}.$$

Тогда для стрелки $\omega : x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(m)} \to y$, являющейся фактически морфизмом $\omega : x_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes x_{\sigma(m)} \to y$, умножение $\omega\sigma$ определяется как суперпозиция морфизмов в K: $\omega\sigma = \omega\mathcal{F}(\sigma)$. Отметим, что обоснование утверждений о единственности $\mathcal{F}(\sigma)$ и о свойствах, необходимых для превращения $\mathcal{M}K$ в Σ-мультикатегорию, требует использования теоремы когерентности ([7], § 7.2).

Теорема 1. *Предположим, что K — строго моноидальная W-категория. На мультикатегории $\mathcal{M}K$ определена структура W-мультикатегории. Если R — строго моноидальная W-мультикатегория, и $A : R \to K$ — моноидальный функтор, сохраняющий W-структуру, то $\mathcal{M}A : \mathcal{M}R \to \mathcal{M}K$ — W-мультифунктор. Применение функтора $\mathcal{M}$ к моноидальному естественному преобразованию дает естественное преобразование мультифункторов.*

Доказательство. Бóльшая часть утверждений, которые необходимо проверить, следует прямо из определений. В мультикатегории $\mathcal{M}K$ "умножение" мультистрелки ω на морфизм W определяется так: $\omega f = \omega\mathcal{F}_K(f)$. Выведем отсюда, что $\mathcal{M}A$ есть W-мультифунктор, т. е. $\mathcal{M}A(\omega f) = \mathcal{M}A(\omega)f$ ([1], определение 4). Если сохраняются соглашения и обозначения определения 2, и $\omega \in R(x_{f(1)} \otimes \dots \otimes x_{f(m)}, y)$, то из диаграммы (2) следует

$$\mathcal{M}A(\omega f) = A(\omega)A(\mathcal{F}_R(f))\rho_{x_1,\dots,x_n} = A(\omega)\rho_{x_{f(1)},\dots,x_{f(m)}}\mathcal{F}_K(f) = \mathcal{M}A(\omega)f.$$

Легко проверяется также, что моноидальные естественные преобразования превращают функтор $\mathcal{M}$ в естественные преобразования мультифункторов. □

Определение 3. Пусть дана моноидальная категория K над вербальной категорией W, и W-мультикатегория R. *Алгеброй* над R (или R-алгеброй) в категории K называется W-мультифунктор $A : R \to \mathcal{M}K$. *Гомоморфизм* из алгебры A_1 в алгебру A_2 — это естественное преобразование мультифункторов в смысле работы [1]. Категорию R-алгебр в K будем обозначать через $\mathrm{Alg}_K(R)$, или, если необходимо указать явно вербальную категорию, через $\mathrm{Alg}_K(R_W)$. Если $K = \mathrm{Set}$, то будет использоваться обозначение $\mathrm{Alg}(R)$ или $\mathrm{Alg}(R_W)$.

Замечание. Пусть R — мультикатегория, $y \in S = \mathrm{Ob}(R)$, $\overline{x} \in S^*$. Тогда соответствие $\overline{x} \mapsto R(\overline{x}, y)$ для каждого y определяет контравариантный функтор из $\mathcal{C}R$ в категорию множеств. Если R есть FSet-мультикатегория, то для каждого $\overline{x}$ соответствие $y \mapsto R(\overline{x}, y)$ определяет FSet-мультифунктор из R в $\mathcal{M}Set$. Фактически речь идет о свободных R-алгебрах.

Из определения естественного мультипреобразования ([1], определение 5) следует

Теорема 2. *Пусть R есть W-операда, $K = \mathcal{M}Set$, и пусть вербальная категория W содержит Σ. Тогда $\mathrm{Alg}(R_W) = \mathrm{MFun}_W(R, K)$ — мультикатегория над W, объекты которой суть R-алгебры, а мультиморфизмы $\lambda : A_1 \dots A_n \to B$ — отображения $\lambda : A_1 \times \dots \times A_n \to B$, обладающие свойством*

$$\lambda((\omega\overline{a}_1), \dots, (\omega\overline{a}_n)) = \omega\lambda(a_{1,1}, \dots, a_{n,1}) \dots \lambda(a_{1,m}, \dots, a_{n,m}).$$

Здесь $\omega \in R(m)$ — произвольный элемент R (и соответственно m-арные операции в алгебрах A_i, B), $\overline{a}_i = a_{i,1} \dots a_{i,m} \in A_i^m$ (записываем без скобок, как строку), $1 \leq i \leq n$.

