МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НАБЕРЕЖНОЧЕЛНИНСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ) ФЕДЕРАЛЬНОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО АВТОНОМНОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО
УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДЫ ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПАКЕТА MINITAB

*Учебное пособие студентам магистратуры направления
09.04.02 «Информационные системы и технологии»
для выполнения практических и самостоятельных работ
по дисциплине «Модели и методы планирования экспериментов»*

Набережные Челны
2016

УДК 519.2:004.942(075.8); 001.891.5
ББК 22.172я73
М15

Макарова И.В., Хабибуллин Р.Г., Беляев А.И., Шубенкова К. А. Методы планирования экспериментов с использованием пакета Minitab: учебное пособие студентам магистратуры направления 09.04.02 «Информационные системы и технологии» для выполнения практических и самостоятельных работ по дисциплине «Модели и методы планирования экспериментов» / Набережные Челны: Набережночелнинский институт КФУ, 2016. – 146 с.

Учебное пособие разработано на кафедре «Сервис транспортных систем» и предназначено для использования студентами магистратуры направления 09.04.02 «Информационные системы и технологии» по дисциплине «Модели и методы планирования экспериментов».

Учебное пособие способствует формированию у студентов теоретических знаний по разработке оптимальных планов проведения экспериментов и содержит задания для практических и самостоятельных работ, направленные на формирование навыков использования специализированного программного пакета Minitab для решения задач в области планирования экспериментов.

Рецензент: к.т.н, доцент, доцент кафедры «Информационные системы» Илюхин Алексей Николаевич

Оглавление

Введение

Основным методом научных исследований является эксперимент с изучаемым объектом, явлением или процессом. Под *экспериментом* понимают научную постановку опытов и наблюдение за поведением исследуемого явления в строго учитываемых условиях.

Экспериментальные данные формируются путем пассивного наблюдения либо с помощью активного эксперимента. При пассивном наблюдении информация получается путем регистрации необходимых сведений в условиях обычного функционирования объекта.

В активном эксперименте производится целенаправленное воздействие на объект по заранее составленной схеме, плану эксперимента. Активный эксперимент позволяет расширить область исследования, точнее вскрыть закономерности функционирования, сократить потребности в ресурсах на проведение исследования [1].

Поскольку при проведении любого эксперимента осуществляются некоторые упрощения или допущения, а исключить случайную ошибку наблюдений полностью практически невозможно, сбор и обработка статистических данных должны осуществляться с применением строгих методов математической статистики. Целью математической обработки совокупности полученных экспериментальных данных является построение полезной аналитической модели изучаемого объекта для выявления его свойств и прогнозирования его поведения.

Однако не всегда полученная аналитическая модель может быть использована на практике: только при сходстве (соблюдения условия подобия) математического описания модели и объекта модель может считаться адекватной реальной ситуации, и результаты исследования свойств модели можно переносить на объект.

Корректность математической модели и возможность ее применения на практике зависят от того, насколько грамотно спланирован эксперимент, все ли значимые факторы учтены при построении зависимости и, наконец, насколько корректно выполнена интерпретация полученных результатов.

Под *планированием эксперимента* понимают оптимальное управление экспериментом, когда определяется число и условия проведения опытов, необходимых и достаточных для решения поставленной задачи с требуемой точностью [2]. Начало *теории планирования экспериментов* положили труды Р. Фишера (1935), где он доказал, что рациональное планирование экспериментов дает такой же существенный выигрыш в точности оценок построенных зависимостей, как и корректная с точки зрения математической статистики обработка результатов измерений.

Развитие информационных технологий и возможностей компьютеров обрабатывать большие объемы информации сделало доступными для широкого пользователя самые современные методы статистического анализа. На сегодняшний день существуют различные программные пакеты, реализующие такие возможности. Задания для практических и самостоятельных работ, содержащиеся в учебном пособии, направлены на формирование навыков использования специализированного программного пакета Minitab.

В первой части учебного пособия в краткой форме приведены основные методы описательной статистики, важнейшие числовые характеристики выборки, а также даны понятия ковариации и коэффициента корреляции.

Вторая часть посвящена интерпретации результатов и оценке точности прогнозов, которые можно выполнить с помощью методов регрессионного анализа.

В третьей части представлены начальные сведения по планированию и обработке результатов многофакторных экспериментов.

Целью учебного пособия является показать основные способы сокращения объема проводимых исследований при заданной точности и достоверности получения результатов, извлечения из полученных опытных данных максимума полезных сведений.

Материал изложен на уровне, предназначенном для практического применения, и не затрагивает доказательную базу рассматриваемых методов. Для освоения материала необходимы начальные сведения по математическому анализу и методам обработки экспериментальных данных.

1 Описательная статистика

1.1 Методы описательной статистики

Методами описательной статистики называются методы описания выборок $X_1, X_2, \dots, X_n$ с помощью различных показателей и графиков. Достоинство методов описательной статистики в том, что ее простые и довольно информативные статистические показатели избавляют от необходимости просмотра большого количества значений выборки.

Гистограмма и полигон статистических распределений

Для наглядного представления вариационного ряда большое значение имеют его графические изображения. Графически вариационный ряд может быть изображен в виде полигона, гистограммы и кумуляты.

Полигон распределения (дословно — многоугольник распределения) строится в прямоугольной системе координат. Величина признака откладывается на оси абсцисс, частоты или относительные частоты — по оси ординат. Чаще всего полигоны применяются для изображения дискретных вариационных рядов, но их можно применять также для интервальных рядов. В этом случае на оси абсцисс откладываются точки, соответствующие серединам данных интервалов.

Гистограмма распределения строится аналогично полигону в прямоугольной системе координат. В отличие от полигона при построении гистограммы на оси абсцисс выбирают не точки, а отрезки, изображающие интервал, а вместо ординат, соответствующих частотам или относительным частотам отдельных вариант, строят прямоугольники с высотой, пропорциональной частотам или относительным частотам интервала [3].

Пример полигона и гистограммы распределения приведен на рисунке 1.1.

Разбивая интервалы на несколько частей и исходя из того, что вся площадь гистограммы должна остаться при этом неизменной, можно получить мелкоступенчатую гистограмму, которая при уменьшении величины интервала будет приближаться к плавной кривой, называемой кривой распределения.

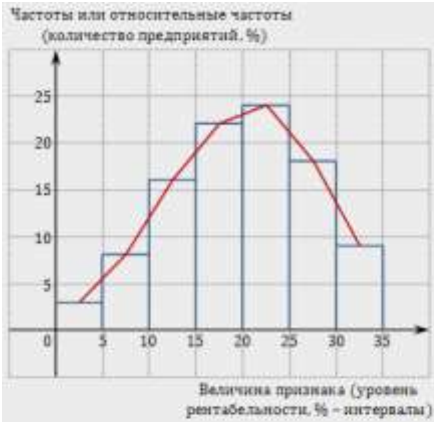


Рисунок 1.1 – Полигон и гистограмма распределения

Числовые характеристики выборки

Числовые характеристики выборки дают количественное представление об эмпирических данных и позволяют сравнивать их между собой. Наибольшее практическое значение имеют характеристики положения, рассеяния и асимметрии эмпирических распределений.

Среднее арифметическое ($\bar{x}$) представляет собой такое значение признака, сумма отклонений выборочных значений признака от которого равна нулю.

Геометрический смысл среднего арифметического – точка на оси x, которая является абсциссой центра масс гистограммы.

Среднее арифметическое может вычисляться как по необработанным первичным данным, так и по результатам группировки этих данных.

Для несгруппированных данных:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad (1.1)$$

где n – объем выборки; x_i – варианты выборки.

Для сгруппированных данных:

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{k} n_i \cdot x_i, \qquad (1.2)$$

где n – объем выборки; k – число интервалов группировки; n_i – частоты интервалов; x_i – срединные значения интервалов.

Медианой (Ме) называется такое значение признака X, когда одна половина значений экспериментальных данных меньше ее, а вторая половина – больше.

Если в вариационном ряду *2m+1* случаев, то значение признака у случая *m+1* будет медианным. Если в ряду четное число *2m* случаев, то медиана равна средней арифметической из двух срединных значений. При нечетном количестве вариантов медиана рассчитывается по формуле $Me = x_m + 1$, при чётном $M_e = \frac{x_m + x_{m+1}}{2}$.

Модой (*Mo*) называется варианта, наиболее часто встречающаяся в данном вариационном ряду. Для дискретного ряда мода, являющаяся характеристикой вариационного ряда, определяется по частотам вариант и соответствует варианте с наибольшей частотой. Мода рассчитывается по формуле

$$Mo = x_{Mo(\min)} + k \cdot \frac{m_{Mo} - m_{Mo-1}}{(m_{Mo} - m_{Mo-1}) + (m_{Mo} - m_{Mo+1})}, \qquad (1.3)$$

где $x_{Mo(min)}$ – нижняя граница модального интервала; k – величина модального интервала; m_{Mo} – частота модального интервала; m_{Mo-1} – частота интервала, предшествующего модальному; m_{Mo+1} – частота интервала, следующего за модальным.

Вариационный размах (*R)*, или широта распределения, есть разность между наибольшим и наименьшим значениями вариационного ряда:

$$R = x_{\max} - x_{\min} \qquad (1.4)$$

Вариационный размах представляет собой величину неустойчивую, чрезвычайно зависящую от случайных обстоятельств; применяется для приблизительной оценки вариации.

Среднее линейное отклонение, или *простое среднее отклонение* (*d*) представляет собой среднюю арифметическую из абсолютных значений отклонений вариант от средней. В зависимости от отсутствия или наличия частот вычисляют среднее линейное отклонение невзвешенное (формула 1.5) или взвешенное (формула 1.6):

$$d = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|x_i - \bar{x}\right|, \tag{1.5}$$

$$d = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left|x_i - \bar{x}\right| m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \tag{1.6}$$

Средний квадрат отклонения, или *дисперсия* (D) наиболее часто применяется как мера колеблемости признака. Дисперсии невзвешенную и взвешенную вычисляют по формулам 1.7 и 1.8 соответственно:

$$D = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 \tag{1.7}$$

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \tag{1.8}$$

Таким образом, дисперсия есть средняя арифметическая из квадратов отклонений вариант от их средней арифметической. Квадратный корень из дисперсии ($\sqrt{D}$) называется *среднеквадратическим отклонением*.

Коэффициентом асимметрии (A_s) называется отношение центрального момента третьего порядка к кубу среднеквадратического отклонения:

$$As = \frac{\mu^3}{\sigma^3} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^3 m_i}{\sigma^3 \sum_{i=1}^{n} m_i} \tag{1.9}$$

Если полигон вариационного ряда скошен, то есть одна из его ветвей начиная от вершины зримо короче другой, то такой ряд называется асимметричным.

Эксцессом (*E*) называется уменьшенное на три единицы отношение центрального момента четвёртого порядка к четвёртой степени среднеквадратического отклонения:

$$E = \frac{\mu^4}{\sigma^4} - 3 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^4 m_i}{\sigma^4 \sum_{i=1}^{n} m_i} - 3 \qquad (1.10)$$

Кривые распределения, у которых $E<0$, менее крутые, имеют более плоскую вершину и называются плосковершинными. Кривые распределения, у которых $E>0$, более крутые, имеют острую вершину и называются островершинными.

Выборочной *квантилью* порядка k называется член вариационного ряда (упорядоченной по возрастанию выборки) с номером $[n \cdot k]+1$ (целая часть), если $n \cdot k$ - число не целое, и полусумма членов вариационного ряда с номерами $n \cdot k$ и $n \cdot k+1$, если число $n \cdot k$ целое [4].

Интервальные оценки математического ожидания и дисперсии

Доверительный интервал характеризует точность, а доверительная вероятность характеризует надежность. Понятия доверительный интервал (точность) и доверительная вероятность (надежность) связаны взаимообратной зависимостью. То есть небольшому доверительному интервалу отвечает малая надежность, а малой точности, то есть большому доверительному интервалу отвечает большая надежность.

Доверительный интервал разброса среднего результата (рисунок 1.2) чаще всего представляет собой симметричный отрезок (от -σ до +σ). Поэтому вероятность попадания точечной оценки математического ожидания в указанный интервал для случайной величины, распределенной нормально, определяется с помощью функции Лапласа.

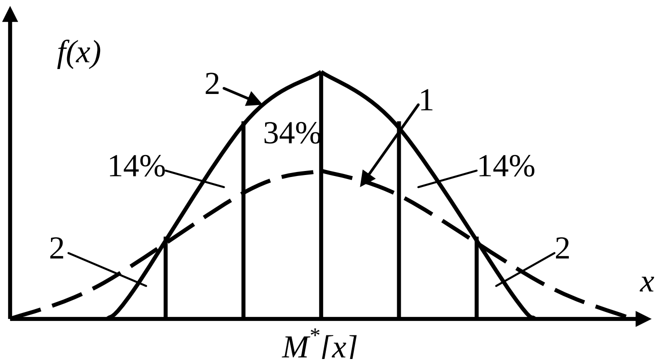


Рисунок 1.2 – Иллюстрация понятия «доверительный интервал разброса среднего результата нормально распределенной случайной величины»:
1 – кривая разброса самой случайной величины;
2 – кривая разброса среднего результата

Для оценки математического ожидания α случайной величины x, распределенной по нормальному закону, при известной дисперсии $D_x = \sigma^2$ в случае повторного отбора служит доверительный интервал:

$$\bar{x} - \lambda_0 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \alpha < \bar{x} + \lambda_0 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \qquad (1.11)$$

где $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ - выборочное среднее; $\Delta_x = \lambda_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ - точность оценки; n – объем выборки; λ_α - такое значение аргумента функции Лапласа Φ(x), при котором $2\Phi(-\lambda_\alpha) = \alpha$.

Если дисперсия D_x неизвестна, то для оценки $M_x = \alpha$ служит доверительный интервал

$$\bar{x} - t_\alpha \frac{S_1}{\sqrt{n}} < \alpha < \bar{x} + t_\alpha \frac{S_1}{\sqrt{n}}, \qquad (1.12)$$

где $S_1 = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$ - оценка среднего квадратичного отклонения σ величины x, а t_α находят по таблице критических точек распределения Стьюдента по заданному числу степеней свободы $\nu = n - 1$ и уровню значимости $1 - \alpha$.

В случае бесповторного отбора точность оценки находят при известной и неизвестной дисперсии соответственно по формулам 1.13 и 1.14:

$$\Delta_x = \lambda_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{1-n}{N}}\,, \qquad (1.13)$$

$$\Delta_x = t_\alpha \frac{S_1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{1-n}{N}}\,, \qquad (1.14)$$

где N – объем генеральной совокупности.

Интервальной оценкой для среднеквадратичного отклонения σ_0 нормально распределенного количественного признака X служит доверительный интервал $(S - \Delta_s, S + \Delta_s)$ – при $\Delta_s \leq S$ или интервал $(0, S + \Delta_s)$ – при $\Delta_s > S$, определяемый из условия $P(| \sigma_0 - S | < \Delta_s) = \alpha$, где Δ_s – предельная ошибка выборки для среднеквадратичного отклонения, которую вычисляют по формуле 1.15:

$$\Delta_s = q(\alpha, n) \cdot S, \qquad (1.15)$$

где $q(\alpha, n)$ – находят по таблице по доверительной вероятности α и объему выборки n.

Доверительную вероятность иногда называют коэффициентом доверия. При решении задач, связанных с исследованием функционирования автотранспортных средств и систем, коэффициент доверия обычно принимают равным 0,95 и, значит, связанный в ним уровень значимости α принимают равным 0,05 [5].

Числовые характеристики связи случайных величин

Числовой характеристикой силы или интенсивности статистической связи служит *ковариация*. Ковариацией двух случайных величин X и Y называется число $\boldsymbol{\sigma}_{XY}$ = **cov**(X,Y), равное математическому ожиданию произведения отклонений этих случайных величин от своих математических ожиданий:

$$\boldsymbol{\sigma}_{XY} = \boldsymbol{cov}(X,Y) = \boldsymbol{M}[(X - \boldsymbol{M}(X)) \cdot \boldsymbol{M}(Y - \boldsymbol{M}(Y))] \qquad (1.16)$$

Формула 1.16 может быть приведена к более удобному для вычисления ковариации виду:

$$\boldsymbol{\sigma}_{XY} = \boldsymbol{cov}(X,Y) = M(X \cdot Y) - M(X) \cdot M(Y) \qquad (1.17)$$

Если ковариация случайных величин X и Y $\boldsymbol{cov}(X,Y) = 0$, то говорят, что случайные величины X и Y *некоррелированы*. Если ковариация **cov**(X,Y) $\neq$ 0, то случайные величины X и Y являются коррелированными, а также зависимыми случайными величинами.

Ковариационной матрицей системы n случайных величин (X_1, X_2, ..., X_n) называется матрица, элементами которой являются ковариации $\boldsymbol{\sigma_{ij}} = \boldsymbol{cov}(X_i, Y_j)$: $\Sigma = (\boldsymbol{\sigma_{ij}})$.

Ковариационная матрица является симметрической ($\boldsymbol{\sigma}_{ij} = \boldsymbol{\sigma}_{ji}$), а ее диагональные элементы равны дисперсиям случайных величин X_1, X_2, ..., X_n. Определитель матрицы Σ называют обобщенной дисперсией, это число $|\Sigma|$ рассматривают как меру рассеяния системы n случайных величин.

Недостатком ковариации является ее размерность, равная произведению размерностей компонент X и Y. Меру статистической связи удобнее выражать безразмерной величиной. С этой целью вводится коэффициент корреляции.

Коэффициентом (линейной) корреляции случайных величин X и Y называют отношение ковариации к произведению средних квадратических отклонений этих величин:

$$\boldsymbol{\rho}_{XY} = \boldsymbol{cov}(X,Y)/(\boldsymbol{\sigma}_X \cdot \boldsymbol{\sigma}_Y) \qquad (1.18)$$

Для зависимых случайных величин коэффициент корреляции является мерой линейной связи между ними, он показывает, насколько хорошо в среднем может быть представлена одна из величин в виде линейной функции другой.

Если $\boldsymbol{\rho}_{XY} > 0$, то корреляцию называют положительной, при изменении одной случайной величины другая имеет тенденцию в среднем изменяться в том же направлении. В случае отрицательной корреляции они изменяются в противоположных направлениях [6].

1.2 Пример решения задач из области описательной статистики в пакете Minitab

Задача 1. Имеются данные о пробеге автомобилей на 10.01.2012 г. Целью обработки статистической информации является: построение полигона и гистограммы распределения, определение числовых характеристик выборки, построение интервальных оценок математического ожидание и дисперсии.

Решение задачи. В пакете Minitab [7] необходимо ввести данные о пробеге в столбец С1, который будет представлять вариационный ряд X.

Для того, чтобы построить гистограмму частот, необходимо выбрать команду **Graph – Histogram...**, выбрать тип гистограммы (**Simple**), указать вариационный ряд (**С1**) и нажать кнопку **ОК** (рисунок 1.3).

Если необходимо описать указанный вариационный ряд определенным законом распределения, необходимо в окне «**Histogram - Simple**» нажать кнопку **Data View...**, перейти на вкладку **Distribution** и выбрать необходимый закон распределения, а также при желании указать, с какими параметрами будет строиться этот закон (рисунок 1.4).

