Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Институт геологии и нефтегазовых технологий

Кафедра минералогии и литологии

Е.М. Нуриева, А.А. Ескин

КРИСТАЛЛОГРАФИЯ

Учебное пособие
к практическим занятиям по кристаллографии

Казань, 2017

УДК 548.К

*Печатается по решению учебно-методической комиссии
Института геологии и нефтегазовых технологий КФУ
(протокол №3 от 3 февраля 2017 года)*

*Составители:
Нуриева Е.М., Ескин А.А.*

*Рецензенты:
Профессор каф. минералогии и литологии, д.г.-м.н. Бахтин А.И.*

Кристаллография: учебное пособие к практическим занятиям по кристаллографии / Е.М. Нуриева, А.А. Ескин. – Казань: КФУ, 2017. – 94 с.

Учебное пособие составлено с целью дать возможность обучающимся ознакомиться со способами определения элементов симметрии моделей кристаллов, их проектирования на плоскость, оценки пространственного положения граней, определения симметрии кристаллов и символов граней. Приводятся классификации кристаллов по сингониям, категориям, даются приемы описания внешней огранки кристаллов, выбора направления координатных осей и единичной грани, определения символов граней.

Пособие рекомендуется студентам, обучающимся по направлению 05.03.01 геология, при подготовке к занятиям по курсу «Кристаллография» и обучающимся по другим направлениям при изучении курса «Минералогия с основами кристаллографии».

©ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет», 2017
©Нуриева Е.М., Ескин А.А., 2017

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Кристаллография одна из главных фундаментальных наук о Земле, о ее кристаллическом веществе. Кристаллографические знания необходимы обучающимся по многим направлениям: геологам, химикам, физикам, всем, кто изучает кристаллическое вещество.

Во время практических занятий студенты приобретают навыки определения симметрии внешней формы кристалла, умения отражать комплекс элементов симметрии кристалла и особенности огранки кристаллов на плоскости, использовать современную кристаллографическую номенклатуру и символику.

Настоящее пособие составлено с целью дать возможность обучающимся заранее ознакомиться с темой и содержанием очередного занятия, а аудиторное время использовать в основном для закрепления знаний на практике.

Материал разбит на небольшие по объему части, каждая из которых в краткой форме изложена в отдельной главе (всего 9 глав). В тексте приведены рисунки и схемы, которые окажут существенную помощь обучающимся при подготовке к занятиям.

Глава 1. Элементы симметрии в кристаллах

Кристаллами называются твердые тела с упорядоченным внутренним строением на уровне атомов и молекул, т.е. тела, обладающие трехмерно-периодической пространственной атомной структурой, и имеющие вследствие этого при определенных условиях образования форму многогранников. Сетки кристаллической решетки с наибольшей густотой расположения узлов соответствуют **граням** реального кристалла, места пересечения сеток - наиболее плотные узловые ряды - **ребрам** кристаллов, а места пересечения ребер - **вершинам** кристаллов.

Кристаллический многогранник – это многогранник, в котором равные части (грани, ребра) расположены так, что он совмещается целиком сам с собой при помощи некоторых операций симметрических преобразований.

Симметрическим преобразованием называется такое преобразование, в результате которого все равные части фигуры совмещаются друг с другом и фигура совмещается сама с собой.

Элементы симметрии – это геометрические образы симметрических преобразований.

Симметрические преобразования в зависимости от характера преобразования различают I и II рода.

Симметрические преобразования I рода связывают друг с другом конгруэнтно равные фигуры (или их части) совмещающиеся при вращении, то есть правые с правыми, левые с левыми.

Симметрические преобразования II рода связывают друг с другом энантиоморфные (зеркально равные) фигуры (или их части) совмещающиеся при отражении, то есть, правые с левыми, левые с левыми.

1.1. Симметрические преобразования I рода (вращение)

Осью симметрии называется прямая линия, при повороте вокруг которой на некоторый определённый угол α, фигура совмещается сама с собой. Обозначается в учебной символике - символике О.Браве - $\mathbf{L_n}$.

Наименьший угол поворота α, приводящий фигуру к самосовмещению, называется элементарным углом поворота оси.

Число n, показывающее сколько раз элементарный угол поворота оси содержится в 360°, называется порядком оси. n – целое число.

$$n = 360°/\alpha \quad n=1,2,3,4,6.$$

При описании операций симметрии к обозначениям осей симметрии часто добавляют показатель степени, указывающий на число проведенных операций в ниже приведенных примерах на число элементарных поворотов по часовой стрелке.

L_n^1 –один поворот по часовой стрелке на угол α,

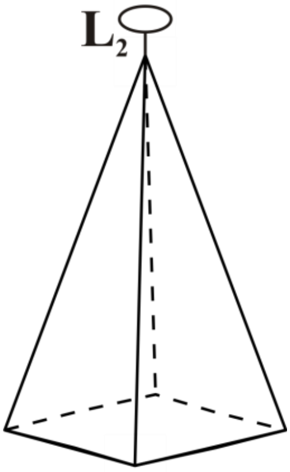
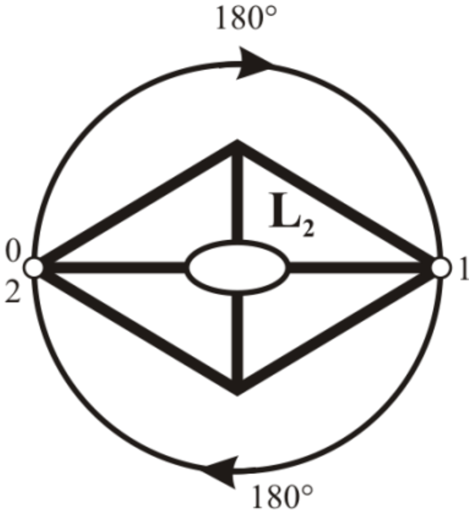
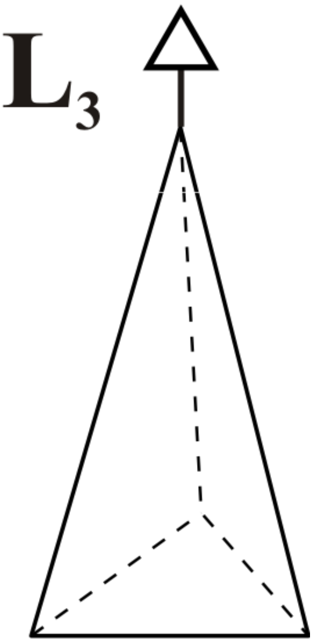
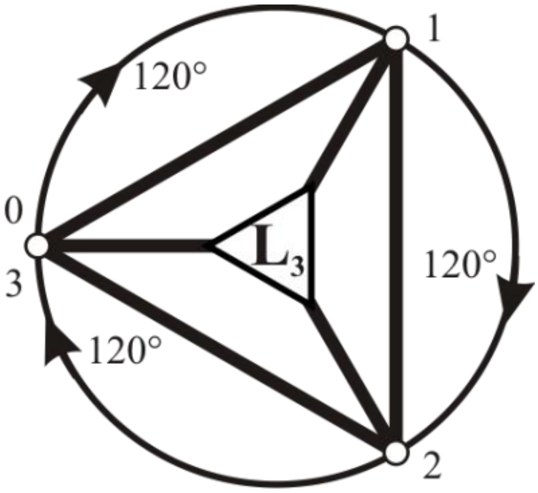
L_n^{-1} –один поворот против часовой стрелки на угол α.

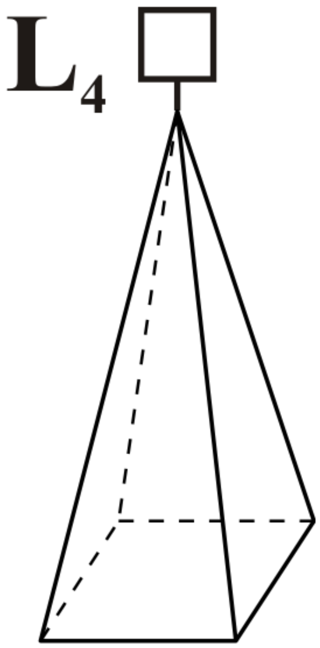
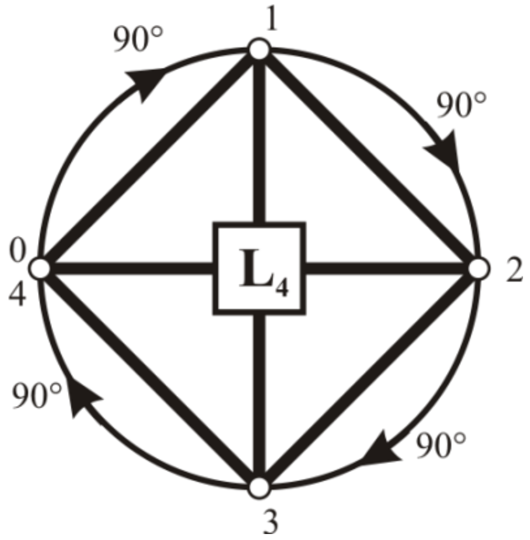
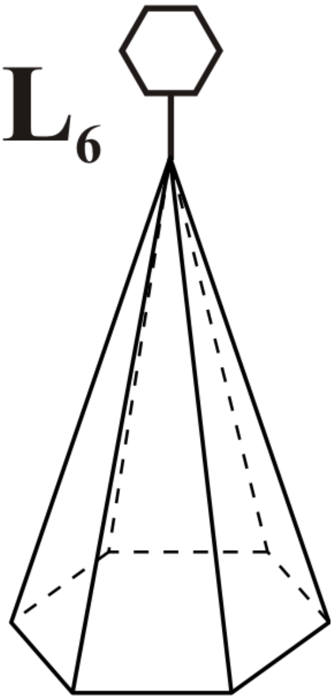
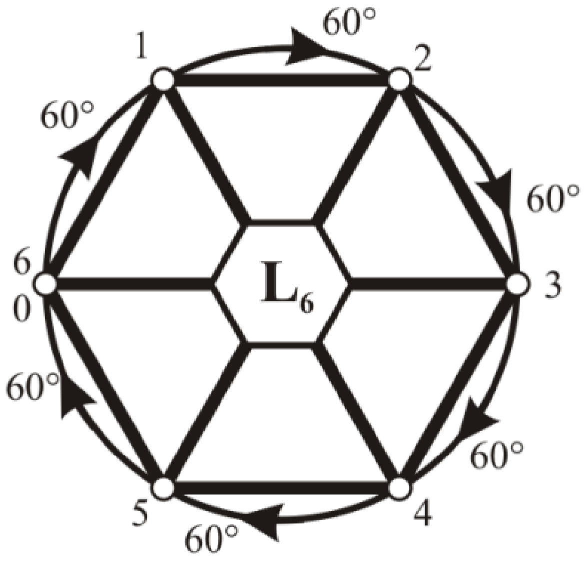
$L_n=\{L_n^1,\ldots L_n^n\}$ группа проведенных операций симметрии (вращения) оси симметрии n порядка.

В кристаллических многогранниках невозможны оси 5 –го и выше 6-го порядка.

В кристаллических многогранниках оси симметрии могут проходить:

- *через центры противоположных граней перпендикулярно к ним;*
- *через середины противоположных ребер перпендикулярно к ним (только L_2);*
- *через противоположные вершины многогранника;*
- *через вершины и центры граней.*

Элементы симметрии Обозначение Угол поворота	Операции вращения
1	2
L_1 $n=1$ $\alpha=360^\circ/1=360^\circ$	$L_1=\{L_1^1\}$
L_2 $n=2$ $\alpha=360^\circ/2=180^\circ$	$L_2=\{L_2^1, L_2^2\}$
Вид сбоку	Вид сверху
	
L_3 $n=3$ $\alpha=360^\circ/3=120^\circ$	$L_3=\{L_3^1, L_3^2, L_3^3\}$
Вид сбоку	Вид сверху
	

1	2
L_4 n=4 $\alpha=360°/4=90^{\circ}$	$L_4=\{L_4^1, L_4^2, L_4^3, L_4^4\}$
Вид сбоку	Вид сверху
	
L_6 n=6 $\alpha=360°/6=60^{\circ}$	$L_6=\{L_6^1, L_6^2, L_6^3, L_6^4, L_6^5, L_6^6\}$
Вид сбоку	Вид сверху
	

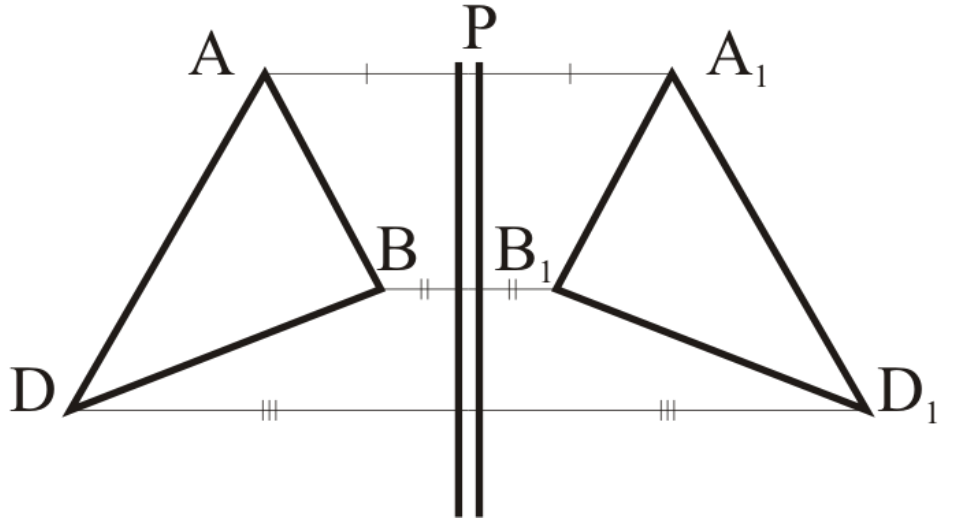
1.2. Симметрические преобразования II рода

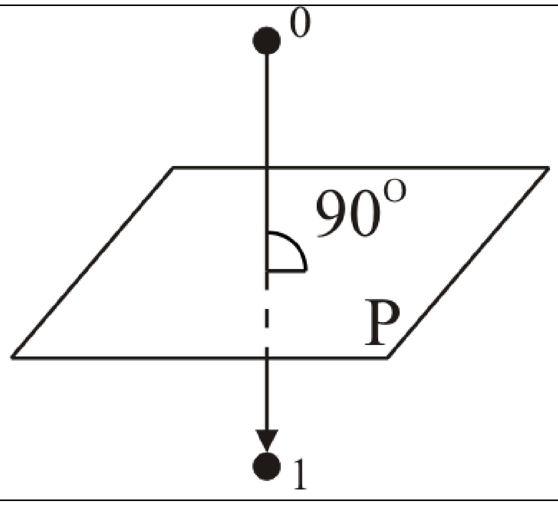
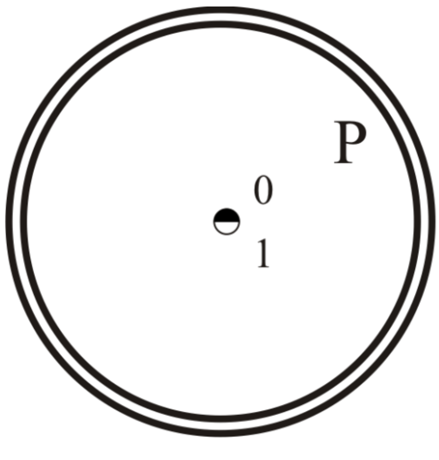
К симметрическим преобразованиям II рода относятся операции отражения. К элементам симметрии II рода относятся плоскости симметрии, центр инверсии и сложные оси симметрии.

Плоскостью симметрии называется плоскость, которая делит фигуру на две равные части, расположенные друг относительно друга как предмет и его зеркальное отражение. Обозначается в символике О.Браве - **Р.**

Плоскости симметрии в кристалле могут проходить:

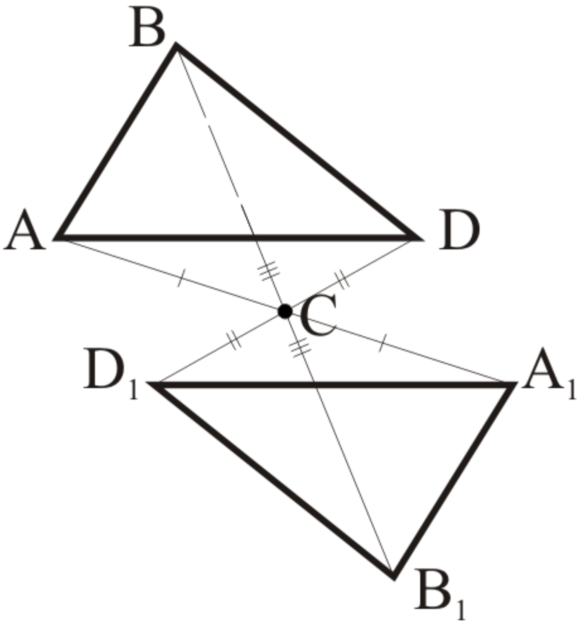
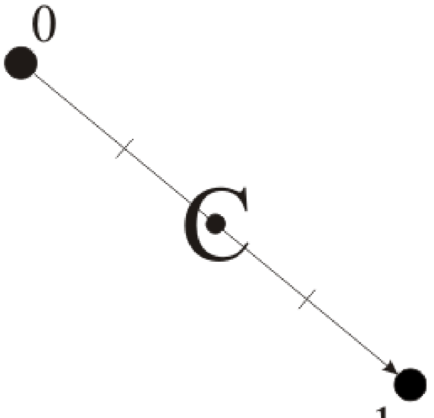
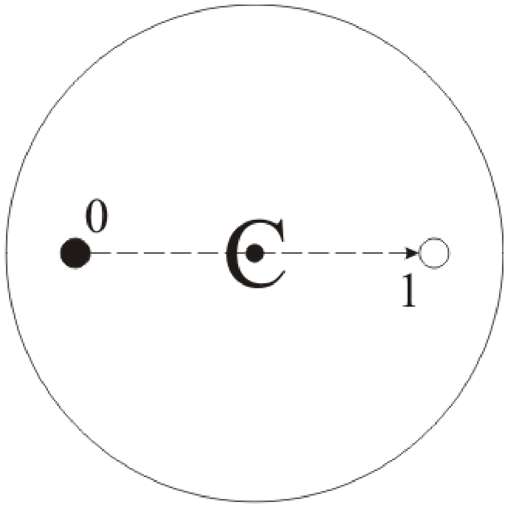
- *через ребра;*
- *перпендикулярно ребрам через их середину;*
- *перпендикулярно граням через их середины;*
- *через вершины.*



Вид сбоку	Вид сверху
	

Центром симметрии (инверсии) называется такая точка внутри фигуры, при отражении в которой всех точек последняя совмещается сама с собой. Обозначается в символике О.Браве - **С**.

Центр инверсии называют центром обратного равенства, потому что каждая грань при наличии центра инверсии должна иметь равную себе и обратно параллельную грань.

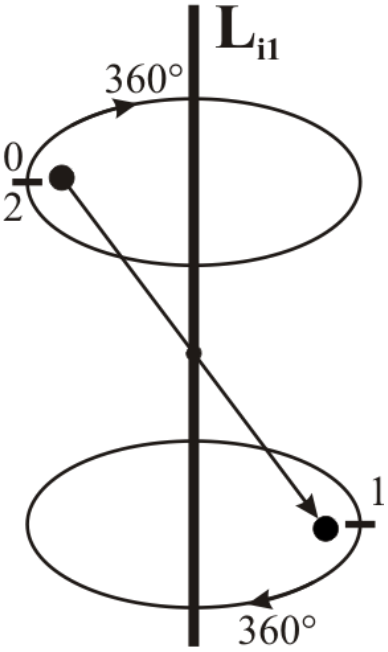
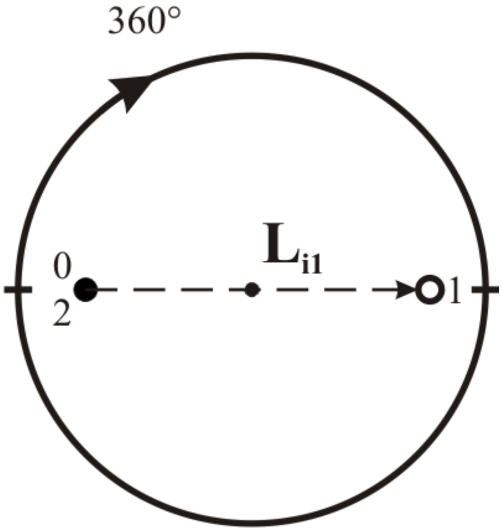
<table>
<tr><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td>Вид сбоку</td><td>Вид сверху</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

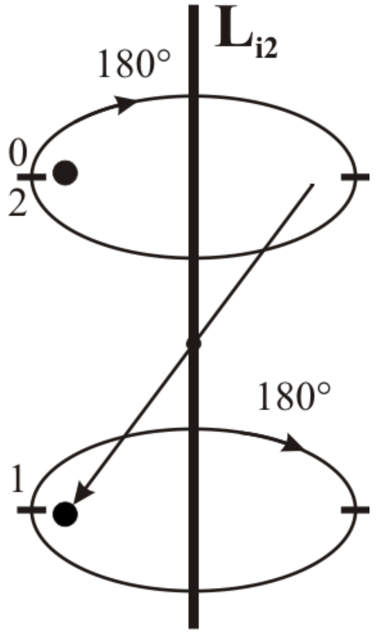
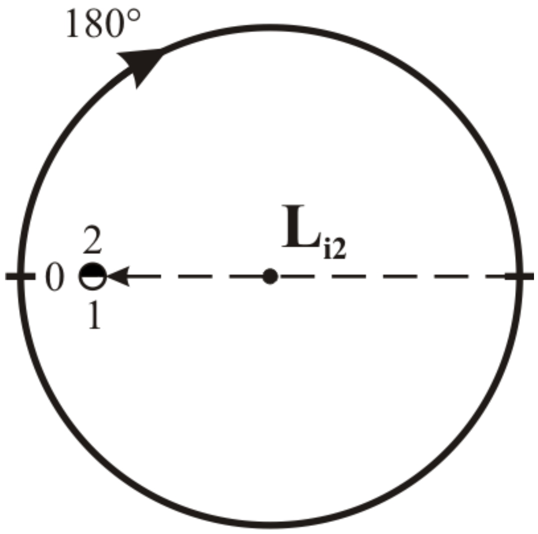
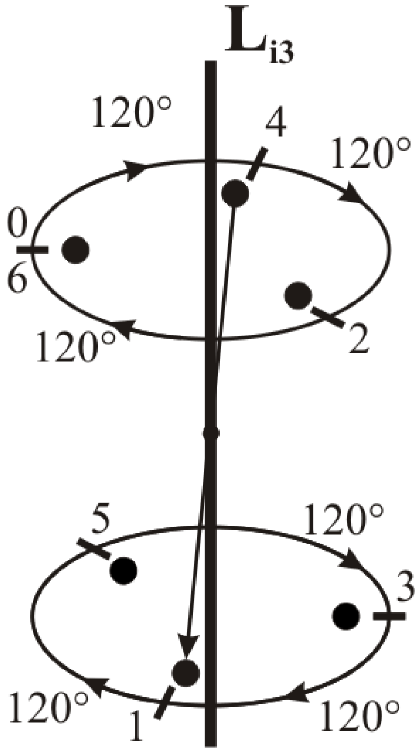
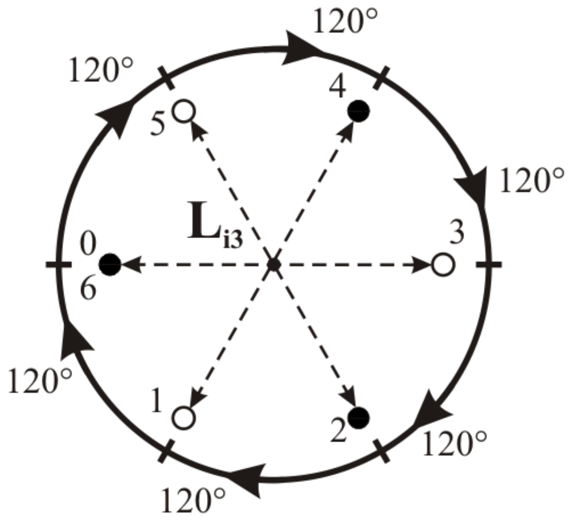
1.3. Сложные элементы симметрии (совокупность операций вращения и отражения)