3. Примеры вычислений

Опишем два класса примеров алгебр над мультикатегориями. Сначала детализируем общие определения предыдущих разделов. Потребуется понятие коммутативной операды, введенное в [3] и [1].

Определение 4. Пусть Z — некоторая коммутативная операда, W — вербальная категория. Допустим, что на симметрической моноидальной категории $\mathrm{Alg}(Z)$ (которую можно считать строго моноидальной) задана W-структура, и $\mathcal{F}$ — функтор, задающий эту структуру. Будем говорить, что на $\mathrm{Alg}(Z)$ задана *естественная W-структура*, если для любых $A_1, \dots, A_n \in \mathrm{Alg}(Z)$, произвольных $a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n$ и каждого $f \in W([m],[n])$ выполнено равенство $\mathcal{F}(f)(a_1 \otimes \dots \otimes a_n) = a_{f(1)} \otimes \dots \otimes a_{f(m)}$.

В дальнейшем будет предполагаться, что все рассматриваемые коммутативные операды Z таковы, что на $\mathrm{Alg}(Z)$ существует естественная W-структура.

Определение 5. Пусть Z — коммутативная операда. Мультикатегорию R будем называть *Z-линейной*, если все множества $R(\overline{x}, y)$ обладают структурами Z-алгебр, и отображения композиции Z-полилинейны по всем аргументам, кроме тех, которые принадлежат $R(\overline{s}, t)$ с пустыми строками $\overline{s}$, а отображения $\omega \mapsto \omega f$ являются Z-линейными по ω.

Отметим, что по любой мультикатегории R и коммутативной операде Z можно построить Z-линейную мультикатегорию ZR точно так же, как и в [3], т. е. полагая $ZR(\overline{x}, y)$ (при непустых $\overline{x}$) свободными Z-алгебрами с базисами $R(\overline{x}, y)$ и продолжая отображения композиции и $\omega \mapsto \omega f$ по Z-линейности.

Предположим, что даны две Z-линейные мультикатегории R и K. Тогда мультифунктор F естественно назвать *Z-линейным*, если все отображения $F(\overline{x}, y)$ будут гомоморфизмами Z-алгебр. Если R и K Z-линейны, то рассматриваются только Z-линейные мультифункторы, и это особо не оговаривается.

В случае $K = \mathrm{Alg}(Z)$, в предположении, что на $\mathrm{Alg}(Z)$ задана структура строго моноидальной W-категории, категория Z-линейных R-алгебр будет обозначаться как $\mathrm{Alg}_Z(R_W)$.

Особо рассмотрим случай Z-линейной мультикатегории R и $K = \mathrm{Alg}(Z)$ (это включает случаи алгебр-множеств, и алгебр-модулей над коммутативным кольцом). Предположим, что на симметрической моноидальной замкнутой категории $\mathrm{Alg}(Z)$ (которую можно считать *строго* моноидальной) задана естественная структура W-категории. Тогда определение 2 для Z-линейной алгебры над Z-линейной мультикатегорией R можно детализировать следующим образом. Каждому $x \in \mathrm{Ob}(R)$ должна сопоставляться Z-алгебра $A(x)$ и должны быть определены операции композиции

$$R(x_1 \dots x_m, y) \otimes A(x_1) \otimes \dots \otimes A(x_m) \longrightarrow A(y).$$

Здесь $\otimes$ — тензорное произведение, которое существует в $\mathrm{Alg}(Z)$; например, в категории множеств это прямое произведение. Введем обозначения $(\omega, a_1, \dots, a_m) \mapsto \omega a_1 \dots a_m = \omega(a_1 \dots a_m) = \omega\overline{a}$. Здесь $a_i \in A(x_i$, $\omega \in R(x_1 \dots x_m, y)$, $\overline{a} = a_1 \dots a_m$, $1 \le i \le m$. Выражение $\omega a_1 \dots a_m$ является Z-линейным по каждому аргументу. Должны быть выполнены следующие свойства.

1) (Ассоциативность) Пусть $\overline{a}_i = a_{i,1} \dots a_{i,n_i}$, $a_{i,j} \in A(x_{i,j})$, $\omega_i \in R(x_{i,1} \dots x_{i,n_i}, y_i)$, $1 \le i \le m$, $\omega \in R(y_1 \dots y_m, z)$. Тогда

$$\omega(\omega_1\overline{a}_1) \dots (\omega_m\overline{a}_m) = (\omega\omega_1 \dots \omega_m)(\overline{a}_1 \dots \overline{a}_m).$$

2) (Действие единицы) Если $a \in A(x)$, то $1_x a = a$.

3) Если $f : [k] \to [m]$ — морфизм W, то $(\omega f)a_1 \dots a_m = \omega a_{f(1)} \dots a_{f(k)}$.