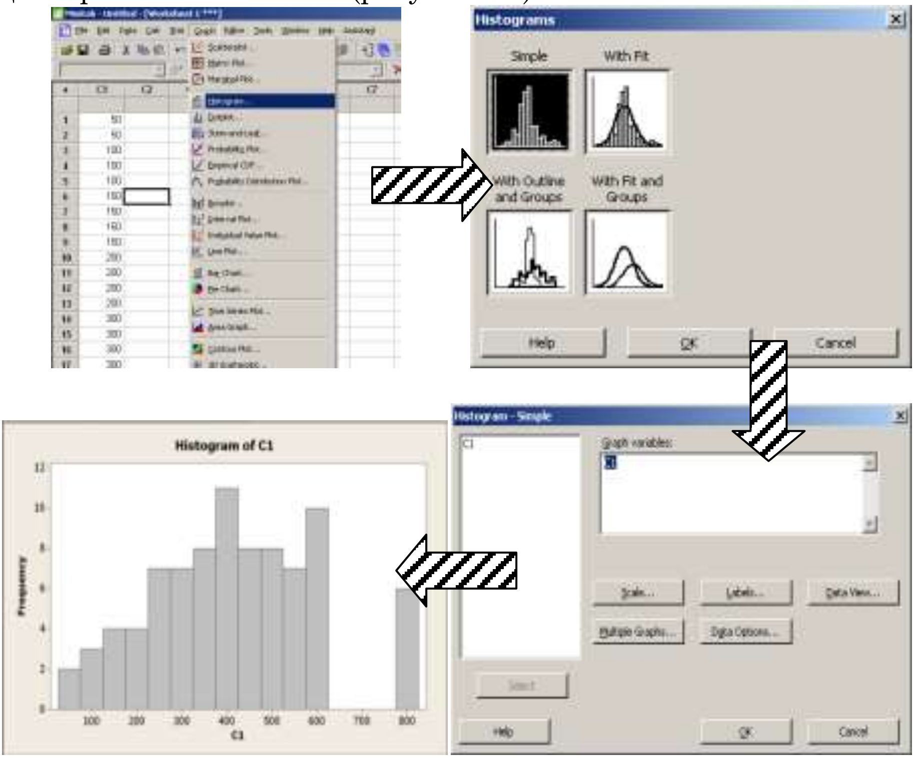


Рисунок 1.3 – Построение гистограммы частот

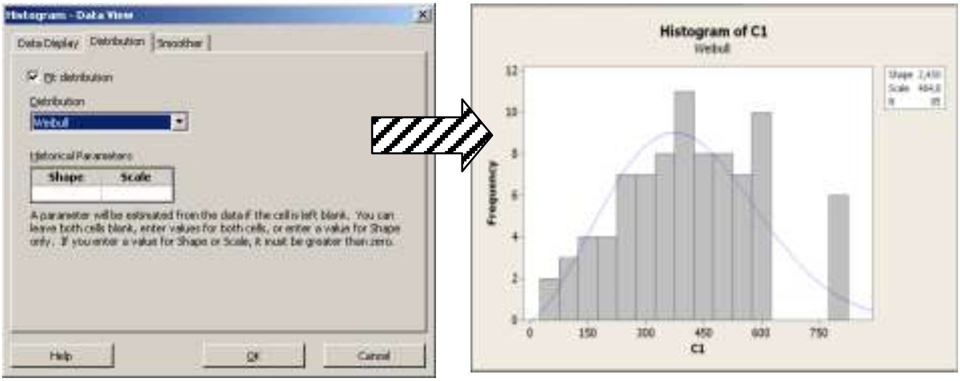


Рисунок 1.4 – Построение закона распределения

Для того, чтобы построить полигон частот с указанием интегральной функции распределения, необходимо выбрать команду **Graph – Empirical CDF...**, выбрать тип полигона (**Simple**), указать вариационный ряд (**C1**), указать закон распределения, нажав на кнопку **Distribution...**, после чего нажать кнопку **ОК** (рисунок 1.5).

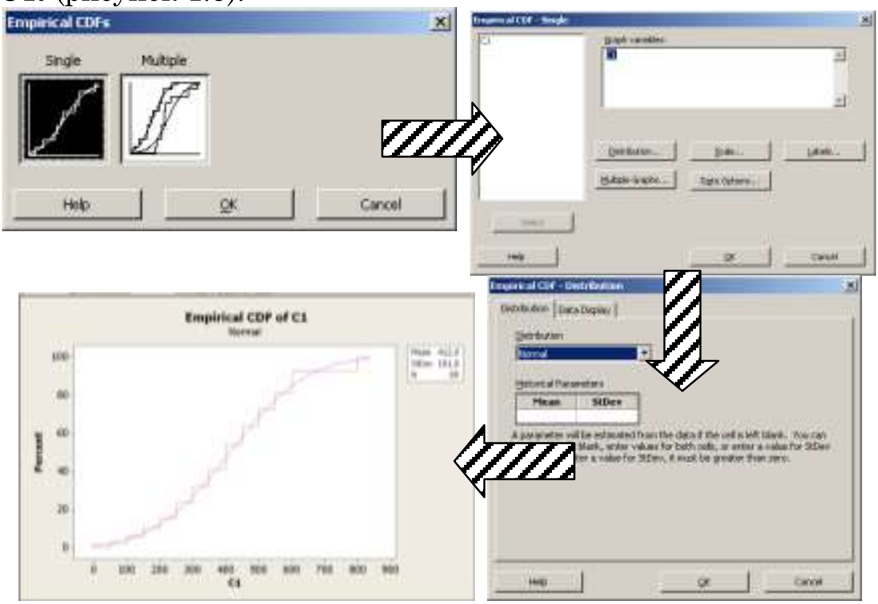


Рисунок 1.5 – Построение полигона частот и интегральной функции распределения

Для того, чтобы определить числовые характеристики выборки, необходимо выбрать команду **Stat – Basic Statistics – Display Descriptive Statistics...**, выбрать переменную (**C1**), указать необходимые числовые характеристики (при нажатии на кнопку **Statistics...**), указать, какие графики необходимо выводить на экран (при нажатии на кнопку **Graphs...**), после чего нажать кнопку **OK** (рисунок 1.6). При этом одновременно может выводиться несколько окон, в которых отображаются графики, значения числовых характеристик же отображаются в окне **Session**. Обозначения основных числовых характеристик представлены в таблице 1.1.

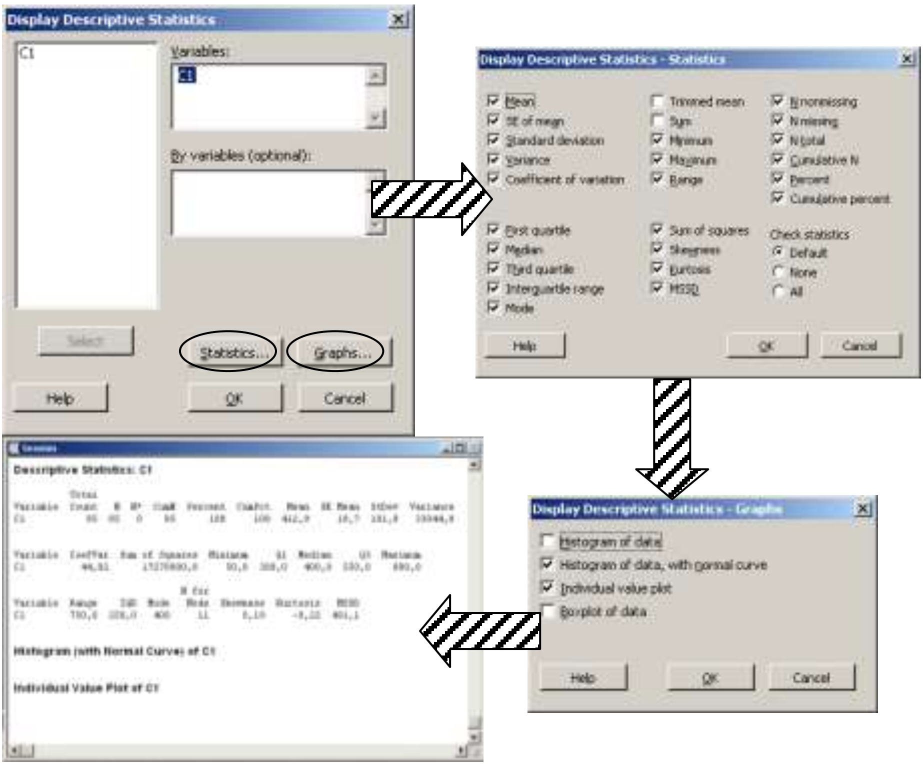


Рисунок 1.6 – Определение числовых характеристик выборки

Таблица 1.1 – Обозначения числовых характеристик выборки

Обозначение в Minitab	Описание характеристики
N	Количество значений в выборке
N*	Количество значений выборки, не попавших в интервальный ряд распределения
Mean	Среднее арифметическое значение
StDev	Среднеквадратическое отклонение
Variance	Дисперсия
CoefVar	Коэффициент вариации
Sum of Squares	Сумма квадратов значений выборки
Minimum	Минимальное значение в выборке
Q1	25%-квантиль
Median	Медиана
Q3	75%-квантиль
Maximum	Максимальное значение в выборке
Range	Вариационный размах
Mode	Мода
Skewness	Коэффициент асимметрии
Kurtosis	Эксцесс

Если необходимо получить компактную информацию в пределах одного окна в виде гистограммы частот и функции распределения, числовых характеристик выборки и интервальных оценок этих характеристик, можно воспользоваться командой **Stat – Basic Statistics – Graphical Summary….** (рисунок 1.7).

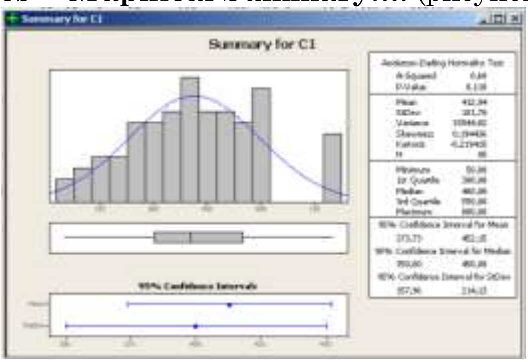


Рисунок 1.7 – Сгруппированная информация по выборке

Задача 2. Имеются две случайные величины $\mathbf{X_1}$ и $\mathbf{X_2}$. Необходимо установить между ними корреляционную связь, а также построить ковариационную матрицу.

Решение задачи. В пакете Minitab необходимо ввести случайные величины $\mathbf{X_1}$ и $\mathbf{X_2}$ в столбцы **C1** и **C2**. Во вторую строку таблицы, выделенную серым цветом так же, как и обозначения столбцов, введем наименования случайных величин $\mathbf{X_1}$ и $\mathbf{X_2}$.

Для того, чтобы определить корреляционную связь между двумя случайными величинами, необходимо в Minitab выбрать команду **Stat** – **Basic Statistics** – **Correlation…**. В появившемся окне необходимо выбрать те переменные, между которыми будем устанавливать связь (**X1** и **X2**), далее нажать кнопку **OK**. В окне **Session** показана информация двух видов (рисунок 1.8):
`Pearson correlation of X1 and X2 = 0,287` = 0,287 – коэффициент корреляции Пирсона численно равен 0,287;
`P-Value = 0,221` – достоверность гипотезы о корреляции между случайными величинами. Если данное значение меньше выбранного уровня значимости α (по умолчанию α=0.05), то гипотеза о наличии корреляции между данными величинами принимается; в обратном случае отвергается.

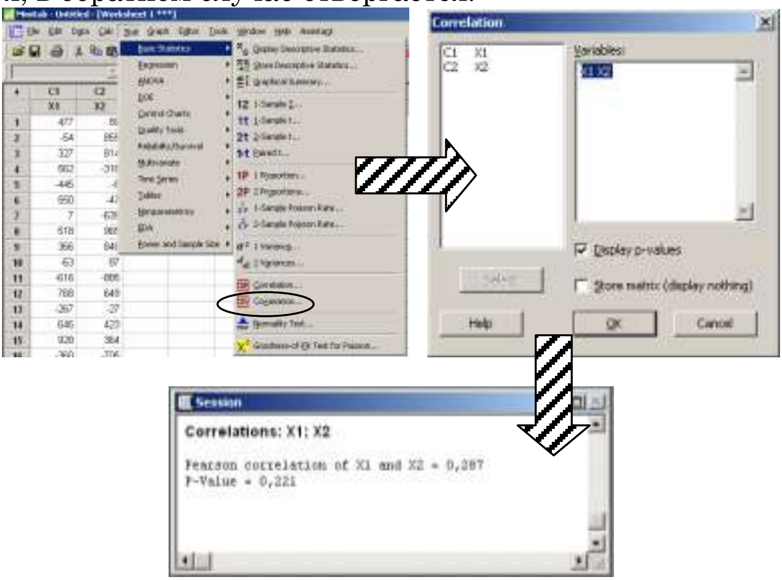


Рисунок 1.8 – Определение коэффициента корреляции

Для того, чтобы построить ковариационную матрицу между двумя случайными величинами, необходимо в Minitab выбрать команду **Stat – Basic Statistics – Covariance…**. В появившемся окне необходимо выбрать те переменные, между которыми будем устанавливать связь (**X1** и **X2**), далее нажать кнопку **OK**. В окне **Session** показана ковариационная матрица (рисунок 1.9).

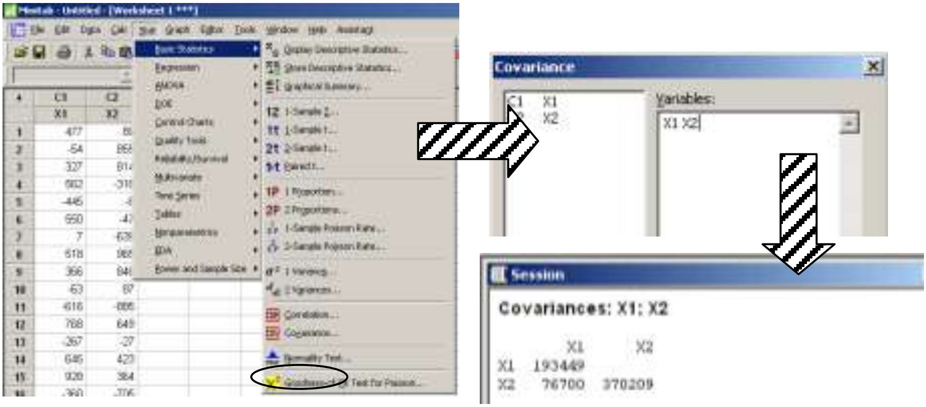


Рисунок 1.9 – Определение матрицы ковариации

1.3 Задания для самостоятельного решения

Задача 1. Имеются данные о пробеге автомобилей на 10.01.2012 г. Целью обработки статистической информации является: построение полигона и гистограммы распределения, определение числовых характеристик выборки, построение интервальных оценок математического ожидания и дисперсии. Данные для анализа представлены в таблице 1.2 (пробег автомобилей указан в тыс.км).

Задача 2. Имеются две случайные величины $\mathbf{X_1}$ и $\mathbf{X_2}$. Необходимо установить между ними корреляционную связь, а также построить ковариационную матрицу. Данные для анализа представлены в таблице 1.3.

Таблица 1.2 – Данные для выполнения задания 1

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4	Вариант 5	Вариант 6	Вариант 7	Вариант 8	Вариант 9	Вариант 10
94,3	141,8	34,7	184,4	147,1	199,1	146	185	99,5	77,8
47,8	124,3	137,1	5	126,1	24,8	84,3	177,8	115,2	88,5
36,1	167	198,3	128,7	62,2	38,7	199,2	93,7	108,5	171,6
163	164,8	144,5	81	25,7	33,4	66,2	85,8	75	107,7
49,7	183,1	120,5	37	88,6	47,1	157,3	10,1	198,9	173,1
105,6	94,6	32,9	198,3	190,2	7,1	123,7	132,4	101,1	73,3
55,5	127,8	95,6	53	23,2	34,4	160	135,1	85,8	14,5
139	62,5	98,3	53,4	67,5	168,8	159,6	35,9	181,3	16,1
90,4	159,1	109	170,9	103	191,6	167,6	107,6	52	136,1
65,1	65,8	74,2	81,4	181,5	114	82,4	188,5	37,4	140,3
117,9	189,4	16,8	73,3	195,4	48,2	50,6	109,9	187,7	16,1
189,1	153,7	15,8	24,7	124,7	22	105,3	138,6	112,1	14,6
44,3	149,9	53,9	145	190,5	178,4	127,1	3	113,3	137,2
8,4	77,3	21,4	171,7	41,4	104,2	78,1	52,5	51,8	26,1
82,4	85,9	84,9	61,1	121,4	157,9	88,2	48,7	64,3	114,8
65,1	15,5	170,5	49,6	9,5	185,8	195,4	100,1	173,4	95,9
13,6	137,3	185,1	97,5	193	96,8	45,3	69,5	114	42,1
42,1	168,9	182,7	103	144,9	195,4	165,2	107,2	11,3	10,7
192,9	162,9	170,8	83,4	109,8	119,1	133,8	106,9	116,8	137,5
10,2	120,1	103,4	144,6	190,6	157,7	165	86,7	154	49,6
87,9	66,7	76,8	52,7	119,3	140,4	140,6	6,9	177,3	148,1
80,5	63,8	13,4	186,7	167,9	114,7	52,5	96,3	22	1,9
45	173,3	75,5	169,9	45,9	83,8	123,3	148	93,3	152,9
74,4	129,9	168,5	153,3	154,5	181,9	25,6	63,9	153	160,2
29,8	145,1	199,3	190	138,4	184,6	131,5	24,1	27,8	171,6
36,6	112,4	56,4	77,8	67,4	108,7	146,8	116,2	13,4	52,1
66,8	101,6	6,6	37,7	169,7	184	48,5	157,4	32,7	193,9
3,8	194,8	183,4	90,7	5,8	176	122,1	67,3	50,1	155
11,2	143,1	162,5	34,4	42,3	72,3	15,7	181,4	110,5	152
11,3	72,3	99,2	189,8	100,4	18,4	142,7	168,2	112,8	74
23,2	122,2	76,4	181	10,3	56,9	8	175,5	13,3	171,3
95,7	28,6	17,9	82,2	71,7	128,6	171,2	55	70,4	34,3
189,5	165,5	80,3	15,2	7	3,8	120,2	120,4	22,5	62
76,2	95,9	147,8	99,1	166,7	66,5	11,3	165,7	108	1
81,1	178,6	167,8	41,2	154,2	40,4	22,4	25,3	151,5	36,9