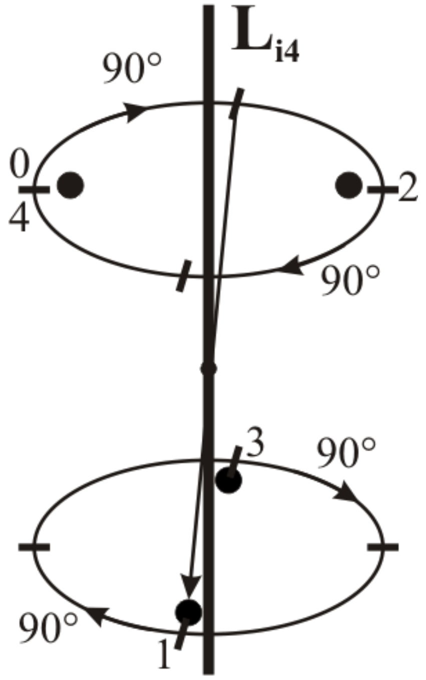
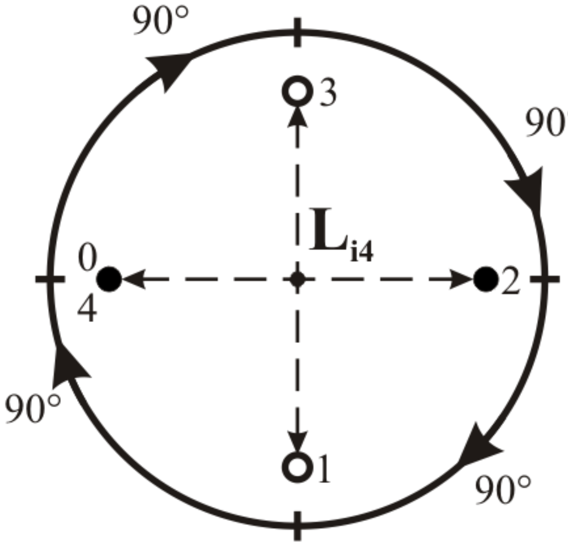
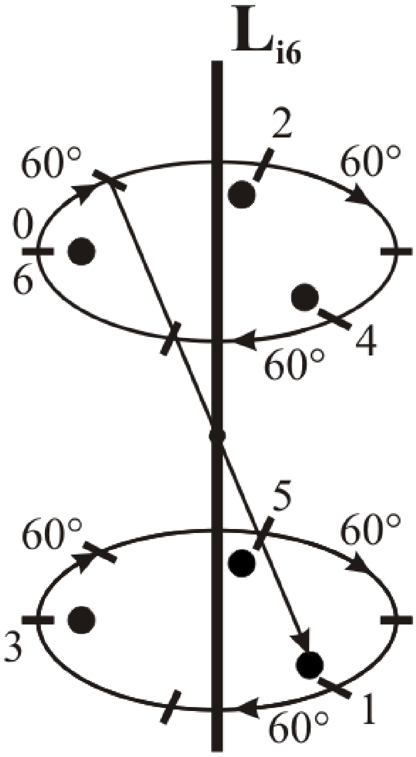
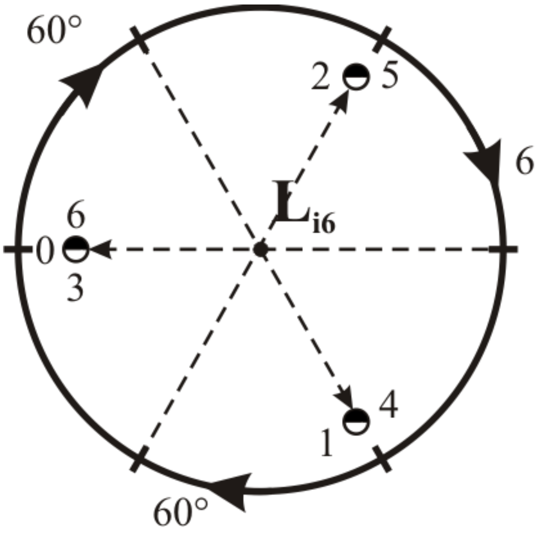
Инверсионной осью симметрии называется прямая линия, при повороте вокруг которой на некоторый определенный угол α с последующим отражением в центральной точке фигуры, как в центре инверсии, фигура совмещается сама с собой.

Обозначается L_{in}, **где n=1,2,3,4,6.**

$L_{in}=\{L_{in}^{1},\dots L_{in}^{m}\}$ - группа проведенных операций симметрии (совокупности операций вращения и отражения в центре симметрии) инверсионной оси симметрии n порядка.

Элементы симметрии Обозначение, угол поворота	Операции вращения и отражения
1	2
L_{i1} n=1 $\alpha=360°/1=360°$	$L_{i1}=\{L_{i1}^{1}, L_{i1}^{2}\}$
Вид сбоку	Вид сверху
	

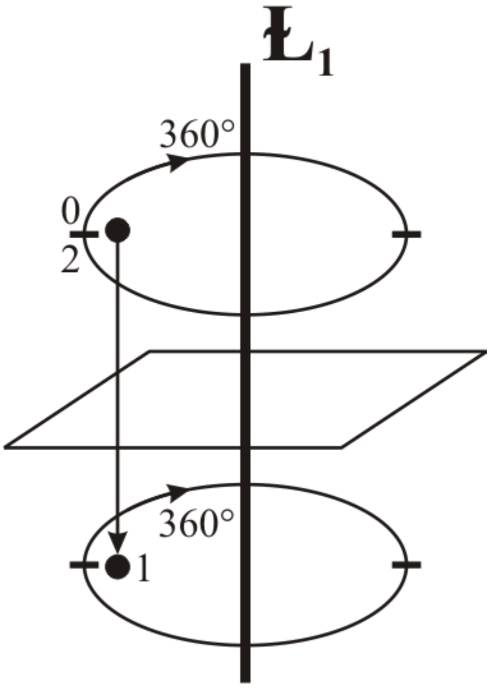
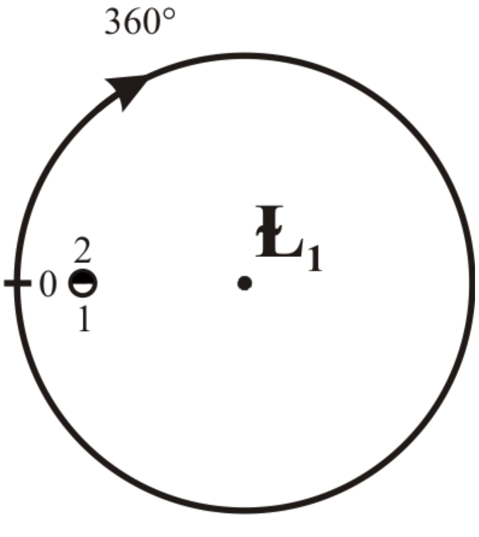
1	2
L_{i2} n=2 α=360°/2=180°	$L_{i2}=\{L_{i2}^{1}, L_{i2}^{2}\}$
Вид сбоку	Вид сверху
	
L_{i3} n=3 α=360°/3=120°	$L_{i3}=\{L_{i3}^{1}, L_{i3}^{2}, L_{i3}^{3}, L_{i3}^{4}, L_{i3}^{5}, L_{i3}^{6}\}$
Вид сбоку	Вид сверху
	

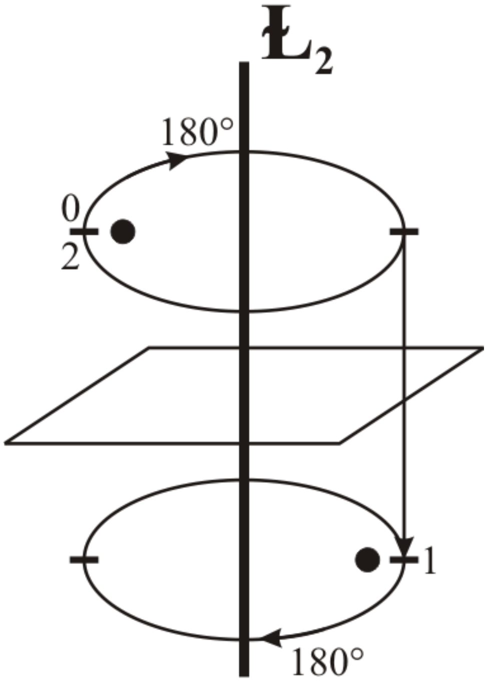
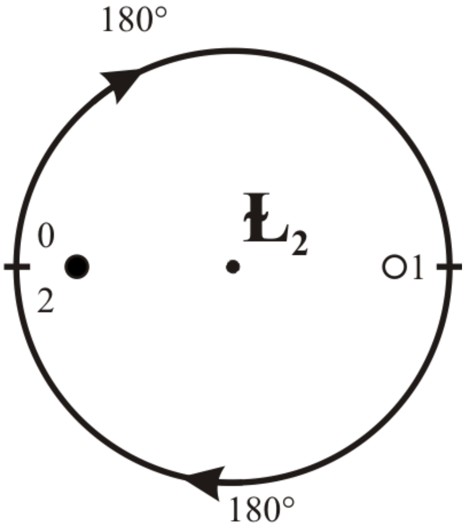
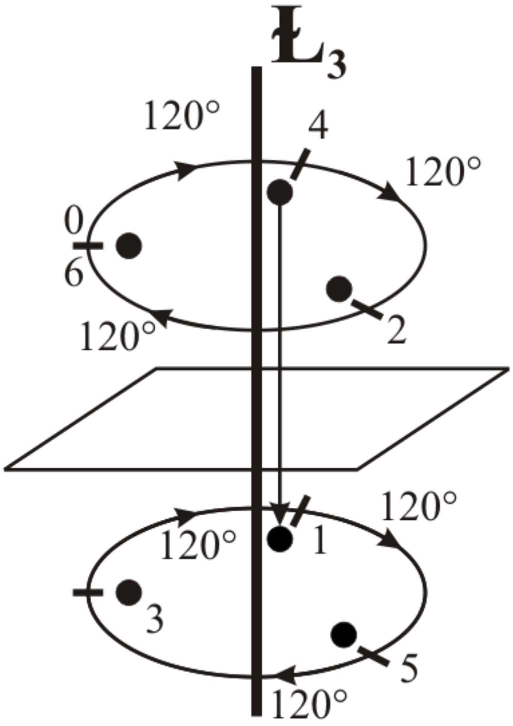
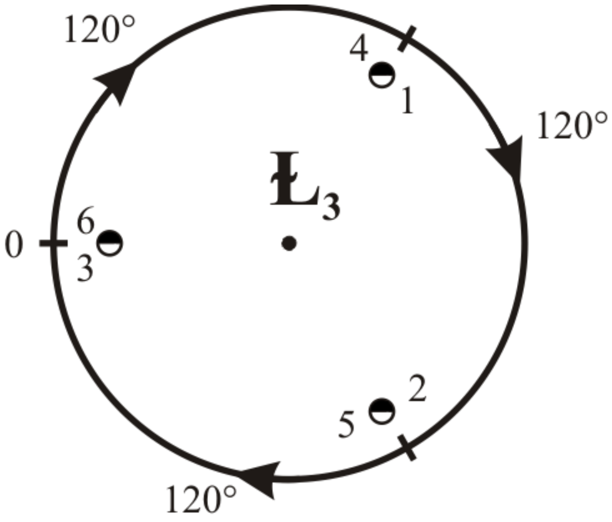
1	2
L_{i4} n=4 α=360°/4=90°	$L_4=\{L_{i4}^1, L_{i4}^2, L_{i4}^3, L_{i4}^4\}$
Вид сбоку	Вид сверху
	
L_{i6} n=6 α=360°/6=60°	$L_{i6}=\{L_{i6}^1, L_{i6}^2, L_{i6}^3, L_{i6}^4, L_{i6}^5, L_{i6}^6\}$
Вид сбоку	Вид сверху
	

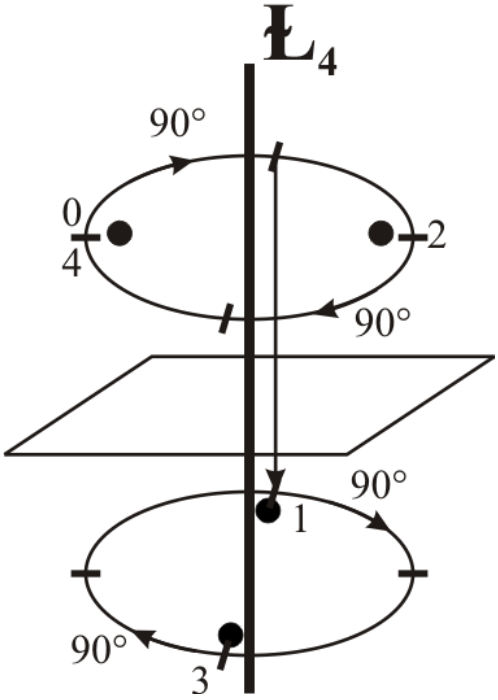
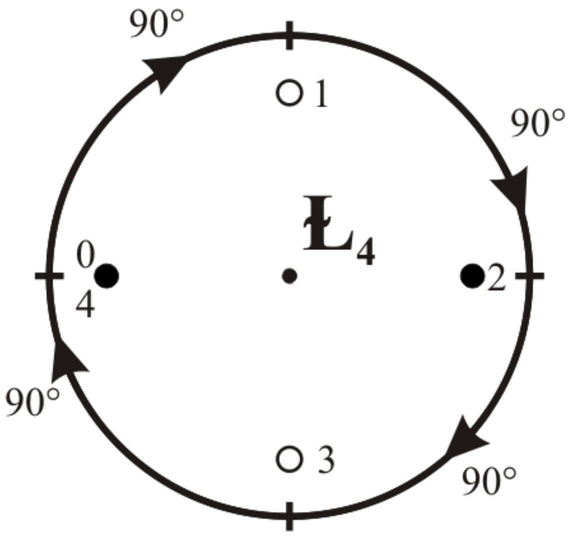
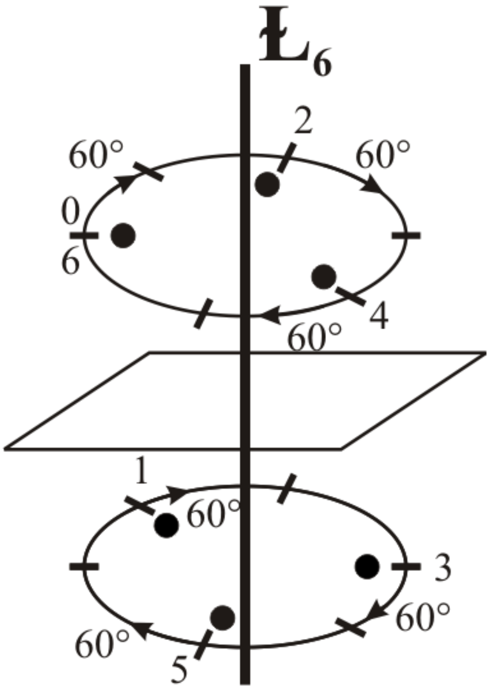
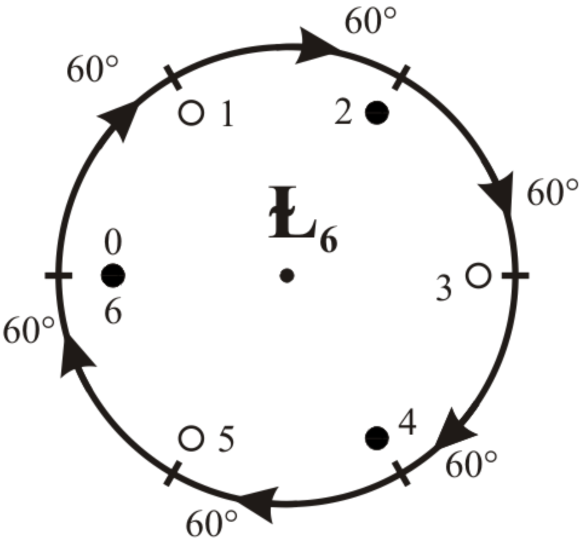
Зеркально-поворотной осью называется прямая линия, при повороте вокруг которой на некоторый угол α с последующим или предварительным отражением в перпендикулярной к ней плоскости, фигура совмещается сама с собой.

Ł_n, где n=1,2,3,4,6 (порядок оси).

$\text{Ł}_1=\{\text{Ł}_n^{\,1}, \ldots, \text{Ł}_n^{\,m}\}$ группа проведенных операций симметрии (совокупности операций вращения и отражения в плоскости симметрии) зеркально-поворотной оси симметрии n порядка.

1	2
Ł_1 n=1 $\alpha=360°/1=360°$	$\text{Ł}_1=\{\text{Ł}_1^{\,1}, \text{Ł}_1^{\,2}\}$
Вид сбоку	Вид сверху
	

1	2
Ł$_2$ $n=2$ $\alpha=360°/2=180°$	Ł$_2$={Ł$_2^1$, Ł$_2^2$}
Вид сбоку	Вид сверху
	
Ł$_3$ $n=3$ $\alpha=360°/3=120°$	Ł$_3$={Ł$_3^1$, Ł$_3^2$, Ł$_3^3$, Ł$_3^4$, Ł$_3^5$, Ł$_3^6$}
Вид сбоку	Вид сверху
	

1	2
Ł_4 n=4 $\alpha=360°/4=90°$	$\text{Ł}_4=\{\text{Ł}_4^1, \text{Ł}_4^2, \text{Ł}_4^3, \text{Ł}_4^4\}$
Вид сбоку	Вид сверху
	
Ł_6 n=6 $\alpha=360°/6=60°$	$\text{Ł}_6=\{\text{Ł}_6^1, \text{Ł}_6^2, \text{Ł}_6^3, \text{Ł}_6^4, \text{Ł}_6^5, \text{Ł}_6^6\}$
Вид сбоку	Вид сверху
	

Вопросы к главе 1

1) Что называется кристаллом?
2) Что подразумевается под симметрическими преобразованиями?
3) Что такое элементы симметрии?
4) Что называется осью симметрии?
5) Что называется плоскостью симметрии?
6) Что называется центром инверсии?
7) Чем отличаются симметрические преобразования I рода от симметрических преобразований II рода?
8) По какому признаку обнаруживается наличие у многогранника центра инверсии?
9) Чем отличаются сложные оси симметрии от простых осей симметрии?
10) Чем отличаются инверсионные оси симметрии от зеркально-поворотных осей симметрии?

Задания к главе 1

1) Сравните действие осей симметрии 6 и 3 порядка.
2) Сравните действие осей симметрии 4 и 2 порядка.
3) Сравните действие осей симметрии 6 и 2 порядка.
4) Какой инверсионной оси эквивалентно действие плоскости симметрии.
5) Какой инверсионной оси эквивалентно действие центра инверсии.
6) Определите, как связаны инверсионные оси и зеркально-поворотные оси симметрии.

Глава 2. Кристаллографические проекции

2.1. Сферическая проекция.

Для построения сферической проекции строится сфера проекций - сфера произвольного радиуса, описанная вокруг кристалла, точнее вокруг его центра тяжести т.О.

т.N - северный полюс сферы проекций.

т.S - южный полюс сферы проекций.

Ось симметрии кристалла переносим путем параллельного переноса ее таким образом, чтобы она проходила через центр сферы т.О. Она пересечет сферу проекций в т.А, которая будет называться **полюсом направления** или **сферической проекцией направления вектора ОА.**

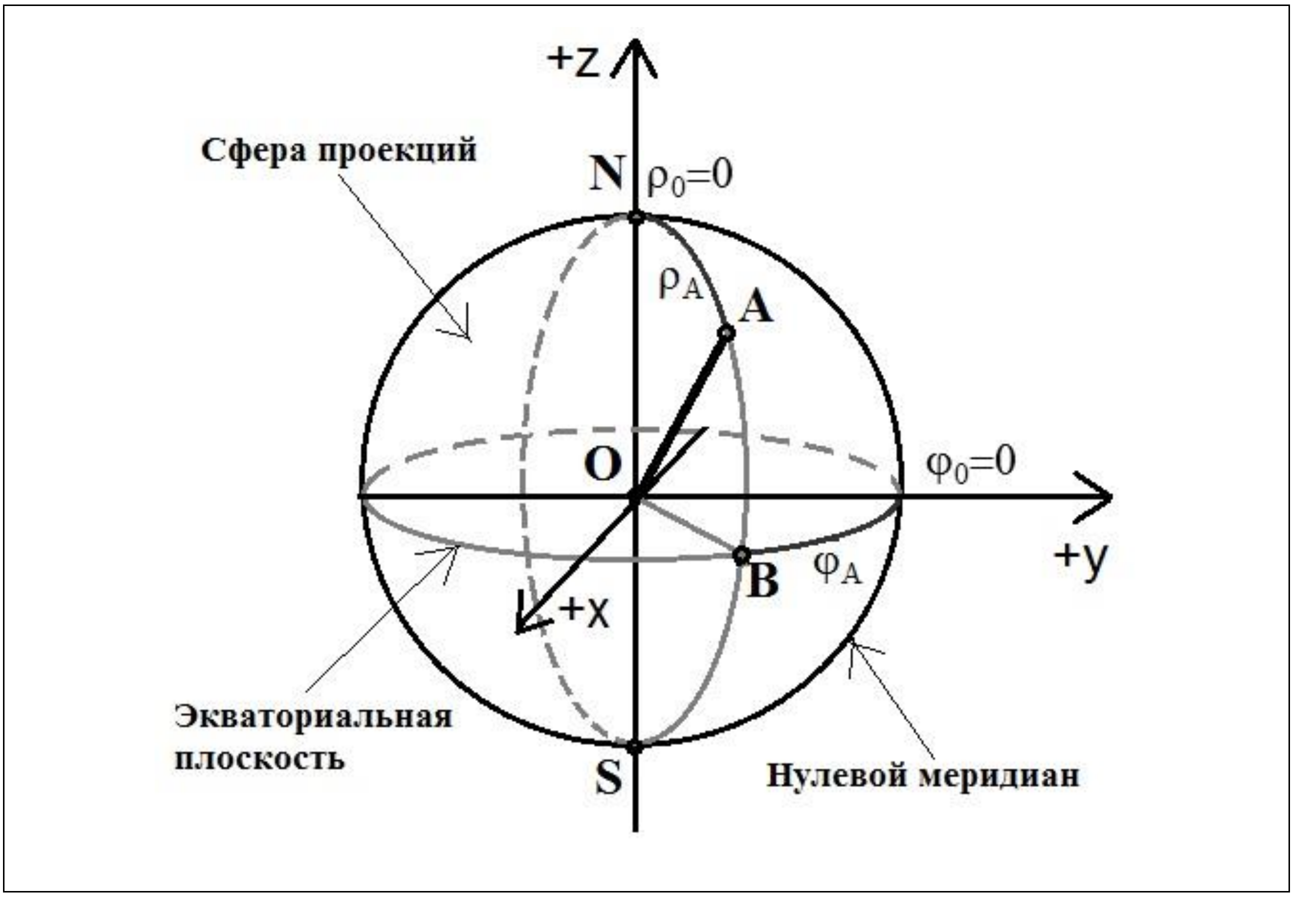
Через северный полюс, т.А и южный полюс проведем меридиан. Точка пересечения экваториальной дуги и меридиана - т.В. От нулевого меридиана к т.В по экваториальной дуге отсчитаем угловое расстояние φ_A – долготу. φ - долгота – сферическая координата, определяемая по экваториальной дуге по часовой стрелке ($0^o \leq \varphi \leq 360^o$).

От северного полюса к т.А по меридиану отсчитываем угловое расстояние ρ_A - широту – **полярное расстояние**. ρ - широта - сферическая координата, отсчитываемая от северного полюса N к южному полюсу S по меридиану ($0^o \leq \rho \leq 180^o$).

Таким образом *сферическая проекция оси симметрии* - точка А будет зафиксирована в пространстве двумя сферическими координатами (φ_A, ρ_A).

Плоскость симметрии кристалла, содержащая ось симметрии, пересечет сферу проекций по дуге NABSN. Полученная дуга будет *сферической проекцией плоскости симметрии*.