Частными случаями этих условий являются известные определения алгебр-множеств и алгебр-модулей над коммутативным кольцом (алгебр над соответствующей мультикатегорией).

Лемма 3. *Пусть Z — коммутативная операда, $I = \mathrm{Fr}_Z(t)$ — свободная Z-алгебра с базисом из одного элемента t. Тогда I является единицей симметрической моноидальной категории $\mathrm{Alg}(Z)$, т. е. существуют естественные по $B \in \mathrm{Alg}(Z)$ изоморфизмы*

$$B \otimes I \cong B \cong I \otimes B.$$

Доказательство. Можно использовать ту же идею, что и в случае модулей над коммутативным кольцом. Существует однозначно определенный гомоморфизм Z-алгебр $I \to \mathrm{Hom}_Z(B, B)$, переводящий базисный элемент t в 1_B. Так как в $\mathrm{Alg}(Z)$ имеется сопряженность между $\otimes$ и Hom, то этому гомоморфизму соответствует Z-билинейное отображение $u : I \times B \to B$, причем $u(t, b) = b$. Остается убедиться в универсальности u. Пусть $v : I \times B \to D$ — произвольное Z-билинейное отображение (D — некоторая Z-алгебра). Ему соответствует гомоморфизм Z-алгебр $B \to \mathrm{Hom}_Z(I, D)$. Но по определению I как свободной алгебры $\mathrm{Hom}_Z(I, D) \cong D$, откуда получаем гомоморфизм $h : B \to D$ такой, что $h(b) = v(t, b)$. Отсюда $hu = v$, и легко убедиться, что h однозначно определяется этим свойством. □

Назовем *Z-линейной категорией* такую категорию, множества морфизмов между объектами которой снабжены структурами Z-алгебр, а операции суперпозиции морфизмов Z-билинейны. Разумеется, это частный случай общего понятия обогащенной (enriched) категории, но будет достаточно этого частного случая. Когда такая категория (назовем ее R) предполагается моноидальной, то это будет означать, что отображения вида $(u, v) \mapsto u \otimes v$ из $R(x, y) \times R(s, t)$ в $R(x \otimes s, y \otimes t)$ также будут Z-билинейными.

Теорема 3. *Пусть Z — коммутативная операда, R — строго моноидальная Z-линейная категория над вербальной категорией W, и на* $\mathrm{Alg}(Z)$ *задана естественная структура W-категории. Категория Z-линейных $\mathcal{M}R_W$-алгебр эквивалентна категории моноидальных функторов из R в* $\mathrm{Alg}(Z)$*, сохраняющих W-структуру, и моноидальных естественных преобразований.*

Доказательство. Опишем принципиальные этапы доказательства, опуская длинные стандартные выкладки, сводящиеся к проверкам определений. Если $A : R \to \mathrm{Alg}(Z)$ — моноидальный функтор, сохраняющий W-структуру, то $\mathcal{M}A$ есть Z-линейная $\mathcal{M}R_W$-алгебра. Если $\omega \in R(x_1 \otimes \dots \otimes x_n)$, $a_i \in A(x_i)$, $1 \leq i \leq n$, то

$$\omega a_1 \dots a_n = A(\omega)(\rho_{x_1,\dots,x_n}(a_1 \otimes \dots \otimes a_n)).$$

Обратно, пусть A есть R-алгебра, т. е. мультифунктор. В частности, A есть функтор из R в $\mathrm{Alg}(Z)$. Пусть I — алгебра из леммы 3. Так как это свободная Z-алгебра с базисом $\{t\}$, то для каждого $u \in \mathrm{Ob}(R)$ существует однозначно определенный гомоморфизм Z-алгебр $\iota_u : I \to R(u,u)$, отображающий базисный элемент t в 1_u. Теперь естественное преобразование $\rho_{x,y}$, задающее структуру моноидального функтора для A, определяется как суперпозиция

$$A(x) \otimes A(y) \to I \otimes A(x) \otimes A(y) \to \mathcal{M}R(xy, x \otimes y) \otimes A(x) \otimes A(y) \to A(x \otimes y).$$

Здесь крайнее левое отображение — естественный изоморфизм, существующий по определению единицы в моноидальной категории. В строго моноидальной категории это равенство. Крайнее правое отображение — это композиция в R-алгебре A. Заметим, что $\mathcal{M}R(xy, x \otimes y) = R(x \otimes y, x \otimes y)$. Отсюда понятно, что среднее отображение должно быть гомоморфизмом $\iota_{x \otimes y} \otimes 1_{A(x)} \otimes 1_{A(y)}$. Таким образом, $\rho_{x,y}(a_1 \otimes a_2) = 1_{x \otimes y} a_1 a_2$. Эта явная формула позволяет без особых проблем проверить определение моноидального функтора. Итерируя, получаем $\rho_{x_1,\dots,x_n}(a_1 \otimes \dots \otimes a_n) = 1_{x_1 \otimes \dots \otimes x_n} a_1 \dots a_n$.