Вариант 11	Вариант 12	Вариант 13	Вариант 14	Вариант 15	Вариант 16	Вариант 17	Вариант 18	Вариант 19	Вариант 20
168,1	195,6	150,4	80,8	100,4	14,8	20,9	55,8	57,3	192,6
65,2	12,1	27,3	40,1	36,2	102,5	130,7	179,6	116,4	73,8
30,3	165,5	150,5	74,7	95,3	61,2	25,6	190,5	16,6	173,1
23,2	138,9	163,4	95,7	157,9	197,2	80,4	49,1	99,9	52,2
156,2	88,2	43,3	126,3	126,4	168,8	14,5	19,3	163,9	149,1
150,9	187	158,8	67,8	55,6	117,3	70	34,6	30,6	172,9
121,9	133,9	77,3	50,9	197,4	77,8	113,2	76,3	181,6	13,5
32,8	131,3	82,4	144,5	44,2	123,9	68,6	125,5	173	157,5
57,2	32,7	32,1	120,7	144,6	5,4	142,2	187	109,1	133,4
129,9	160,1	7,4	152	144,1	182	128,4	78,7	107,7	28,6
180,7	158,1	79,6	65,3	14	37	38	70	120,6	45,8
179,5	115,3	123,3	184,2	167,1	107,9	45	138,5	42,9	29,6
162,4	185,7	146	153,2	184,5	144,6	31	147	121,2	44,4
113,4	48,7	142,9	75,8	166	141,7	105	108,1	23,6	52,6
192	26,8	165,9	110,9	152,2	49,5	66,9	116	124,5	22,9
120,2	128,1	66,9	97,9	13,1	27,3	26	54,1	56	91,4
48	39,6	42,8	157,8	35,1	52,1	63,6	106,1	23,2	107,4
40,9	167,5	193,8	192,8	112,5	18,6	138,2	49	118,4	107,9
149,4	174	112,2	160,9	104,4	51,8	29,9	118,4	102,7	35
123,8	142,5	56,3	105,2	29,2	82,7	168	77	163,1	120,2
132,9	97,7	191,6	160,7	52,1	142,9	95,4	38,1	74,7	58,7
8,8	160,8	188,5	113,3	176	180	176,1	99,8	40,6	39
129,5	166,7	109,9	175,3	50,8	175,5	168,9	79,5	32,4	122,1
76,3	79,6	64,1	134,9	178,3	21	111,6	179,7	19	166,2
149	30	95,2	99	54,9	18,8	119,9	34,1	74,8	135,1
160,2	91	31	68,4	100,7	87,7	147,3	26,3	148,1	85,9
130,2	44,8	30,9	63	175,2	143,7	39,9	38,9	100	175
177,1	67,7	176,3	197	27,3	61,4	32,2	136,2	118,4	28
121,9	67,5	127,9	190,4	83,4	24,8	100,5	167,7	48,7	93,6
125,3	190,7	12,3	54,9	104,7	77	121,2	54,6	185,5	79,8
30,9	49,7	185,6	132,2	55,1	43,4	29,4	12	50,1	167,2
19,9	15,2	22	54,7	48,7	58,5	63,3	150	128,2	140,6
84,6	95,1	110,5	89,1	103,7	30,5	37,5	25,7	37,1	129,9
81,9	32,9	38	149,7	120	31,3	98,6	24,8	174,8	105,7
21,7	101	76,7	42	72,5	79,4	62	18,4	186,9	40,2

Таблица 1.3 – Данные для выполнения задания 2

Вариант 1

X1	X2
752	-729
261	-733
-861	98
713	507
-112	-535
282	182
-264	864
303	311
376	-545
587	209

Вариант 2

X1	X2
-360	717
-705	-870
-281	-826
166	690
364	-93
-340	885
933	-740
296	-902
239	188
-78	385

Вариант 3

X1	X2
-201	885
391	983
669	-930
-578	466
-990	-887
-567	716
-611	-268
-937	387
-644	203
-341	-127

Вариант 4

X1	X2
159	725
-37	665
-643	759
717	-793
228	-914
646	-784
-313	829
69	-117
-439	-977
598	-874

Вариант 5

X1	X2
-616	768
-885	649
-213	224
-803	70
-267	645
-27	423
991	-322
-611	-386
928	-397
364	703

Вариант 6

X1	X2
599	-217
-278	758
270	-31
-846	-299
-274	346
-811	19
544	810
594	343
-687	735
345	-811

Вариант 7

X1	X2
689	807
764	-90
744	14
836	630
638	-788
115	646
-417	25
-52	192
782	687
811	-374

Вариант 8

X1	X2
-161	389
110	-29
633	-757
-29	-688
427	330
-589	315
-179	-665
-817	1
-763	-557
115	-230

Вариант 9

X1	X2
234	-736
43	536
-213	224
-803	70
-519	98
-238	465
991	-322
-611	-386
795	-397
135	703

Вариант 10

X1	X2
-84	690
588	-296
-281	-826
166	690
953	867
207	-48
933	-740
296	-902
-55	188
-246	385

Вариант 11

X1	X2
-894	-429
-389	-350
-344	-223
497	-163
186	965
-449	-414
-240	-881
-706	145
372	442
282	-428

Вариант 12

X1	X2
-84	690
588	-296
-923	332
-728	211
953	867
207	-48
-531	310
294	942
-55	865
-246	593

Вариант 13

-655	105
493	228
-239	941
-808	-281
-7	224
-880	-637
-605	-516
-944	-51
-961	-747
598	110

Вариант 14

-233	-892
558	219
14	-341
-345	-652
357	-459
-382	-569
150	557
-344	-911
150	642
-935	-441

Вариант 15

234	-736
43	536
386	-317
324	315
-519	98
-238	465
210	702
-282	-130
795	-840
135	-753

Вариант 16

322	-967
103	653
-183	-960
61	-814
530	522
-758	307
-891	-206
320	324
897	139
-738	854

Вариант 17

477	-54
89	855
623	-758
-16	256
327	562
814	-318
-647	397
319	-241
-445	-343
-8	-239

Вариант 18

550	7
-47	-639
157	-301
-145	-5
518	366
965	848
-883	459
-850	-99
-63	41
87	884

Вариант 19

-616	768
-885	649
386	-317
324	315
-267	645
-27	423
210	702
-282	-130
928	-840
364	-753

Вариант 20

-360	717
-705	-870
-923	332
-728	211
364	-93
-340	885
-531	310
294	942
239	865
-78	593

2 Регрессионный анализ

2.1 Методы регрессионного анализа

Регрессионный анализ – это статистический метод исследования зависимости между зависимой переменной Y и одной или несколькими независимыми переменными X_1, X_2, ... ,X_n. При этом связь между Y и X, где Y – результирующий показатель (эндогенная переменная), а X – независимый фактор (экзогенная переменная), выражается в виде *регрессионного уравнения* [8]:

$\tilde{Y} = f(X)$, если независимый фактор один (парная регрессия).

$\tilde{Y} = f(X_1,...,X_n)$, если независимых факторов несколько (множественная регрессия).

Основные виды уравнений парной регрессии:

1. Линейная: $\tilde{Y} = a + bX$.
2. Гиперболическая: $\tilde{Y} = a + b\dfrac{1}{X}$.
3. Степенная: $\tilde{Y} = a \cdot X^b$.
4. Логарифмическая: $\tilde{Y} = a + b \cdot \ln X$.
5. Параболическая модель n-го порядка: $\tilde{Y} = a + bX + cX^2 + ...$
6. Тригонометрическая модель: $\tilde{Y} = a_0 + \sum_{k=1}^{m}(a_k \cdot \cos kx + b_k \cdot \sin kx)$.

Сущность регрессионного анализа заключается в определении неизвестных параметров уравнений регрессии (a,b,…). Для этого используется метод наименьших квадратов (МНК).

Несомненно, что чем сложнее регрессионная модель, т.е. чем больше параметров она содержит, тем более точным получается результат. При увеличении числа параметров точность аппроксимации возрастает, однако значимость модели уменьшается в результате увеличения *дисперсий*:

$$S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i - \tilde{y}_i)}{N-n}, \qquad (2.1)$$

где N – количество наблюдений; n – количество параметров в модели.

Коэффициент детерминации, определяющий долю разброса зависимой переменной Y от объяснимой регрессии Ỹ(X), определяется по формуле 2.2:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i - \tilde{y}_i)}{\sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{y})}, \tag{2.2}$$

Сам по себе коэффициент детерминации о качестве модели не говорит, он лишь дополняет картину: чем ближе R^2 к 1, тем теснее связь, и наоборот: чем ближе к 0, тем связь слабее.

После того как найдено уравнение линейной регрессии, проводится оценка значимости как уравнения в целом, так и отдельных его параметров. Проверить значимость уравнения регрессии – значит установить, соответствует ли математическая модель, выражающая зависимость между переменными, экспериментальным данным и достаточно ли включенных в уравнение объясняющих переменных (одной или нескольких) для описания зависимой переменной.

Значимость параметра уравнения регрессии определяется с помощью Т-критерия Стьюдента. При этом рассчитывается значение $T_{расч.}$ и сравнивается с критическим значением $T_{кр.}$ по таблице Т-критериев Стьюдента (Приложение А). Если для параметра a_k получается, что $|T_{расч.}| > T_{кр.}$, то параметр a_k признается значимым, то есть между X_k и Y связь есть. Если $|T_{расч.}| \le T_{кр.}$, то параметр a_k признается незначимым, и между X_k и Y связь отсутствует.

После оценки значимости параметров регрессии обычно определяют совокупную значимость параметров, которая позволяет оценить уравнение регрессии в целом. Данная оценка позволяет узнать, пригодно ли уравнение для прогнозирования или нет.

Для проверки *значимости уравнения в целом* используют коэффициент детерминации и проверяют его значимость. Для этого используют критерий Фишера:

$$F = \frac{S^2 факт}{S^2 ост} = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{\sum (y_i - \tilde{y}_i)^2} \cdot (N-1) \qquad (2.3)$$

Рассчитанное значение F-критерия Фишера сравнивается с табличным значением F (Приложение Б). При этом, если фактическое значение F-критерия больше табличного, то признается статистическая значимость уравнения в целом.

Величина F-критерия связана с коэффициентом детерминации R^2 и ее можно рассчитать по следующей формуле:

$$F = \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot (N-1) \qquad (2.4)$$

Значимость параметров регрессии еще не гарантирует высокого качества уравнений регрессии. При анализе уравнений регрессии необходимо проверять предпосылку, которую можно сформулировать так: отклонения, или остатки $e_i = y_i - \tilde{y}_i$, должны быть статистически независимы между собой, причём анализируют не любые остатки, а только соседние: e_i и e_{i+1} [9].

Автокорреляция – сериальная корреляция, т.е. корреляция между показателями, упорядоченными во времени и пространстве. В нашем случае рассматривается автокорреляция остатков (отклонений) $e_i = y_i - \tilde{y}_i$, отстоящих друг от друга на k шагов. Если последовательные значения e_i коррелируются между собой, то это означает, что имеет место ошибка спецификации, т.е. неправильный выбор уравнения регрессии.

Автокорреляция бывает двух видов: положительная и отрицательная.

Положительная автокорреляция приводит к тому, что преобладают последовательные отклонения одного знака над соседними отклонениями противоположного знака, т.е. идёт серийное чередование знаков: серия остатков положительных сменяет серию остатков отрицательных (рисунок 2.1 а)

Отрицательная автокорреляция означает, что за положительным отклонением следует отрицательное (рисунок 2.1 б).

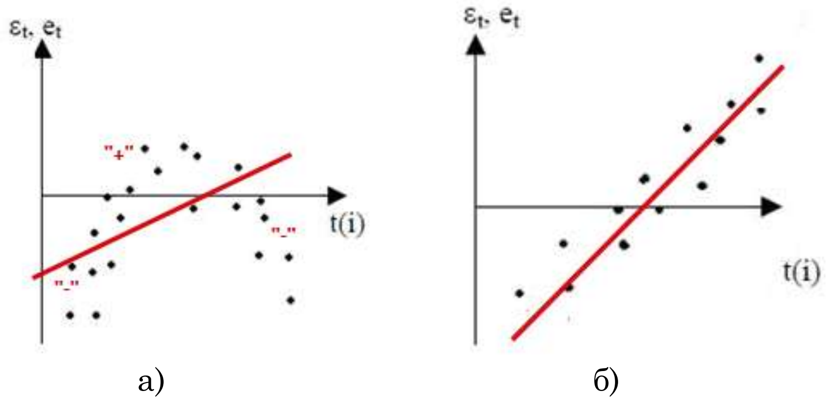


Рисунок 2.1 – Автокорреляция остатков: а) положительная, б) отрицательная

Наиболее известным критерием обнаружения автокорреляции является критерий Дарбина-Уотсона, который основан на расчёте величины DW:

$$DW = \frac{\sum_{i=2}^{N}(e_i - e_{i-1})^2}{\sum_{i=2}^{N} e_i^2} \tag{2.5}$$

Анализируя критерий DW, можно сделать вывод о наличии автокорреляции:

1) Если имеет место отрицательная автокорреляция, то соседние остатки имеют разные знаки, и при условии, что $|e_i| \approx |e_{i-1}|$, можно получить:

$$DW = \frac{\sum_{i=2}^{N}(e_i - (-e_i))^2}{\sum_{i=2}^{N} e_i^2} = \frac{\sum_{i=2}^{N}(2e_i)^2}{\sum_{i=2}^{N} e_i^2} = 4 \tag{2.6}$$

2) Если имеет место положительная автокорреляция, то соседние остатки имеют один знак: $e_i \approx e_{i-1}$, а значит:

$$DW = \frac{\sum_{i=2}^{N}(e_i - e_i))^2}{\sum_{i=2}^{N} e_i^2} = 0 \tag{2.7}$$

3) Если корреляция отсутствует, то в половине случаев знаки последовательных отклонений совпадают, а в другой половине они противоположны:

$$DW = \left(\sum \frac{1}{2}(e_i - e_i)^2 + \sum \frac{1}{2}(e_i - (-e_i))^2 \right) / \sum_{i=2}^{N} e_i^2 = 2 \tag{2.8}$$

Таким образом, необходимым условием независимости случайных отклонений является близость критерия DW к 2. Для определения автокорреляции применяют таблицу критических точек распределения Дарбина-Уотсона (Приложение В).

Критерий Дарбина-Уотсона позволяет проверить гипотезу H_0: все сериальные корреляции равны 0, $\rho_k = 0, k = 1,2....$ при альтернативной гипотезе H_1: $\rho_k = \rho^k, \rho \neq 0, |\rho| < 1$.

Процедура проверки состоит в следующем. В зависимости от числа наблюдений *n*, числа оцениваемых параметров *k* модели и уровня значимости *α* по справочной таблице значений статистики Дарбина-Уотсона находят два числа d_1 и d_2. В зависимости от формулировки альтернативной гипотезы H_1 решение принимается по одному из следующих правил:

1) $H_1 : \rho > 0$:

H_0 принимается, если $d > d_2$;

H_0 отклоняется, если $d < d_1$;

при $d_1 \leq d \leq d_2$ решение не принимается;

2) $H_1 : \rho < 0$:

H_0 принимается, если $4 - d > d_2$,

H_0 отклоняется, если $4 - d < d_1$

при $d_1 \leq 4 - d \leq d_2$ решение не принимается;

3) $H_1 : \rho \neq 0$:

H_0 принимается на уровне значимости 2α, если $d > d_2$ или $4 - d > d_2$,

H_0 отклоняется на уровне значимости 2α, если $d < d_1$ или $4 - d < d_1$.

Если гипотеза H_0 отклоняется, то либо ошибки наблюдений в исходных данных коррелированны (в этом случае для оценки параметров нужно применять другие методы, например взвешенный метод наименьших квадратов), либо в модели не учтен один или несколько существенных факторов, влияющих на зависимую переменную, либо неправильно выбрана форма связи между переменными [10].

Принятие решения о наличии/отсутствии автокорреляции между остатками можно представить и графически (рисунок 2.2).

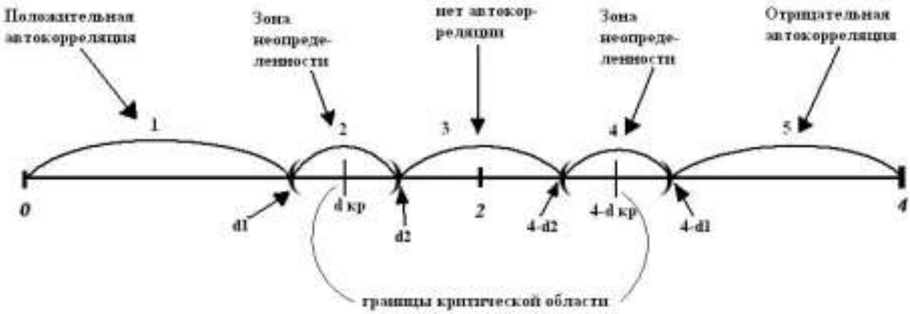


Рисунок 2.2 – Графический метод определения автокорреляции остатков по критерию Дарбина-Уотсона

Выбор формы уравнения регрессии. Форма уравнения регрессии выбирается из числа рассмотренных. При этом выполняются следующие операции:

1. Определяют неизвестные параметры.
2. Определяют коэффициент детерминации
3. Определяют значимость параметров
4. Определяют значимость всего уравнения в целом
5. Определяют DW.

Для последующего принятия решений выбирают те зависимости, для которых автокорреляция остатков отсутствует, т.е. $d_1 \le DW \le 4 - d_2$, характерен наибольший коэффициент детерминации, а все параметры и уравнение в целом – значимы. Выбранная зависимость будет иметь наибольший уровень адекватности реальной зависимости.

2.2 Регрессионный анализ в пакете Minitab

Задача. Имеется выборка из информационной системы сервисного центра по общему количеству использованных запасных частей (Y) и ежемесячному объему сервисных услуг (X). Необходимо построить регрессионную зависимость между этими показателями, определив вид регрессионного уравнения.

Решение задачи. В пакете Minitab необходимо ввести данные по спросу на сервисные услуги (н/ч) в столбец С1 (фактор X), а данные по количеству использованных запасных частей (шт.) – в столбец С2 (результирующий показатель Y).

Для того, чтобы составить линейное уравнение регрессии, необходимо выбрать команду **Stat** – **Regression** – **Regression…**. В появившемся окне необходимо выбрать результирующий показатель Y (**Responce**) и определить список факторов X (**Predictors**) – рисунок 2.3.

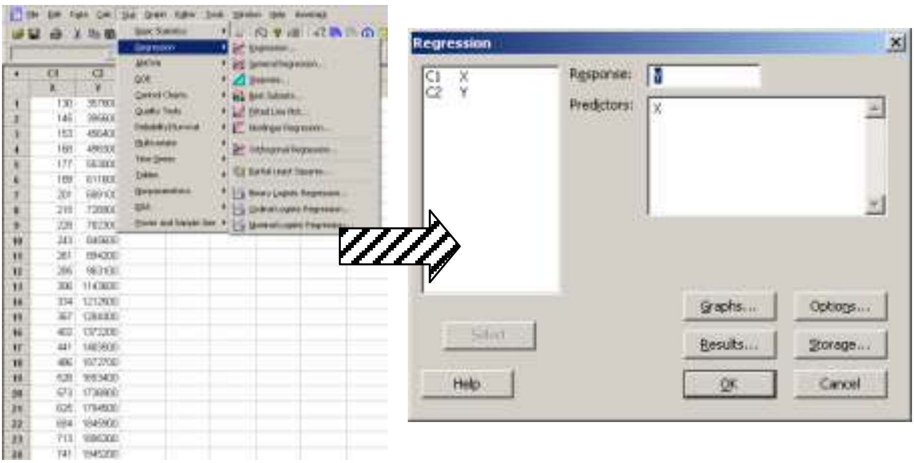


Рисунок 2.3 – Инструмент построения линейной регрессии в Minitab

Для того, чтобы определить, какие показатели необходимо рассчитать, нужно нажать на кнопку **Options**. Установив флажок «**Variance inflation factors**», можно будет получить информацию о наличии корреляционной взаимосвязи между выбранными для анализа факторами. Для того, чтобы рассчитать значение критерия Дарбина-Уотсона, необходимо установить флажок «**Durbin-Watson statistic**» (рисунок 2.4).