Если в кристалле присутствует центр инверсии, то он в проекции совпадет *с центром сферы проекций* т.О.

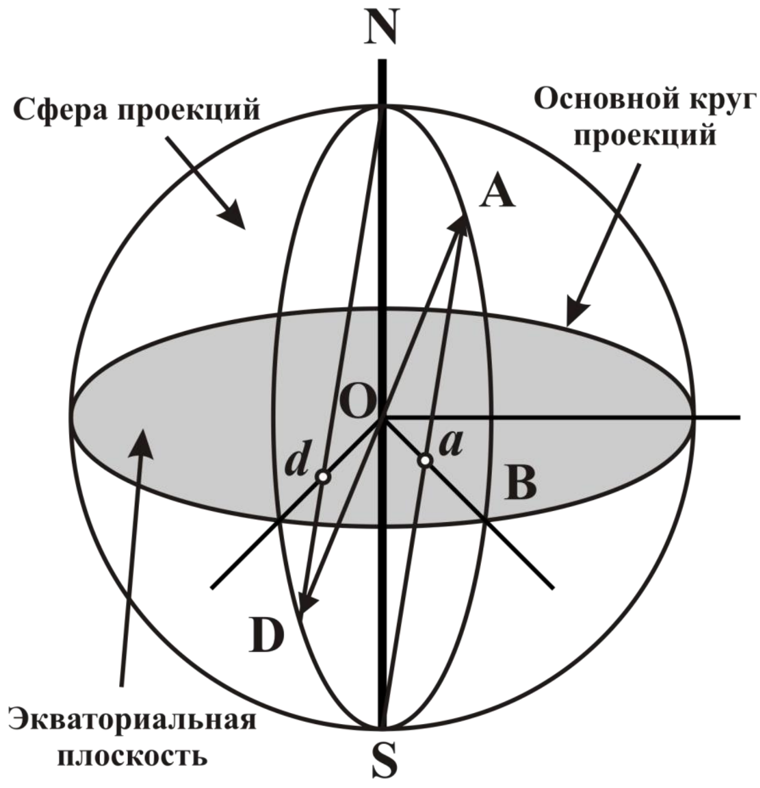


2.2. Стереографическая проекция

Строим сферу проекций вокруг кристалла с центром в т.O и проводим экваториальную плоскость. Проекция изучаемой оси симметрии на сферу проекций - т.A находится в северной полусфере. Соединяем южный полюс S с точкой A.

Точка ***a*** – пересечение экваториальной плоскости и AS – стереографическая проекция направления OA.

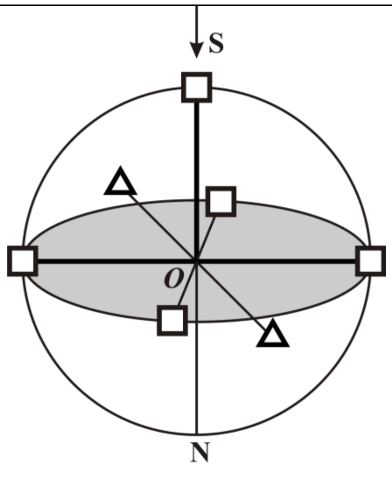
Если проекция оси симметрии находится в южной полусфере - точка D, то ее соединяем с северным полюсом N. Точка ***d*** - пересечение экваториальной плоскости и DN – стереографическая проекция направления OD.

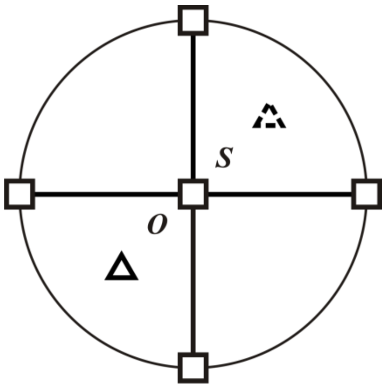


Если ось симметрии направлена вертикально и совпадает с северным или южным полюсами, т.е. перпендикулярно (нормально) к плоскости проекций, то ее стереографическая проекция (точка) окажется в центре круга проекций.

Если ось симметрии направлена наклонно к экваториальной плоскости, то ее проекцией будет являться точка внутри круга проекций.

Если ось симметрии лежит в экваториальной плоскости, то ось обозначают линией с соответствующими ее порядку значками, расположенными на круге проекций.



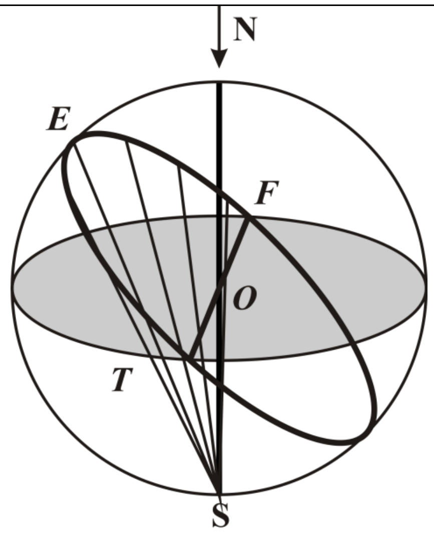
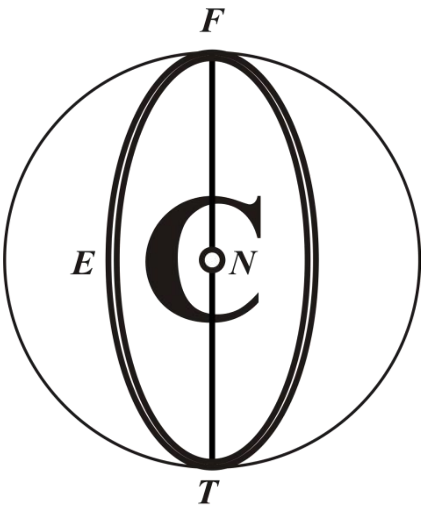


На стереограммах проекции плоскостей симметрии изображаются двойной линией.

В случае наклонной плоскости симметрии проекцией будет дуга.

В случае горизонтальной плоскости симметрии, совпадающей с экваториальной плоскостью, проекция повторит круг проекций.

В случае вертикальной плоскости симметрии, проходящей через северный и южный полюса, проекцией будет диаметр круга проекций.

Обозначения элементов симметрии на стереографической проекции

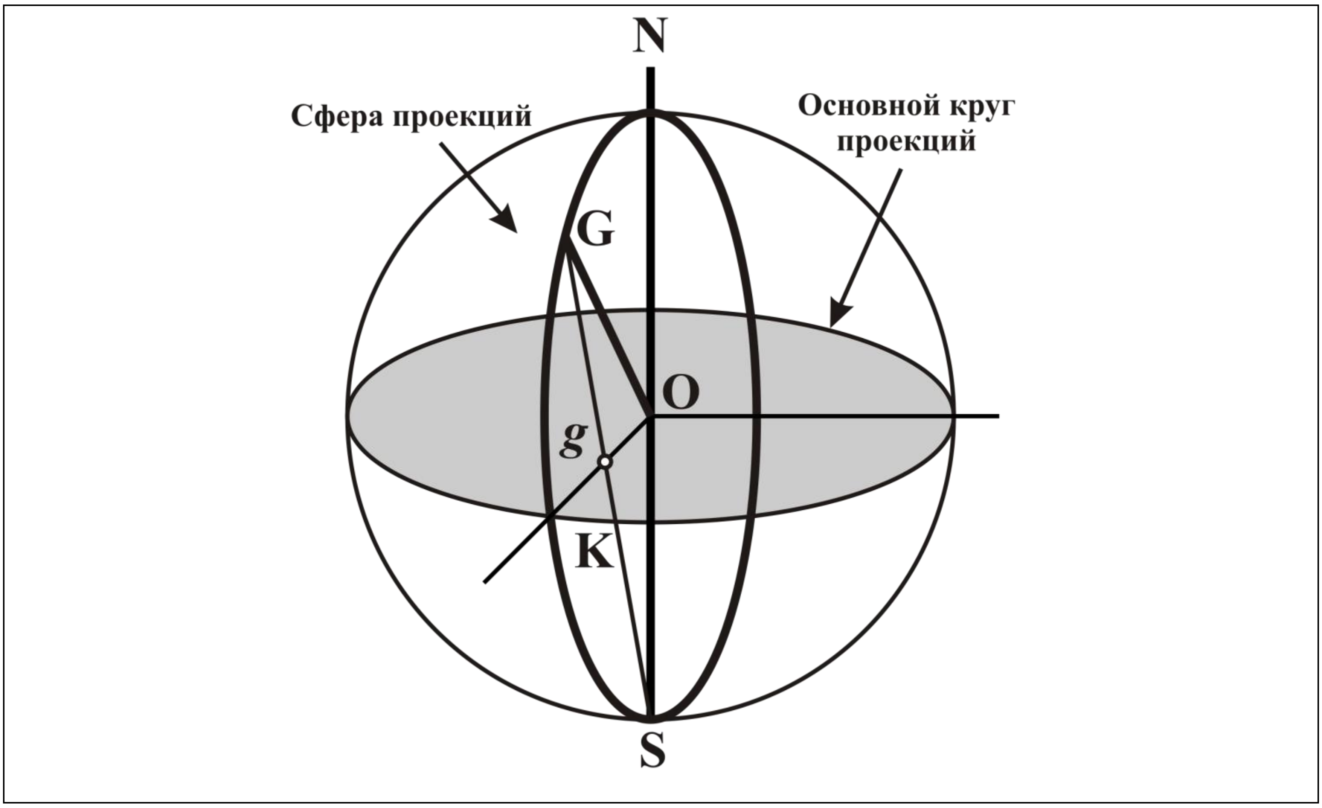
Элемент симметрии	Расположение относительно плоскости проекций	
	Перпендикулярно и наклонно	Параллельно
L_2	⬮	0——0
L_3	△	
L_4	□	□——□
L_6	⬡	
L_{i3}	◬	
L_{i4}	▨	

L_{i6}	⬢	
P	═	◎
C	C	

2.3. Гномостереографическая проекция

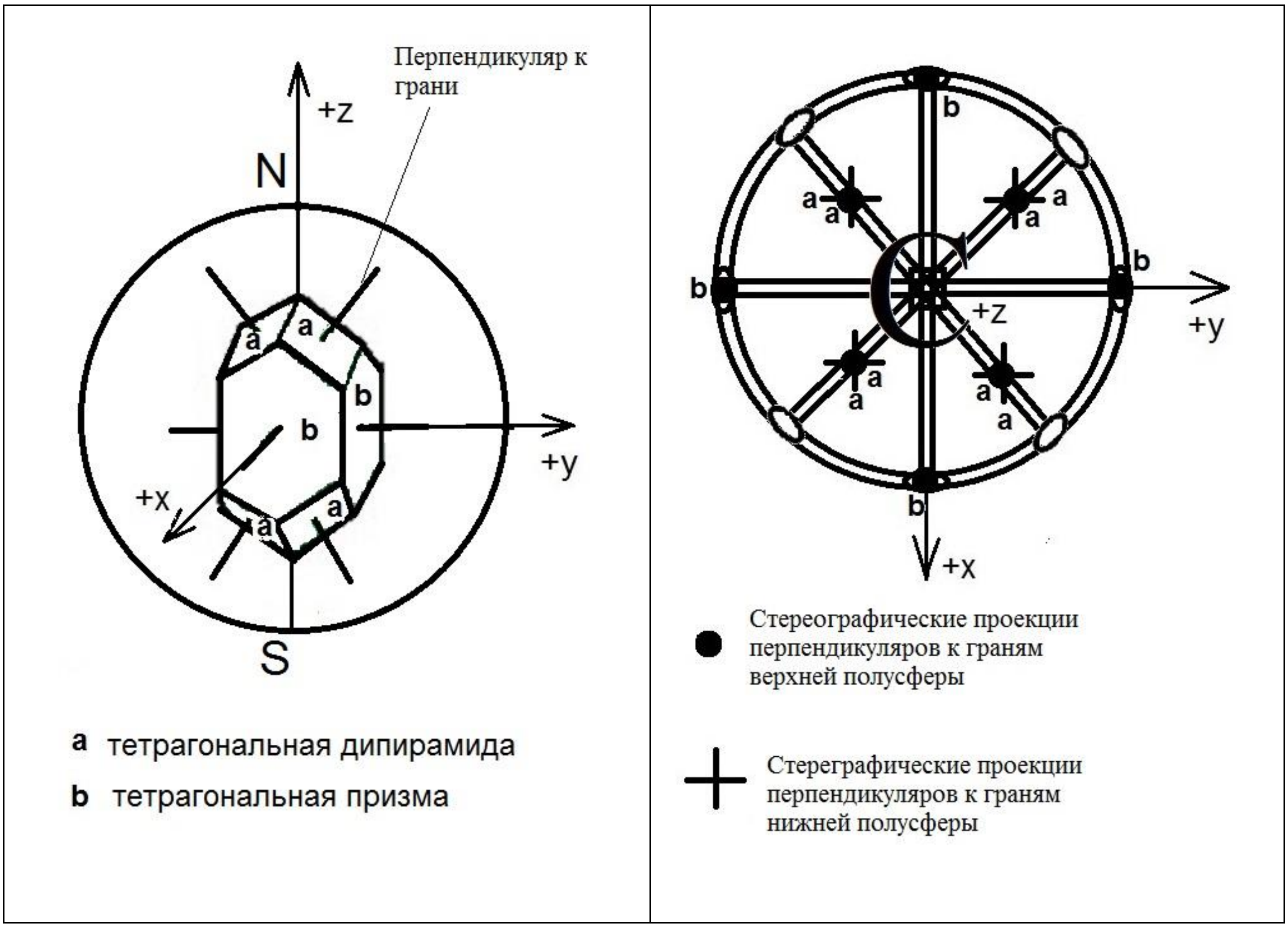
Построив стереографические проекции элементов симметрии кристалла, начинаем строить проекции граней кристалла.

Если будем проецировать грани кристалла в виде плоскостей, пересекающих сферу проекций, то стереограмма окажется нечитаемой и неинформативной из-за большого количества линий и дуг.



К грани проводят перпендикуляр, который пересечет сферу проекций в точке ***G*** со сферическими координатами (φ, ρ). Эту точку проецируем на плоскость проекций и таким образом получаем гномостереографическую проекцию грани – точку ***g*** (пересечение лучей GS и OK).

Рассмотрим кристалл с формулой симметрии L_44L_25PC. В нем наблюдаются грани 2 сортов: *a* – грани тетрагональной дипирамиды, *b* – грани тетрагональной призмы. Строим стереографическую проекцию элементов симметрии кристалла, затем к каждой из граней простых форм строим перпендикуляры и проецируем их на плоскость проекций.



При проецировании граней кристаллов выявлена интересная закономерность. Если грани пересекаются по параллельным ребрам и образуют призмы с разными сечениями, то нормали к этим граням будут располагаться в одной плоскости, проходящей через центр тяжести кристалла.

Грани, пересекающиеся по параллельным ребрам, называются таутозональными. (tautos (греч.) - «тот же самый»).

Совокупность таутозональных граней называется «зоной» или поясом.

Осью зоны называется направление, параллельное ребрам, по которым пересекаются таутозональные грани.

1) Если ось зоны расположена вертикально, то проекции всех граней будут расположены на круге проекций;

2) Если ось зоны расположена горизонтально, то проекции всех граней будут располагаться на вертикальном диаметре круга проекций;

3) Если ось зоны расположена наклонно, то проекции всех граней будут лежать на одной дуге большого круга.

Вопросы к главе 2

1) Чем является и как строится сферическая проекция прямой?
2) Чем характеризуется сферическая проекция прямой?
3) Как изображаются стереографические проекции прямых, расположенных относительно основного круга проекций а) вертикально; б) горизонтально, в) наклонно?
4) Чем является и как строится стереографическая проекция плоскости симметрии?
5) Как располагаются стереографические проекции плоскостей симметрии расположенных относительно основного круга проекций а) вертикально; б) горизонтально, в) наклонно?
6) Что такое гномостереографическая проекция плоскости и как она строится?
7) Как изображаются стереографические проекции граней кристалла, расположенных в нижней полусфере проекций?
8) Как изображаются стереографические проекции граней кристалла, расположенных в верхней полусфере проекций?

Глава 3. Взаимодействия симметрических преобразований I и II рода (элементов симметрии)

Рассмотренные симметрические преобразования в реальных кристаллах встречаются в виде определенных совокупностей – групп.

Симметрические преобразования I и II рода кристаллического многогранника оставляют на месте по крайней мере ***одну его точку*, в которой пересекаются все элементы симметрии**. Поэтому группа симметрических преобразований образует **точечную группу симметрии.**

Порядок группы симметрии – это число неэквивалентных симметрических преобразований, образующих группу. Обозначается $\mathbf{G_k}$.

Группа (класс) симметрии кристалла – это совокупность всех различных неэквивалентных симметрических операций – сочетаний элементов симметрии, преобразующих фигуру саму в себя.

Правильное строение кристаллических многогранников обуславливает определенные совокупности элементов симметрии, взаимосвязанных друг с другом. Их взаимодействия рассматриваются в теоремах о сложении элементов симметрии и их следствиях.

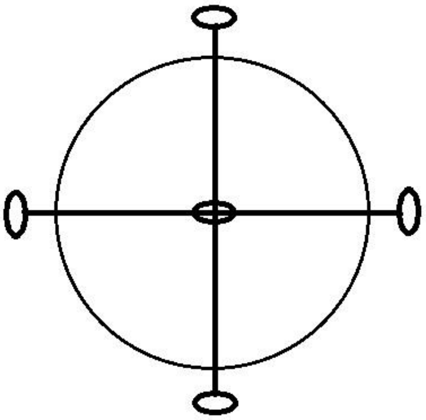
Осевая теорема Эйлера в общем виде:

Взаимодействие двух осей симметрии n-ого порядка, поворотных или инверсионных, приводит к возникновению третьей оси симметрии, проходящей через точку их пересечения.

При этом результирующая ось окажется поворотной, если исходными будут две одинаковые оси (обе поворотные или обе инверсионные) и инверсионной, если исходные оси будут разного типа.

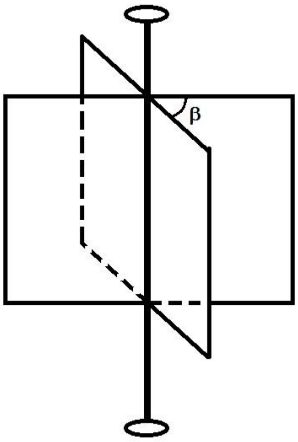
Вариант 1. Взаимодействие симметрических преобразований I рода

При наличии двух пересекающихся осей симметрии всегда следует искать третью равнодействующую ось, проходящую через точку пересечения первых двух.



Вариант 2. Взаимодействие симметрических преобразований II рода

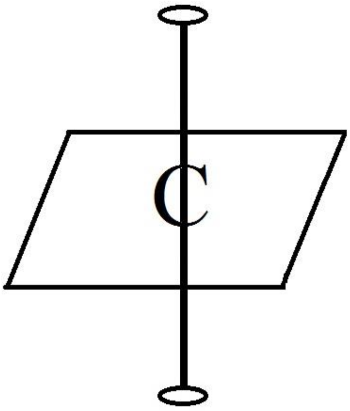
При наличии двух плоскостей (двух инверсионных осей 2-ого порядка), пересекающихся под углом β, всегда следует искать равнодействующую ось, проходящую через линию пересечения плоскостей, с элементарным углом поворота α=2β.



Вариант 3. Взаимодействие симметрических преобразований I и II рода

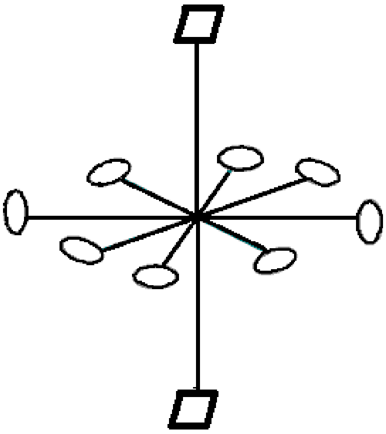
Если взаимодействуют симметрические операции разнородные, то результирующей окажется симметрическая операция II рода: либо плоскость симметрии – инверсионная ось 2-го порядка;

либо центр инверсии.



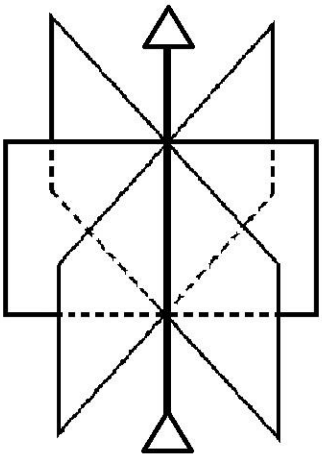
Следствие 1

Если взаимодействует ось симметрии n-ого порядка L_n и перпендикулярно ей ось симметрии 2-го порядка L_2, то осей симметрии 2–ого порядка будет n.



Следствие 2

Если взаимодействует ось симметрии n-ого порядка L_n и вдоль неё плоскость симметрии P, то таких плоскостей, проходящих вдоль L_n, будет n.



Порядок записи формулы симметрии кристалла в обозначениях О.Браве

1. Вначале определяют оси высших порядков, затем оси второго порядка. Ось первого порядка записывается только в том случае, если не обнаружено никаких других элементов симметрии.
2. Количество осей одинакового порядка указывается перед обозначением оси.
3. Далее записывают плоскости симметрии, если они есть.
4. Количество плоскостей симметрии, если их несколько, указывается пред обозначением плоскости симметрии.
5. Самым последним записывается центр инверсии, если он есть.
6. Инверсионные оси следует искать лишь тогда, когда найдены простые оси, плоскости и центр инверсии (или проверено, что их нет).

Вопросы к главе 3

1) О чем говорит осевая теорема Эйлера в общем виде?
2) Какой результат взаимодействия симметрических преобразований I рода?
3) Какой результат взаимодействия симметрических преобразований II рода?
4) Какой результат взаимодействия симметрических преобразований I и II рода?
5) Что является результатом взаимодействия оси n- порядка и перпендикулярно ей оси 2-порядка?
6) Что является результатом взаимодействия оси n порядка и проходящей вдоль нее плоскости симметрии?
7) В каком порядке записываются оси симметрии, если они разного порядка?
8) Где указываются плоскость симметрии в формуле симметрии кристалла?
9) Где указывается центр инверсии в формуле симметрии кристалла?

Глава 4. Сингонии и категории

Рассмотренные симметрические преобразования в реальных кристаллах встречаются в виде определенных совокупностей – групп.

Группа (класс) симметрии кристалла – это совокупность всех различных неэквивалентных симметрических операций – сочетаний элементов симметрии, преобразующих фигуру саму в себя. При том их взаимные расположения подчиняются всем положениям математической теории абстрактных групп.

Эквивалентными одноименными элементами симметрии называются элементы, связанные какими-либо операциями симметрии данного кристалла.

Симметрические преобразования I и II рода кристаллического многогранника оставляют на месте по крайней мере ***одну его точку*, в которой пересекаются все элементы симметрии**. Поэтому группа симметрических преобразований образует **точечную группу симметрии.**

Точечные группы симметрии удовлетворяют всем условиям математической группы.

Порядок группы симметрии – это число неэквивалентных симметрических преобразований, образующих группу. Обозначается $\mathbf{G}_{\mathbf{k}}$

$L_4 = \{L_4^1 ; L_4^2 ; L_4^3 ;L_4^4 \}$ $\mathbf{G}_{\mathbf{k}}$=4

Кратность точечной группы симметрии определяет максимальное количество эквивалентных точек, которое можно получить из одной точки, преобразуя ее всеми операциями симметрии, входящими в группу.

Кратность N соответствует числу граней общей простой формы, характеризующей группу. $\frac{G\text{к}}{G\text{г}}$=N.

Группа может являться подгруппой другой группы, если все элементы симметрии первой группы входят в состав элементов симметрии второй группы и если их множество само образует группу при одинаковом выборе правил сочетания.

Единичным (особым) направлением (E) в кристаллическом многограннике называется такое направление, которое не может быть повторено ни одним из его элементов симметрии.

В зависимости от наличия и числа особых (единичных) направлений кристаллы делятся на кристаллографические группы или **категории**.

К низшей категории относятся группы симметрии с несколькими единичными особыми направлениями.