Убедимся, что если A является W-мультифунктором, то A как моноидальный функтор сохраняет W-структуру. Пусть $f : [m] \to [n]$ — морфизм W, $\omega \in R(x_{f(1)} \dots x_{f(m)}, y)$, $\mathcal{F}_R$ и $\mathcal{F}_{\mathrm{Alg}(Z)}$ — функторы, задающие W-структуру соответственно на R и на $\mathrm{Alg}(Z)$. Так как A есть W-мультифунктор, то $A(\omega f) = A(\omega) f$, или, что то же самое, $A(\omega \mathcal{F}_R(f)) = A(\omega)\mathcal{F}_{\mathrm{Alg}(Z)}(f)$. Из очевидного равенства $\mathcal{F}_R(f) 1_{x_1 \otimes \dots \otimes x_n} = 1_{x_{f(1)} \otimes \dots \otimes x_{f(m)}} \mathcal{F}_R(f)$ следует соотношение $A(\mathcal{F}_R(f)) A(1_{x_1 \otimes \dots \otimes x_n}) = A(1_{x_{f(1)} \otimes \dots \otimes x_{f(m)}} \mathcal{F}_R(f))$, в котором последнее выражение равно $A(1_{x_{f(1)} \otimes \dots \otimes x_{f(m)}}) \mathcal{F}_{\mathrm{Alg}(Z)}(f)$. Заменяя $A(1_{x_1 \otimes \dots \otimes x_n})$ на $\rho_{x_1,\dots,x_n}$ и $A(1_{x_{f(1)} \otimes \dots \otimes x_{f(m)}})$ на $\rho_{x_{f(1)} \otimes \dots \otimes x_{f(m)}}$, получаем коммутативность диаграммы из определения 2.

Доказательство завершается выполнением формальных проверок функториальности построенных соответствий и их взаимной обратности. □

Напомним (например, [14]), как построить еще один функтор из категории всех категорий Cat в категорию $\mathrm{Multicat}_\Sigma$. Пусть K — некоторая категория. Определяем мультикатегорию

$K^{\blacktriangleright}$ в виде $\mathrm{Ob}(K^{\blacktriangleright}) = \mathrm{Ob}(K)$, $K^{\blacktriangleright}(x_1 \dots x_m, y) = K(x_1, y) \times \dots \times K(x_m, y)$. Композиция такова: если $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in K^{\blacktriangleright}(x_1 \dots x_m, y)$, $\beta_i = (\beta_{i,1} \dots \beta i, n_i) \in K^{\blacktriangleright}(z_{i,1} \dots z_{i,n_i}, x_i)$, $1 \le i \le m$, то

$$\alpha\beta_1 \dots \beta_m = (\alpha_1\beta_{1,1} \dots \alpha_1\beta_{1,n_1} \dots \alpha_m\beta_{m,1} \dots \alpha_m\beta_{m,n_m}). \tag{3}$$

Если $x_1, \dots, x_m, y \in \mathrm{Ob}(K) = S$, то контравариантный функтор $x_1 \dots x_m \mapsto K^{\blacktriangleright}(x_1 \dots x_m, y)$ из категории Σ_S^{op} в категорию множеств определяется равенством $\alpha\sigma = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)\sigma = (\alpha_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, \alpha_{\sigma^{-1}(m)})$. Здесь $\sigma \in \Sigma_m$ (т. е. подстановка), и этим же символом обозначается соответствующий морфизм $x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(m)} \to x_1 \dots x_m$ из Σ_S. Как и выше, $\alpha_i : x_i \to y$ — морфизмы категории K.

Легко проверяется, что соответствие $K \mapsto K^{\blacktriangleright}$ есть функтор из категории категорий в категорию Σ-мультикатегорий.

В дальнейшем будет использоваться один специальный случай этой конструкции, когда K — категория с одним объектом x. Такая категория полностью определяется множеством $G = K(x, x)$, которое является моноидом. Получающуюся операду обозначим тем же символом G, так что $G(n) = G^n$. Подоперады одной из операд такого вида изучались, например, в работе автора [11].

Отметим, что очевидным образом можно определить правый аналог описанной только что конструкции, правую Σ-мультикатегорию $K^{\blacktriangleleft}$.