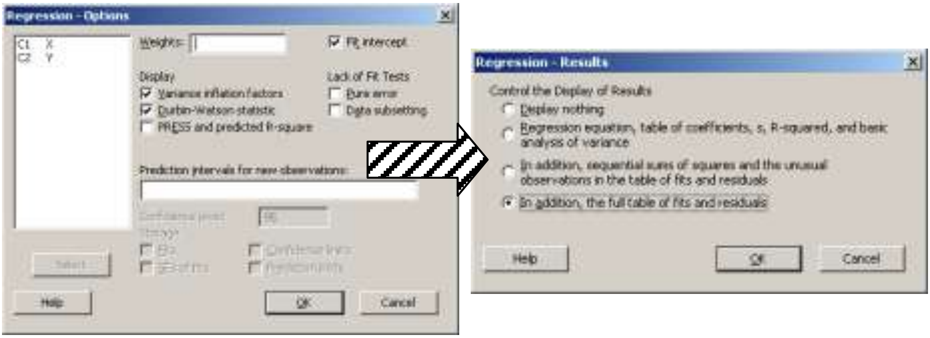


Рисунок 2.4 – Настройка линейной регрессии в Minitab

Нажав на кнопку «**Results...**», можно настроить выводимый на экран результат. Описание опций данного окна представлено в таблице 2.1.

Таблица 2.1 – Варианты вывода результатов на экран

Опция	**Описание**
Display nothing	Никакой информации не выводится на экран. Возможность сохранения результатов остаётся
Regression equation, table of coefficients, S, R-squared, and basic analysis of variance	Выводятся на экран уравнение регрессии, таблица полученных параметров, значения S и R^2, и базовый дисперсионный анализ
In addition, sequential sums of squares and the unusual observations in the table of fits and residuals	К вышеуказанному добавляются последовательная сумма квадратов, проверяется оценка значимости параметров и уравнения в целом
In addition, the full table of fits and residuals	К вышеуказанному добавляется полная таблица модельных значений и отклонений от фактических данных

После настройки всех необходимых показателей необходимо нажать кнопку **OK**. Результаты построения линейной регрессионной зависимости выводятся в окне **Session** (рисунок 2.5).

```
Regression Analysis: Y versus X

The regression equation is
Y = 164924 + 2648 X


Predictor    Coef  SE Coef      T      P    VIF
Constant   164924    51169   3,22  0,004
X          2648,0    126,0  21,02  0,000  1,000


S = 118237   R-Sq = 95,3%   R-Sq(adj) = 95,0%


Analysis of Variance

Source          DF           SS           MS       F      P
Regression       1  6,17572E+12  6,17572E+12  441,75  0,000
Residual Error  22  3,07562E+11  13980096265
Total           23  6,48328E+12


Obs    X        Y      Fit  SE Fit  Residual  St Resid
  1  130   357800   509166   37531   -151366     -1,35
  2  145   395600   548887   38104   -153287     -1,36
  3  153   456400   570071   35361   -113671     -1,01
  4  168   498300   609791   34004   -111491     -0,98
  5  177   553000   633623   33215    -80623     -0,71
  6  189   611600   665400   32195    -53800     -0,47
  7  201   689100   697176   31215     -8076     -0,07
  8  215   728900   734248   30127     -5348     -0,05
  9  228   782300   768672   29177     13628      0,12
 10  243   845600   808393   28158     37207      0,32
 11  261   894200   856057   27060     38143      0,33
 12  285   963100   919609   25834     43491      0,38
 13  306  1143600   975218   25013    168382      1,46
 14  334  1212500  1049362   24326    163138      1,41
 15  367  1284300  1136747   24161    147553      1,27
 16  402  1372200  1229428   24760    142772      1,23
 17  441  1483500  1332700   26297    150800      1,31
 18  486  1572700  1451861   29018    120839      1,05
 19  528  1653400  1563078   32250     90322      0,79
 20  573  1738900  1682239   36268     56661      0,50
 21  623  1794500  1819936   41389    -25436     -0,23
 22  684  1845900  1976169   47625   -130269     -1,20
 23  713  1895300  2052962   50809   -157662     -1,40
 24  741  1945200  2127106   53939   -181906     -1,73


Durbin-Watson statistic = 0,143969
```

Рисунок 2.5 – Результаты построения линейной регрессии в Minitab

На рисунке 2.5 в разделе «**The regression equation is**» показано уравнение линейной регрессии (*Y = 164924 + 2648 X*). В данном уравнении представлены значения двух параметров линейной регрессии: $a = 164924$ и $b = 2648$. Далее производится оценка значимости полученных параметров. Так, рассчитанное значение Т-критерия Стьюдента для параметра a (в колонке **Predictor** он имеет наименование **Constant**) равно 3,22 (колонка **T**), а значения для параметра *b* (в колонке **Predictor** он обозначен как коэффициент перед **X**) равно 21,02. Значимость обоих коэффициентов можно определить, используя значение **p**, указанное справа от T-критерия Стьюдента. Поскольку оба значения p меньше уровня значимости $\alpha=0.05$, гипотеза о значимости параметров *a* и *b* линейного уравнения регрессии принимается.

В разделе «**Analysis of Variance**» вычисляются суммы дисперсий и значимость всего уравнения в целом. Описание значений каждой из колонок представлено в таблице 2.2.

Таблица 2.2 – Описание рассчитанных характеристик регрессии

Обозначение в Minitab	**Описание характеристики**
Source	Показывает, какая из дисперсий рассчитывается: дисперсия модельных значений, дисперсия остатков или общая дисперсия
DF	Показывает число степеней свободы. Рассчитывается как *N-1*, где *N* для дисперсии модельных значений – количество параметров модели, для дисперсии остатков – число наблюдений
SS	Сумма квадратов $S^2\text{ост} = \sum (y_i - \tilde{y}_i)^2$
MS	Сумма квадратов $S^2\text{факт} = \sum (y_i - \bar{y})^2$
F	F-критерия Фишера для проверки значимости уравнения в целом
P	Число, используемое для определения значимости уравнения в целом. Если число p меньше чем $\alpha=0.05$, уравнение в целом признается значимым

Под этими параметрами представлены фактические значения Y и модельные значения $\tilde{Y}$ (столбцы **Y** и **Fit** соответственно), отклонения $e_i = y_i - \tilde{y}_i$ (столбец Residual) и статистика Дарбина-Уотсона. Адекватность построенной модели определяется отсутствием автокорреляции. Для этого полученное значение критерия Дарбина-Уотсона необходимо сравнить с табличными значениями d_1 и d_2 (Приложение В). В нашем случае, поскольку n = 24 (число проводимых измерений), а k = 2 (число параметров модели), граничные значения критерия Дарбина-Уотсона составят $d_1 = 1{,}19$ и $d_2 = 1{,}55$. Полученное значение критерия примерно равно 0,14, что меньше d_1, а значит, можно сделать вывод о том, что гипотеза об отсутствии автокорреляции отвергается.

Для того, чтобы построить график фактических и модельных значений для линейной регрессии, необходимо выбрать команду **Stat** – **Regression** – **Fitted Line Plot…**, указать показатель **Responce** (**Y**) и фактор **Predictor** (**X**), а также вид регрессионного уравнения (**Linear**). При нажатии на кнопку **ОК** программа выводит график **Fitted Line Plot** (**График сглаженной линии**) на экран (рисунок 2.6).

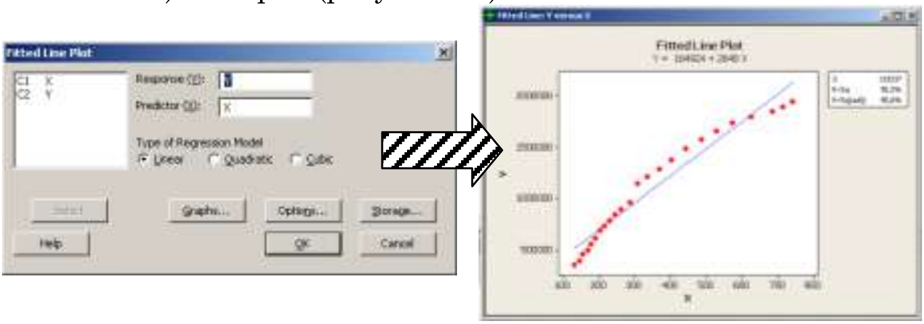


Рисунок 2.6 – График линейной регрессии

Для того, чтобы составить <u>нелинейное уравнение регрессии</u>, используется два инструмента:

- Для построения полиномиальной модели используется инструмент **Stat** – **Regression** – **General Regression…**
- Для построения других видов моделей используется инструмент **Stat** – **Regression** – **Nonlinear Regression…**

Предположим, необходимо построить логарифмическую регрессионную модель $\tilde{Y} = a + b \cdot \ln X$. Для этого выбираем команду **Stat** – **Regression** – **Nonlinear Regression…** и в окне **Edit directly** самостоятельно вводим формулу уравнения регрессии: **a+b∗LN(X)**, а в строке **Response** указываем значение **Y**.

Поскольку поиск неизвестных параметров a и b будет осуществляться заданным внутри программы алгоритмом в несколько итераций, необходимо нажав на кнопку **Parameters...** указать начальные значения a и b, с которых программа начнёт поиск (установим оба параметра равными нулю), в разделе **Required starting values**. Флажок **Locked** означает, что заблокированный параметр не будет подбираться и останется на указанном уровне. В разделе **Optional constraints** можно указать верхнюю и нижнюю границу параметра (рисунок 2.7).

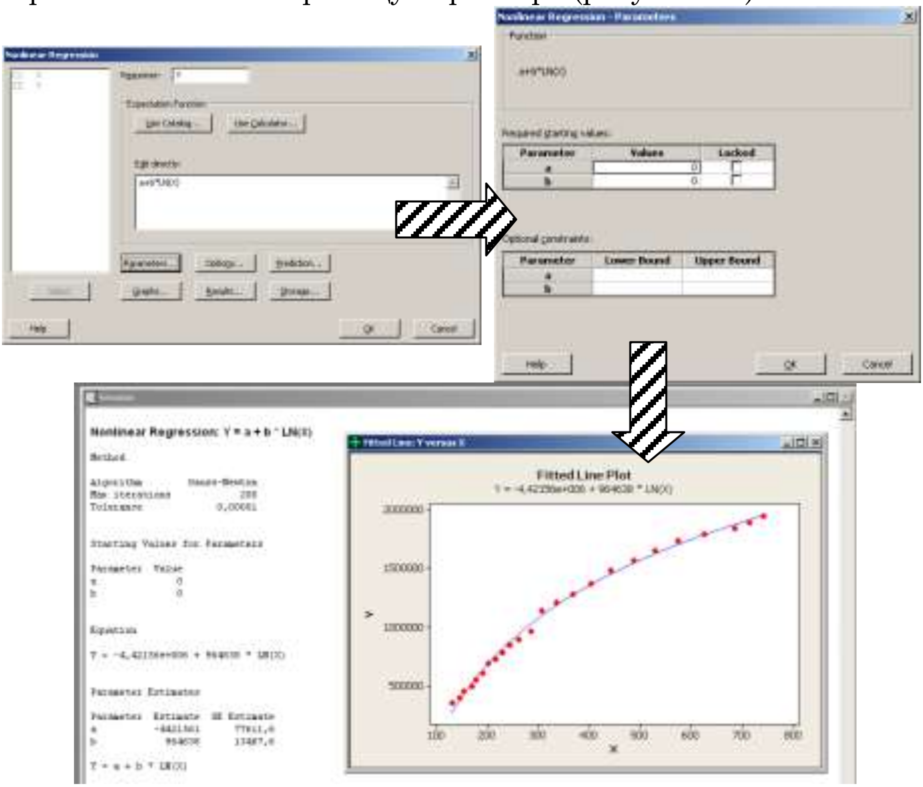


Рисунок 2.7 – Получение нелинейной регрессии

Для вычисления остальных характеристик нелинейной регрессии с помощью пакета Minitab, необходимо преобразовать исходные данные $x \to x^*$, $y \to y^*$ (см. Приложение Г) так, чтобы спецификация модифицированной регрессии стала линейной [11].

2.3 Задания для самостоятельного решения

Задача. Имеется выборка из информационной системы сервисного центра по общему количеству использованных запасных частей (шт.) – Y и ежемесячному объему сервисных услуг (н/ч) – X. Необходимо построить регрессионные уравнения шести видов: линейную, гиперболическую, степенную, логарифмическую, параболическую третьего порядка и тригонометрическую первого порядка и выбрать из них наиболее адекватную, заполнив таблицу 2.3. Исходные данные по вариантам представлены в таблице 2.4.

Определить оптимальное значение размера заказа запасных частей на следующий месяц, если прогнозируется увеличение спроса на сервисные услуги на 1035 н/ч.

Таблица 2.3 – Анализ регрессионных зависимостей

Наименование	**Значения параметров**	**Значимость параметров**	**Значимость уравнения**	**Критерий Дарбина-Уотсона**	**Наличие автокорреляции**	**Адекватность уравнения**
Линейная						
Гиперболическая						
Степенная						
Логарифмическая						
Параболическая третьего порядка						
Тригонометрическая						

Таблица 2.4 – Данные для выполнения задания

Вариант 1		Вариант 2		Вариант 3		Вариант 4		Вариант 5	
Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X
59	308312	118	342112	17	310440	88	301078	160	324386
230	311915	125	318081	67	317240	105	332487	179	326636
251	429497	155	410425	144	441733	168	426441	191	407275
291	400008	248	433689	149	443869	242	420008	203	439098
324	536698	266	515855	158	515804	279	531478	278	503670
367	622305	281	637134	201	608738	318	644366	312	603582
383	636352	284	607452	277	604140	401	609019	385	630381
434	712022	336	704602	317	702756	469	706935	479	731342
469	733062	439	718938	432	700142	578	735502	482	715793
600	839962	492	829822	547	802885	655	837311	515	849006
612	819432	565	844590	644	823359	710	810833	550	829312
628	932459	591	924840	656	920992	812	914085	641	932024
776	1136069	648	1115683	785	1135722	909	1131912	724	1149976
785	1222281	768	1222634	825	1210306	922	1210551	813	1211855
873	1210338	902	1226020	841	1239461	981	1229996	898	1210942
940	1309182	991	1315688	852	1324903	1063	1311105	941	1324767
969	1436081	1011	1420171	1063	1401815	1104	1422989	947	1412465
1044	1535398	1136	1544133	1143	1532605	1140	1529240	1049	1505493
1099	1615135	1194	1629551	1157	1645511	1191	1633528	1052	1619274
1114	1733451	1222	1738239	1190	1702784	1223	1744130	1086	1731455
1180	1711667	1291	1737134	1203	1734543	1276	1702958	1141	1711642
1213	1848742	1301	1820296	1220	1832607	1314	1834918	1212	1824968
1222	1829776	1322	1817967	1236	1846425	1373	1833310	1251	1808675
1264	1929994	1400	1901646	1252	1929979	1396	1906642	1301	1949214

Вариант 6		Вариант 7		Вариант 8		Вариант 9		Вариант 10	
Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X
159	321125	159	341731	102	306184	54	326705	17	330007
188	324284	199	325503	169	323208	92	303522	96	326429
204	448451	237	406449	182	447344	161	400643	130	409865
301	445845	308	403324	249	403027	226	404560	189	402461
318	521079	359	544366	293	503889	247	510670	258	516774
385	625184	457	627261	306	639860	342	629832	315	630599
400	620518	472	622111	370	617491	378	635896	340	601100
460	717936	489	717615	441	738267	490	743533	448	733726
556	706884	546	738734	490	719505	535	739622	460	730287
593	839461	573	837919	541	824167	554	800846	497	828435
645	800086	599	842553	578	810749	614	802329	510	824187
696	935959	635	903676	581	942201	632	935643	587	934520
768	1130670	756	1103128	609	1108593	704	1131403	645	1137297
855	1200830	820	1227942	790	1210054	778	1239208	668	1247941
908	1233544	877	1200487	841	1212460	806	1236285	706	1230485
924	1322139	918	1314249	979	1347821	931	1344071	857	1324380
988	1437968	1013	1441860	1029	1426461	1023	1426798	938	1413062
1007	1531532	1096	1542515	1126	1506842	1098	1529427	1075	1514862
1089	1627497	1161	1624416	1177	1638700	1136	1610857	1109	1606949
1094	1707248	1212	1717956	1220	1739318	1210	1731307	1140	1745967
1116	1711345	1226	1720587	1223	1717560	1232	1746495	1242	1724613
1121	1817598	1323	1819841	1258	1801421	1293	1822981	1278	1839908
1180	1808727	1350	1838027	1273	1839285	1325	1837721	1306	1826984
1256	1911691	1408	1933720	1335	1903968	1341	1911601	1390	1914536

Вариант 11		Вариант 12		Вариант 13		Вариант 14		Вариант 15	
Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X
57	321359	45	337221	32	336056	106	344181	49	345265
99	335714	88	340351	56	347467	158	346851	90	319664
148	422763	140	420991	75	448324	234	409689	160	420685
214	414342	190	416800	125	408319	278	419298	198	405261
292	516831	233	504508	208	533538	343	532026	232	505231
345	624402	314	642866	283	632501	371	640710	290	643343
382	618554	414	646533	348	648331	422	640494	325	632737
448	706885	483	712215	381	727500	493	740650	374	727043
489	707716	504	723922	458	736744	560	739682	417	746701
510	822396	604	841678	552	807117	659	813729	546	820647
545	846449	627	841040	577	845932	688	822685	541	833851
629	929595	730	930978	623	943864	777	925872	621	933544
691	1108320	783	1133313	671	1120077	847	1147263	679	1104186
732	1222321	795	1214900	777	1246614	920	1228520	752	1205700
802	1212120	865	1220282	828	1201232	974	1246890	831	1206270
905	1321103	961	1337196	894	1312678	1042	1338089	879	1349622
1025	1411457	1044	1411975	971	1419217	1146	1401638	901	1439820
1090	1501830	1056	1505973	1079	1549201	1265	1520759	937	1538152
1131	1649373	1120	1634958	1105	1646551	1294	1649452	990	1645973
1164	1739647	1155	1737573	1244	1736667	1324	1709815	1082	1746699
1198	1712881	1220	1738174	1357	1735980	1386	1703226	1112	1715283
1199	1847501	1270	1822389	1446	1808104	1394	1831374	1184	1842051
1210	1839790	1359	1843175	1516	1822079	1442	1843653	1203	1837245
1282	1925539	1464	1940303	1587	1908121	1478	1942353	1292	1949198

Вариант 16		Вариант 17		Вариант 18		Вариант 19		Вариант 20	
Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X
123	339754	145	327725	90	301007	55	324103	17	330007
213	318017	185	304020	126	301973	142	335546	68	332278
259	410999	230	405450	205	420758	188	415569	152	426781
314	403471	249	438287	221	425912	273	439759	212	439923
363	507188	310	537842	247	542957	305	533288	326	507854
392	610167	339	615469	334	629283	390	642843	347	608112
438	638939	423	645100	378	628695	433	645799	407	629896
471	727814	459	739491	399	725326	493	725454	450	723503
510	705569	523	731071	412	710063	528	729028	553	734964
600	831860	544	816212	440	847355	588	824058	587	827635
647	800109	591	840851	571	828176	600	833819	624	845554
727	929335	664	907221	650	913875	663	914121	718	935171
761	1122256	701	1106823	694	1121757	768	1113483	725	1136681
864	1206208	789	1241856	716	1228968	854	1239125	785	1219668
923	1230085	869	1200168	733	1243318	887	1203440	811	1234146
946	1330694	969	1305483	840	1337939	947	1339602	908	1307872
1048	1413413	1049	1404906	956	1439853	1072	1429745	968	1417310
1095	1512724	1116	1515313	1035	1547634	1122	1540847	1046	1520298
1171	1622828	1222	1624824	1071	1636632	1209	1614890	1125	1602464
1235	1711736	1282	1716692	1109	1744047	1268	1726871	1188	1721539
1295	1732249	1331	1715003	1136	1718194	1331	1725441	1285	1746484
1300	1846043	1382	1826477	1250	1806371	1388	1832285	1366	1808971
1379	1810045	1483	1808909	1285	1835236	1394	1840674	1403	1805872
1426	1902928	1578	1922131	1343	1947803	1422	1932463	1546	1926385

3 Теория планирования экспериментов

Методы теории планирования экспериментов (ТПЭ) направлены на разработку оптимальных планов проведения экспериментов с целью сокращения объема проводимых исследований при заданной точности и достоверности получения результатов, извлечения из полученных опытных данных максимума полезных сведений. Составной частью ТПЭ является исследование способов обработки результатов эксперимента, проведенного по выбранному плану, анализ свойств получаемых оценок показателей качества объекта. Экспериментальные данные, полученные с помощью ТПЭ, часто являются основой для применения других математических методов, например градиентных методов оптимизации.