К средней категории относятся группы симметрии с одним единичным особым направлением.

К высшей категории относятся группы симметрии, в которых нет единичных особых направлений.

Тридцать два класса симметрии объединяются в семь сингоний. Сингония в переводе с греческого языка означает «сходство углов». В одну сингонию относят кристаллы, имеющие одинаковую симметрию элементарной ячейки и одинаковую систему координат.

Сингонией называется группа классов симметрий с единой координатной системой, обладающих одним или несколькими сходными элементами симметрии (с обязательным учетом осей порядка выше 2) при одинаковом числе особых (единичных) направлений.

Всего выделяют семь сингоний: триклинную, моноклинную, ромбическую, тетрагональную, тригональную, гексагональную и кубическую.

Геометрические особенности сингоний и выбор кристаллографических осей координат

Категория	Сингония	Обязательные-элементы сим-симметрии	Единичные направления	Геометрические константы сингоний	Выбор осей координат
1	2	3	4	5	6
Низшая	Триклинная	L_1 или $L_{i1}=C$	Бесконечное количество	$a_0\neq b_0\neq c_0$, $\alpha\neq\beta\neq\gamma\neq 90^\circ$ полная неэквивалентность координатных осей	Оси X, Y, Z выбираются по направлению наиболее ярко выраженных граней кристалла
	Моноклинная	L_2 или $L_{i2}=P$	Бесконечное количество: любое в плоскости $\perp L_{i2}$ или совпадает с L_2	$a_0\neq b_0\neq c_0$, $\alpha=\gamma=90^\circ$, $\beta\neq 90^\circ$ полная неэквивалентность координатных осей	а) Y по L_2; X, Z по направлениям двух непараллельных ребер кристалла. б) Y по $\perp P$; X,Z по направлениям двух ребер $\perp Y$
	Ромбическая	$3L_2$ или $L_2 2P$ $(2L_{i2}=2P)$	Три единичных направления совпадают с L_2 или L_{i2}	$a_0\neq b_0\neq c_0$,$\alpha=\beta=\gamma=90^\circ$ полная неэквивалентность координатных осей	а) X,Y,Z по $3L_2$; б) Z по L_2; если нет L_2, то X,Y по $\perp 2P$.

1	2	3	4	5	6
Средняя	Тетрагональная	L_4 или L_{i4}	Одно единичное направление совпадает с L_4	$a_0=b_0\neq c_0$ $\alpha=\beta=\gamma=90^\circ$ неполная эквивалентность координатных осей	а) Z по L_4; X,Y, по L_2; б) Z по L_4; если нет L_2, то X,Y по ⊥ $2P$. *в)* Z по L_4; если нет L_2 и $2P$, то X,Y ∥ ребрам кристалла
	Тригональная	L_3 или L_{i3}	Одно единичное направление совпадает с L_3	$a_0=b_0\neq c_0$ $\alpha=\beta=90^\circ$, $\gamma=120^\circ$ неполная эквивалентность координатных осей	а) Z по L_3; X,Y,U по L_2; б) Z по L_3; если нет L_2, то X,Y,U по ⊥ $3P$. *в)* Z по L_3; если нет L_2 и $3P$, то X,Y,U ∥ ребрам кристалла
	Гексагональная	L_6 или L_{i6}	Одно единичное направление совпадает с L_6	$a_0=b_0\neq c_0$ $\alpha=\beta=90^\circ$, $\gamma=120^\circ$ неполная эквивалентность координатных осей	а) Z по L_6; X,Y,U по L_2; б) Z по L_6; если нет L_2;, то X,Y,U по ⊥ $3P$. *в)* Z по L_6; если нет L_2 и $3P$, то X,Y,U ∥ ребрам кристалла
Высшая	Кубическая	$4L_3$	Нет единичных направлений	$a_0=b_0=c_0$ $\alpha=\beta=\gamma=90^\circ$ полная эквивалентность координатных осей	а) X,Y,Z по $3L_4$; б) если нет $3L_4$, то X,Y,Z по $3L_{i4}$ в) если нет $3L_4$ *и* $3L_{i4}$, то X,Y,Z по $3L_2$

Вопросы к главе 4:

1) Что такое сингония?
2) Чем отличается категория от сингонии?
3) Что характерно для низшей категории?
4) Что характерно для средней категории?
5) Что характерно для высшей категории?
6) Чем триклинная сингония отличается от тригональной?
7) Чем схожи и чем отличаются тригональная и гексагональная сингония?
8) Чем схожи и чем отличаются ромбическая, тетрагональная и кубическая сингония
9) Как выбираются оси XYZ в тетрагональной сингонии?
10) Как выбираются оси XYZ в кубической сингонии?

Глава 5. 32 класса (вида) симметрии и стереографические проекции их элементов симметрии

Математически доказано, что для конечных кристаллических многогранников возможны всего **32 класса (вида) симметрии,** которые можно получить путем перебора возможных сочетаний элементов симметрии, определяемых теоремами сочетания элементов симметрии.

Выбор возможных сочетаний элементов симметрии, задаваемых теоремами сложения элементов симметрии, будем проводить следующим образом:

1) Примем особое направление за исходное. Будем последовательно присоединять к нему элементы симметрии так, чтобы оно оставалось единичным. Вначале совмещаем с особым (единичным) направлением ось симметрии L_n.

2) Прибавляем центр инверсии С.

3) Присоединяем к исходному виду перпендикулярную плоскость симметрии Р.

4) Прибавляем к исходному виду плоскость симметрии Р, идущую вдоль единичного направления.

5) Присоединяем к исходному виду ось L_2 , перпендикулярную к оси $L_{n.}$

По набору элементов симметрии различают следующие класс (виды) симметрии: примитивный, инверсионно-примитивный, планальный, инверсионно-планальный, аксиальный и планаксиальный.

Класс (вид) симметрии, который состоит только из одной простой оси симметрии любого порядка, называется **примитивным или простейшим**.

Класс (вид) симметрии, который состоит только из одной инверсионной оси симметрии любого порядка, называется **инверсионно-примитивным.**

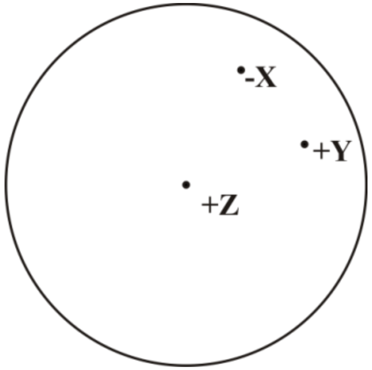
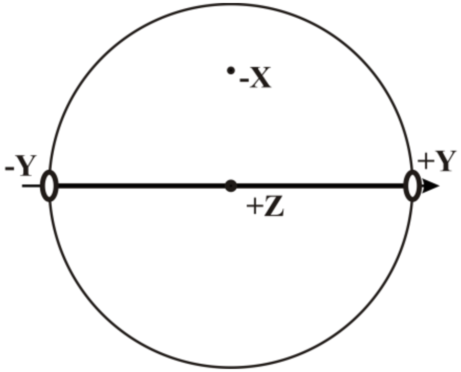
Класс (вид) симметрии, включающий кроме простой оси симметрии еще и плоскости симметрии, идущие вдоль оси симметрии, называется **планальным или плоскостным**. Количество плоскостей симметрии по теореме совпадает с порядком простой оси.

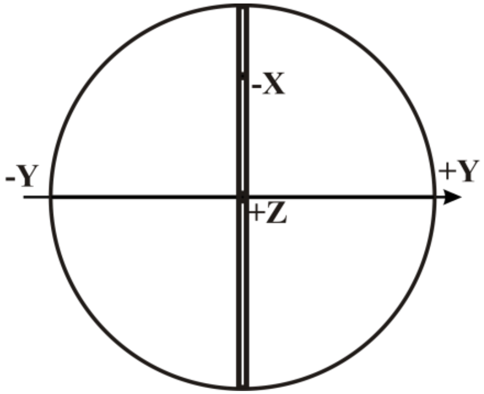
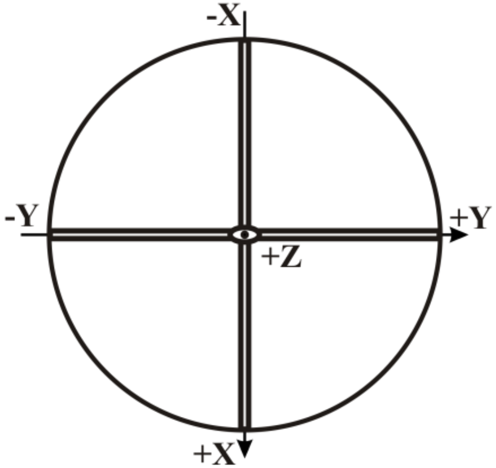
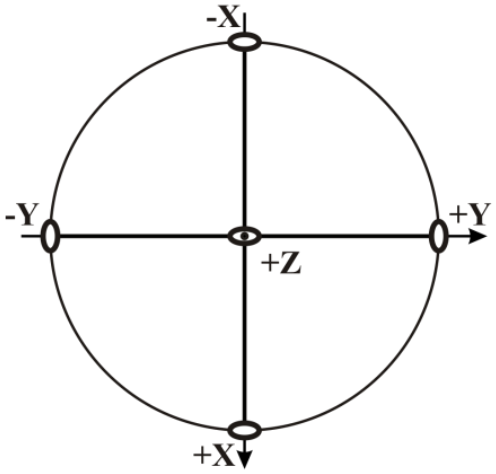
Класс (вид) симметрии, включающий кроме инверсионной оси симметрии еще и плоскости симметрии, идущие вдоль оси симметрии, называется **инверсионно-планальным**. Количество плоскостей симметрии по теореме совпадает с порядком инверсионной оси.

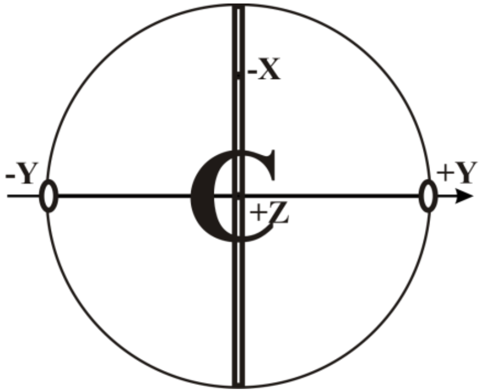
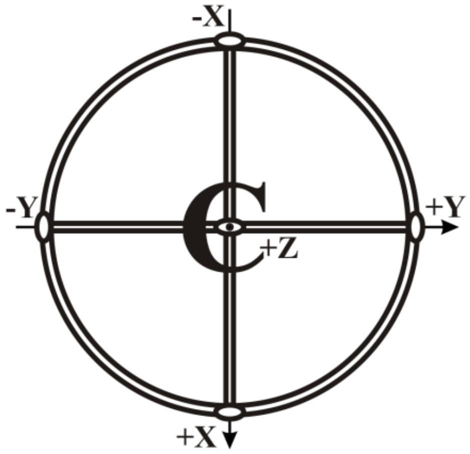
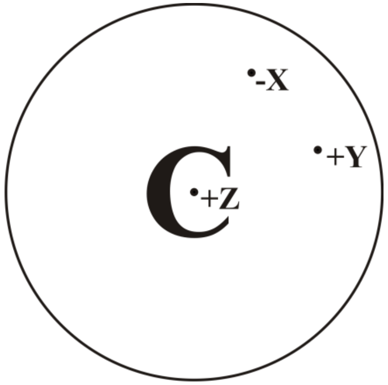
Класс (вид) симметрии, включающий кроме оси симметрии еще и перпендикулярные к ней оси второго порядка, называется **аксиальным или осевым.**

Класс (вид) симметрии, включающий кроме оси симметрии, центр инверсии, плоскости симметрии, идущие вдоль особого направления и перпендикулярные к оси симметрии оси второго порядка, называется **планаксиальным.**

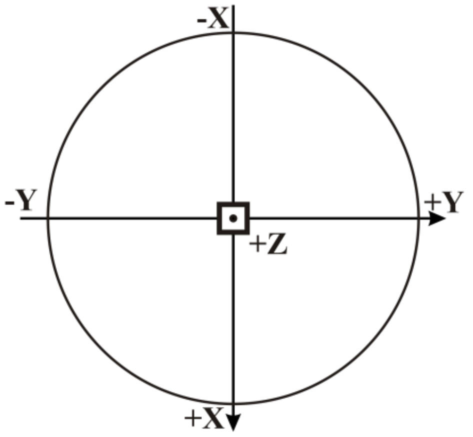
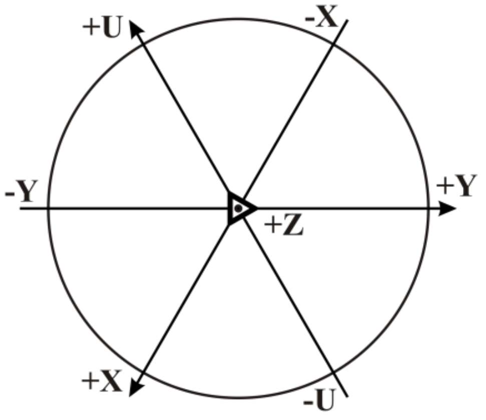
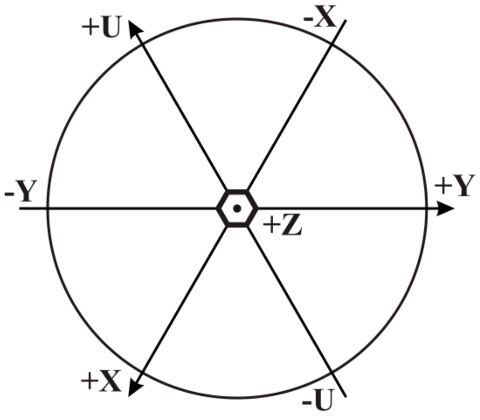
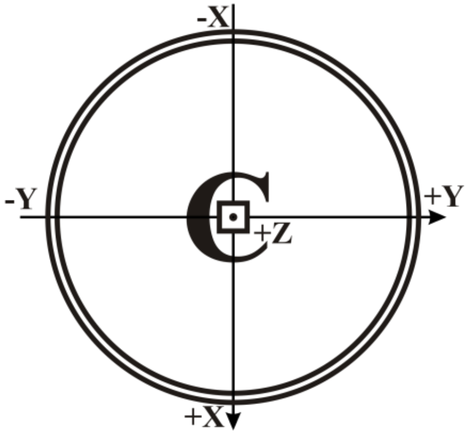
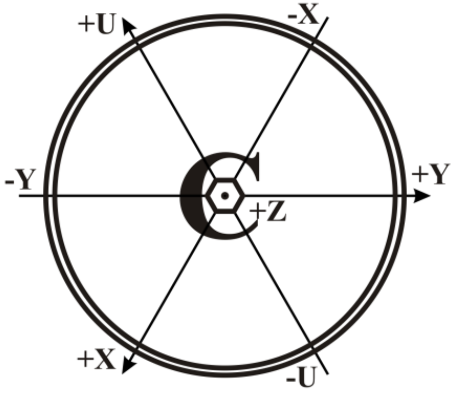
5.1. Виды симметрии и стереографические проекции элементов симметрии низшей категории

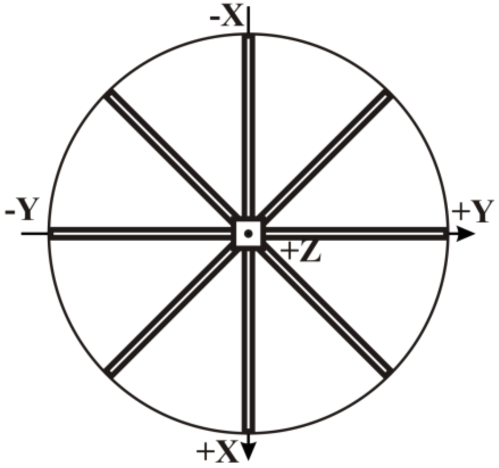
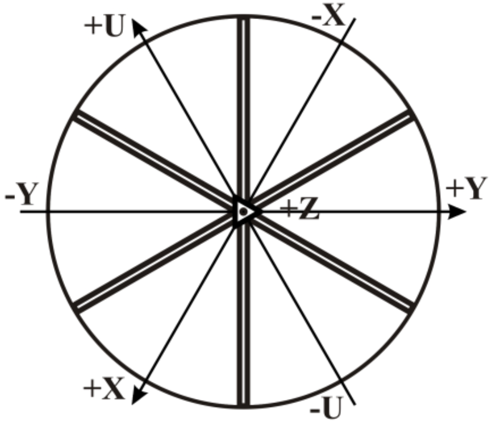
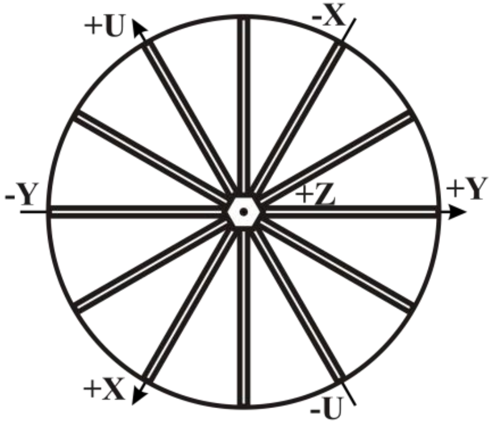
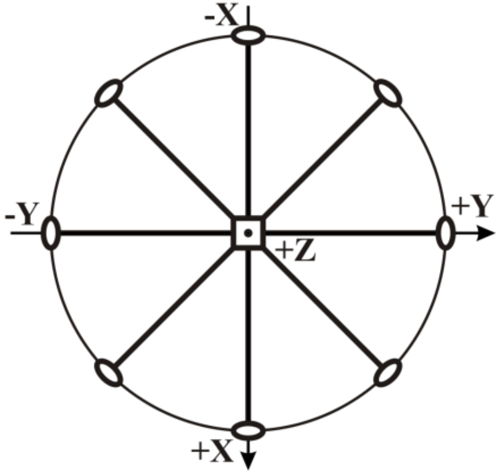
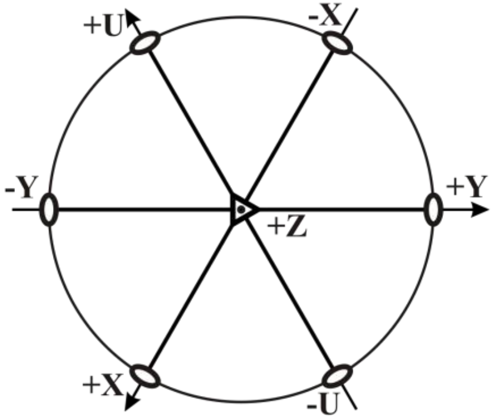
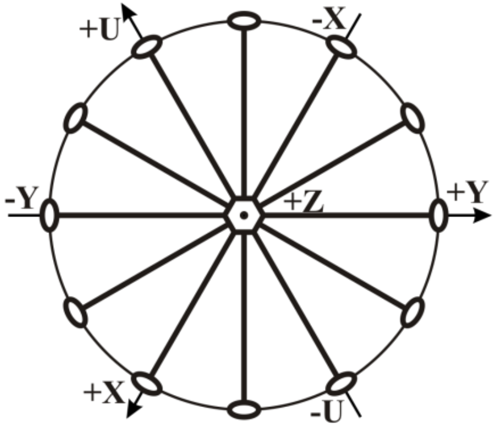
Виды симметрии	Триклинная сингония	Моноклинная сингония	Ромбическая сингония
1	2	3	4
Примитивный	**L_1** 	**L_2** 	
Центральный			

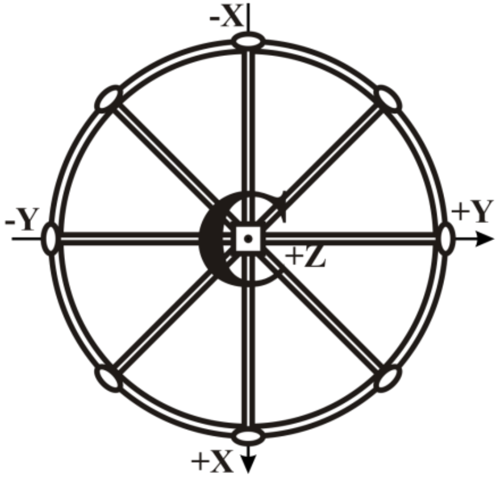
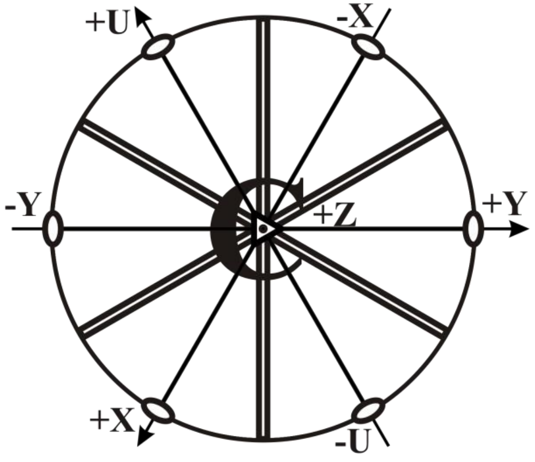
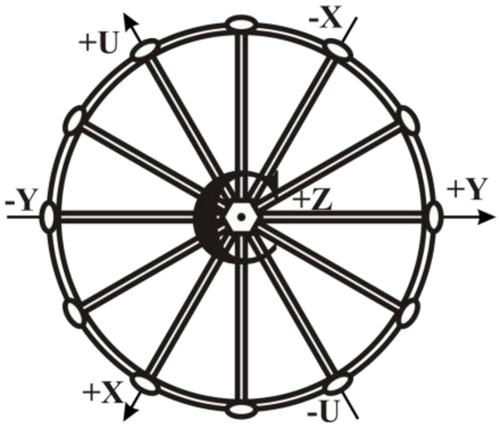
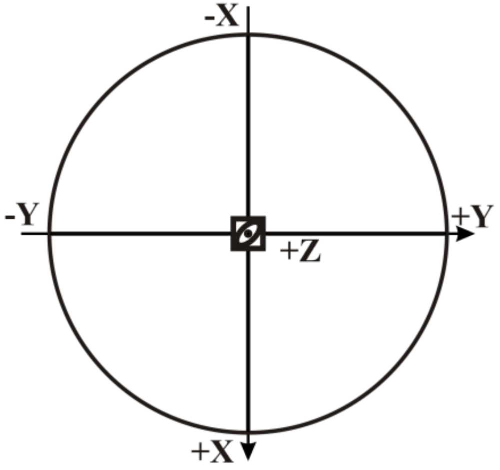
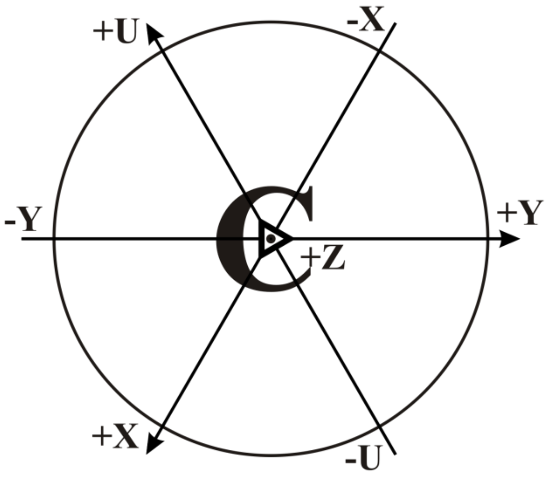
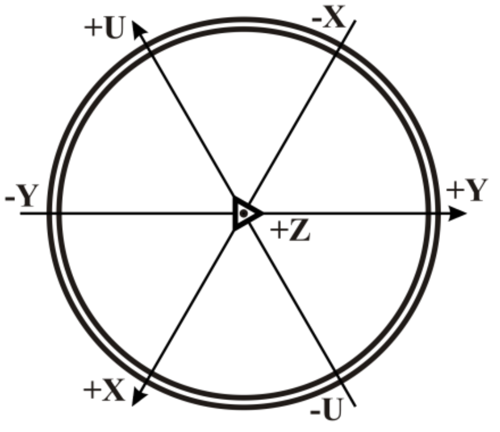
1	2	3	4
Планальный		**P** 	**L_22P** 
Аксиальный			**$3L_2$** 