Если K — предаддитивная категория (т. е. морфизмы образуют абелевы группы, а суперпозиция морфизмов билинейна), то на $K^{\blacktriangleright}$ можно следующим образом определить структуру FSet-мультикатегории. Пусть $f : [m] \to [n]$ — морфизм FSet, $x_1, \dots x_n, y$ — объекты K, $\alpha_i : x_{f(i)} \to y$, $1 \le i \le m$, — морфизмы K. Тогда полагаем $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)f = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, где $\beta_j = \sum\limits_{i, f(i) = j} \alpha_i$. Определение FSet-мультикатегории проверяется легко.

Пример 4. Пусть K — ассоциативное кольцо с единицей, которое можно рассматривать как предаддитивную категорию с одним объектом. Как уже было отмечено выше, на мультикатегории (в данном случае операде) $K^{\blacktriangleright}$ определена структура FSet-операды. Нетрудно показать, что многообразие $\mathrm{Alg}(K^{\blacktriangleright}_{\mathrm{FSet}})$ рационально эквивалентно категории K-Mod всех левых K-модулей (определение рациональной эквивалентности многообразий имеется в [13], [2] и [4]). На $K^{\blacktriangleright}$-алгебре A определена структура абелевой группы с операцией сложения $a_1 + a_2 = (1, 1)(a_1, a_2)$, где $(1, 1) \in K^2 = K^{\blacktriangleright}(2)$, с нулевым элементом, появляющимся за счет компоненты $K^{\blacktriangleright}(0)$, и обратным элементом $-a = (-1)a$ (здесь $-1 \in K^{\blacktriangleright}(1)$). Аксиомы группы выполняются ввиду наличия FSet-структуры. Например, равенство $a + (-a) = 0$ справедливо ввиду наличия отображения $K^{\blacktriangleright}(2) \to K^{\blacktriangleright}(1)$, соответствующего морфизму $f : [2] \to [1]$ категории FSet такому, что $f(1) = f(2) = 1$. Если $(x_1, x_2) \in K^{\blacktriangleright}(2) = K^2$, то по определению FSet-структуры на $K^{\blacktriangleright}$ выполняется равенство $(x_1, x_2)f = x_1 + x_2 \in K^{\blacktriangleright}(1)$. Тогда $a + (-a) = ((1, 1)(1)(-1))aa = ((1, -1)f)a = 0a$, где $0 \in K^{\blacktriangleright}(1) = K$. Но этот элемент есть образ константы $0 \in K^{\blacktriangleright}(0) = \{0\}$ при отображении, соответствующем морфизму $[0] \to [1]$ категории FSet, и легко показывается, что константа 0 в $K^{\blacktriangleright}$-алгебре A равна $0a$ для любого $a \in A$. Отображение композиции $K^{\blacktriangleright}(1) \times A \to A$, существующее по определению $K^{\blacktriangleright}$-алгебры A, превращает абелеву группу A в левый K-модуль. Обратно, если A — левый K-модуль, $a_1, \ldots, a_n \in A$ и $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K^n = K^{\blacktriangleright}(n)$, то структура $K^{\blacktriangleright}$-алгебры на A определяется равенством $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)(a_1, \ldots, a_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$. На этой мультикатегории определена структура FSet-мультикатегории, которая устроена следующим образом. Если $A_1, \ldots, A_m$, B — левые K-модули, и для каждого i, $1 \leq i \leq m$, элементы $a_{i,1}, \ldots, a_{i,n}$ принадлежат A_i, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K^n = K^{\blacktriangleright}(n)$, то мультиморфизм FSet-мультикатегории $\mathrm{Alg}(K^{\blacktriangleright}_{\mathrm{FSet}})$ есть отображение $\lambda : A_1 \times \cdots \times A_m \to B$, обладающее свойством, являющимся переформулировкой (3) для данного случая,

$$\lambda\Big(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_{1,j}, \ldots, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_{m,j}\Big) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda(a_{1,j}, \ldots, a_{m,j}).$$

Отсюда следует, что отображение λ — это модульный гомоморфизм из прямой суммы $A_1 \oplus \cdots \oplus A_n$ в B, а это, в свою очередь, означает, что если рассматривать категорию K-Mod как моноидальную категорию относительно функтора $\oplus$, то построенная FSet-мультикатегория есть $\mathcal{M}(K - \mathrm{Mod})$.