В ТПЭ исследуемый объект (реальный объект, модель объекта) рассматривается как «черный ящик», имеющий входы **X** (управляемые независимые параметры) и выходы **Y**.

Переменные **x** принято называть *факторами*. ТПЭ изучает только активный тип экспериментов, когда имеется возможность независимо и целенаправленно менять значения факторов **x** во всем требуемом диапазоне. Примерами факторов являются: интенсивность потока запросов к базе данных, скорость передачи данных по каналу, объем запоминающего устройств.

Активный эксперимент включает: систему воздействий, при которых воспроизводится функционирование объекта; регистрацию отклика объекта. *План эксперимента* задает совокупность данных, определяющих количество, условия и порядок реализации опытов. *Опыт* составляет элементарную часть эксперимента и предусматривает воспроизведение исследуемого явления в конкретных условиях с последующей регистрацией результата. В условиях случайности в одних и тех же условиях проводятся параллельные (повторные) опыты в интересах получения статистически устойчивых результатов. Опыт u предполагает задание конкретных значений факторам $\boldsymbol{x}_u = x_{1u}, x_{2u}, \ldots, x_{ku}$, а совокупность значений факторов во всех N точках плана эксперимента образует матрицу плана.

Вектор **Y** называется *откликом*. В ТПЭ обычно изучается ситуация, в которой вектор отклика **Y** состоит из одного элемента y. При наличии нескольких составляющих вектора **Y**, каждую из них можно исследовать отдельно. Зависимость отклика от факторов носит название *функции отклика*, а геометрическое представление функции отклика – *поверхности отклика*. Функция отклика рассматривается как показатель качества или эффективности объекта. Этот показатель является функцией от параметров – факторов. На практике широкое распространение получили простые функции вида $M\{\tilde{y}\} = bf(v)$, где $b = (b_0, b_1, ..., b_h)$ – вектор неизвестных параметров модели размерности $h+1$, $f(x) = (f_0(x), f_1(x), ..., f_h(x))$ – вектор заданных базисных функций, $M\{\tilde{y}\}$ – математическое ожидание функции отклика. Такое представление функции отклика соответствует линейной по параметрам модели регрессионного анализа, т.е. функция отклика есть линейная комбинация базисных функций от факторов [12].

Вследствие влияния на результаты экспериментов случайных воздействий истинные значения коэффициентов можно определить только приближенно. Оценку $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\beta}_0, \boldsymbol{\beta}_1, ..., \boldsymbol{\beta}_h)$ вектора неизвестных параметров **b** находят по результатам экспериментов, в ходе которых получают значения y_u при заданных значениях факторов $\mathbf{v}_u$. Эти оценки обычно рассчитываются с помощью метода наименьших квадратов (МНК) на основе выборок значений факторов и откликов системы на воздействия. В качестве оценки $\boldsymbol{\beta}$ вектора **b** выбирается такое значение, которое минимизирует $\frac{1}{N}\sum_{u=1}^{N}(\tilde{y}_u - y_u)^2$, где $\tilde{y}_u$ – вычисленное на модели значение функции отклика в u-й точке факторного пространства. Приравнивая нулю частные производные от данной квадратичной формы, взятые по переменным $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_h$, можно получить систему уравнений вида

$$\frac{1}{N}\sum_{u=1}^{N}(\tilde{y}_u - y_u) f(v_i) = 0 \qquad (3.1)$$

где i= 0, 1, 2, …, h. Значение **b** находят путем решения этой системы уравнений. Решение системы возможно при линейной независимости базисных функций.

Итак, задача заключается в определении общей формы записи функции отклика $\tilde{y}$. В большинстве случаев вид этой функции, получаемый из теоретических соображений, является сложным для практического применения, а при неполном знании объекта вообще неизвестен. По данным причинам функцию целесообразно представить в универсальном, удобном для практического применения виде, чему соответствует представление в виде полинома. Тогда системой базисных функций является совокупность степенных функций с целыми неотрицательными значениями показателей степени. Полиномиальная форма представления функции отклика примет вид

$$\tilde{y} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_k x_k + \beta_{12} x_1 x_2 + \beta_{13} x_1 x_3 + \ldots + \beta_{k-1,k} x_{k-1} x_k + \ldots + \beta_{11} x^2{}_k + \ldots + \varepsilon, \quad (3.2)$$

где ε – случайная величина, характеризующая ошибку опыта.

Такая функция отклика линейна относительно неизвестных коэффициентов и будет полностью определена, если заданы степень полинома и коэффициенты. Степень полинома обычно задается исследователем априорно и уточняется в ходе исследования. На практике наибольшее распространение получили полиномы первого и второго порядка, соответственно линейные и квадратичные модели. Коэффициенты полинома принято называть *эффектами факторов* [13].

Иногда функцию отклика целесообразно представить в другом виде, например, в виде степенной функции, так как достижение заданной точности требует применения полинома высокого порядка. Однако использование функций, нелинейных относительно неизвестных параметров, усложняет вычисления, затрудняет оценку их свойств. В некоторых случаях задачу можно упростить путем искусственного преобразования нелинейной функции в линейную [11]. При этом требуется соответствующее преобразование и результатов экспериментов.

В программе Minitab используются четыре типа планируемых экспериментов: *факторный эксперимент*, *исследование поверхности отклика*, *смешанный эксперимент* и *план Тагучи* (устойчивое планирование). Алгоритм действий для создания, анализа и построения графиков в ходе планирования эксперимента в программе Minitab одинаковы для всех типов планов [7].

3.1 Планы для решения задач оптимизации

Поиск оптимальных значений параметров является одной из важных задач, решаемых при создании новых технических систем, управлении производством или технологическими процессами.

На начальных этапах оптимизации для определения функции отклика применяют неполные полиномы второго порядка или линейные полиномы. Вычисление оценок коэффициентов таких полиномов осуществляется на основе обработки результатов реализации наиболее простых планов, в которых каждый фактор принимает только два значения $x_{i,min}$ или $x_{i,max}$, расположенные симметрично относительно некоторого нулевого уровня или центра плана по данному фактору. Значения уровней варьирования выбирает исследователь, исходя из возможного диапазона изменения каждого фактора и возможности применения линейной аппроксимации функции отклика в выбранном диапазоне изменений параметра. Без ограничения общности можно считать, что кодированные значения x_i принимают значения – 1 и +1 соответственно (или просто – или +). Множество всех точек в k-мерном пространстве, координаты которых являются комбинациями "+" и "–", называется полным факторным планом или планом *полного факторного эксперимента* типа 2^k (ПФЭ). Количество точек в этом плане $N=2^k$ [14].

Для примера возьмем полный факторный эксперимент с тремя независимыми переменными x_1, x_2 и x_3, приведенный в таблице 3.1 [2].

Второй, третий и четвертый столбцы таблицы соответствуют собственно плану экспериментов, пятый – восьмой столбцы содержит значения произведений независимых переменных. Фиктивная переменная $x_0=1$ (первый столбец) введена для единообразия записи расчетных формул коэффициентов полинома. Строки соответствуют опытам, например, первая строка характеризует эксперимент, в котором все независимые переменные находятся на нижнем уровне.

Таблица 3.1 – План полного факторного эксперимента 2^k

Матрица планирования								Вектор результатов
x_0	x_1	x_2	x_3	$x_1 x_2$	$x_1 x_3$	$x_2 x_3$	$x_1 x_2 x_3$	y
+1	–1	–1	–1	+1	+1	+1	–1	y_1
+1	–1	–1	+1	+1	–1	–1	+1	y_2
+1	–1	+1	–1	–1	+1	–1	+1	y_3
+1	–1	+1	+1	–1	–1	+1	–1	y_4
+1	+1	–1	–1	–1	–1	+1	+1	y_5
+1	+1	–1	+1	–1	+1	–1	–1	y_6
+1	+1	+1	–1	+1	–1	–1	–1	y_7
+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	y_8

С помощью матрицы планирования, описанной в таблице 3.1, можно вычислить оценки коэффициентов неполного полинома третьей степени или линейной функции (формулы 3.3 и 3.4 соответственно):

$$\tilde{y} = \boldsymbol{\beta}_0 + \boldsymbol{\beta}_1 x_1 + \boldsymbol{\beta}_2 x_2 + \boldsymbol{\beta} x_3 + \boldsymbol{\beta}_{12} x_1 x_2 + \boldsymbol{\beta}_{13} x_1 x_3 + \boldsymbol{\beta}_{23} x_2 x_3 + \boldsymbol{\beta}_{123} x_1 x_2 x_3 \quad (3.3)$$

$$\tilde{y} = \boldsymbol{\beta}_0 + \boldsymbol{\beta}_1 x_1 + \boldsymbol{\beta}_2 x_2 + \boldsymbol{\beta}_3 x_3 \quad (3.4)$$

Первый вид полинома позволяет оценить не только влияние отдельных факторов, но и один из часто встречающихся видов нелинейности, когда эффект одного фактора зависит от уровня других факторов, т.е. присутствует эффект взаимодействия факторов. Эффект взаимодействия вида $x_i\, x_j$ называют парным, $x_i\, x_j\, x_k$ – тройным и т. д. С ростом количества факторов число возможных взаимодействий быстро увеличивается. Суммарно количество всех коэффициентов функции отклика такого типа равно числу опытов полного факторного эксперимента.

Допустима следующая интерпретация оценок коэффициентов:

$\boldsymbol{\beta}_0$ соответствует значению функции отклика в центре проводимого эксперимента;

$\boldsymbol{\beta}_i$ равен приращению функции при переходе значения фактора i с нулевого уровня на верхний (это вклад соответствующего фактора в значение функции);

$\boldsymbol{\beta}_{ij}$ равен нелинейной части приращения функции при одновременном переходе факторов i и j с нулевого уровня на верхний.

С ростом количества факторов k число точек плана в ПФЭ растет по показательной функции 2^k. Планы ПФЭ позволяют получить несмещенные оценки градиента функции отклика в центральной точке, но в случае применения линейного полинома оказываются недостаточно эффективными по количеству опытов при большом числе независимых переменных, так как остается слишком много степеней свободы на проверку адекватности модели [14].

Таким образом, в случаях, когда используются только линейные приближения функции отклика, количество опытов следует сократить, используя для планирования так называемые *регулярные дробные реплики* от ПФЭ, содержащие подходящее число опытов и сохраняющие основные свойства матрицы планирования. Реплика, включающая только половину экспериментов ПФЭ, называется *полурепликой* (2^{k-1}), включающая четвертую часть опытов – *четвертьрепликой* (2^{k-2}) и т. д.

Построение регулярной дробной реплики или проведение *дробного факторного эксперимента* (ДФЭ) типа 2^{k-p} предусматривает отбор из множества k факторов k–p основных, для которых строится план ПФЭ. Этот план дополняется p столбцами, которые соответствуют остальным факторам. Каждый из этих столбцов формируется по специальному правилу, а именно, получается как результат поэлементного умножения не менее двух и не более k–p определенных столбцов, соответствующих основным факторам. Иначе говоря, в дробных репликах p линейных эффектов приравнены к эффектам взаимодействия.

Правило образования каждого из p столбцов ДФЭ называют *генератором плана*. Каждому дополнительному столбцу соответствует свой генератор (для плана типа 2^{k-p} должно быть задано p различных генераторов). Генератор задается как произведение основных факторов, определяющее значение элементов соответствующего дополнительного столбца матрицы планирования. Примером записи генератора для плана 2^{3-1} служит выражение $x_3 = x_1x_2$, записанное в таблице 3.2. Матрица планирования ДФП типа 2^{k-p} содержит k+1 столбец и $N = 2^{k-p}$ строк [2].

Таблица 3.2 – Пример плана дробно-факторного эксперимента 2^{3-1}

Матрица планирования				Вектор результатов
x_0	x_1	x_2	x_3	y
+1	–1	–1	+1	y_1
+1	–1	+1	–1	y_2
+1	+1	–1	–1	y_3
+1	+1	+1	+1	y_4

Применение дробных реплик ведет к смешиванию оценок параметров модели, а их построение предполагает исключение из рассмотрения некоторых взаимодействий факторов. Оценки смешиваются в связи с тем, что каждый из p столбцов дробного факторного плана совпадает с некоторым произведением основных факторов. Запись плана в виде 2^{k-p} не дает полной характеристики регулярной дробной реплики, так как основные эффекты можно приравнять к различным эффектам взаимодействия. Правило смешивания, определяющее коррелированные основные эффекты и эффекты взаимодействия, удобно описывать с помощью *определяющего контраста реплики*. Определяющий контраст полуреплики получается путем умножения генерирующего соотношения на его же левую часть, а так как для любой кодированной переменной $x_i^2=1$, то левая часть формулы определяющего контраста всегда равна единице и обозначается I. В частности, для ДФП типа 2^{3-1} и генераторе $x_3 = x_1x_2$ имеет место определяющий контраст $I = x_1x_2x_3$ (генератор умножается на переменную x_3, следовательно, $x_3\,x_3 = I = x_1\,x_2\,x_3$).

Чтобы определить, с какими параметрами смешана оценка коэффициента данного фактора, следует умножить обе части определяющего контраста на этот фактор. Учитывая равенство $x_i^2=1$, получим порядок смешивания оценок коэффициентов при использовании конкретного плана. В рассматриваемом примере для плана 2^{3-1} и определяющего контраста $I = x_1x_2x_3$ порядок смешивания факторов следующий:

$$x_1 = x_1^2\,x_2\,x_3 = x_2\,x_3;\;\; x_2 = x_1\,x_2^2\,x_3 = x_1\,x_3;\;\; x_3 = x_1\,x_2\,x_3^2 = x_1\,x_2 \quad (3.5)$$

Оценки коэффициентов линейной модели для этого плана эксперимента не могут быть получены раздельно и будут смешанными:

$$\boldsymbol{\beta}_1^* = \boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_{23}\ ;\ \ \boldsymbol{\beta}_2^* = \boldsymbol{\beta}_2 + \boldsymbol{\beta}_{13}\ ;\ \ \boldsymbol{\beta}_3^* = \boldsymbol{\beta}_3 + \boldsymbol{\beta}_{12} \tag{3.6}$$

Планы типа 2^{k-p} являются ортогональными для моделей с взаимодействиями. Поэтому для вычисления оценок коэффициентов используются простые формулы, как и для случая ПФЭ:

$$\beta_i^* = \frac{1}{N}\sum_{u=1}^{N} x_{iu}\bar{y}_u,\ \ i = \overline{0,k} \tag{3.7}$$

Планы дробных реплик строят различным образом, но так, чтобы соблюдались основные свойства матрицы планирования. Например, ДФП 2^{3-1} можно представить одной из двух полуреплик, генераторами которых являются $x_3 = x_1x_2$ и $x_3 = -x_1x_2$ соответственно. Определяющие контрасты этих полуреплик:

$$x_3^2 = I = x_1x_2x_3 \text{ и } x_3^2 = I = -x_1x_2x_3 \tag{3.8}$$

В этих полурепликах смешивание факторов задается соотношениями 3.9 и 3.10:

$$x_1 = x_2x_3\,,\ \ x_2 = x_1x_3\,,\ \ x_3 = x_1x_2 \tag{3.9}$$

$$x_1 = -x_2x_3\,,\ \ x_2 = -x_1x_3\,,\ \ x_3 = -x_1x_2 \tag{3.10}$$

Коэффициенты линейного полинома в каждой полуреплике:

$$\boldsymbol{\beta}_1^* = \boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_{23};\ \ \boldsymbol{\beta}_2^* = \boldsymbol{\beta}_2 + \boldsymbol{\beta}_{13};\ \ \boldsymbol{\beta}_3^* = \boldsymbol{\beta}_3 + \boldsymbol{\beta}_{23} \tag{3.11}$$

$$\boldsymbol{\beta}_1^* = \boldsymbol{\beta}_1 - \boldsymbol{\beta}_{23};\ \ \boldsymbol{\beta}_2^* = \boldsymbol{\beta}_2 - \boldsymbol{\beta}_{13};\ \ \boldsymbol{\beta}_3^* = \boldsymbol{\beta}_3 - \boldsymbol{\beta}_{23} \tag{3.12}$$

Реализовав обе полуреплики путем совместной обработки результатов экспериментов, можно получить раздельные оценки для линейных эффектов и эффектов взаимодействия (такой вариант плана соответствует ПФЭ).

Разрешающая способность полуреплик (возможность раздельного определения коэффициентов уравнения) зависит от генерирующих соотношений. Так, если для плана 2^{4-1} выбрать генерирующее соотношение $x_4 = x_1x_2$, то получим реплику с контрастом $I = x_1x_2x_4$ и разрешающей способностью $x_1 = x_2x_4$ и т.д. Здесь линейные эффекты определяются совместно с парными взаимодействиями. Очевидно, что в первую очередь следует пренебречь взаимодействием более высоких порядков из-за их более низкой вероятности существования по сравнению с парными. У полуреплики с контрастом $I = x_1x_2x_3x_4$ или равноценным $I = -x_1x_2x_3x_4$

линейные эффекты будут определяться совместно уже только с тройными взаимодействиями, что повышает точность оценок параметров модели (потенциально величина смещения в оценке коэффициента уменьшается). С ростом количества независимых переменных растет разрешающая способность полуреплик, позволяя оценивать раздельно сначала линейные эффекты, затем парные, тройные взаимодействия и т. д. Но при этом растет и избыточность экспериментов.

Реплики можно строить высокой степени дробности, сокращая тем самым количество экспериментов [15].