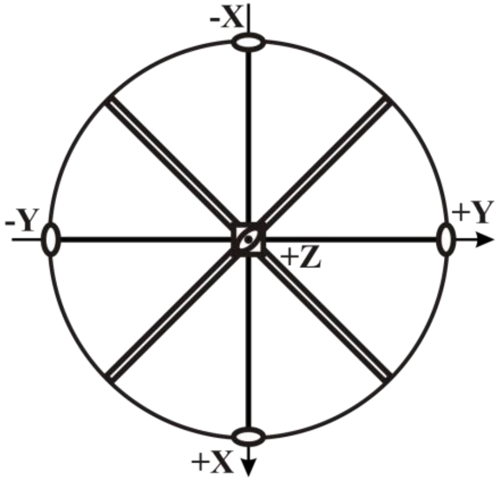
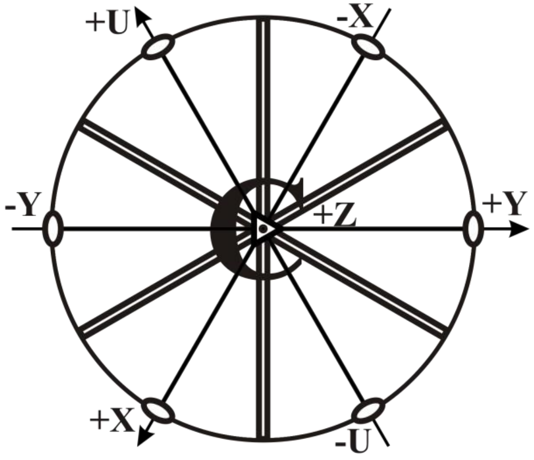
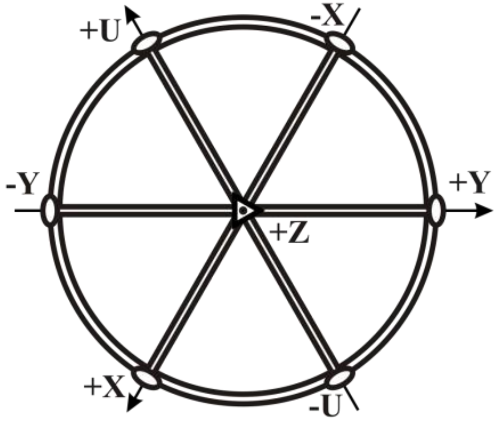
1	2	3	4
Планаксиальный		**L_2PC**  	**$3L_23PC$** 
Инверсионно-примитивный	**$L_{i1} = C$**  		

5.2. Виды симметрии и стереографические проекции элементов симметрии средней категории

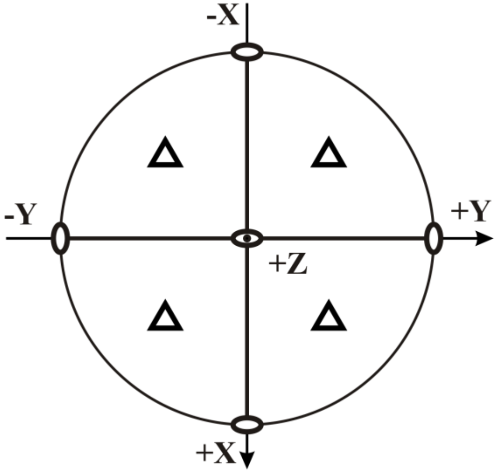
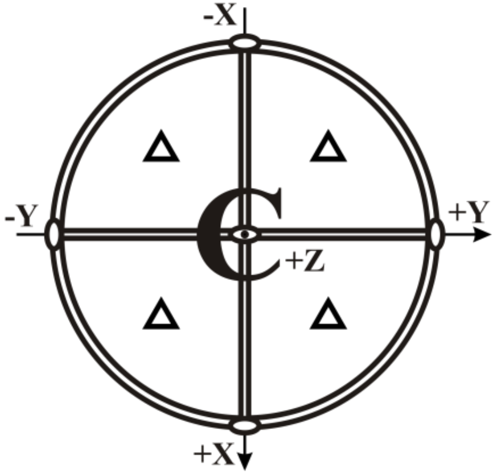
Виды симмет-рии	Тетрагональная сингония	Тригональная сингония	Гексагональная сингония
Примитивная	**L_4**  	**L_3**  	**L_6** 
Центральная	**L_4PC**  		**L_6PC** 

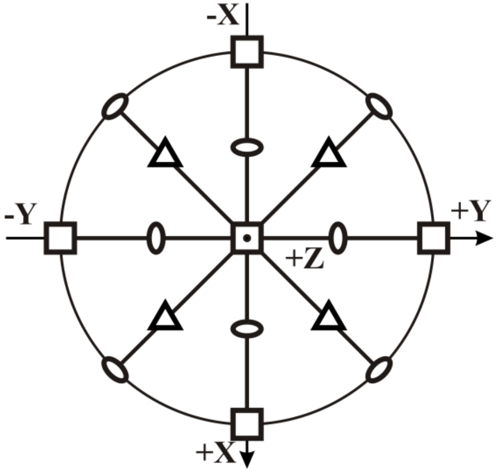
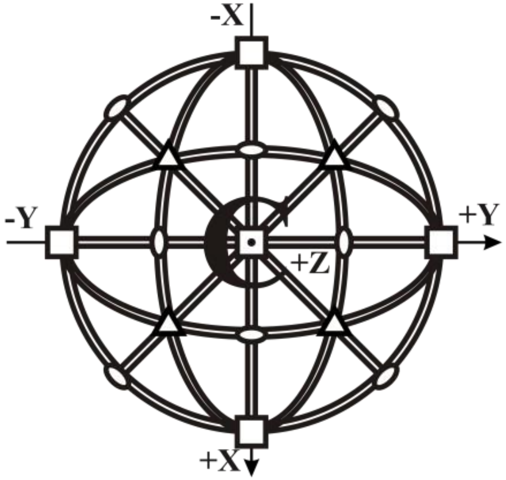
1	2	3	4
Планальная	**L_44P**  	**L_33P**  	**L_66P** 
Аксиальная	**L_44L_2**  	**L_33L_2**  	**L_66L_2** 

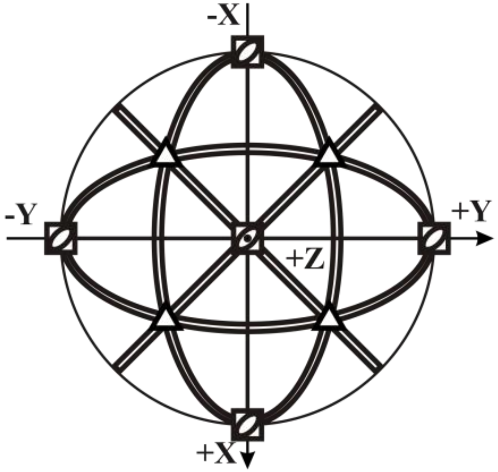
1	2	3	4
Планаксиальная	**L_44L_25PC**  	**L_33L_23PC**  	**L_66L_27PC** 
Инверсионно-примитивная	**L_{i4}**  	**$L_{i3} = L_3C$**  	**$L_{i6} = L_3P$** 

1	2	3	4
Инверсионно-планальная	**$L_{i4}2L_22P$** 	**$L_{i3}3L_23P = L_33L_23PC$** 	**$L_{i6}3L_23P = L_33L_24P$** 

5.3. Виды симметрии и стереографические проекции элементов симметрии высшей категории

Вид симметрии	Формула симметрии	Кубическая сингония
1	2	3
Примитивный	**$4L_33L_2$**	
Центральный	**$4L_33L_23PC$**	

1	2	3
Аксиальный	**$3L_44L_33L_2$**	
Планаксиальный	**$3L_44L_36L_29PC$**	

1	2	3
Инверсионно-планальный	**$3L_{i4}4L_36P$**	

Вопросы к главе 5

1) Что понимается под видом (классом) симметрии?

2) Чем отличается аксиальный вид симметрии в низшей, средней и высшей категориях?

3) В какой сингонии больше всего классов (видов) симметрии?

4) В какой сингонии меньше всего классов (видов) симметрии?

5) В какой категории меньше всего видов симметрии?

6) В какой категории больше всего видов симметрии?

Задания к главе 5

1) Построить стереографическую проекцию планаксиального вида симметрии высшей категории.

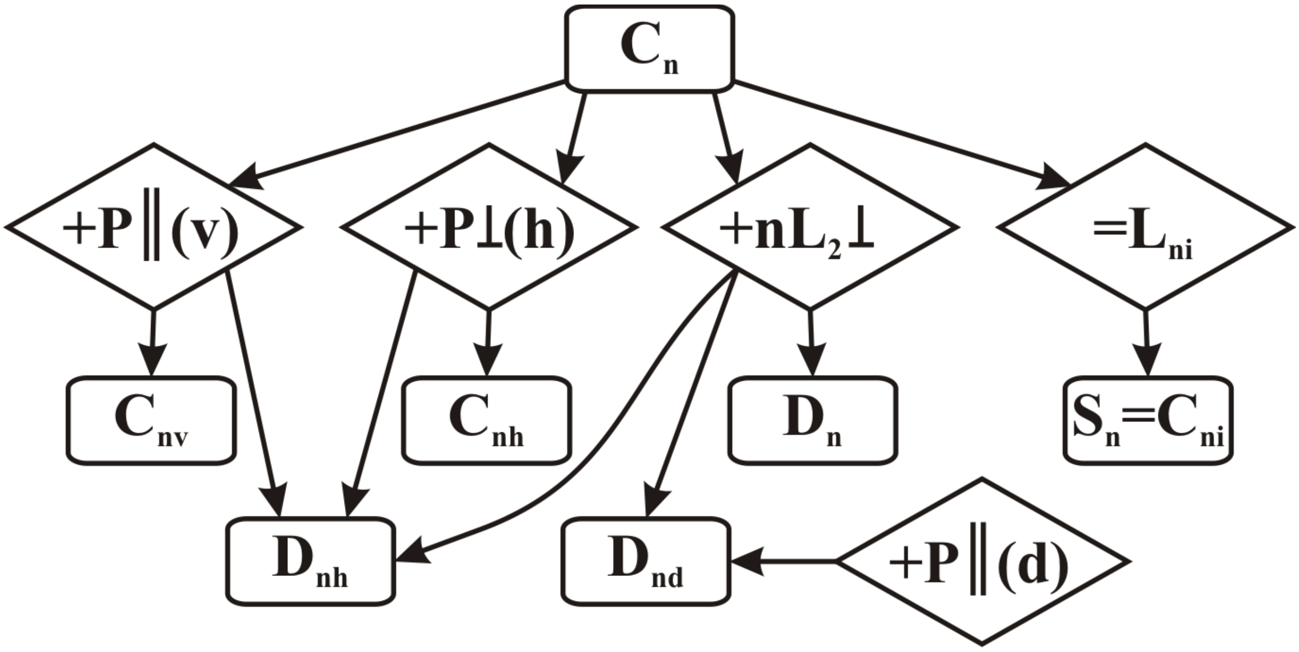
2) Построить стереографические проекции аксиального вида симметрии низшей категории.

3) Построить стереографические проекции планального вида симметрии средней категории.

Глава 6. Обозначения групп симметрии по А.Шёнфлису

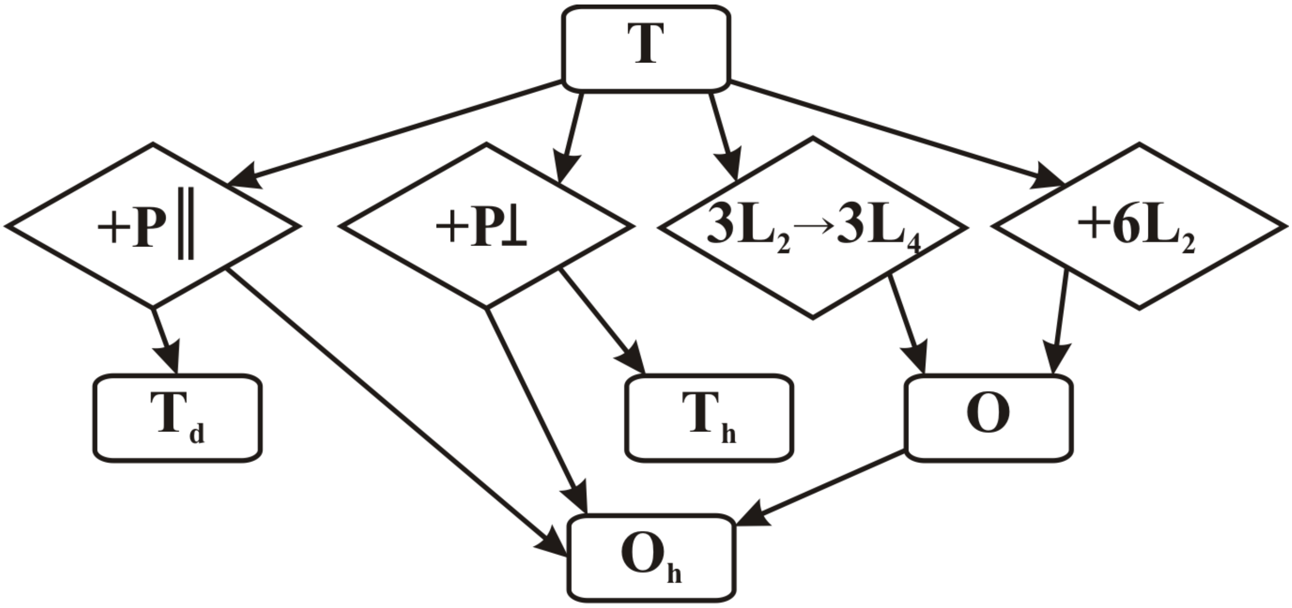
Наряду с символикой обозначения групп симметрии, предложенной Браве, в кристаллографии широко используется символика, разработанная немецким математиком А.Шёнфлисом. Она предполагает владение правилами взаимодействия элементов симметрии, позволяет одной буквой с соответствующим нижним индексом не только охарактеризовать весь набор элементов симметрии конкретной точечной группы симметрии, но и объединить родственные группы в отдельные семейства. Однако, необходимо отметить, что они не привязаны к координатной системе, и в силу этого недостаточно информативны.

6.1.Обозначения групп симметрии низшей и средней категорий по А.Шёнфлису



Условные обозначения	
$\mathbf{C_n}$	Группы симметрии с единственным особым направлением, представленным поворотной осью симметрии **n** порядка.
$\mathbf{C_{ni}}$	Группы с единственной инверсионной осью симметрии. Единственные оси симметрии всегда считаются вертикальными.
$\mathbf{S_n}$	Группы с единственной зеркальной осью симметрии (от *нем. spiegelaxe —зеркальная ось*).
$\mathbf{C_{nh}}$	Если кроме осей симметрии в точечной группе имеются плоскости симметрии, то для них вводятся следующие обозначения нижних подстрочных индексов: **h** (от нем. *horisontal — горизонтальный*) — для плоскости, перпендикулярной к главной оси симметрии.
$\mathbf{C_{nv}}$	Если кроме осей симметрии в точечной группе имеются плоскости симметрии, то для них вводятся следующие обозначения нижних подстрочных индексов: **v** (от нем. *vertical — вертикальный*) — для плоскостей, расположенных вдоль единственной или главной оси симметрии.
$\mathbf{D_n}$	Группы симметрии, в которых имеется вертикальная ось симметрии **n** порядка, и, в соответствии с теоремой, **n** осей симметрии 2 порядка, перпендикулярных ей, т.е. горизонтальных, обозначаются символом**.**
$\mathbf{D_{nh}}$	Группы симметрии, в которых имеется вертикальная ось симметрии **n** порядка, и, в соответствии с теоремой, **n** осей симметрии 2 порядка, перпендикулярных ей, т.е. горизонтальных, обозначаются символом **h** (от нем. *horisontal — горизонтальный*) — для плоскости, перпендикулярной к главной оси симметрии
$\mathbf{D_{nd}}$	Группы симметрии, в которых имеется вертикальная ось симметрии **n** порядка, и, в соответствии с теоремой, **n** осей симметрии 2 порядка, перпендикулярных ей, т.е. горизонтальных, обозначаются символом **d** - для плоскостей, делящих углы между осями симметрии 2 порядка пополам, (т.е. *диагональных* или *«делительных»*).

6.2. Обозначение групп симметрии высшей категории по А.Шёнфлису



Условные обозначения	
T	группа симметрии содержит два вида осей симметрии $4L_33L_2$ – **осевой комплекс тетраэдра.**
T_h	группа симметрии содержит два вида осей симметрии $4L_33L_2$ – **осевой комплекс тетраэдра**, содержит координатные плоскости симметрии появляется подстрочный индекс **h.**
T_d	группа симметрии содержит два вида осей симметрии $4L_33L_2$ – **осевой комплекс тетраэдра**, содержит диагональные плоскости симметрии появляется подстрочный индекс **d.**
O	группа симметрии содержит только три вида осей симметрии $3L_44L_36L_2$– **осевой комплекс октаэдра.**
O_h	группа симметрии содержит три вида осей симметрии $3L_44L_36L_2$ – **осевой комплекс октаэдра**, содержит координатные и диагональные плоскости симметрии, центр инверсии.

Вопросы к главе 6

1) Чем отличается обозначения по А.Шёнфлису от обозначений О.Браве?
2) Что означает буква C в обозначениях групп симметрии по А.Шёнфлису?
3) Что означает буква D в обозначениях групп симметрии по А.Шёнфлису?
4) Что означает буква O в обозначениях групп симметрии по А.Шёнфлису?
5) Что означает буква T в обозначениях групп симметрии по А.Шёнфлису?
6) Какими буквами обозначает группы симметрии низшей категории А.Шёнфлис?
7) Какими буквами обозначает группы симметрии высшей категории А.Шёнфлис?

Глава 7. Международные обозначения групп симметрии (Символы Германа-Могена)

Международные символы классов симметрии – символы Германна – Могена состоят в общем случае из трех позиций, на которых регистрируются неэквивалентные особые направления, и четко указывают на ориентацию кристалла относительно выбранных координатных осей.

Международные символы записывают и характеризуют все симметрически-неэквивалентные особые направления кристаллического пространства (оси симметрии, поворотные и инверсионные).

Поворотные оси симметрии обозначают арабскими цифрами – 1, 2, 3, 4 и 6.

Инверсионные оси обозначают арабскими цифрами с чёрточкой сверху – $\bar{1}$, $\bar{4}$, $\bar{3}$, $\bar{6}$.

Ось, которая эквивалентна зеркальной плоскости симметрии, обозначается символом (от англ. mirror - зеркало) – m. Также обозначается нормаль к плоскости симметрии. Если ось симметрии совпадает с нормалью с плоскости симметрии, то их записывают в виде дроби: в числителе цифра, обозначающая порядок оси, в знаменателе - нормаль к плоскости m.

Ниже приведены международные обозначения групп симметрии по категориям: низшей, средней и высшей.

7.1. Международные обозначения групп симметрии низшей категории (Символы Германа-Могена)

Сингония	Формула симметрии По Бравэ	**1 позиция**	**2 позиция**	**3 позиция**	**Символы Германа-Могена**
		Особое направление по координатной **оси X**	Особое направление по координатной **оси Y**	Особое направление по координатной **оси Z**	
Триклинная	L_1	1	1	1	111
	$C= L_{i1}$	1	1	$\bar{1}$	$11\bar{1}$
Моноклинная	L_2	1	1	2	112
	$P= L_{i2}$	1	m	1	$1m1$
	L_2PC	1	1	$\frac{2}{m}$	$11\frac{2}{m}$
Ромбическая	$3L_2$	2	2	2	222
	L_22P	m	m	2	$mm2$
	$3L_23PC$	$\frac{2}{m}$	$\frac{2}{m}$	$\frac{2}{m}$	$\frac{2}{m}\frac{2}{m}\frac{2}{m}$

7.2. Международные обозначения групп симметрии средней категории (Символы Германа-Могена)

Сингония	Формула симметрии По Бравэ	**1 позиция**	**2 позиция**	**3 позиция**	**Символы Германа-Могена**
		обозначение порядка главной оси (особое направление по координатной **оси Z)**	Особые направления по координатным **осям X, Y и U** (при наличии)	диагональные элементы	
1	2	3	4	5	6
Тетрагональная	L_4	4			4
	L_{i4}	$\bar{4}$			$\bar{4}$
	L_4PC	$\frac{4}{m}$			$\frac{4}{m}$
	L_44L_2	4	2	2	422
	L_44P	4	m	m	$4mm$
	$L_{i4}2L_22P$	$\bar{4}$	2	m	$\bar{4}2m$
	L_44L_25PC	$\frac{4}{m}$	$\frac{2}{m}$	$\frac{2}{m}$	$\frac{4}{m}\frac{2}{m}\frac{2}{m}$

1	2	3	4	5	6
Тригональная	L_3	3			3
	L_{i3}	$\bar{3}$			$\bar{3}$
	L_33L_2	3	2		32
	L_33P	3	m		$3m$
	$L_{i3}3L_23P$	$\bar{3}$	$\frac{2}{\mathrm{m}}$		$\bar{3}\frac{2}{m}$
Гексагональная	L_6	6			6
	L_{i6}	$\bar{6}$			$\bar{6}$
	L_6PC	$\frac{6}{\mathrm{m}}$			$\frac{6}{m}$
	L_66L_2	6	2	2	622
	L_66P	6	m	m	$6mm$
	$L_{i6}3L_23P$	$\bar{6}$	2	m	$\bar{6}2m$
	L_66L_27PC	$\frac{6}{m}$	$\frac{2}{m}$	$\frac{2}{m}$	$\frac{6}{m}\frac{2}{m}\frac{2}{m}$

7.3. Международные обозначения групп симметрии высшей категории (Символы Германа-Могена)

Сингония	Формула симметрии	**1 позиция**	**2 позиция**	**3 позиция**	**Символы Германа-Могена**
		элементы симметрии по координатным осям Z, X, Y	обязательные элементы симметрии 4L$_3$	диагональные элементы симметрии	
Кубическая	3L$_2$4L$_3$	2	3		23
	3L$_2$4L$_3$3PC	$\frac{2}{m}$	3		$\frac{2}{m}3$
	3L$_{i4}$4L$_3$6P	$\bar{4}$	3	m	$\bar{4}3m$
	3L$_4$4L$_3$6L$_2$	4	3	2	432
	3L$_4$4L$_3$6L$_2$9PC	$\frac{4}{m}$	3	$\frac{2}{m}$	$\frac{4}{m}3\frac{2}{m}$

Вопросы к главе 7

1) В чем отличие международных обозначений от обозначений Шёнфлиса?

2) В чем отличие международных обозначений от обозначений Браве?

3) Чем отличается порядок записи международных обозначений низшей категории от средней?

4) Чем отличается порядок записи международных обозначений низшей категории от высшей?

5) Чем отличается порядок записи международных обозначений высшей категории от средней?

Задание к главе 7

1) Нарисовать стереографическую проекцию элементов симметрии кристалла $\frac{4}{m}\frac{2}{m}\frac{2}{m}$.

2) Нарисовать стереографическую проекцию элементов симметрии кристалла 432.

3) Нарисовать стереографическую проекцию элементов симметрии кристалла $mm2$.

Глава 8. Простые формы кристаллов

Простой формой кристалла называется многогранник, все грани которого можно получить из одной грани с помощью симметрических преобразований, свойственных точечной группе (классу) симметрии данного кристалла .

Грани, принадлежащие одной простой форме, равны не только по своей геометрической форме, но также по своим физическим и химическим свойствам, имеют одинаковую скорость роста.

Положение грани простой формы может быть различным относительно элементов симметрии класса кристалла, что определяет число граней простой формы и облик.

В связи с этим различают **частные** и **общие простые формы.**

Частная простая форма будет иметь место, если исходная грань располагается либо параллельно, либо перпендикулярно, либо равнонаклонно к осям или плоскостям симметрии кристалла. Так как элементы симметрии, перпендикулярные к грани, ее не размножают, то число граней частной простой формы может быть или равно или меньше числа граней общей простой формы.

Общая простая форма получается, если исходная грань задана в общем положении, не связанном какими-либо условиями с элементами симметрии кристалла. Грань общего положения подвергается действию всех операций симметрии данной группы. Поэтому число граней общей простой формы в данной группе (классе) максимально и равно числу операций симметрии, составляющих эту группу.