Заметим, что для произвольной категории K имеется внешне даже более естественный контравариантный функтор из FSet_S в категорию множеств, на объектах действующий так же: $x_1 \ldots x_m \mapsto K^{\blacktriangleright}(x_1 \ldots x_m, y)$, а на морфизмах иначе: если $f : x_{f(1)} \ldots x_{f(k)} \to x_1 \ldots x_m$, то $\alpha f = (\alpha_{f(1)}, \ldots, \alpha_{f(k)})$. Однако результат не является FSet-мультикатегорией.

Пример 5. Допустим, что в категории K существуют расслоенные произведения. Тогда по любой предтопологии Гротендика на K [12] естественным образом строится подмультикатегория мультикатегории $K^{\blacktriangleright}$, определенная над Σ. Именно, мультистрелками этой подмультикатегории являются все конечные упорядоченные семейства $\alpha_i : x_i \to y$, $1 \leq i \leq n$, которые являются покрывающими семействами данной предтопологии. Все перестановки последовательности $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ также являются мультистрелками. Предтопологии Гротендика на K, все покрытия которых конечны, находятся во взаимнооднозначном соответствии с Σ-подмультикатегориями $K^{\blacktriangleright}$, обладающими следующим свойством: для любой мультистрелки $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, где $\alpha_i : x_i \to y_i$, и любого морфизма $\beta : z \to y$ последовательность проекций соответствующих расслоенных произведений $z \times_y x_i \to z$ является мультистрелкой из данной подмультикатегории.

Пусть Z — коммутативная операда, R и M — Z-линейные мультикатегории над одной и той же вербальной категорией W. Определим Z-линейную мультикатегорию $R \otimes M$ следующим образом. Положим $S = \mathrm{Ob}(R \otimes M) = \mathrm{Ob}(R) \times \mathrm{Ob}(M)$, и для $\overline{s} \in S^*, t \in S$, где $\overline{s} = s_1 \ldots s_n$, $s_i = (x_i, y_i)$, $t = (u, v)$, $x_i, u \in \mathrm{Ob}(R)$, $y_i, v \in \mathrm{Ob}(M)$, $1 \leq i \leq n$, $\overline{x} =$

$x_1 \dots x_n$, $\overline{y} = y_1 \dots y_n$, полагаем $(R \otimes M)(\overline{s}, t) = R(\overline{x}, u) \otimes M(\overline{y}, v)$. В правой части последнего равенства стоит тензорное произведение в $\mathrm{Alg}(Z)$. Таким образом, мультистрелки в $R \otimes M$ представляются в виде $\sum\limits_{i=1}^{k}{}^{(\lambda)}\, \omega_i \otimes \nu_i$, где $\lambda \in Z(k)$, ω_i — мультистрелки из R, ν_i — мультистрелки из M. Операции композиции и умножения справа на морфизмы из W задаются "покомпонентно":

$$(\omega \otimes \nu)(\omega_1 \otimes \nu_1) \dots (\omega_n \otimes \nu_n) = (\omega\omega_1 \dots \omega_n) \otimes (\nu\nu_1 \dots \nu_n), \quad (\omega \otimes \nu)f = (\omega f) \otimes (\nu f)$$

(и далее по Z-линейности).

Теорема 4. *Пусть R — Z-линейная Σ-мультикатегория, K — произвольная категория, Z — коммутативная операда, и на $\mathrm{Alg}(Z)$ рассматривается естественная структура строго моноидальной Σ-категории. Тогда $\mathrm{Alg}_Z((R \otimes ZK^{\blacktriangleright})_\Sigma)$ эвивалентна категории функторов из K в категорию $\mathrm{Alg}_Z(R_\Sigma)$.*

Доказательство. Рассмотрим функтор $A : K \to \mathrm{Alg}_Z(R_\Sigma)$. Для каждого $x \in \mathrm{Ob}(K)$, таким образом, определен Σ-мультифунктор $A(x)$ из R в $\mathrm{Alg}(Z)$. Пусть $u \in \mathrm{Ob}(R)$. Полагая $A(u, x) = A(x)(u)$, получим отображение $\mathrm{Ob}(R) \times \mathrm{Ob}(K^{\blacktriangleright}) \to \mathrm{Ob}(\mathrm{Alg}(Z))$. Если $\alpha : x \to y$ — морфизм K, то действие соответствующего ему отображения $A(u, x) \to A(u, y)$ на элементе $a \in A(u, x)$ обозначим через αa. Ввиду того, что $A(\alpha)$ — гомоморфизм R-алгебр, должно выполняться равенство $r(\alpha a_1 \dots \alpha a_m) = \alpha(r a_1 \dots a_m)$, где $a_i \in A(u_i, x)$, $1 \le i \le m$, $r \in R(u_1 \dots u_m, v)$. Определим отображения

$$(R(u_1 \dots u_m, v) \times K^{\blacktriangleright}(x_1 \dots x_m, y)) \times A(u_1, x_1) \times \dots \times A(u_m, x_m) \to A(v, y),$$