Пример. Пусть необходимо изучить влияние пяти переменных и известно, что все эффекты взаимодействия пренебрежимо малы. Для линейного приближения следует определить шесть коэффициентов, что потребует применения плана с количеством точек не менее шести. Ближайшее большее число, соответствующее целой степени 2, равно восьми, это дает возможность получить дробную реплику, эквивалентную ПФЭ 2^3, т.е. реплику 2^{5-2} или четвертьреплику. Для построения четвертьреплики необходимы два генерирующих соотношения. В целях построения такой реплики целесообразно пожертвовать тройным и одним из двойных взаимодействий. Пусть этим двойным взаимодействием будет x_1x_2. Тогда можно построить четыре различные четвертьреплики, каждая из которых задается двумя генерирующими соотношениями [16]:

$$\begin{aligned}
&\text{а) } x_4 = x_1x_2\,,\ \ x_5 = x_1x_2x_3\,;\\
&\text{б) } x_4 = x_1x_2\,,\ \ x_5 = -\,x_1x_2x_3\,;\\
&\text{в) } x_4 = -\,x_1x_2\,,\ \ x_5 = x_1x_2x_3\,;\\
&\text{г) } x_4 = -\,x_1x_2\,,\ \ x_5 = -\,x_1x_2x_3\,.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Определяющие контрасты каждой четвертьреплики задаются двумя соотношениями:

$$\begin{aligned}
&\text{а) } I = x_1x_2x_4\,,\ I = x_1x_2x_3x_5\,;\\
&\text{б) } I = x_1x_2x_4\,,\ I = -\,x_1x_2x_3x_5\,;\\
&\text{в) } I = -\,x_1x_2x_4\,,\ I = x_1x_2x_3x_5\,;\\
&\text{г) } I = -\,x_1x_2x_4\,,\ I = -\,x_1x_2x_3x_5\,.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Из этой совокупности четвертьреплик следует выбрать только одну, например, выберем реплику, задаваемую первой парой генерирующих соотношений. Матрица планирования ДФЭ получается из матрицы ПФЭ 2^{k-p} для $k-p$ основных факторов добавлением p столбцов, элементы которых вычисляются по соответствующим генерирующим соотношениям (таблица 3.3.).

Таблица 3.3 – План дробно-факторного эксперимента 2^{5-2}

Матрица планирования						Вектор результатов
x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
+1	–1	–1	–1	+1	–1	y_1
+1	+1	–1	–1	–1	+1	y_2
+1	–1	+1	–1	–1	+1	y_3
+1	+1	+1	–1	+1	–1	y_4
+1	–1	–1	+1	+1	+1	y_5
+1	+1	–1	+1	–1	–1	y_6
+1	–1	+1	+1	–1	–1	y_7
+1	+1	+1	+1	+1	+1	y_8

Для полной характеристики разрешающей способности четвертьреплик вводят обобщающие определяющие контрасты, третий компонент которых получается путем перемножения попарно первых двух контрастов. Для выбранной четвертьреплики обобщающий определяющий контраст $I = x_1x_2x_4 = x_1x_2x_3x_5 = x_3x_4x_5$.

Все совместные оценки находятся путем умножения обобщающего определяющего контраста последовательно на x_1, x_2 и т.д. В рассматриваемом случае совместные оценки задаются соотношениями:

$$\begin{gathered} x_1 = x_2x_4 = x_2x_3x_5 = x_1x_3x_4x_5, \\ x_2 = x_1x_4 = x_1x_3x_5 = x_2x_3x_4x_5, \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_5 = x_1x_2x_4x_5 = x_1x_2x_3 = x_3x_4 . \end{gathered} \tag{3.15}$$

Оценки коэффициентов линейного полинома задаются соотношениями:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\beta}_1^* = \boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_{24} + \boldsymbol{\beta}_{235} + \boldsymbol{\beta}_{1345} , \\ \boldsymbol{\beta}_2^* = \boldsymbol{\beta}_2 + \boldsymbol{\beta}_{14} + \boldsymbol{\beta}_{135} + \boldsymbol{\beta}_{2345} , \\ \text{и т. д.} \end{gathered} \tag{3.16}$$

Разрешающая способность выбранной четвертьреплики невысокая – все линейные эффекты определяются совместно с парными взаимодействиями. Этой репликой можно пользоваться для оценки линейных эффектов при условии равенства нулю соответствующих парных взаимодействий. Если такой уверенности нет, то следует применить полуреплику (что требует в два раза большего количества точек плана эксперимента по сравнению с четвертьрепликой) с генерирующим соотношением $x_5 = x_1x_2x_3x_4$, пользуясь которым, можно разделить все линейные эффекты и парные взаимодействия.

Построение обобщающего определяющего контраста для реплик более высокой степени дробности производится аналогично четвертьреплике: исходные контрасты сначала перемножаются попарно, получаются контрасты первого уровня; затем контрасты первого уровня снова перемножаются попарно, получаются контрасты второго уровня и так далее, пока не будет исчерпана возможность перемножения. Если получается два и более одинаковых контрастов, то из них оставляется только один. Обобщающий определяющий контраст составляется путем перечисления выражений для всех сформированных контрастов.

Взаимодействие факторов, выбранных в качестве генераторов плана, может быть значимым или незначимым. Для построения дробных реплик следует выбирать незначимые взаимодействия, которые выбираются по физическим соображениям на основе априорных сведений. Следует учитывать, что ДФЭ позволяет получить несмещенную оценку градиента функции отклика тогда и только тогда, когда ее обобщающий определяющий контраст больше трех. Наличие смещения в оценке градиента увеличивает количество шагов оптимизации, вносит систематическую ошибку в описание функции отклика.

Проверка адекватности математической модели данным эксперимента проводится только в случае ненасыщенного планирования на основе сопоставления *дисперсии воспроизводимости среднего значения функции* отклика $\sigma^2(y)$ и *дисперсии адекватности*.

Оценка дисперсии адекватности при $N > m$ характеризует отклонения между результатами наблюдений и значениями, формируемыми по функции отклика:

$$\sigma_a^2 = \frac{1}{N-m} \cdot \sum_{u=1}^{N} (\bar{y}_u - \tilde{y}_u)^2, \ \mathrm{N} > m, \qquad (3.17)$$

где m – количество оцениваемых коэффициентов модели;

$\bar{y}_u$ – среднее значение результатов наблюдения в u-й точке плана;

$\tilde{y}_u$ – значение отклика в этой же точке, предсказанное на модели.

Количество степеней свободы дисперсии адекватности $\varphi_a = N - m$.

При насыщенном планировании нет степеней свободы и сумма отклонений равна нулю.

Проверка адекватности сводится к проверке гипотезы об однородности оценки дисперсии воспроизводимости $\sigma^2(y)$ с количеством степеней свободы φ_y и оценки дисперсии адекватности. Проверка осуществляется по критерию Фишера. Оценки дисперсий в формуле расчета критерия расставляются так, чтобы его величина была больше единицы, критическая область является двусторонней [17].

Если вычисленное значение критерия $F_{расч}$ меньше критического $F_{кр}$ (определяемого по таблице, см. Приложение Б), то нет оснований для сомнений в адекватности модели. Однако положительный исход статистической проверки не гарантирует достоверной адекватности, а тем более истинности модели (хотя и не противоречит такому предположению). Когда гипотеза отклоняется, следует вывод о неадекватности модели, следовательно, она заведомо не является истинной. Дальнейшее применение неадекватной модели обычно нецелесообразно, и надо принять меры по ее совершенствованию.

Причиной неадекватности могут являться: ошибки в организации и проведении опытов, например неконтролируемое изменение неучтенных в модели факторов; погрешности в задании исходных данных и в измерении результатов; большой размах варьирования факторов и другие причины. Иначе говоря, анализ причин неадекватности требует серьезного изучения сущности исследуемого процесса и методов его исследования.

Проверка значимости оценок коэффициентов полинома производится на основе проверки статистической гипотезы о равенстве математического ожидания случайной величины нулю, т.е. проверки условия $b_i = 0$ для всех коэффициентов. Проверка осуществляется с помощью критерия Стьюдента:

$$t_i = (|\boldsymbol{\beta}_i| - 0)/\sigma(\boldsymbol{\beta}_i) = |\boldsymbol{\beta}_i|/\sigma(\boldsymbol{\beta}_i) \qquad (3.18)$$

Критическое значение $t_{кр}=t(\boldsymbol{\alpha}; \boldsymbol{\varphi}(y))$ находится стандартным образом: критическая область является двусторонней, так как коэффициент может быть положительным или отрицательным; количество степеней свободы соответствует количеству степеней свободы для оценки дисперсии воспроизводимости $\boldsymbol{\varphi}(y)$ (Приложение А). Если вычисленное значение t_i больше $t_{кр}$, то данный коэффициент отличается от нуля и оставляется в уравнении функции отклика, иначе коэффициент незначим. Отсутствие значимости коэффициента в моделях описания поверхности отклика говорит о целесообразности исключения соответствующего слагаемого из уравнения (частный градиент равен нулю).

После проверки значимости коэффициентов может оказаться, что все коэффициенты незначимы. Эти выводы являются следствием одной их следующих причин:

- достигнута область оптимума функции отклика. Следует перейти к построению функции на основе полных полиномов второго порядка;
- интервал варьирования факторов слишком мал. Необходимо увеличить интервал варьирования факторов;
- отклик системы не зависит от выбранных факторов. В выбранной области значений факторы не оказывают влияние на функцию отклика или для анализа выбраны несущественные факторы [17].

Формальных правил выявления соответствующих ситуаций не существует.

Рассмотренные этапы обработки результатов экспериментов должны выполняться не только в случае полного или дробного факторного эксперимента, но и при реализации других планов оптимизации и описания поверхности отклика.

В условиях относительно небольшого влияния случайности на значение функции отклика (например, случайные ошибки измерительных приборов) в каждой точке плана проводится только по одному опыту. Очевидно, что в такой ситуации оценка дисперсии воспроизводимости невозможна. Следовательно, проверки однородности дисперсии воспроизводимости и адекватности модели не проводятся. И только в условиях ненасыщенного планирования возможна проверка значимости коэффициентов полинома, если в качестве дисперсии оценки коэффициента взять величину $\sigma^2(\boldsymbol{\beta}_i) = \sigma_a^2/N$ с количеством степеней свободы $\boldsymbol{\varphi}_a = N–m$ [2].

3.1.1 Решение задач оптимизации в пакете Minitab

Задача. Руководством автосервиса установлена новая стратегическая цель: снизить время ожидания клиентами своей очереди на обслуживание за счёт оптимизации сервисной зоны. Проведя оценку многих потенциально важных факторов, аналитики отдела планирования сервиса решили подробно исследовать два из них: количество постов обслуживания (X_1) и количество рабочих сервисной зоны (X_2). Необходимо определить, какая комбинация исходных факторов приведет к снижению среднего времени ожидания обслуживания клиента (Y).

Решение задачи. Прежде чем вводить и анализировать данные измерений в программе Minitab, необходимо создать план эксперимента и сохранить его на рабочем листе. Исходя из требований конкретного эксперимента, можно выбрать один из множества имеющихся планов. Когда будет выбран план и указаны его характеристики, программа Minitab автоматически создаст план и сохранит его на рабочем листе.

Для того, чтобы составить план полного факторного эксперимента 2^2, необходимо выбрать команду **Stat – DOE – Factorial – Create Factorial Design…**. В появившемся окне необходимо выбрать тип плана – **Type of design** (выберем **2-level factorial (default generators)**), количество факторов – **Number of factors** (выберем **2**).

При создании плана в программе Minitab изначально активны только две кнопки: **Display Available Designs** (показать доступные планы) и **Designs** (планы). Остальные кнопки станут активными после заполнения полей в диалоговом окне **Designs** (планы). Нажмите кнопку **Display Available Designs** (показать доступные планы). Для большинства типов планов программа Minitab в диалоговом окне **Display Available Designs** (показать доступные планы) отобразит все возможные планы и необходимое число испытаний.

Нажмите кнопку **Designs** (планы). В верхнем окне перечислены все доступные планы для выбранного типа плана и числа факторов. Мы создаем факторный план с двумя факторами, поэтому доступен только один вариант: *полный факторный план с четырьмя испытаниями*. В двухуровневом плане с двумя факторами возможно 2^2, то есть четыре комбинации факторов.

В поле **Number of replicates for corner points** (число повторов для угловых точек) выберите 3. Это означает, что в исследуемых крайних точках функции отклика мы проводим один и тот же эксперимент 3 раза, при этом подразумевается, что получаемое каждый раз значение функции будет отличаться от предыдущего. Нажмите кнопку **OK**, чтобы вернуться в основное диалоговое окно. Обратите внимание, что остальные кнопки стали активными.

Нажмите кнопку **Factors** (факторы). Minitab использует те имена и уровни факторов, которые вы введете в рабочем листе. Те же имена используются в качестве меток факторов в результатах анализа и на графиках. Если не ввести уровни факторов, программа Minitab установит –1 в качестве нижнего уровня и 1 в качестве верхнего. Чтобы изменить имя первого фактора, щелкните верхнюю ячейку в столбце **Name** (имя). Затем для перемещения по таблице используйте клавиши со стрелками. Перемещаться можно вдоль строк и столбцов. В строке **Factor A** (фактор А) введите *X1* (количество постов обслуживания) в столбце **Name** (имя), *3* в столбце **Low** (нижний) и *10* в столбце **High** (верхний). В столбце **Type** (тип) выберите *Numeric* (числовой).

В строке **Factor B** (фактор В) введите *X2* (количество рабочих сервисной зоны) в столбце **Name** (имя), *5* в столбце **Low** (нижний) и *15* в столбце **High** (верхний). В столбце **Type** (тип) выберите *Numeric* (числовой). Нажмите кнопку **OK**, чтобы вернуться в основное диалоговое окно.

Нажмите кнопку **Options** (параметры). Проверьте, что флажок **Store design in worksheet** (сохранить план в рабочем листе) установлен, а флажок **Randomize runs** – напротив, отключен. Нажмите кнопку ОК в каждом диалоговом окне. Последовательность создания плана ПФЭ в программе Minitab представлена на рисунке 3.1.

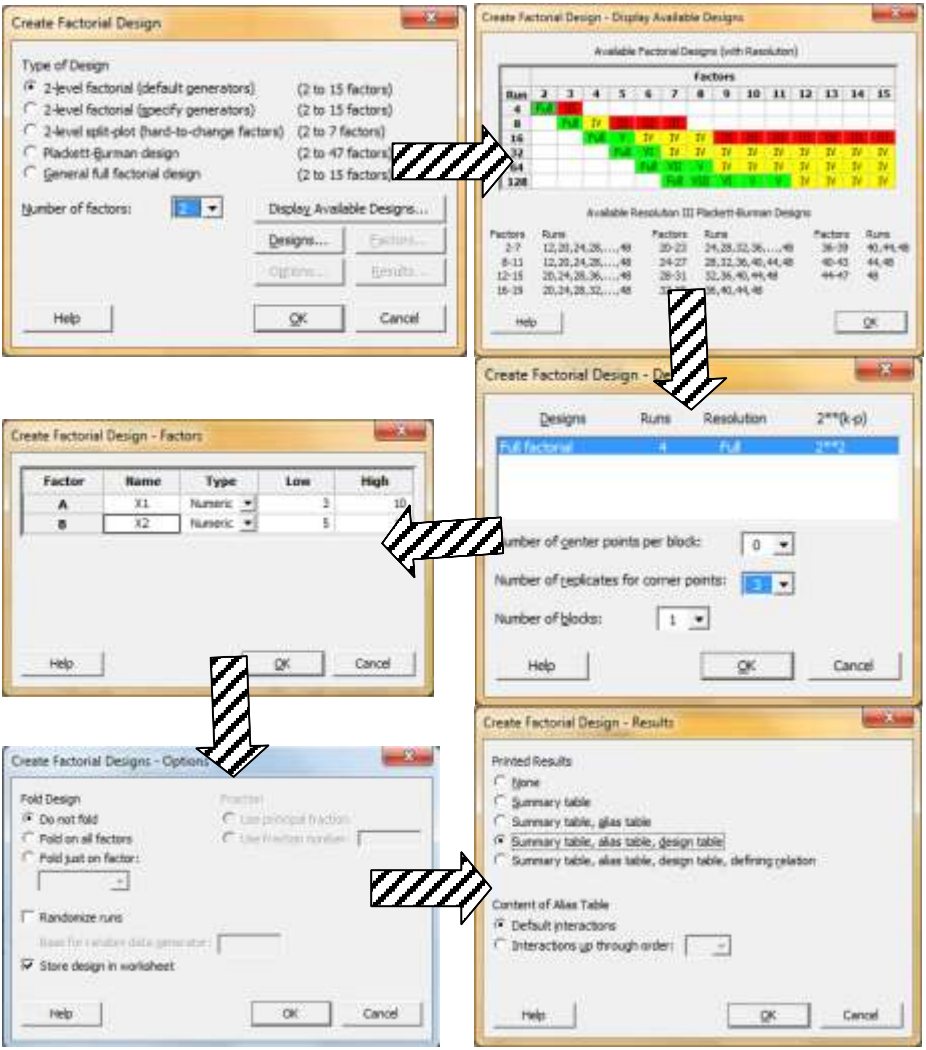


Рисунок 3.1 – Создание плана полнофакторного эксперимента

При включенном флажке **Randomize runs** программа Minitab расставляет испытания в случайном порядке для планов всех типов, за исключением планов Тагучи. Рандомизация позволяет гарантировать соответствие модели определенным статистическим утверждениям и снизить влияние факторов, не включенных в исследование. Однако, для того, чтобы каждый раз при создании плана испытания расставлялись в одном и том же порядке, необходимо либо отключить этот флажок, либо установить базу для рандомизатора данных (поле **Base for random data generator**).

Когда создается план, программа Minitab сохраняет информацию о плане и факторах в столбцах рабочего листа. Откройте окно данных, чтобы ознакомиться со структурой плана (рисунок 3.2).

↓	C1	C2	C3	C4	C5	C6
	StdOrder	RunOrder	CenterPt	Blocks	X1	X2
1	1	1	1	1	3	5
2	2	2	1	1	10	5
3	3	3	1	1	3	15
4	4	4	1	1	10	15
5	5	5	1	1	3	5
6	6	6	1	1	10	5
7	7	7	1	1	3	15
8	8	8	1	1	10	15
9	9	9	1	1	3	5
10	10	10	1	1	10	5
11	11	11	1	1	3	15
12	12	12	1	1	10	15

Рисунок 3.2 – План эксперимента, построенный в Minitab

В столбце **RunOrder** (порядок наблюдений, С2), значения в котором расставляются случайным образом, указан порядок сбора данных. Если план не рандомизован, значения в столбцах **StdOrder** (стандартный порядок) и **RunOrder** (порядок наблюдений) совпадают.

Примечания:

*1 Меню **Stat – DOE – Display Design** можно использовать для переключения между стандартным и рандомизованным порядком, а также между кодированным и некодированным отображением в рабочем листе.*

*2 Чтобы изменить параметры или имена факторов, воспользуйтесь меню **Stat – DOE – Modify Design**. Если нужно изменить только имена факторов, их можно вписать непосредственно в окне данных.*

После проведения эксперимента и сбора данных, можно ввести их в рабочий лист. Измеряемая характеристика называется откликом. В нашем примере измеряется количество минут, проведенных клиентом в ожидании обслуживания. В окне данных Minitab щелкните ячейку с именем столбца **C7** и введите *Y*. Введите в этот столбец значения целевой функции, полученные в результате выполнения эксперимента на имитационной модели, как это представлено на рисунке 3.3.