В каждом классе симметрии может быть одна общая простая форма и несколько частных простых форм. По предложению Е.С.Федорова каждый класс симметрии определяется названием присущей ему общей простой формы.

Простые формы кристалла также характеризуются понятиями «открытая» и «закрытая».

Открытая простая форма не замыкает полностью заключенное между гранями пространство. Такие простые формы встречаются в кристаллах низшей и средней категорий – это моноэдр, диэдр, пинакоид, все пирамиды, призмы.

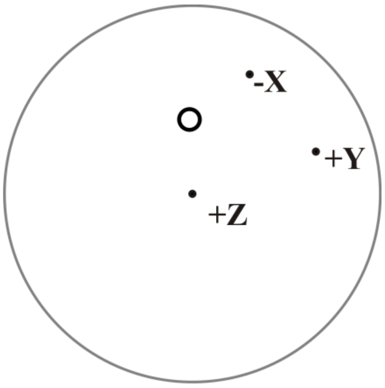
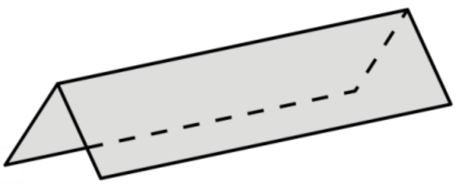
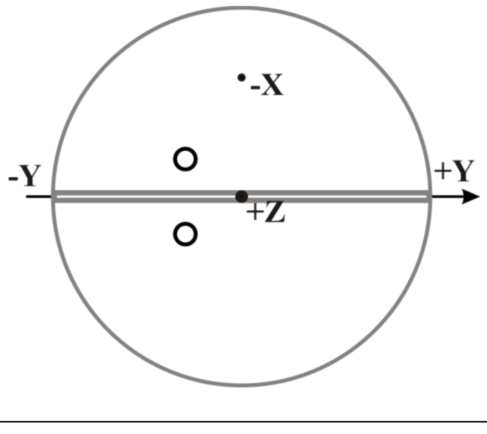
Закрытая простая форма замыкает полностью совокупностью граней, заключенной между ними пространство. К таким простым формам относятся все простые формы высшей категории и отдельные простые формы низшей и средней категорий (все дипирамиды, тетраэдры, трапецоэдры, скаленоэдры).

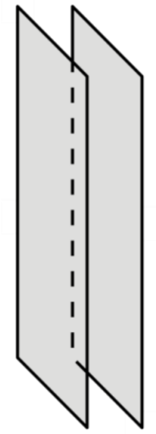
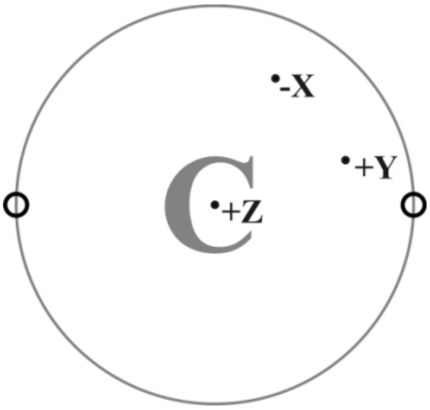
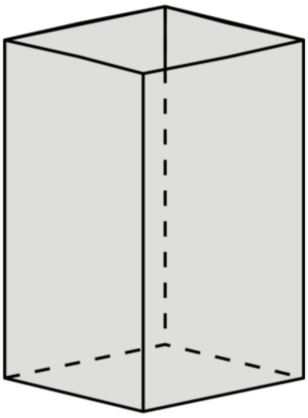
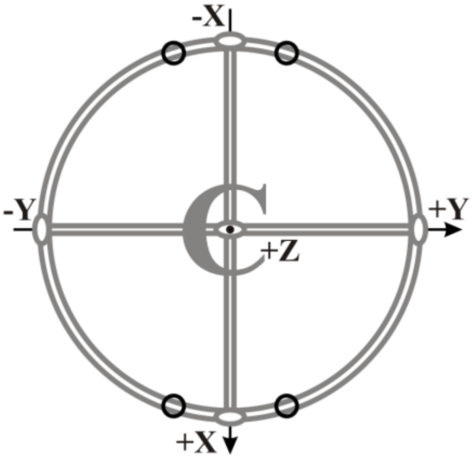
Всего существует 47 видов простых форм . В низшей и средней категориях встречаются 32 вида простых форм, в высшей категории 15 видов простых форм. Все они выводятся строго математически, исходя из 32 классов (групп) симметрии. Комбинаций простых форм возможно бесконечное количество.

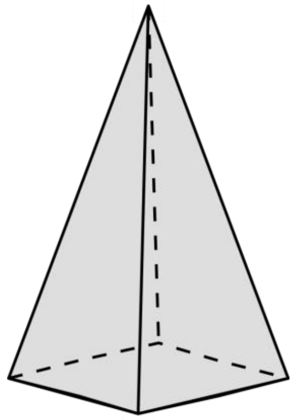
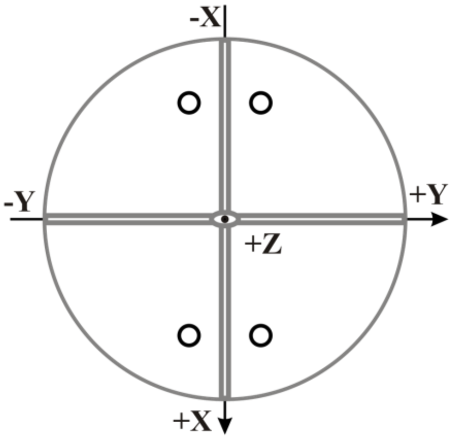
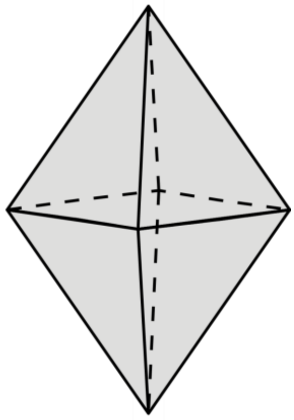
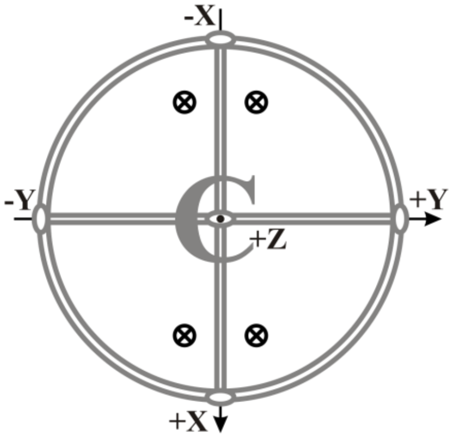
В названиях простых форм кристаллов положены греческие слова, обозначающих число граней или термины, описывающие геометрические объекты.

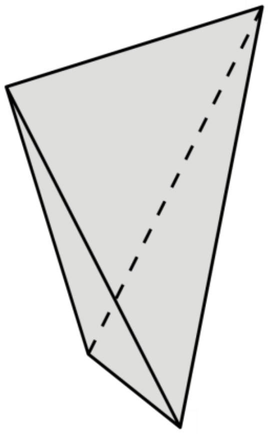
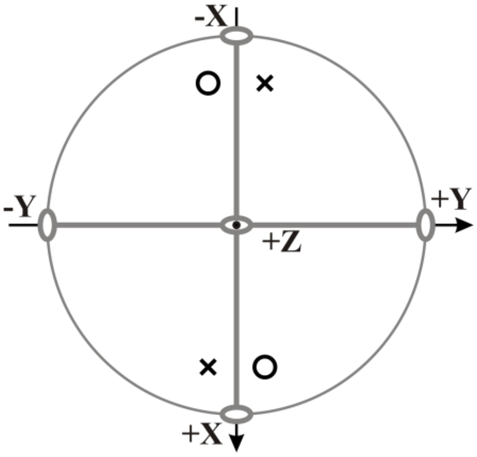
Моно - один,	Додека – двенадцать
Ди (би) - два	Дидодека – двадцать четыре
Три- три	Эдра – грань
Тетра – четыре	Гон – угольник
Пента – пять	Пинас –дощечка
Гекса – шесть	Клино – наклоняю
Окта – восемь	Трапеца – четырехугольник с двумя неравными и двумя равными сторонами
Дека – десять	Скалена – в общем случае косоугольный треугольник

8.1. Простые формы кристаллов низшей категории и их проекции

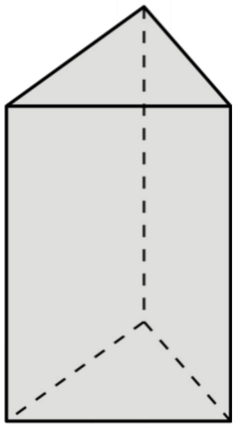
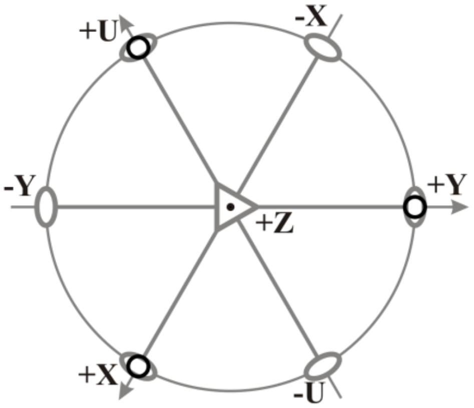
<table>
<tr><th>Название простой формы</th><th>Простая форма, ее гномостереографическая проекция</th><th>Количество граней</th><th>Расположение граней</th></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Моноэдр</td><td></td><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">Произвольное</td></tr>
<tr><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Диэдр</td><td></td><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2">Одинаковые наклонные грани пересекаются в форме крыши</td></tr>
<tr><td>
</td></tr>
</table>

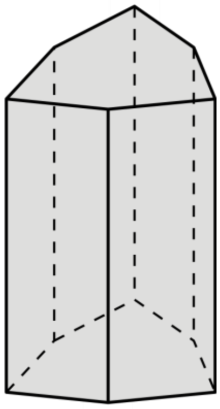
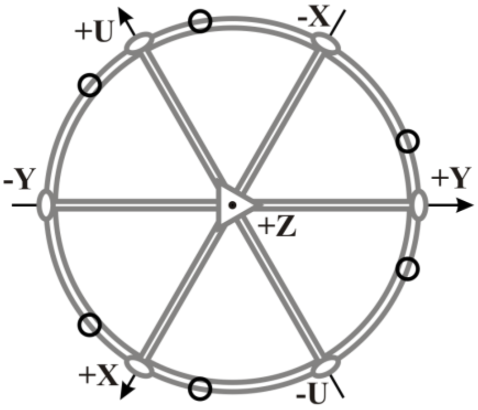
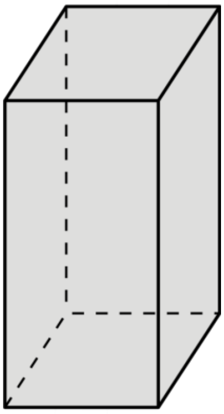
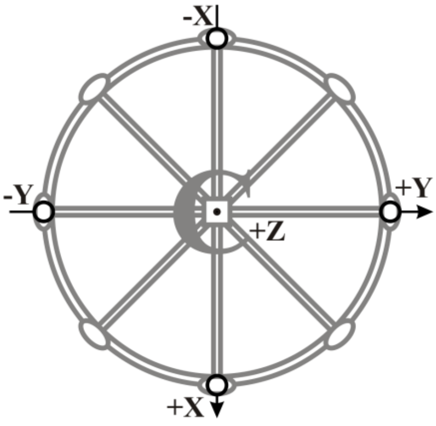
1	2	3	4
Пинакоид	 	2	Одинаковые грани параллельны друг другу
Ромбическая призма	 	4	Грани попарно (через одну) параллельны. Поперечное сечение в форме ромба

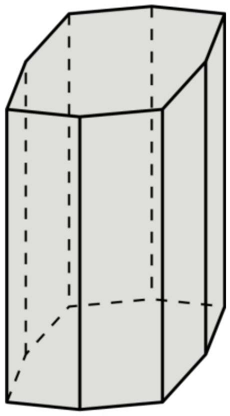
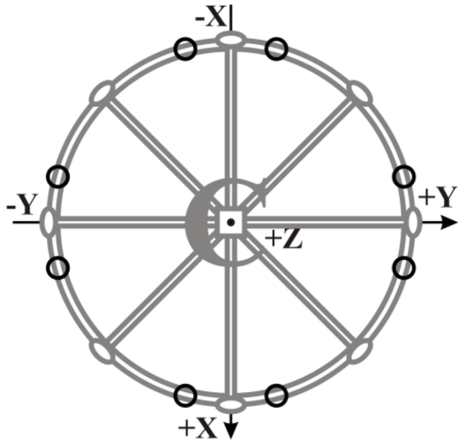
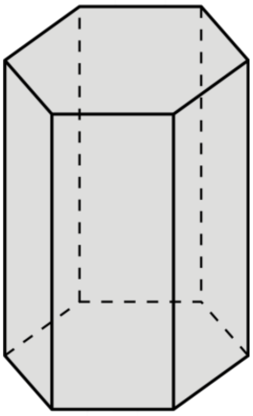
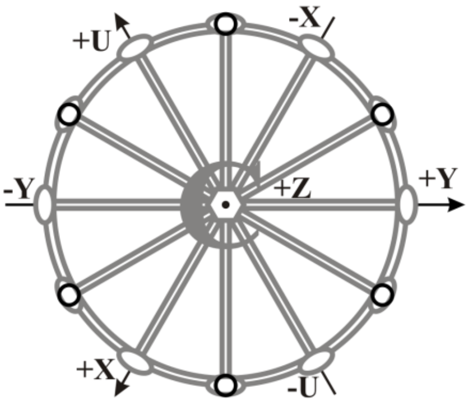
1	2	3	4
Ромбическая пирамида	 	4	Все грани пересекаются в одной точке, через которую проходит L_2. Сечение ей перпендикулярное ромб.
Ромбическая дипирамида	 	8	Грани попарно параллельны, образуют 6 вершин, в каждой из которых пересекаются по 4 грани. Форма грани разносторонний треугольник. Сечение в форме ромба

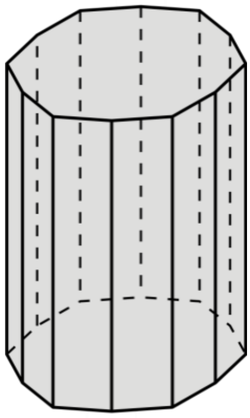
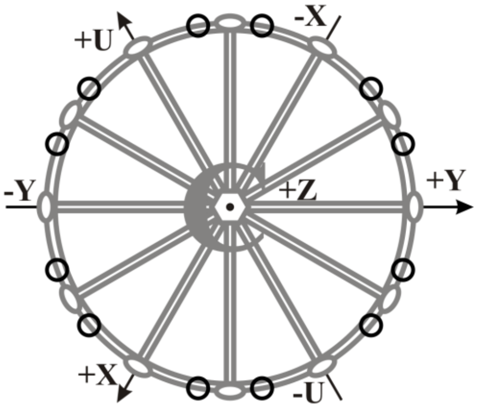
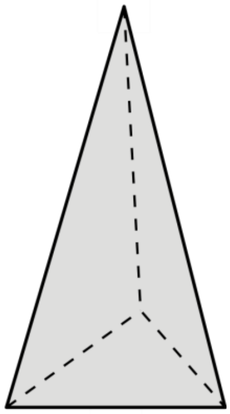
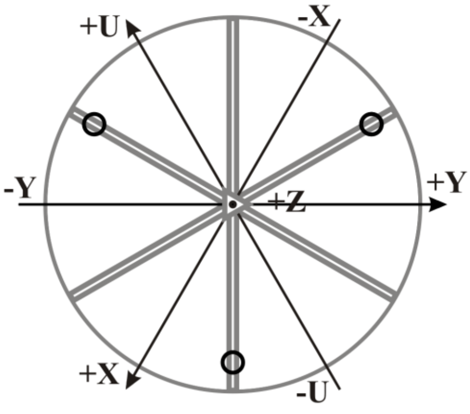
1	2	3	4
Ромбический тетраэдр	  	4	Грани не параллельны, образуют 4 вершины, в каждой из которой пересекаются по 3 грани. Грань в форме разностороннего треугольника. Не имеет плоскостей симметрии.
К открытым простым формам низшей категории относятся:		Моноэдр, пинакоид, диэдр, ромбическая пирамида, ромбическая призма	
К закрытым простым формам низшей категории относятся:		Ромбическая дипирамида, ромбический тетраэдр	

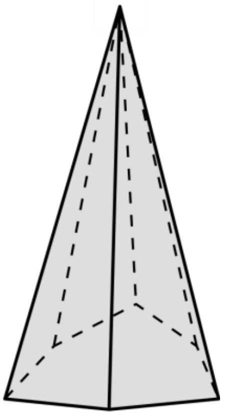
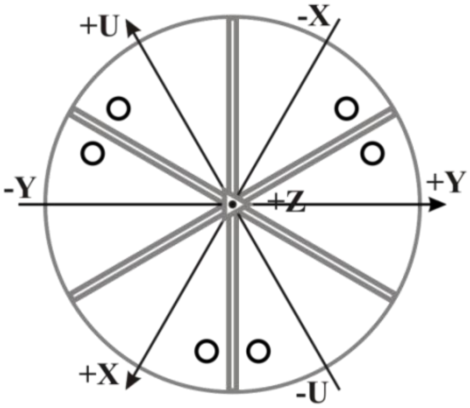
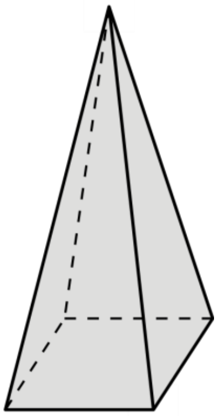
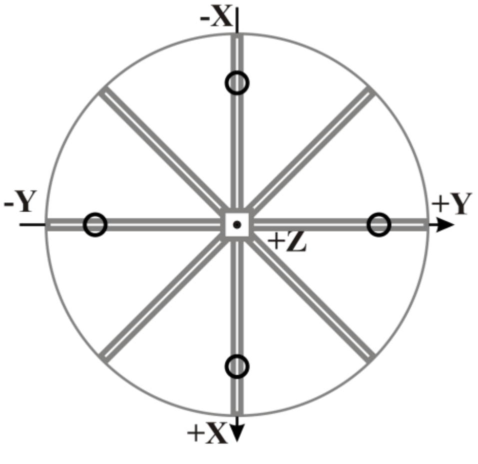
8.2. Простые формы средней категории и их проекции

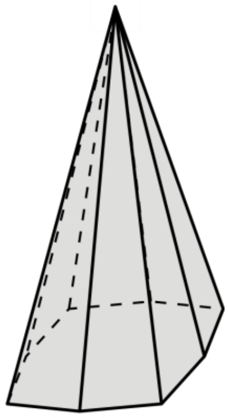
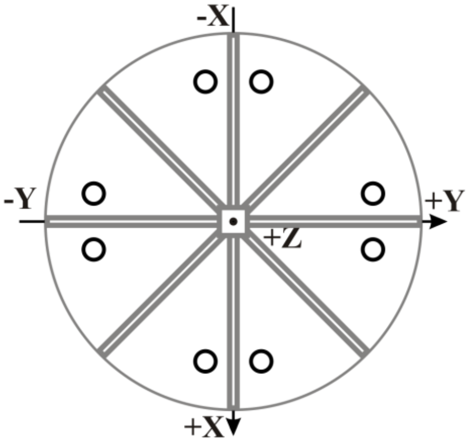
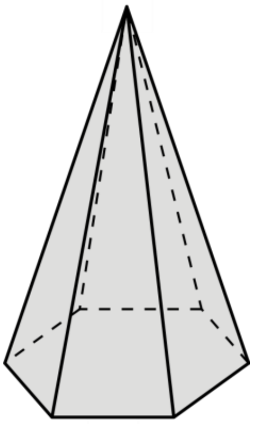
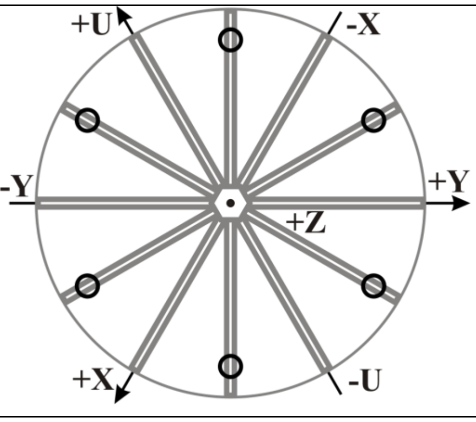
Название простой формы	Простая форма, ее гномостереографическая проекция	Количество граней	Расположение граней
1	2	3	4
Призмы:			
Тригональная призма	 	3	Параллельны главной оси

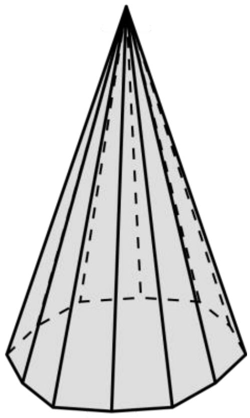
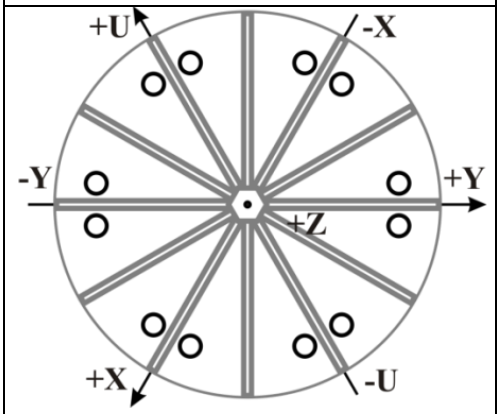
1	2	3	4
Дитригональная призма	  	6	Параллельны главной оси
Тетрагональная призма	  	4	Попарно параллельны и параллельны главной оси

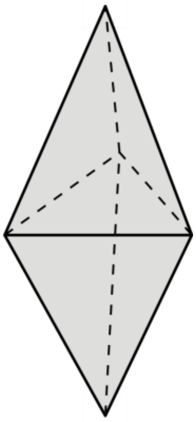
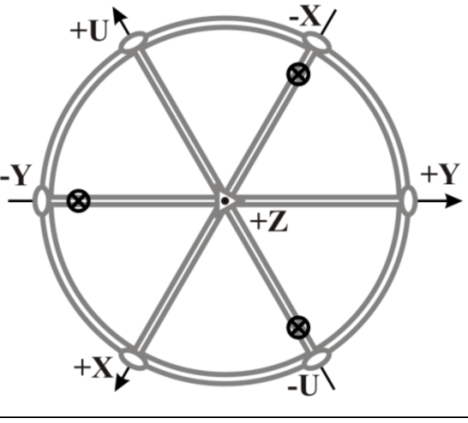
1	2	3	4
Дитетрагональная призма	  	8	Попарно параллельны и параллельны главной оси
Гексагональная призма	  	6	Попарно параллельны и параллельны главной оси

1	2	3	4
Дигексагональная призма	  	12	Попарно параллельны и параллельны главной оси
Пирамиды:			
Тригональная пирамида	  	3	Пересекают главную ось в одной точке

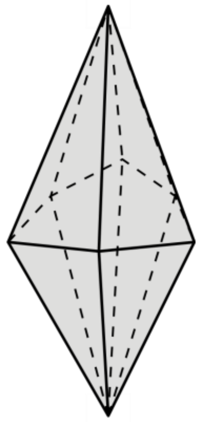
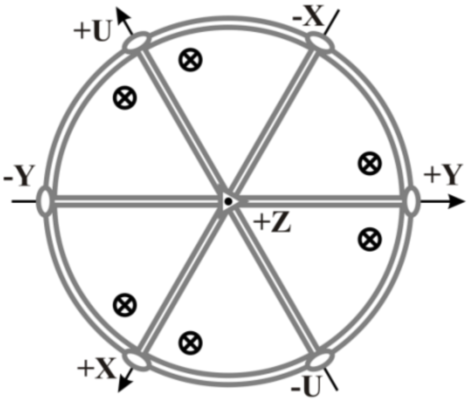
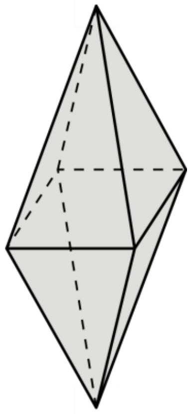
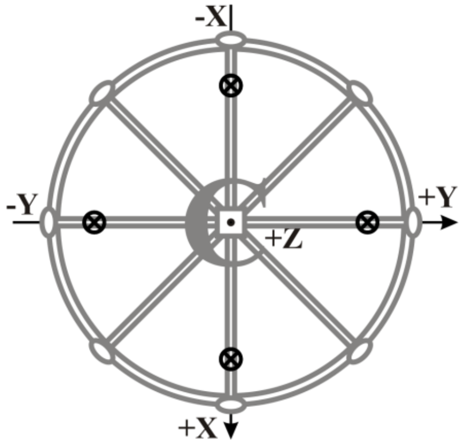
1	2	3	4
Дитригональная пирамида	  	6	Пересекают главную ось в одной точке
Тетрагональная пирамида	  	4	Пересекают главную ось в одной точке