полагая

$$((r, (\alpha_1, \dots, \alpha_m)), a_1, \dots, a_m) \mapsto (r, (\alpha_1, \dots, \alpha_m)) a_1 \dots a_m = r(\alpha_1 a_1) \dots (\alpha_m a_m).$$

Пусть $\overline{\beta}_i = (\beta_{i,1}, \dots, \beta_{i,n_i})$ — мультистрелки из $K^{\blacktriangleright}$, $\overline{a}_i = (a_{i,1}, \dots, a_{i,n_i})$ — строки, состоящие из элементов множеств $A(w_{i,j}, z_{i,j})$, $r_i \in R(w_{i,1} \dots w_{i,n_i}, u_i)$, и все остальные принадлежности заданы так, чтобы имели смысл все дальнейшие композиции. Будем писать $\alpha_i \overline{\beta}_i$ вместо строки $(\alpha_i \beta_{i,1}, \dots, \alpha_i \beta_{i,n_i})$ (опуская при необходимости скобки и запятые) и $\overline{\beta}_i \overline{a}_i$ вместо $(\beta_{i,1} a_{i,1}, \dots, \beta_{i,n_i} a_{i,n_i})$. Тогда имеют место равенства

$$\begin{aligned}(r r_1 \dots r_m, (\alpha_1 \overline{\beta}_1, \dots, \alpha_m \overline{\beta}_m)) \overline{a}_1 \dots \overline{a}_m = (r r_1 \dots r_m)(\alpha_1 \overline{\beta}_1 \overline{a}_1) \dots (\alpha_1 \overline{\beta}_1 \overline{a}_1) = \\ = r(r_1(\alpha_1 \overline{\beta}_1 \overline{a}_1)) \dots (r_m(\alpha_1 \overline{\beta}_1 \overline{a}_1)) = r(\alpha_1(r_1 \overline{\beta}_1 \overline{a}_1)) \dots (\alpha_m(r_m \overline{\beta}_1 \overline{a}_1)) = \\ = (r, (\alpha_1, \dots, \alpha_m))((r_1, \overline{\beta}_1) \overline{a}_1) \dots ((r_m, \overline{\beta}_m) \overline{a}_m).\end{aligned}$$

Далее, пусть $\sigma \in \Sigma_m$. Тогда

$$((r,(\alpha_1,\dots,\alpha_m))\sigma)a_1\dots a_m = (r\sigma,(\alpha_1,\dots,\alpha_m)\sigma)a_1\dots a_m =$$
$$= (r\sigma,(\alpha_{\sigma^{-1}(1)},\dots,\alpha_{\sigma^{-1}(m)}))a_1\dots a_m = (r\sigma)(\alpha_{\sigma^{-1}(1)}a_1)\dots(\alpha_{\sigma^{-1}(m)}a_m) =$$
$$= r(\alpha_1 a_{\sigma(1)})\dots(\alpha_m a_{\sigma(m)}) = (r,(\alpha_1,\dots,\alpha_m))a_{\sigma(1)}\dots a_{\sigma(m)}.$$

После Z-линеаризации получим искомую $R \otimes ZK^{\blacktriangleright}$-алгебру.

Обратно, пусть имеется $R \otimes ZK^{\blacktriangleright}$-алгебра A. Если $\alpha_i : x_i \to x$ — морфизмы K, $1 \le i \le m$, $r \in R(u_1\dots u_m, v)$, $a_i \in A(u_i, x_i)$, то из свойств операций композиции в алгебре и мультикатегории следует равенство

$$(r \otimes (\alpha_1,\dots,\alpha_m))a_1\dots a_m = (r \otimes (1_x,\dots,1_x))((1_{u_1} \otimes \alpha_1)a_1)\dots((1_{u_m} \otimes \alpha_m)a_m).$$

Таким образом, для каждого $x \in \mathrm{Ob}(K)$ можно определить структуру R-алгебры на семействе $A(x) = \{A(u,x) | u \in \mathrm{Ob}(K)\}$, полагая

$$ra_1\dots a_m = (r \otimes (1_x,\dots,1_x))a_1\dots a_m.$$

Непосредственно проверяется, что соответствие $x \mapsto A(x)$ есть функтор из K в $\mathrm{Alg}_Z(R_\Sigma)$. Доказательство завершается прямой проверкой того, что описанные соответствия функториальны и взаимно обратны. □

Следствие 1. Пусть K — произвольная категория, Z — коммутативная операда, причем категория $\mathrm{Alg}(Z)$ рассматривается с естественной структурой строго моноидальной Σ-категории. Тогда категория $\mathrm{Alg}_Z(ZK^{\blacktriangleright}_\Sigma)$ эвивалентна категории функторов из K в категорию коммутативных моноидов в $\mathrm{Alg}(Z)$.