↓	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
	StdOrder	RunOrder	CenterPt	Blocks	X1	X2	Y
1	1	1	1	1	3	5	49
2	2	2	1	1	10	5	51
3	3	3	1	1	3	15	36
4	4	4	1	1	10	15	8
5	5	5	1	1	3	5	68
6	6	6	1	1	10	5	27
7	7	7	1	1	3	15	18
8	8	8	1	1	10	15	2
9	9	9	1	1	3	5	35
10	10	10	1	1	10	5	41
11	11	11	1	1	3	15	29
12	12	12	1	1	10	15	5

Рисунок 3.3 – Результат выполнения экспериментов на имитационной модели

Данные можно вводить во все столбцы, кроме тех, что содержат сведения о плане. Кроме того, для одного эксперимента можно ввести несколько откликов, каждый в своем столбце.

Итак, мы создали план и собрали данные отклика. Теперь мы можем подобрать модель данных и построить графики, чтобы оценить влияние факторов. Результаты подборки модели и построения графиков помогут определить, какие факторы являются важными для сокращения среднего времени обслуживания клиента.

Когда факторный план создан и сохранен, программа Minitab делает активными команды **Analyze Factorial Design** (анализ факторного плана) и **Factorial Plots** (факторные графики) в меню **DOE – Factorial**. Теперь можно построить модель или построить графики — все зависит от того, с каким планом мы работаем. В нашем примере мы сначала построим модель.

Выберите пункт меню **Stat – DOE – Factorial – Analyze Factorial Design...** (рисунок 3.4). В поле **Responses** (отклики) введите *Y*. Столбец откликов необходимо указать прежде, чем открывать дополнительные диалоговые окна.

Нажмите кнопку **Terms** (условия). Проверьте, указано ли *A:X1, B:X2 и AB* в поле **Selected Terms** (выбранные условия). При анализе плана обязательно воспользуйтесь диалоговым окном **Terms** (условия) для того, чтобы выбрать условия, которые будут включены в модель. Факторы и взаимодействия можно добавлять и удалять при помощи кнопок со стрелками. При помощи флажков можно включить в модель блоки и центральные точки. Нажмите кнопку **OK**.

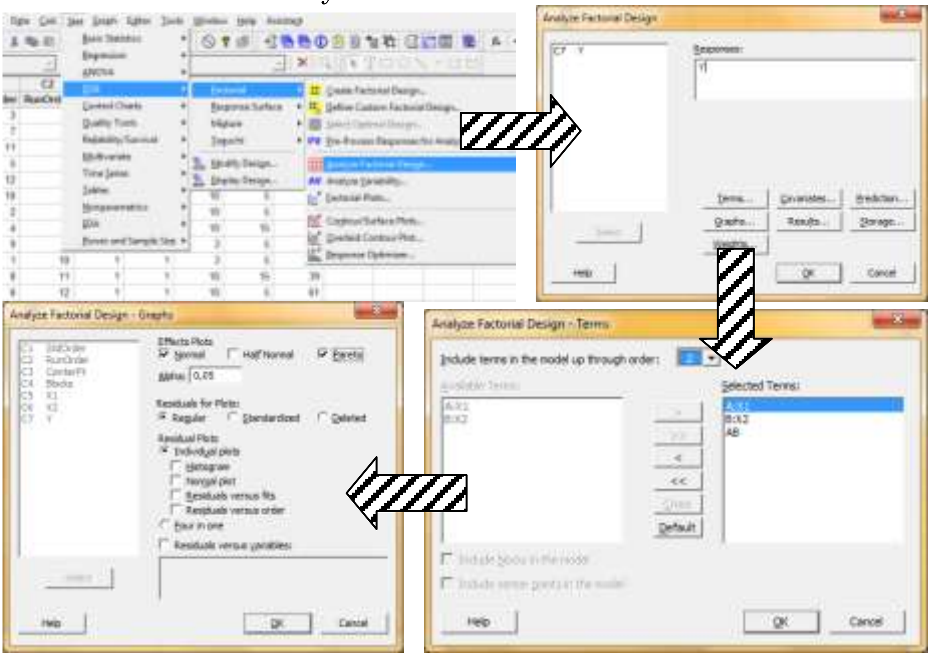
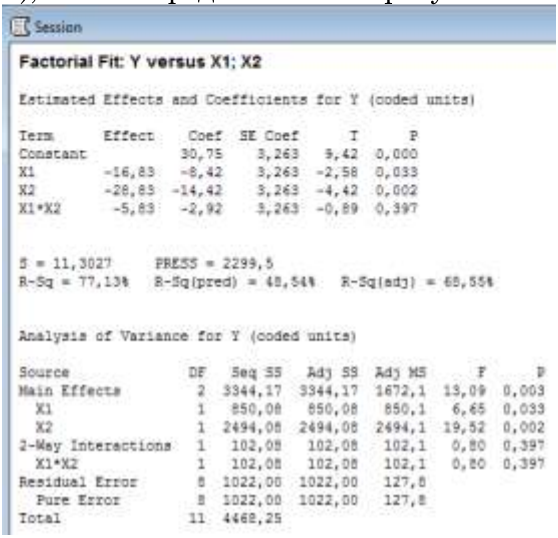


Рисунок 3.4 – Анализ плана экспериментов

Нажмите кнопку **Graphs** (графики). В части **Effects Plots** (графики влияний) установите флажки **Normal** (нормальный) и **Pareto** (Парето). Графики влияний можно построить только для факторного плана. Графики остатков (**Residual Plots**), полезные при проверке предположений об адекватности модели, можно построить для планов любого типа. Нажмите кнопку **OK** в каждом диалоговом окне.

Целью анализа данных является построение полной модели, включающей два основных влияния и двустороннее взаимодействие: $\tilde{y} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{12} x_1 x_2 + \varepsilon$, (3.19)

где β_i - коэффициент полинома, построенного для закодированных факторов, значения которого отображаются в столбце **Coef** таблицы **Estimated Effects and Coefficients for Y (coded units)** в окне **Session** (Сеанс), как это представлено на рисунке 3.5.


Session

Factorial Fit: Y versus X1; X2

Estimated Effects and Coefficients for Y (coded units)

Term	Effect	Coef	SE Coef	T	P
Constant		30,75	3,263	9,42	0,000
X1	-16,83	-8,42	3,263	-2,58	0,033
X2	-28,83	-14,42	3,263	-4,42	0,002
X1*X2	-5,83	-2,92	3,263	-0,89	0,397

S = 11,3027 PRESS = 2299,5
R-Sq = 77,13% R-Sq(pred) = 48,54% R-Sq(adj) = 68,55%

Analysis of Variance for Y (coded units)

Source	DF	Seq SS	Adj SS	Adj MS	F	P
Main Effects	2	3344,17	3344,17	1672,1	13,09	0,003
X1	1	850,08	850,08	850,1	6,65	0,033
X2	1	2494,08	2494,08	2494,1	19,52	0,002
2-Way Interactions	1	102,08	102,08	102,1	0,80	0,397
X1*X2	1	102,08	102,08	102,1	0,80	0,397
Residual Error	8	1022,00	1022,00	127,8		
Pure Error	8	1022,00	1022,00	127,8		
Total	11	4468,25				

Рисунок 3.5 – Результаты анализа плана экспериментов

Воспользуемся значениями вероятности (*P*) в таблице Estimated Effects and Coefficients (оцениваемые влияния и коэффициенты), чтобы определить значимость влияний. При α = 0,05 основные влияния – количество постов обслуживания (X_1) и количество работников (X_2) являются статистически значимыми, поскольку соответствующие значения вероятности меньше 0,05

($P_1 = 0,033$, $P_2 = 0,002$). Однако взаимодействие X1∗X2 является статистически незначимым, поскольку соответствующее значение вероятности ($P = 0,397$) является слишком высоким. Таким образом, взаимодействием данных факторов можно пренебречь, что позволяет выполнить дробный факторный эксперимент.

Оценить значимость факторов можно также на основании построенных графиков влияния. На рисунке 3.6 отображены абсолютные значения влияний факторов, а красной контрольной линией отмечено табличное значение критерия Стьюдента. Те факторы, для которых рассчитанное значение критерия Стьюдента превышает табличное (т.е. столбец гистограммы пересекает контрольную линию), являются статистически значимыми.

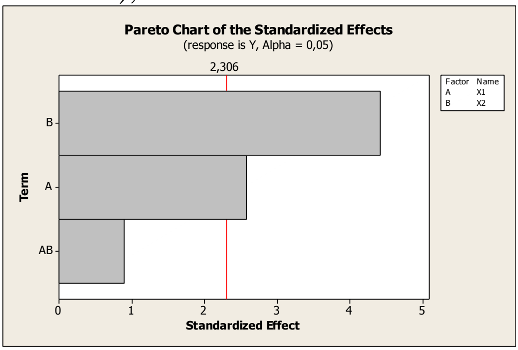


Рисунок 3.6 – Оценка влияний факторов (по закону Парето)

На рисунке 3.7 квадратиками обозначены значимые (Significant) факторы, а кругляшками – незначимые (Not Significant).

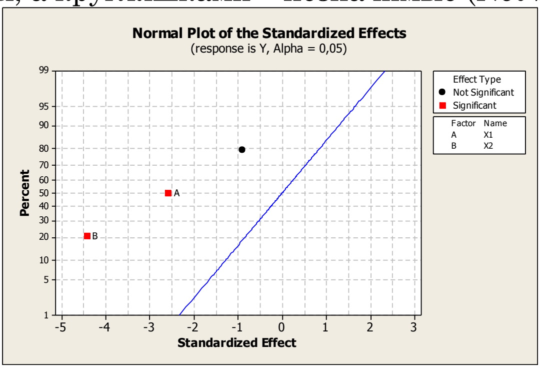
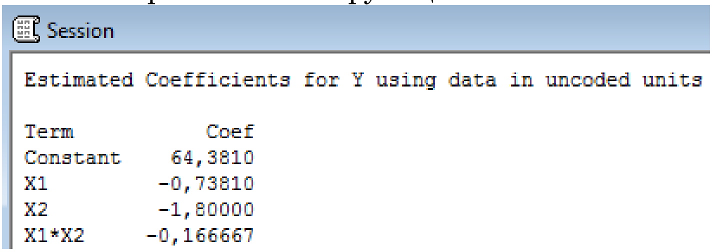


Рисунок 3.7 – Оценка влияний факторов
(по нормальному закону распределения)

На рисунке 3.8 в таблице **Estimated Coefficients for Y using data in uncoded units** (оцениваемые влияния и коэффициенты для некодированных значений) определены коэффициенты B_i для полинома оригинальной функции.



Session

Estimated Coefficients for Y using data in uncoded units

Term	Coef
Constant	64,3810
X1	-0,73810
X2	-1,80000
X1*X2	-0,166667

Рисунок 3.8 – Оцениваемые влияния и коэффициенты для некодированных значений

Таким образом, функция отклика для реальных значений факторов имеет вид:

$$\tilde{y} = 64{,}381 - 0{,}738 \cdot X_1 - 1{,}800 \cdot X_2 - 0{,}167 \cdot X_1 X_2 + \varepsilon\,, \qquad (3.20)$$

где ε – отклонения наблюдаемых значений от модельных, сумма которых равна 11,3 (параметр S – стандартная ошибка регрессии, см. рисунок 3.5).

Предварительную оценку адекватности модели можно провести, исследуя коэффициент детерминации R-Sq. Поскольку коэффициент детерминации равен 77,13%, нельзя говорить об очень высокой степени соответствия модели экспериментальным значениям.

Для того, чтобы построить графики поверхности функции отклика, необходимо в Minitab выбрать команду **Stat – DOE – Factorial – Contour/Surface Plots…**. В появившемся диалоговом окне необходимо установить флажки **Contour Plot** (Контурный график) и **Surface Plot** (График поверхности), после чего обязательно необходимо настроить выводимую на экран информацию, используя кнопки **Setup…**. При нажатии на кнопку ОК производится генерация выбранных типов графиков, пример которых показан на рисунок 3.9.

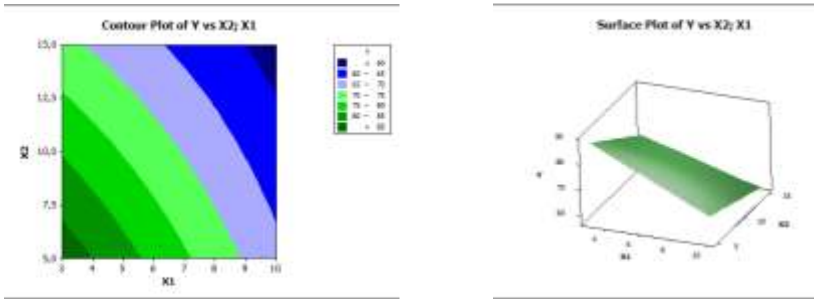


Рисунок 3.9 – Пример контурного графика и графика поверхности

3.1.1.1 Проверка адекватности модели без учета взаимодействия факторов

Прежде всего, необходимо рассчитать дисперсии функции отклика и количество повторений опытов. Для этого необходимо выполнить следующие шаги (рисунок 3.10):

– дать обозначение соседним столбцам справа от столбца результатов экспериментов Y имена D и R;

– выполнить пункт меню **Stat – DOE – Factorial – Pre-process Responses for Analyze Variability**.

– в диалоговом окне **Preprocess Responses for Analyze Variability** в группе кнопок **Standart deviations to use for analysis** выбрать **Compute for replicates in each response column**, в колонках таблицы **Replicates in individual response columns** указать: **Response = Y**, **Store Std Dev in = D**, **Store Counts in = R**.

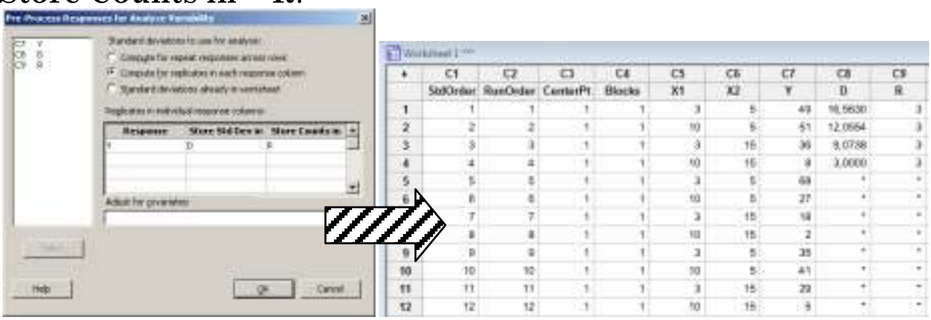


Рисунок 3.10 – Выполнение предварительного анализа функции отклика

Проверка адекватности модели осуществляется с использованием инструмента **Analyze Variability** (Анализ дисперсий), который позволяет определить оценки дисперсии воспроизводимости и дисперсии адекватности.

Анализ дисперсий выполняется в два шага. На первом шаге используется минимальные квадраты регрессии (least squares regression) для того, чтобы сгладить и преобразовать модель.

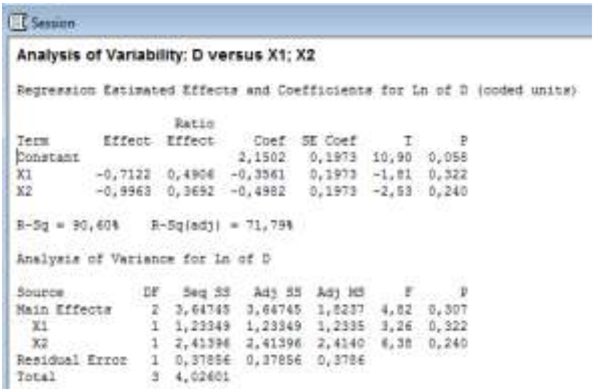
Как только будет идентифицирована подходящая преобразованная модель, необходимо выполнить второй шаг – анализ модели с использованием оценки максимальной вероятности (maximum likelihood) для получения окончательных коэффициентов модели.

Шаг 1. Анализ плана с использованием минимальных квадратов регрессии.

1. Выберите команду **Stat - DOE – Factorial - Analyze Variability**.
2. Укажите *D* в поле **Response (standard deviations)**.
3. Выберите в группе кнопок **Estimation method** элемент **Least squares regression**.
4. Нажмите кнопку **Terms**. Выберите в поле **Include terms in the model up through order** значение *1*.
5. Нажмите кнопку **Graphs**. Установите флажки **Normal**, **Half Normal** и **Pareto** в группе **Effects Plots**.
6. Нажмите **OK**.

Первый шаг к анализу адекватности позволяет определить, какие из факторов значительны в модели функции отклика. Так, таблица анализа дисперсии (рисунок 3.11) содержит в себе: последовательную сумму квадратов (Seq SS) и приведенную сумму квадратов (Adj SS). Поскольку значения в столбце P больше выбранного уровня значимости 0,05, анализ дисперсий говорит о том, что регрессионное уравнение не является адекватным.

Графики нормального, полунормального и Парето распределений позволяют визуально определить наиболее значимые факторы и сравнить относительную величину влияний факторов между собой. Анализ графиков, приведенных на рисунке 3.12, показал, что факторы в уравнении регрессии, не включающей в себя взаимодействие факторов, являются статистически незначимыми.



```
Session

Analysis of Variability: D versus X1; X2

Regression Estimated Effects and Coefficients for Ln of D (coded units)

                    Ratio
Term       Effect  Effect     Coef  SE Coef      T      P
Constant                    2,1502   0,1973  10,90  0,058
X1        -0,7122  0,4906  -0,3561   0,1973  -1,81  0,322
X2        -0,9963  0,3692  -0,4982   0,1973  -2,53  0,240

R-Sq = 90,60%    R-Sq(adj) = 71,79%

Analysis of Variance for Ln of D

Source          DF   Seq SS   Adj SS  Adj MS     F      P
Main Effects     2  3,64745  3,64745  1,8237  4,82  0,307
  X1             1  1,23349  1,23349  1,2335  3,26  0,322
  X2             1  2,41396  2,41396  2,4140  6,38  0,240
Residual Error   1  0,37856  0,37856  0,3786
Total            3  4,02601
```

Рисунок 3.11 – Окно Session

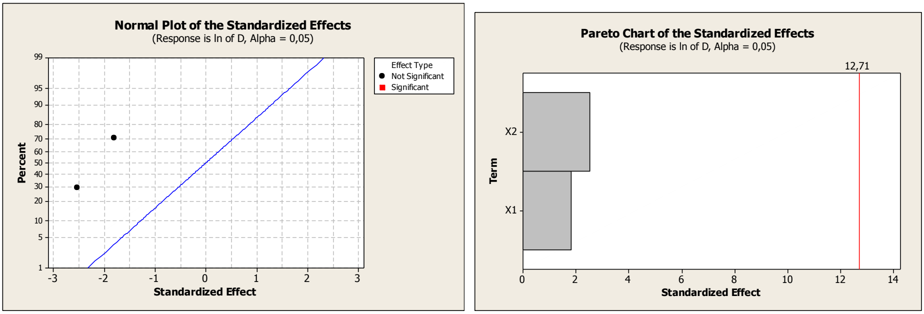


Рисунок 3.12 – Диаграммы нормального и Парето распределений

Шаг 2. Анализ уменьшенной модели с использованием оценки максимальной вероятности.

1. Выберите команду меню **Stat - DOE - Factorial - Analyze Variability**.
2. Укажите *D* в поле **Response (standard deviations)**.
3. Выберите в группе кнопок **Estimation method** элемент **Maximum likelihood**.
4. Нажмите кнопку **Terms**. Выберите в поле **Include terms in the model up through order** значение *1*.
5. Нажмите кнопку **Graphs**. Установите флажки **Normal**, **Half Normal** и **Pareto** в группе **Effects Plots**.
6. Нажмите **OK**.

