

*Материалы XII международной научно-практической
конференции*

**Академическая наука -
проблемы и достижения**

15-16 мая 2017 г.

North Charleston, USA

Том 1

Бахтиева Л.У.

доцент, кандидат физико-математических наук

Латыпова Г.Р.

магистрант

Казанский (Приволжский) федеральный университет

КОМПЬЮТЕРНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ОБРАТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА

Задачу восстановления изображения по проекциям приходится решать во многих областях науки и техники, например, в медицине при диагностике заболеваний, авиационной и машинной промышленности при исследовании качества композиционных конструкций, в электронной и рентгеновской микроскопии, геофизике, астрофизике и многих других.

Для решения задачи реконструкции изображения используется метод, основанный на применении обратного преобразования Радона.

Пусть функция $f(x, y)$ – интегрируемая в пространстве R^2 функция, s – прямая на плоскости Oxy , уравнение которой имеет вид

$$x \cos \theta + y \sin \theta - p = 0, \quad (1)$$

p – расстояние от начала координат до прямой s , θ – угол между прямой p и осью Ox .

Преобразование Радона осуществляется по формуле [1-3]

$$g(p, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(p \cos \theta - s \sin \theta, p \sin \theta + s \cos \theta) ds \quad (2)$$

или

$$g(p, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \delta(p - x \cos \theta - y \sin \theta) dx dy, \quad (3)$$

δ – дельта-функция Дирака. Формулы (2) и (3) задают проекцию изображения, полученную при повороте прямой p на угол θ . Набор всех проекций называется *радоновским* образом этого изображения.

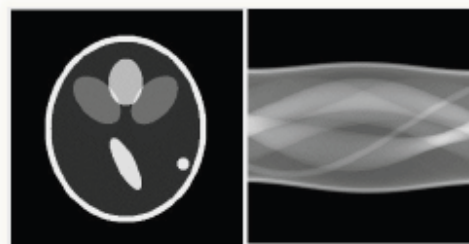


Рисунок 1

Для компьютерной реализации формул (2) и (3) удобнее использовать дискретную форму преобразования Радона. Пусть задано

изображение размером $m \times n$, в котором значение цвета $f_{i,j}$ определяет плотность вещества исследуемого объекта, $i = 0..m - 1$, $j = 0..n - 1$. Операция интегрирования в формуле заменяется операцией суммирования. Будем считать, что измерения производятся для N_θ углов в диапазоне $[0, \pi]$ с шагом $\Delta_\theta = \frac{\pi}{N_\theta}$. Результаты проецирования рассматриваются в виде N_p значений в диапазоне $[0, \sqrt{m^2 + n^2}]$. Таким образом, N_θ – количество проекций, N_p – количество точек разбиения вдоль проекции.

На рисунке 1 показан результат работы программы по построению радоновского образа при $N_p = m$, $N_\theta = n$, $m = n = 180$ (слева – исходное изображение, справа – его радоновский образ).

Простейшим алгоритмом реконструкции изображения при обратном преобразовании Радона является алгоритм обратного проецирования. Формула обратного преобразования Радона имеет вид [4-5]

$$\hat{f}(x, y) = \int_0^\pi g(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta, \quad (4)$$

где $\hat{f}(x, y)$ – восстановленное изображение.

На рисунке 2 показан результат применения алгоритма обратного проецирования. Получившееся изображение получается размытым, контуры нечеткими, плохо видно детали изображения.

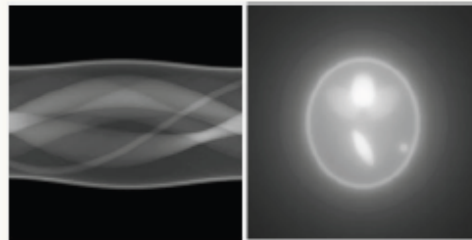


Рисунок 2

Для получения более качественного изображения можно применить алгоритм фильтрации обратной проекции [6]. В его основе лежат формулы

$$\hat{f}(x, y) = \int_0^\pi u(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta, \quad (5)$$

$$u(p, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_v^{-1}(|v| F_{p \rightarrow v} g(p, \theta)) dp, \quad (6)$$

F и F^{-1} – прямое и обратное преобразование Фурье, $|v|$ – фильтр.

Чтобы по проекциям $g(p, \theta)$ восстановить функцию $f(x, y)$, необходимо выполнить следующую последовательность действий:

1) для радоновского образа $g(p, \theta)$ вычислить преобразование Фурье $F_{p \rightarrow v} g(p, \theta)$;

2) функцию $F_{p \rightarrow v}g(p, \theta)$ умножить на $|v|$;

3) вычислить обратное преобразование Фурье $F_{v \rightarrow p}^{-1}(|v|F_{p \rightarrow v}g(p, \theta))$ и тем самым определить функцию модифицированной проекции $u(p, \theta)$;

4) проинтегрировать функцию $u(p, \theta)$ по углу θ , восстановив исходную функцию $f(x, y)$.

На практике при дискретных данных модифицированные проекции следует вычислять с помощью дискретного прямого и обратного преобразования Фурье. Значения количества проекций N_θ и точек разбиения вдоль проекции N_p берутся такими же, как и при прямом преобразовании Радона. Отметим, что при восстановлении исходного изображения на дискретной прямоугольной сетке следует применить процедуру интерполяции значений $u(p, \theta)$.

На рисунке 3 показан результат применения алгоритма фильтрации обратной проекции. Изображение получается гораздо более четким, чем при алгоритме обратного проецирования.

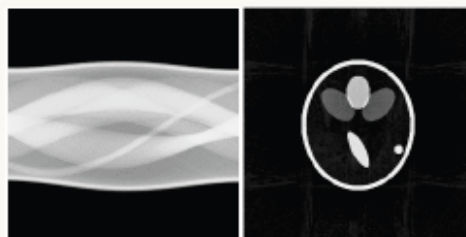


Рисунок 3

ЛИТЕРАТУРА

1. Федоров Г.А. Однофотонная вычислительная томография: Учебное пособие – М.: МИФИ, 2008 г. – 204 с.
2. Троицкий И.Н. Статистическая теория томографии – М.: Радио и связь, 1989 г. – 240 с.
3. Грузман И.С. Математические задачи компьютерной томографии // Соросовский образовательный журнал, Том 7, №5, 2001 – с. 117-121.
4. Черныш Ю.Е., Белов Д.В., Вдовиченко А.Н. Практическая реализация обратного преобразования Радона для многомерной спектроскопии ядерного магнитного резонанса // Вестник южного научного центра РАН, Том 2, № 4, 2006 – с. 89-91
5. Запрягаев С.А., Сорокин А.И. Программная оболочка для поиска примитивов на изображении // Вестник ВГУ, Серия: Системный анализ и информационные технологии, 2008, № 2 – с. 37-47.