Доказательство. Рассмотрим Z-линейную мультикатегорию R с одним объектом (т. е. операду), в которой $R(n)$ — свободная Z-алгебра с базисом из одного элемента e_n, причем для каждого $\sigma \in \Sigma_n$ имеется равенство $e_n\sigma = e_n$ и $e_m e_{n_1}\dots e_{n_m} = e_{n_1+\dots+n_m}$. Тогда $R \otimes M \cong M$ для любой Σ-мультикатегории M, так что $\mathrm{Alg}_Z(R \otimes ZK^{\blacktriangleright}) \cong \mathrm{Alg}_Z(ZK^{\blacktriangleright})$. Далее, категория $\mathrm{Alg}_Z(R_\Sigma)$ эквивалентна категории коммутативных моноидов в $\mathrm{Alg}(Z)$. Этот факт хорошо известен в случае, когда $\mathrm{Alg}(Z)$ — категория модулей над коммутативным кольцом, но для алгебр над коммутативной операдой доказательство почти такое же. □

Приведенный ниже частный случай этого следствия (для операд) доказан в [5]. Для упрощения обозначений, операда $G^{\blacktriangleright}$, строящаяся по моноиду G, обозначается тем же символом G.

Следствие 2. Пусть Z — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей, G — моноид. Через ZG обозначим операду с компонентами $ZG(n) = Z[G^n]$ (полугрупповая алгебра полугруппы G^n). Тогда многообразие Z-линейных ZG-алгебр $\mathrm{Alg}(ZG)$ рационально эквивалентно многообразию алгебр следующего вида: это категория, объектами которой являются коммутативные ассоциативные Z-алгебры (без единицы, если $ZG(0)$ пусто) с операцией умножения $x \cdot y$, на которых слева Z-линейно действует полугруппа G, причем $g(x \cdot y) = (gx) \cdot (gy)$ для каждого $g \in G$. Гомоморфизмами таких алгебр будут G-эквивариантные гомоморфизмы ассоциативных Z-алгебр.

Автор выражает благодарность рецензенту за полезные замечания.

Литература

[1] Тронин С.Н. *Естественные мультипреобразования мультифункторов*, Изв. вузов. Матем., № 10, 58–71 (2011).

[2] Тронин С.Н. *Абстрактные клоны и операды*, Сиб. матем. журн. **43** (4), 924–936 (2002).

[3] Тронин С.Н. *Операды и многообразия алгебр, определяемые полилинейными тождествами*, Сиб. матем. журн. **47** (3), 670–694 (2006).

[4] Тронин С.Н. *Мультикатегории и многообразия многосортных алгебр*, Сиб. матем. журн. **49** (5), 1184–1201 (2008).

[5] Тронин С.Н., Копп О.А. *Матричные линейные операды*, Изв. вузов. Матем., № 8, 53–62 (2000).

[6] Kelly G.M., Street R. *Review of the elements of 2-categories*, Category Seminar. Proceedings of Sydney Category Seminar 1972/1973. (Berlin–Heidelberg, Springer Verlag, 1974), pp. 75–103 (Lect. Notes Math. V. 420).

[7] Маклейн С. *Категории для работающего математика* (Физматлит, М., 2004).

[8] Borceux F. *Handbook of categorical algebra* 2. *Categories and structures* (Cambridge University Press, 1994).

[9] Leinster T. *Higher operads, higher categories* (London Math. Soc. Lect. Notes Ser., Cambr. Univ. Press, 2003).

[10] Артамонов В.А. *Клоны полилинейных операций*, УМН **24** (1), 47–59 (1969).

[11] Тронин С.Н. *Алгебры над операдой сфер*, Изв. вузов. Матем., № 3, 72–81 (2010).

[12] Джонстон П. *Теория топосов* (Наука, М., 1986).

[13] Пинус А.Г. *Условные термы и их применение в алгебре и теории вычислений* (Изд-во НГТУ, Новосибирск, 2002).

[14] Hermida C. *Representable multicategories*, Adv. Math. **151** (2), 164–225 (2000).

S.N. Tronin

Professor, Chair of Algebra and Mathematical Logic,

Kazan (Volga Region) Federal University,

18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

`e-mail:` Serge.Tronin@kpfu.ru