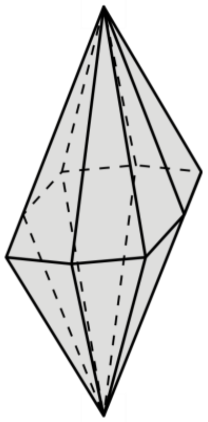
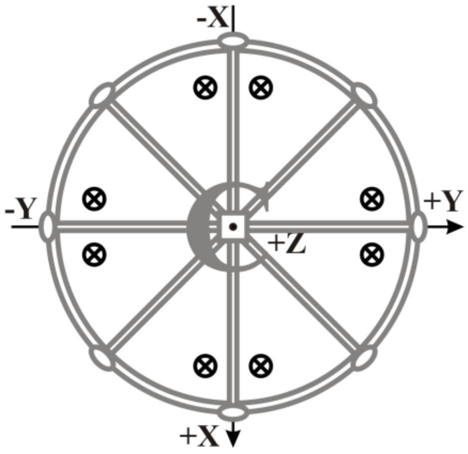
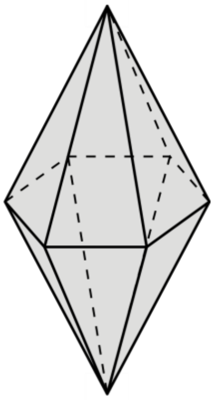
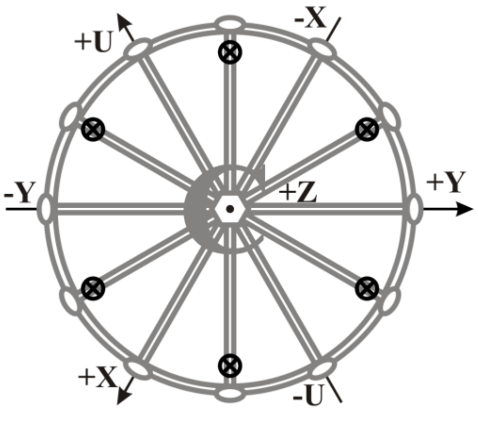
1	2	3	4
Дитетрагональная пирамида	  	8	Пересекают главную ось в одной точке
Гексагональная пирамида	  	6	Пересекают главную ось в одной точке

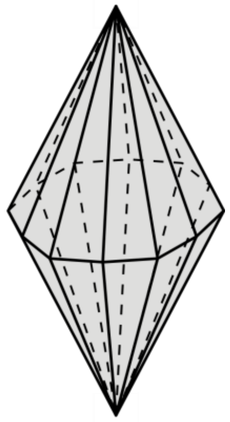
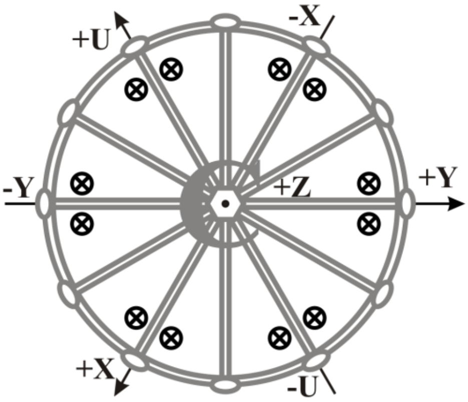
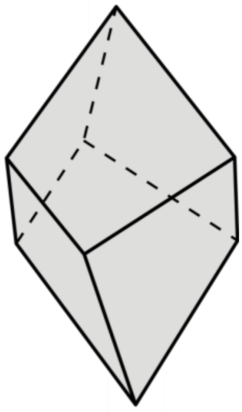
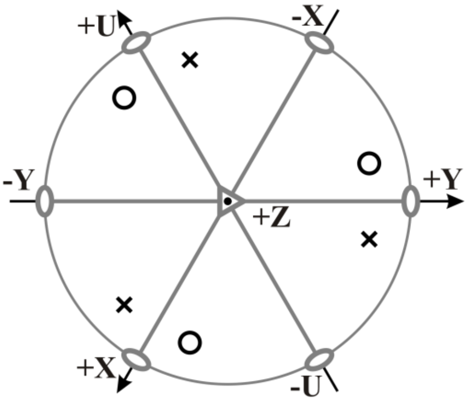
<table>
<tr><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Дигексагональная пирамида</td><td>

</td><td rowspan="2">12</td><td rowspan="2">Пересекают главную ось в одной точке</td></tr>
<tr><td>


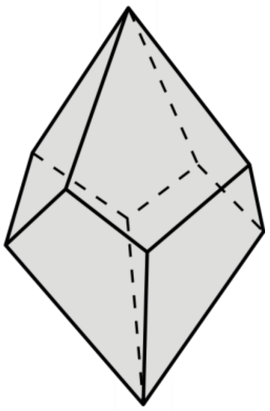
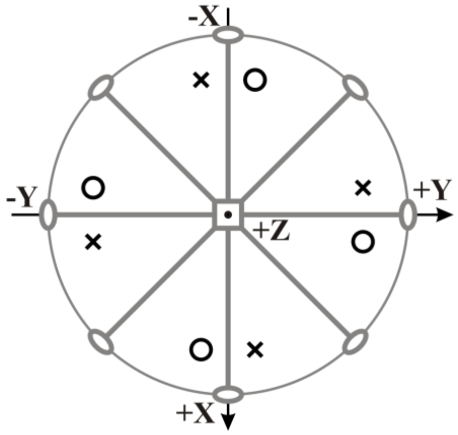
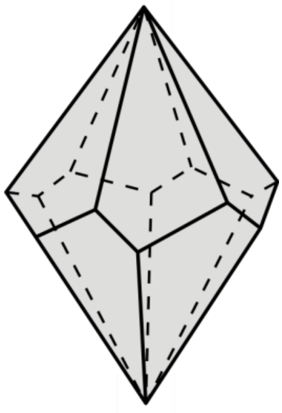
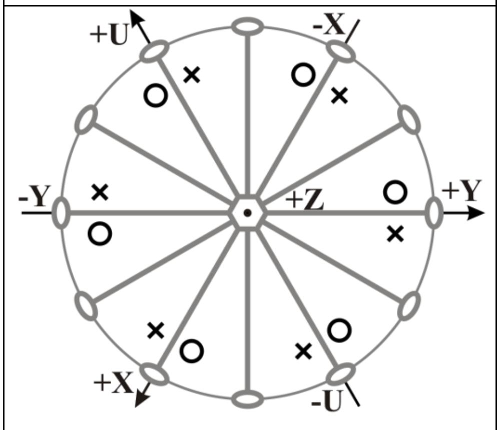
</td></tr>
<tr><td colspan="4"><i>Дипирамиды:</i></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Тригональная дипирамида</td><td>

</td><td rowspan="2">6</td><td rowspan="2">Грани пересекают главную ось в двух точках. Нижние грани точно под верхними на проекции</td></tr>
<tr><td>


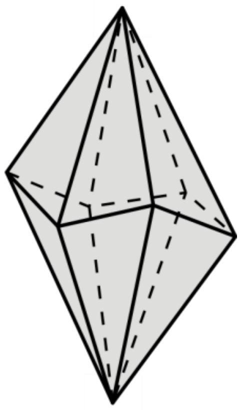
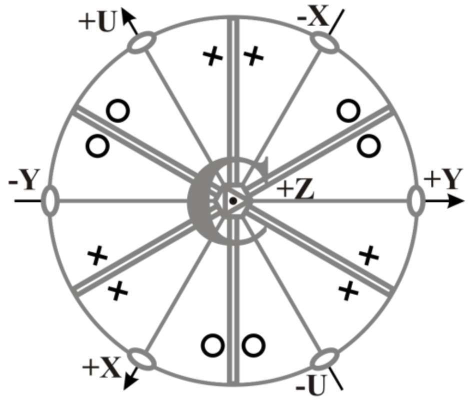
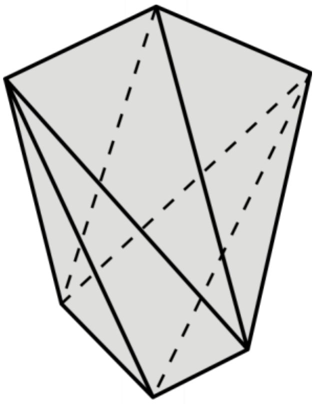
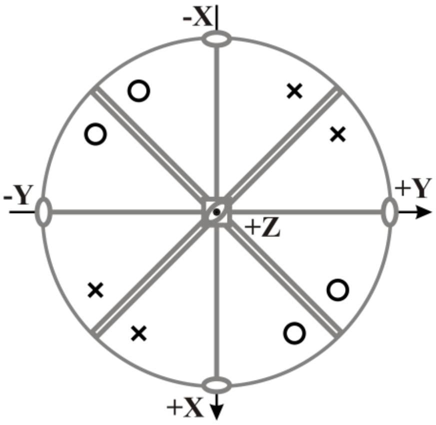
</td></tr>
</table>

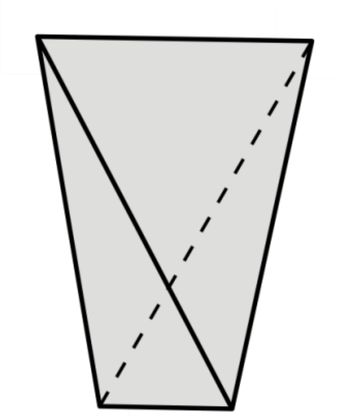
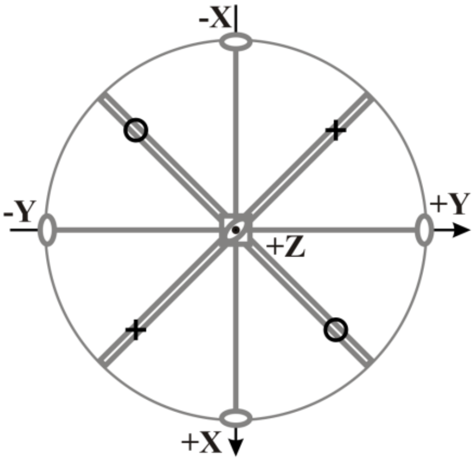
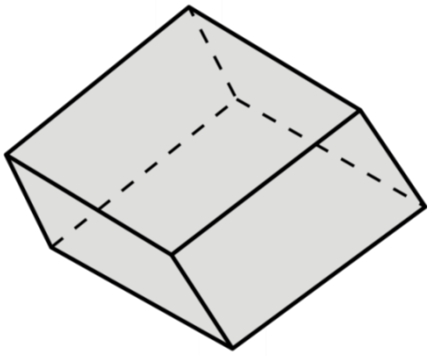
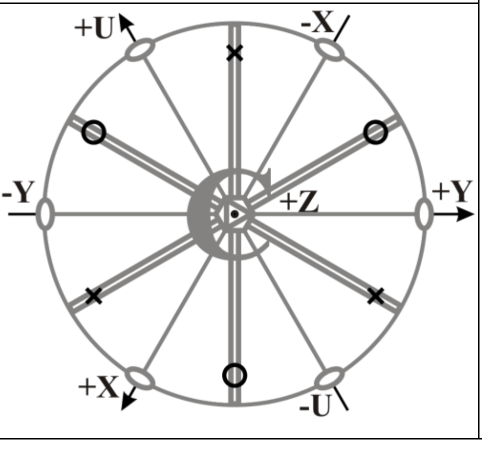
1	2	3	4
Дитригональная дипирамида	  	12	Грани пересекают главную ось в двух точках. Нижние грани точно под верхними на проекции
Тетрагональная дипирамида	  	8	Грани пересекают главную ось в двух точках и попарно параллельны. Нижние грани точно под верхними на проекции

1	2	3	4
Дитетрагональная дипирамида	  	16	Грани пересекают главную ось в двух точках и попарно параллельны. Нижние грани точно под верхними на проекции
Гексагональная дипирамида	  	12	Грани пересекают главную ось в двух точках и попарно параллельны. Нижние грани точно под верхними на проекции

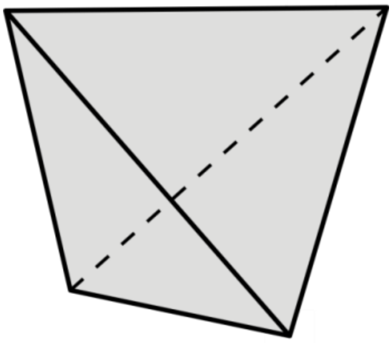
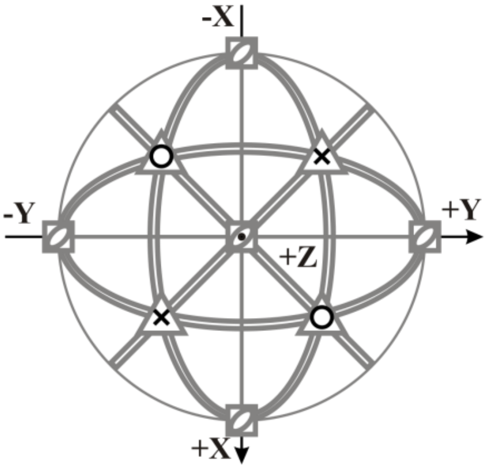
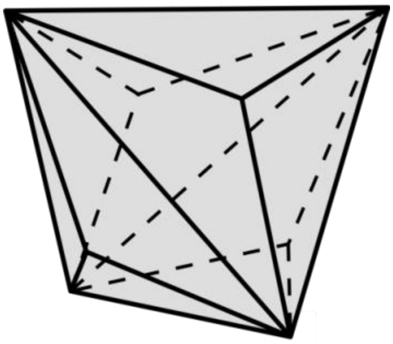
1	2	3	4
Дигексагональная дипирамида	  	24	Грани пересекают главную ось в двух точках и попарно параллельны. Нижние грани точно под верхними на проекции
Трапецоэдры:			
Тригональный трапецоэдр	  	6	Трапеция. Грани пересекают главную ось в двух точках

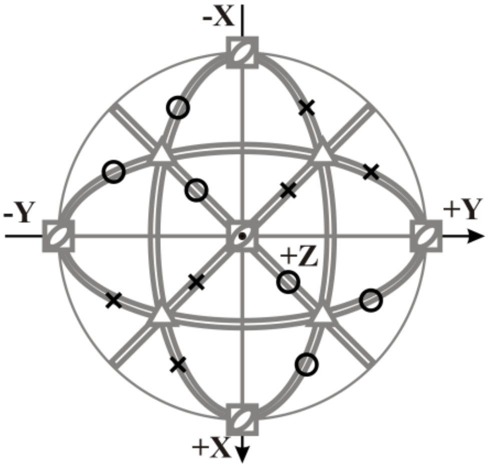
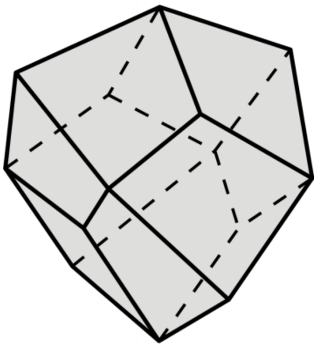
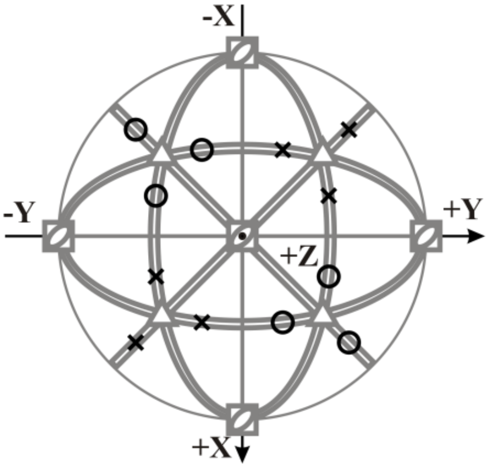
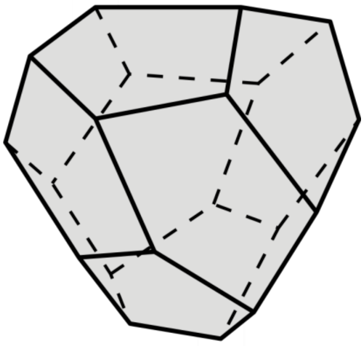
1	2	3	4
Тетрагональный трапецоэдр	 	8	Трапеция. Грани пересекают главную ось в двух точках
Гексагональный трапецоэдр	 	12	Трапеция. Грани пересекают главную ось в двух точках

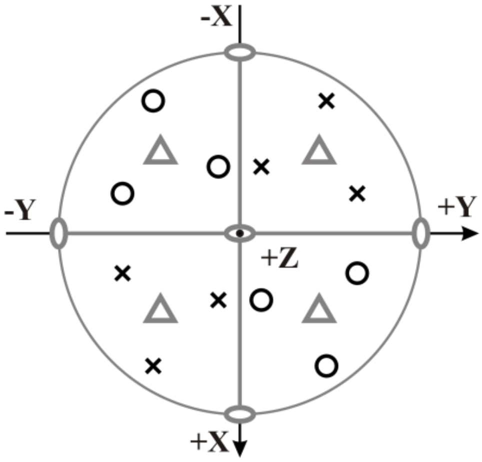
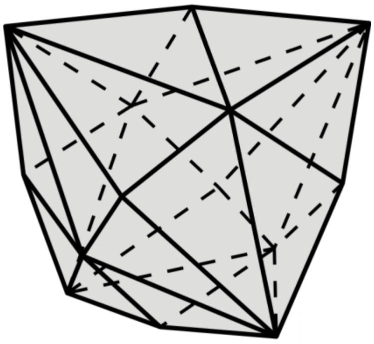
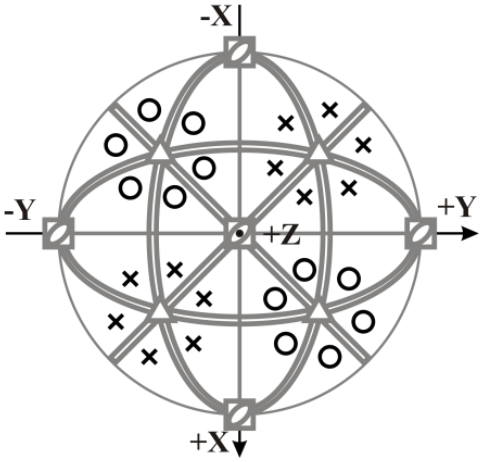
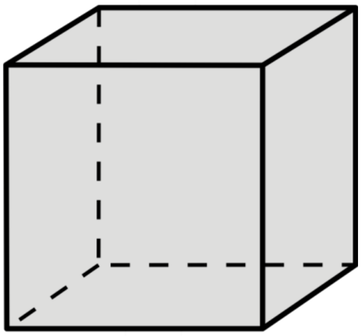
1	2	3	4
Скаленоэдры:			
Тригональный скаленоэдр		12	Разносторонний треугольник. Нижняя пара граней точно посередине между двумя парами верхних на проекции
			
Тетрагональный скаленоэдр		8	Разносторонний треугольник. Нижняя пара граней точно посередине между двумя парами верхних на проекции
			

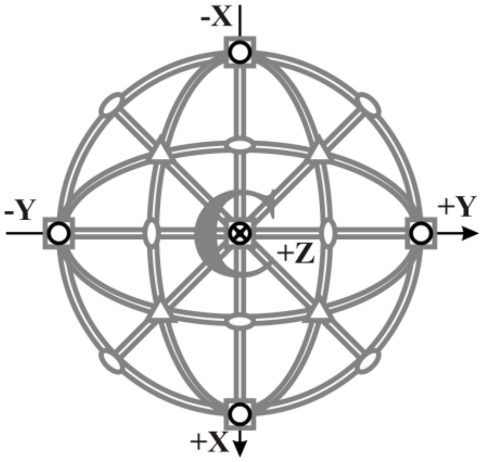
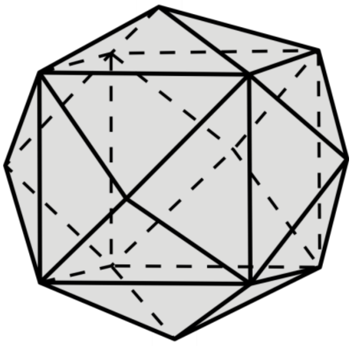
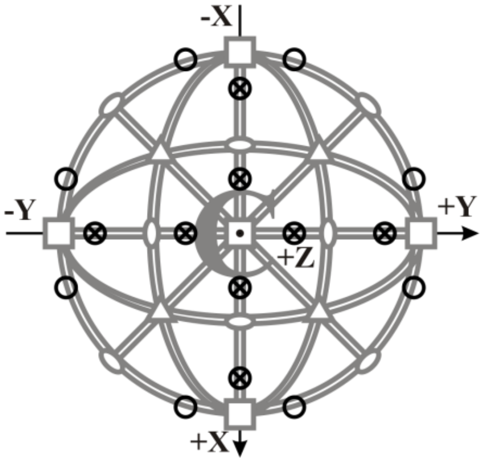
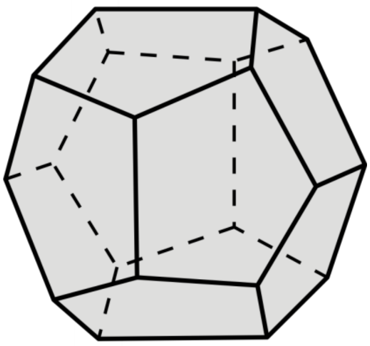
1	2	3	4
Тетрагональный тетраэдр	 	4	Равнобедренный треугольник. Нижняя грань точно посередине между двумя верхними
Ромбоэдр	 	6	Ромб. Нижняя грань точно посередине между двумя верхними

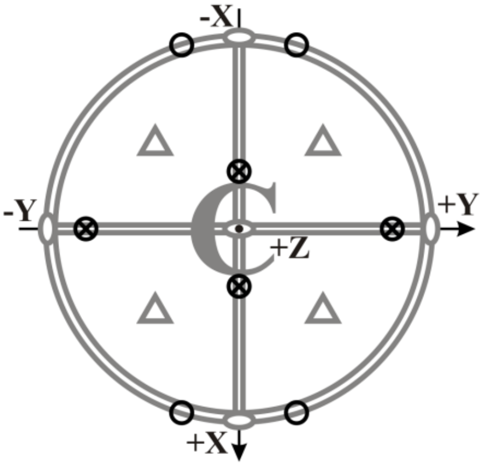
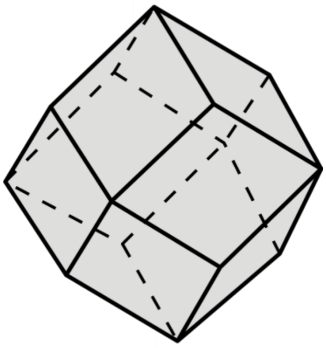
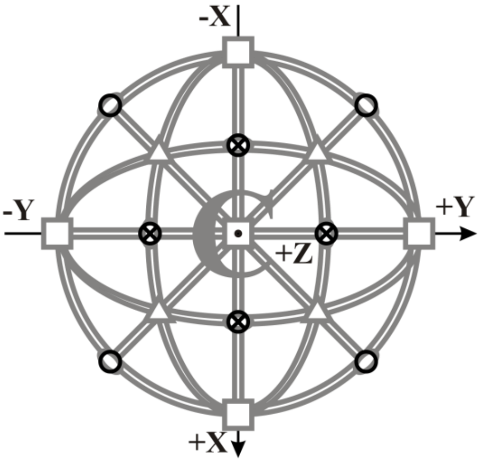
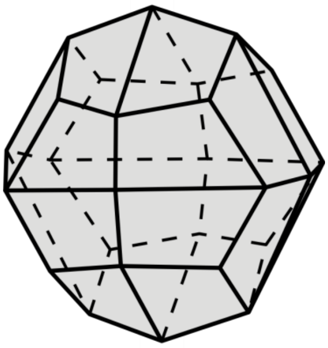
8.3. Простые формы кристаллов высшей категориии их проекции

