О некоторых новых метрических характкристиках неспрямляемых кривых и их приложениях

Д.Б. Кац

Пусть Γ есть замкнутая кривая на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Если она неспрямляема, то при решении краевых задач на такой кривой возникает потребность в количественной характеристике степени ее неспрямляемости. В настоящем докладе вводятся новые характеристики такого рода.

Пусть Γ разбивает $\mathbb{C}$ на конечную область D^+ и бесконечную D^-. Положим

$$\mathfrak{m}^+(\Gamma) = \sup\{p : \iint\limits_{D^+} \delta^{-p}(z)dxdy < \infty\},$$

$$\mathfrak{m}^-(\Gamma) = \sup\{p : \iint\limits_{D^- \cap B(R)} \delta^{-p}(z)dxdy < \infty\},$$

$$\mathfrak{m}(\Gamma) = \max\{\mathfrak{m}^+(\Gamma), \mathfrak{m}^-(\Gamma)\},$$

где $\delta(z)$ означает расстояние от точки $z = x + iy$ до Γ, а $B(R) = \{z : |z| < R\}$ есть круг настолько большого радиуса R, что $D^+ \subset B(R)$. Эти величины можно назвать показателями Марцинкевича.

Автором показано, что для любой не сводящейся к точке кривой эти показатели заключены в интервале $[0, 1]$, причем для спрямляемой кривой они равны единице. Установлен также ряд других их свойств.

Эти характеристики нашли применение при решении задачи о скачке, то есть задачи об отыскании аналитической в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ функции $\Phi(z)$ по краевому условию

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = f(t), \quad t \in \Gamma,$$

где $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ есть предельные значения $\Phi(z)$ в точке $t \in \Gamma$ слева и справа соответственно. В частности, доказана разрешимость этой задачи в предположении, что функция f удовлетворяет на Γ условию Гёльдера с показателем, превосходящим $1 - \frac{\mathfrak{m}}{2}$. Это условие слабее известных ранее.