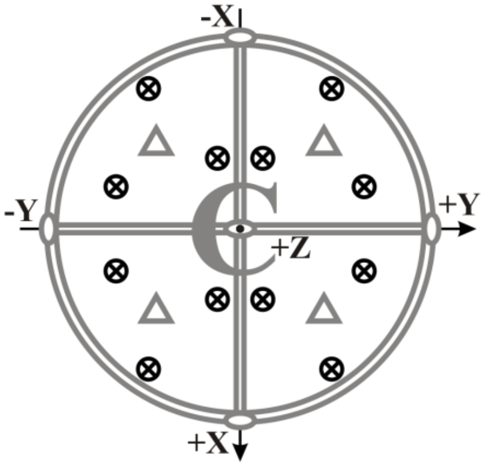
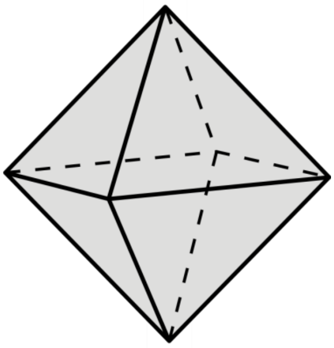
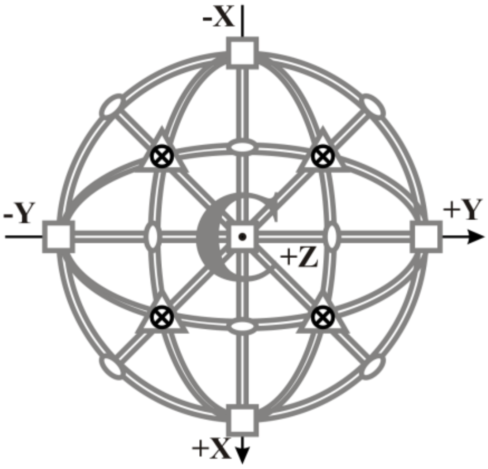
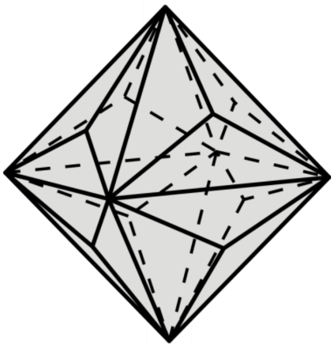
Название простой формы	Форма, проекция	Количество граней	Форма грани. Расположение граней относительно координатных осей
1	2	3	4
Кубический тетраэдр	  	4	Равносторонний треугольник. Грань одинаково наклонена ко всем трем осям $(\perp L_3)$
Тригон-тритетраэдр		12	Равнобедренный треугольник

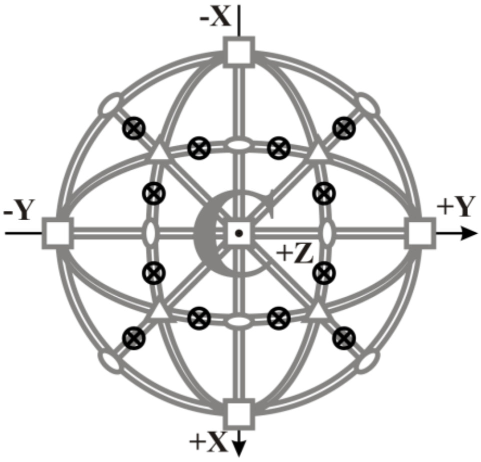
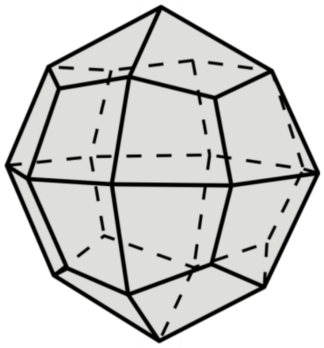
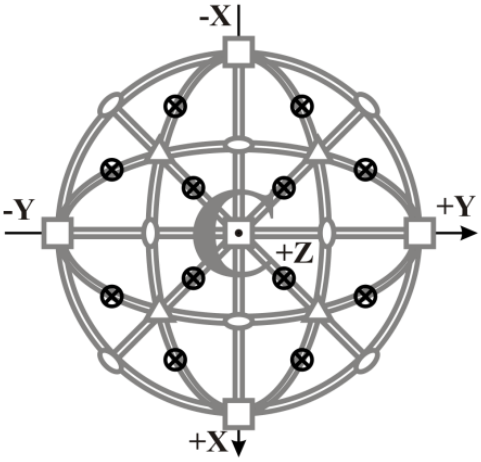
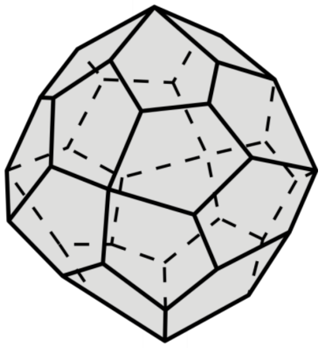
1	2	3	4
Тригон-тритетраэдр		12	Грань одинаково наклонена к двум осям и не параллельна третьей оси.
Тетрагон-тритетраэдр	 	12	Четырехугольник Грань одинаково наклонена к двум осям и не параллельна третьей оси. Отсекает больший отрезок на третьей оси
Пентагон-тритетраэдр		12	Несимметричный пятиугольник

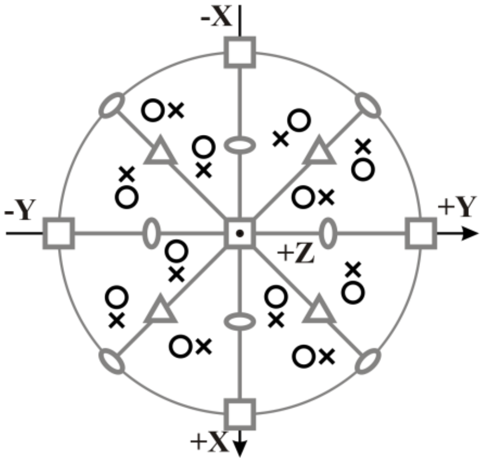
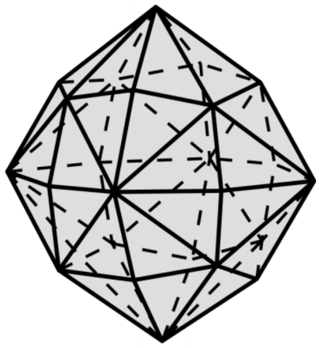
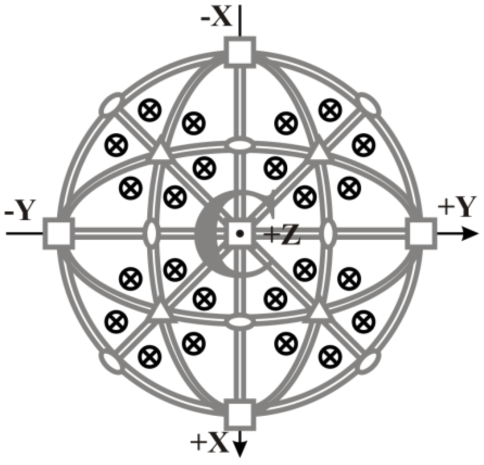
1	2	3	4
Пентагон-тритетраэдр		12	Грань занимает общее положение
Гексатетраэдр	 	24	Разносторонний треугольник. Грань занимает общее положение
Гексаэдр		6	Квадрат

1	2	3	4
Гексаэдр		6	Грань ⊥ L_4
Тригон-тетрагексаэдр		24	Равнобедренный треугольник Грань ⊥ P
			
Пентагон-додекаэдр		12	Симметричный пятиугольник с углами наклона 30° и 60° к двум координатным осям и параллельный третьей

1	2	3	4
Пентагон-додекаэдр		12	
Ромбододекаэдр	 	12	Ромб с углами наклона 45° к двум координатным осям и параллельный третьей. Грань ⊥ *P*
Дидодекаэдр		24	Четырехугольник

1	2	3	4
Дидодекаэдр		24	Грань занимает общее положение
Октаэдр	 	8	Равносторонний треугольник Грань ⊥ L_3
Тригон-триоктаэдр		24	Равнобедренный треугольник

1	2	3	4
Тригон-триоктаэдр		24	Грань ⊥ P
Тетрагон-триоктаэдр	 	24	Четырехугольник Грань ⊥ P
Пентагон-триоктаэдр		24	Несимметричный пятиугольник

1	2	3	4
Пентагон-триоктаэдр	 	24	Грань занимает общее положение
Гексоктаэдр	  	48	Разносторонний треугольник. Грань занимает общее положение относительно элементов симметрии

Вопросы к главе 8

1) Что такое простая форма кристаллического многогранника?
2) Назовите типы простых форм кристаллов.
3) Чем отличаются на проекциях частные простые формы от общих?
4) Сколько простых форм наблюдают у кристаллических многогранников?
5) Какие простые формы встречаются и в низшей и в средней категориях?
6) Какие простые формы встречаются только в высшей категории?
7) Чем отличаются пирамиды в низшей и средней категориях?
8) В каких категориях встречаются тетраэдры, и чем они отличаются?
9) Перечислите простые формы, у которых по 8 граней?
10) Перечислите простые формы, у которых по 6 граней?
11) Перечислите простые формы, у которых по 4 граней?
12) Какие простые формы относятся к открытым простым формам?
13) У какой простой формы максимальное число граней? Сколько их?
14) У какой простой формы минимальное число граней? Сколько их?

Глава 9. Символы граней кристаллов

Метод определения символов грани основывается на втором законе кристаллографии - **законе целых чисел (закон Гаюи):**

Двойные отношения параметров (отрезков), отсекаемых двумя любыми гранями кристалла на трех пересекающихся ребрах его, равны отношениям целых и сравнительно малых чисел. $\frac{|OA_1|}{|OA|} : \frac{|OB_1|}{|OB|} : \frac{|OC_1|}{|OC|} = \boldsymbol{h} : \boldsymbol{k} : \boldsymbol{l}$ **– индексы грани (индексы Миллера).**

(*hkl*) – символ грани кристалла.

Закон Гаюи отражает соответствие внешней формы кристалла строению его кристаллической решетки, так как грани кристаллов параллельны плоским сеткам пространственных решеток, отличающихся большой плотностью материальных частиц (ретикулярная плотность).

Отрезки, отсекаемые гранью на кристаллографических осях, называются ее параметрами. За единицы измерения - единичные отрезки - по кристаллографическим осям принимаются параметры какой-либо из граней кристалла, пересекающей все три оси и отсекающие на них равные отрезки, если оси являются эквивалентными, или неравные отрезки, если оси неэквивалентные. Эта грань принимается за исходную и сравнивается сама с собой, благодаря чему появляются индексы грани (111) и грань носит название единичной.

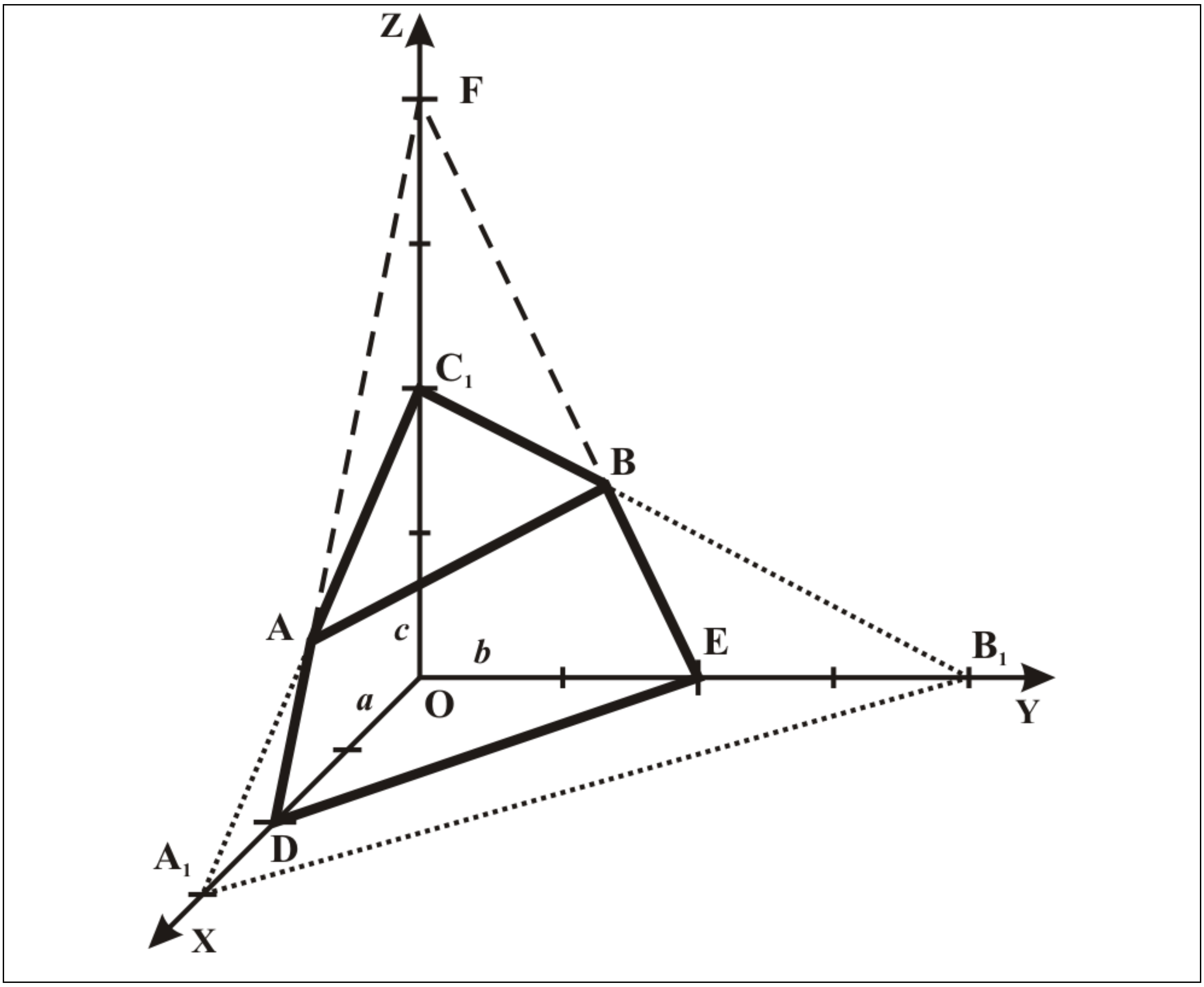
Единичная грань – это грань любой простой формы, пересекающая все три оси координат преимущественно равнонаклонно ко всем трем, определяя по ним величину единичных отрезков.

Положение в пространстве всех граней кристалла сравнивается с положением единичной грани, которая параллельна плоской сетке, отсекающей элементарные отрезки на всех трех координатных осях - XYZ.

Критерием правильности выбора единичной грани являются индексы в виде небольших целых чисел в символах остальных граней.

Часто такая грань отсутствует, и символы задаются в общем виде.

Для определения символов граней, используя закон Гаюи, кристаллический многогранник располагают в пространстве так, как рассматривается в главе 5. Кристаллографическая ось Z направляют вертикально, ось Y направляют слева направо, ось X - на наблюдателя. Центр тяжести кристалла совмещают с точкой пересечения осей – т.О. Положительными считаются концы осей: X – от начала координат к наблюдателю, Y – от начала координат вправо, Z - от начала координат вверх. Грани кристалла мысленно продолжаются до пересечения с кристаллографическими осями.



Грань ABC принимаем за единичную. Параметры грани ABC – отрезки $|OA_1|, |OB_1|, |OC_1|$. Параметры грани ABDE – отрезки $|OD|, |OE|, |OF|$.

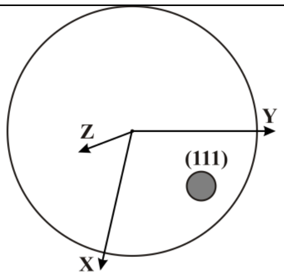
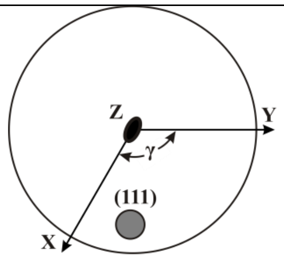
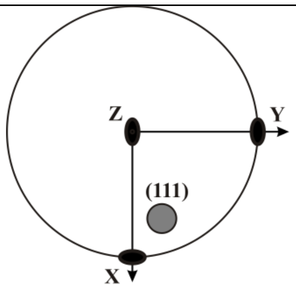
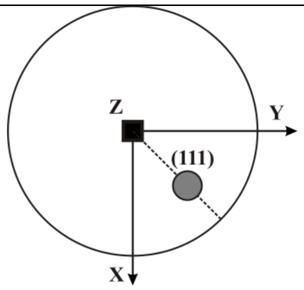
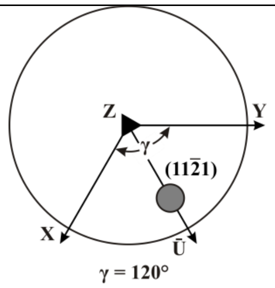
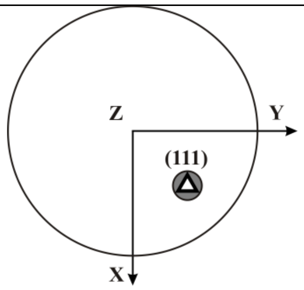
$$\frac{|\boldsymbol{OA_1}|}{|\boldsymbol{OD}|} : \frac{|\boldsymbol{OB_1}|}{|\boldsymbol{OE}|} : \frac{|\boldsymbol{OC_1}|}{|\boldsymbol{OF}|} = \frac{\boldsymbol{3a}}{\boldsymbol{2a}} : \frac{\boldsymbol{4b}}{\boldsymbol{2b}} : \frac{\boldsymbol{2c}}{\boldsymbol{4c}} = \mathbf{3 : 4 : 1}$$

Символ грани ABDE (341).

При определении символов граней необходимо помнить следующее:

- чем больше отрезок, отсекаемый гранью на оси по сравнению с единичным, тем меньше индекс;
- грань, параллельная одной из координатных осей, имеет в символе по этой оси ноль, например, для грани параллельной оси Z - (210);
- если грань пересекает только одну координатную ось (например Z) и параллельна двум другим - X и Y, ее символ имеет вид (001); грань, пересекающая только ось Y, имеет символ (010), пересекающая только ось X - (100);
- грани одинакового вида и одинаково ориентированные в пространстве относительно выбранных осей координат имеют–символы, отличающиеся друг от друга только знаком, например, (111) и (111), или порядком расположения индексов, например, (123) и (321).

В тригональной и гексагональных сингониях вводится четвертая вспомогательная ось. Единичная грань пересекает отрицательный конец этой оси, и появляется еще один параметр. Символ единичной грани в этих сингониях (hkil), причем i = - (h+k).

Сингония	Символ единичной грани	Стереографические проекции единичной грани
триклинная	(111)	
моноклинная	(111)	 $\gamma \neq 90° \neq 120°$
ромбическая	(111)	
тетрагональная	(111)	
тригональная, гексагональная	$(11\bar{2}1)$	 $\gamma = 120°$
кубическая	(111)	

Класс симметрии в обозначениях А.Шёнфлиса Простые общие формы кристаллов	Триклинная сингония *(hkl)*	Моноклинная Сингония *(hkl)*	Ромбическая сингония *(hkl)*	Тетрагональная сингония *(hkl)*	Тригональная сингония *(hkil)*	Гексагональная сингония *(hkil)*	Кубическая сингония *(hkl)*
	C_1 Моноэдр	C_2 Диэдр осевой	D_2 Тетраэдр	C_4 Пирамида	C_3 Пирамида	C_6 Пирамида	T Пентагон-тритетраэдр
	C_{1i} Пинакоид	C_s Диэдр плоский	C_{2v} Пирамида	C_{4h} Дипирамида	C_{3i} Ромбоэдр	C_{6h} Дипирамида	T_h Дидодекаэдр
		C_{2h} Ромбическая призма	D_{2h} Дипирамида	D_4 Трапецоэдр	D_3 Трапецоэдр	D_6 Трапецоэдр	O Пентагон-триоктаэдр
				C_{4v} Дигексагональная пирамида	C_{3v} Дитригональная пирамида	D_{6v} Дигексагональная пирамида	T_d Гексатетраэдр
				D_{4h} Тригональная дипирамида	D_{3d} Скаленоэдр	D_{6h} Дигексагональная дипирамида	O_h Гексоктаэдр
				S_4 Дитригональная дипирамида		C_{3h} Тригональная дипирамида	
				D_{2d} Скаленоэдр		D_{3h} Дитригональная дипирамида	

Вопросы к главе 9

1) В чем заключается второй закон кристаллографии (Закон Гаюи)?
2) Что такое символы грани и как они записываются в разных сингониях?
3) Чем отличаются символы граней в тетрагональной и тригональной сингониях?
4) Чем отличаются символы граней в тригональной и гексагональной сингониях?
5) Что такое единичная грань и как она записывается?
6) Что означает 0 в символе грани?

План описания моделей кристаллов

1) Определить симметрию кристалла:

- записать формулу симметрии в символах Браве;

- сингонию: триклинную, моноклинную, ромбическую, тетрагональную, тригональную, гексагональную, кубическую;

- категорию: низшую, среднюю, высшую;

-дать характеристику геометрических констант сингоний – угловых величин α, β, γ; элементарных отрезков $a_{0,}$ $b_{0,}$ $c_{0.}$

- привести характеристику эквивалентности координатных направлений.

2) Определить вид симметрии, записать класс (группу) симметрии в символах А.Шёнфлиса, в международной символике Германна-Могена.

3) Вычертить стереографическую проекцию класса симметрии и обозначить на ней направления выбранных координатных осей X, Y, Z.

4) На стереографическую проекцию класса симметрии нанести гномостереографические проекции граней кристалла, обозначив грани каждой простой формы одинаковыми цифрами.

5) Дать характеристику простых форм кристалла:

- название простой формы,

-количество граней,

- частная или общая простая форма,

-закрытая или открытая простая форма.

6) Проиндицировать грани каждой простой формы

(т.е. определить индексы h, k, l).

7) Назвать класс симметрии (по общей простой форме).

Список литературы

1. Егоров–Тисменко, Юрий Клавдиевич. Кристаллография: руководство к практическим занятиям / Ю. К. Егоров-Тисменко. –М.: Изд. МГУ, 2010. –208 с.
2. Егоров-Тисменко, Юрий Клавдиевич. Кристаллография и кристаллохимия: учебник для студентов вузов, обучающихся по спец "Геология" / Ю.К. Егоров-Тисменко.–Москва: КДУ, 2005.–587 с.
3. Чупрунов, Евгений Владимирович. Основы кристаллографии: учеб. для студентов вузов, обучающихся по физ. и хим. спец. / Е. В. Чупрунов, А. Ф. Хохлов, М. А. Фаддеев.–М.: Физматлит, 2004.–498, [2] с.
4. Задачи по кристаллографии: учеб. пособие для студентов вузов, обучающихся по физ. и хим. спец. / [Головачев В.П., Сафьянов Ю.Н., Чупрунов Е.В. и др.]; под ред. Е. В. Чупрунова, А. Ф. Хохлова.–М.: Физматлит, 2003.–191,[17] с.
5. Чупрунов, Евгений Владимирович. Основы кристаллографии: учеб. для студентов вузов, обучающихся по физ. и хим. спец. / Е.В. Чупрунов, А.Ф. Хохлов, М.А. Фаддеев.–Москва: Физматлит, 2006.–498, [2] с
6. Попов, Георгий Михайлович. Кристаллография / Г.М. Попов, И.И. Шафрановский. – М.: «Высшая школа», 1972. – 356 с.