Сначала исследуем данные в окне **Session** (рисунок 3.13).

```
Session

MLE Estimated Effects and Coefficients for Ln of D (coded units)

                   Ratio
Term      Effect  Effect      Coef  SE Coef      Z      P
Constant                    2,1881   0,2500   8,75  0,000
X1       -0,7122  0,4906   -0,3561   0,2500  -1,42  0,154
X2       -0,9963  0,3692   -0,4982   0,2500  -1,99  0,046


MLE Estimated Coefficients for Ln of D (uncoded units)

Term           Coef
Constant    3,84581
X1        -0,101745
X2       -0,0996343
```

Рисунок 3.13 – Окно Session

Поскольку после применения вышеуказанной процедуры приемлемой стала значимость только второго фактора X2 (P = 0,046), регрессионная модель для двух факторов без эффектов взаимодействия также не является адекватной.

3.1.1.2 Оптимизация целевой функции

Задача минимизации среднего времени ожидания клиентами своей очереди на обслуживание решается с использованием встроенного оптимизатора функции отклика. Фактически, задача сводится к поиску таких значений факторов X1 и X2, при которых среднее время обслуживания (Y) и дисперсии воспроизводимости (D) будут минимальными. Для этого необходимо выполнить следующие шаги:

1. Выберите команду **Stat** – **DOE** – **Factorial** – **Response Optimizer**.
2. В открывшемся диалоговом окне переведите функцию Y в колонку **Selected**.
3. Нажмите **Setup**. Заполните таблицу так, как показано на рисунке 3.14, где

- колонка **Goal** – это цель оптимизации функция может быть минимизирована (Minimize), максимизирована (Maximize) либо приведена к целевому значению (Target);
- колонки Lower, Target и Upper – минимальное, целевое и максимально допустимое значение функции отклика соответственно. Поскольку наша цель свести к минимуму время ожида-

ния клиентом своей очереди, установим целевое значение Y=0, а максимальное – 30, т.к. клиенты не готовы ожидать своей очереди более получаса.

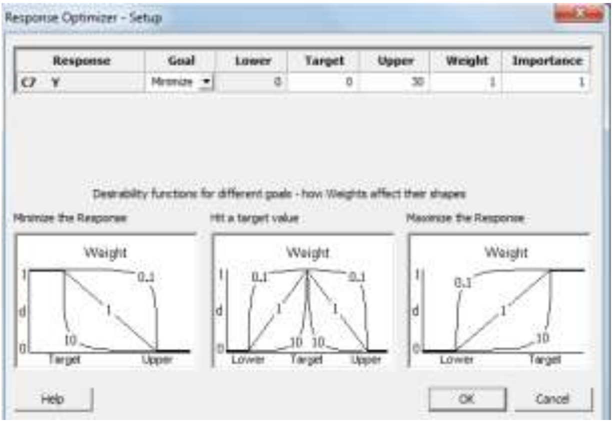
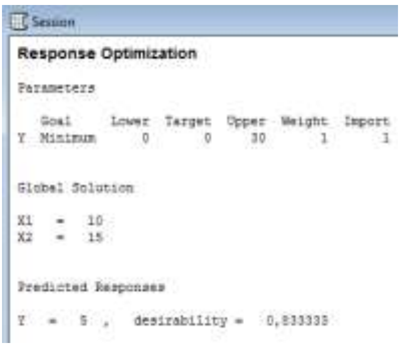


Рисунок 3.14 – Настройка окна оптимизации

Способ оптимизации в Minitab предполагает, что каждое из значений функции отклика преобразуется с использованием специальной функции, показывающей, насколько важно получить оптимальное значение целевой функции. Для того, чтобы акцентировать или деакцентировать значение показателя эффективности, при определении значений функции отклика можно выбрать её вес (weight): от 0,1 до 10.

На рисунке 3.15 представлены результаты оптимизации.



Session

Response Optimization

Parameters

	Goal	Lower	Target	Upper	Weight	Import
Y	Minimum	0	0	30	1	1

Global Solution

X1 = 10
X2 = 15

Predicted Responses

Y = 5 , desirability = 0,833333

Рисунок 3.15 – Оптимальное решение задачи

Таким образом, функция отклика принимает наименьшее значение, равное 5, при значениях факторов $X_1 = 10$ и $X_2 = 15$. Однако, функция, показывающая, насколько комбинация входных параметров удовлетворяет целевому значению функции отклика (desirability), равна 0,83. Это означает, что при оптимизации мы добились цели на 83%. График поиска минимума функции представлен на рисунке 3.16.

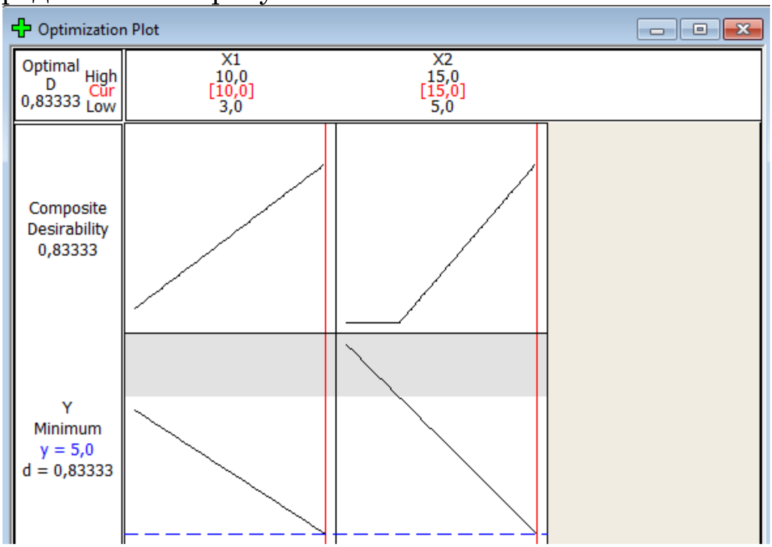


Рисунок 3.16 – Оптимизация функции отклика

3.1.2 Варианты для самостоятельного решения

Задача. В результате обработки статистических данных эксперты пришли к выводу, что на время обслуживания клиентов дилерско-сервисного центра КАМАЗ влияют техническая оснащённость автосервиса, квалификация обслуживающего персонала, наличие необходимых расходных материалов (в т.ч. запчастей) и специфика устраняемой неисправности транспортного средства (ТС). Таким образом, были выделены три важных фактора: доля высококвалифицированных рабочих от общего числа работников (X_1), доля работ, выполняемых с помощью высокотехнологичного оборудования (X_2) и обеспеченность склада ремзоны запасными частями (X_3). Необходимо определить, какая комбинация исходных факторов приведет к повышению показателя эффективности технического обслуживания и ремонта – временной интервал от обращения клиента до завершения ремонта (Y).

Исходные данные по вариантам представлены в таблице 3.4.

Таблица 3.4 – Данные для выполнения задания

Вариант 1					Вариант 2					Вариант 3				
N эксп.	X1	X2	X3	Y	N эксп.	X1	X2	X3	Y	N эксп.	X1	X2	X3	Y
1	0,5	0,7	0,25	3,90	1	0,5	0,7	0,25	0,90	1	0,5	0,7	0,25	13,11
2	0,8	0,7	0,25	10,78	2	0,8	0,7	0,25	1,77	2	0,8	0,7	0,25	10,79
3	0,5	0,95	0,25	0,54	3	0,5	0,95	0,25	12,10	3	0,5	0,95	0,25	16,65
4	0,8	0,95	0,25	6,56	4	0,8	0,95	0,25	8,84	4	0,8	0,95	0,25	2,33
5	0,5	0,7	0,75	1,66	5	0,5	0,7	0,75	18,41	5	0,5	0,7	0,75	8,61
6	0,8	0,7	0,75	13,95	6	0,8	0,7	0,75	16,02	6	0,8	0,7	0,75	15,76
7	0,5	0,95	0,75	4,75	7	0,5	0,95	0,75	7,08	7	0,5	0,95	0,75	3,44
8	0,8	0,95	0,75	13,64	8	0,8	0,95	0,75	4,66	8	0,8	0,95	0,75	6,50
9	0,5	0,7	0,25	9,91	9	0,5	0,7	0,25	9,26	9	0,5	0,7	0,25	9,79
10	0,8	0,7	0,25	12,18	10	0,8	0,7	0,25	0,74	10	0,8	0,7	0,25	7,94
11	0,5	0,95	0,25	9,13	11	0,5	0,95	0,25	14,09	11	0,5	0,95	0,25	14,01
12	0,8	0,95	0,25	2,72	12	0,8	0,95	0,25	2,22	12	0,8	0,95	0,25	15,82
13	0,5	0,7	0,75	11,47	13	0,5	0,7	0,75	4,76	13	0,5	0,7	0,75	12,16
14	0,8	0,7	0,75	0,57	14	0,8	0,7	0,75	20,87	14	0,8	0,7	0,75	12,40
15	0,5	0,95	0,75	9,68	15	0,5	0,95	0,75	17,72	15	0,5	0,95	0,75	20,67
16	0,8	0,95	0,75	2,59	16	0,8	0,95	0,75	4,69	16	0,8	0,95	0,75	16,86
17	0,5	0,7	0,25	4,28	17	0,5	0,7	0,25	3,62	17	0,5	0,7	0,25	2,05
18	0,8	0,7	0,25	1,14	18	0,8	0,7	0,25	13,94	18	0,8	0,7	0,25	7,29
19	0,5	0,95	0,25	16,95	19	0,5	0,95	0,25	2,28	19	0,5	0,95	0,25	1,03
20	0,8	0,95	0,25	2,69	20	0,8	0,95	0,25	19,11	20	0,8	0,95	0,25	16,60
21	0,5	0,7	0,75	14,09	21	0,5	0,7	0,75	5,11	21	0,5	0,7	0,75	10,69
22	0,8	0,7	0,75	14,37	22	0,8	0,7	0,75	2,52	22	0,8	0,7	0,75	5,73
23	0,5	0,95	0,75	17,95	23	0,5	0,95	0,75	10,56	23	0,5	0,95	0,75	8,41
24	0,8	0,95	0,75	22,73	24	0,8	0,95	0,75	10,65	24	0,8	0,95	0,75	4,55

Вариант 4					Вариант 5					Вариант 6				
N эксп.	X1	X2	X3	Y	N эксп.	X1	X2	X3	Y	N эксп.	X1	X2	X3	Y
1	0,5	0,7	0,25	10,15	1	0,5	0,7	0,25	3,53	1	0,5	0,7	0,25	9,70
2	0,8	0,7	0,25	11,52	2	0,8	0,7	0,25	9,00	2	0,8	0,7	0,25	10,95
3	0,5	0,95	0,25	8,21	3	0,5	0,95	0,25	11,95	3	0,5	0,95	0,25	16,18
4	0,8	0,95	0,25	18,18	4	0,8	0,95	0,25	3,89	4	0,8	0,95	0,25	16,85
5	0,5	0,7	0,75	5,60	5	0,5	0,7	0,75	3,37	5	0,5	0,7	0,75	1,99
6	0,8	0,7	0,75	3,73	6	0,8	0,7	0,75	16,29	6	0,8	0,7	0,75	11,63
7	0,5	0,95	0,75	12,78	7	0,5	0,95	0,75	20,96	7	0,5	0,95	0,75	17,78
8	0,8	0,95	0,75	20,12	8	0,8	0,95	0,75	1,37	8	0,8	0,95	0,75	5,96
9	0,5	0,7	0,25	8,70	9	0,5	0,7	0,25	13,08	9	0,5	0,7	0,25	2,41
10	0,8	0,7	0,25	1,53	10	0,8	0,7	0,25	14,78	10	0,8	0,7	0,25	14,31
11	0,5	0,95	0,25	15,44	11	0,5	0,95	0,25	6,24	11	0,5	0,95	0,25	5,21
12	0,8	0,95	0,25	18,33	12	0,8	0,95	0,25	0,60	12	0,8	0,95	0,25	6,97
13	0,5	0,7	0,75	16,36	13	0,5	0,7	0,75	10,61	13	0,5	0,7	0,75	17,01
14	0,8	0,7	0,75	5,73	14	0,8	0,7	0,75	15,72	14	0,8	0,7	0,75	16,72
15	0,5	0,95	0,75	8,77	15	0,5	0,95	0,75	1,61	15	0,5	0,95	0,75	4,17
16	0,8	0,95	0,75	5,30	16	0,8	0,95	0,75	2,01	16	0,8	0,95	0,75	13,00
17	0,5	0,7	0,25	5,03	17	0,5	0,7	0,25	10,90	17	0,5	0,7	0,25	5,08
18	0,8	0,7	0,25	11,77	18	0,8	0,7	0,25	16,63	18	0,8	0,7	0,25	1,29
19	0,5	0,95	0,25	16,41	19	0,5	0,95	0,25	1,67	19	0,5	0,95	0,25	8,64
20	0,8	0,95	0,25	16,12	20	0,8	0,95	0,25	9,69	20	0,8	0,95	0,25	4,19
21	0,5	0,7	0,75	4,01	21	0,5	0,7	0,75	15,56	21	0,5	0,7	0,75	17,74
22	0,8	0,7	0,75	20,61	22	0,8	0,7	0,75	3,29	22	0,8	0,7	0,75	13,84
23	0,5	0,95	0,75	3,73	23	0,5	0,95	0,75	6,49	23	0,5	0,95	0,75	17,07
24	0,8	0,95	0,75	14,26	24	0,8	0,95	0,75	5,64	24	0,8	0,95	0,75	17,76

Вариант 7					Вариант 8					Вариант 9				
N эксп.	X1	X2	X3	Y	N эксп.	X1	X2	X3	Y	N эксп.	X1	X2	X3	Y
1	0,5	0,7	0,25	7,30	1	0,5	0,7	0,25	11,69	1	0,5	0,7	0,25	10,44
2	0,8	0,7	0,25	7,64	2	0,8	0,7	0,25	9,50	2	0,8	0,7	0,25	3,38
3	0,5	0,95	0,25	9,25	3	0,5	0,95	0,25	16,54	3	0,5	0,95	0,25	13,87
4	0,8	0,95	0,25	15,04	4	0,8	0,95	0,25	0,57	4	0,8	0,95	0,25	12,75
5	0,5	0,7	0,75	16,97	5	0,5	0,7	0,75	1,99	5	0,5	0,7	0,75	7,72
6	0,8	0,7	0,75	16,06	6	0,8	0,7	0,75	12,43	6	0,8	0,7	0,75	14,68
7	0,5	0,95	0,75	17,45	7	0,5	0,95	0,75	16,71	7	0,5	0,95	0,75	10,12
8	0,8	0,95	0,75	16,56	8	0,8	0,95	0,75	18,44	8	0,8	0,95	0,75	9,26
9	0,5	0,7	0,25	12,75	9	0,5	0,7	0,25	2,26	9	0,5	0,7	0,25	6,15
10	0,8	0,7	0,25	9,97	10	0,8	0,7	0,25	7,27	10	0,8	0,7	0,25	10,68
11	0,5	0,95	0,25	9,55	11	0,5	0,95	0,25	0,43	11	0,5	0,95	0,25	9,57
12	0,8	0,95	0,25	15,23	12	0,8	0,95	0,25	3,58	12	0,8	0,95	0,25	14,21
13	0,5	0,7	0,75	8,68	13	0,5	0,7	0,75	10,06	13	0,5	0,7	0,75	11,85
14	0,8	0,7	0,75	10,76	14	0,8	0,7	0,75	17,97	14	0,8	0,7	0,75	15,62
15	0,5	0,95	0,75	5,55	15	0,5	0,95	0,75	4,14	15	0,5	0,95	0,75	13,60
16	0,8	0,95	0,75	1,04	16	0,8	0,95	0,75	21,75	16	0,8	0,95	0,75	2,09
17	0,5	0,7	0,25	11,32	17	0,5	0,7	0,25	8,16	17	0,5	0,7	0,25	3,56
18	0,8	0,7	0,25	1,11	18	0,8	0,7	0,25	6,65	18	0,8	0,7	0,25	10,56
19	0,5	0,95	0,25	5,26	19	0,5	0,95	0,25	1,75	19	0,5	0,95	0,25	16,11
20	0,8	0,95	0,25	6,34	20	0,8	0,95	0,25	16,32	20	0,8	0,95	0,25	14,24
21	0,5	0,7	0,75	14,98	21	0,5	0,7	0,75	5,21	21	0,5	0,7	0,75	10,16
22	0,8	0,7	0,75	7,23	22	0,8	0,7	0,75	13,55	22	0,8	0,7	0,75	7,42
23	0,5	0,95	0,75	12,16	23	0,5	0,95	0,75	17,87	23	0,5	0,95	0,75	0,29
24	0,8	0,95	0,75	15,07	24	0,8	0,95	0,75	3,07	24	0,8	0,95	0,75	9,73

Вариант 10					Вариант 11					Вариант 12				
N эксп.	X1	X2	X3	Y	N эксп.	X1	X2	X3	Y	N эксп.	X1	X2	X3	Y
1	0,5	0,7	0,25	10,47	1	0,5	0,7	0,25	2,61	1	0,5	0,7	0,25	6,58
2	0,8	0,7	0,25	15,65	2	0,8	0,7	0,25	9,58	2	0,8	0,7	0,25	10,68
3	0,5	0,95	0,25	7,52	3	0,5	0,95	0,25	14,60	3	0,5	0,95	0,25	11,88
4	0,8	0,95	0,25	7,45	4	0,8	0,95	0,25	18,37	4	0,8	0,95	0,25	12,87
5	0,5	0,7	0,75	16,50	5	0,5	0,7	0,75	14,43	5	0,5	0,7	0,75	18,26
6	0,8	0,7	0,75	2,11	6	0,8	0,7	0,75	19,22	6	0,8	0,7	0,75	13,34
7	0,5	0,95	0,75	14,32	7	0,5	0,95	0,75	15,78	7	0,5	0,95	0,75	20,90
8	0,8	0,95	0,75	13,90	8	0,8	0,95	0,75	2,28	8	0,8	0,95	0,75	6,83
9	0,5	0,7	0,25	14,17	9	0,5	0,7	0,25	9,69	9	0,5	0,7	0,25	8,43
10	0,8	0,7	0,25	12,52	10	0,8	0,7	0,25	14,19	10	0,8	0,7	0,25	2,07
11	0,5	0,95	0,25	15,95	11	0,5	0,95	0,25	3,23	11	0,5	0,95	0,25	16,77
12	0,8	0,95	0,25	14,78	12	0,8	0,95	0,25	5,67	12	0,8	0,95	0,25	4,43
13	0,5	0,7	0,75	18,09	13	0,5	0,7	0,75	8,66	13	0,5	0,7	0,75	1,14
14	0,8	0,7	0,75	0,87	14	0,8	0,7	0,75	5,09	14	0,8	0,7	0,75	12,25
15	0,5	0,95	0,75	14,89	15	0,5	0,95	0,75	18,03	15	0,5	0,95	0,75	14,34
16	0,8	0,95	0,75	21,68	16	0,8	0,95	0,75	7,27	16	0,8	0,95	0,75	19,09
17	0,5	0,7	0,25	0,18	17	0,5	0,7	0,25	2,12	17	0,5	0,7	0,25	10,58
18	0,8	0,7	0,25	5,23	18	0,8	0,7	0,25	2,81	18	0,8	0,7	0,25	9,84
19	0,5	0,95	0,25	13,45	19	0,5	0,95	0,25	8,69	19	0,5	0,95	0,25	15,39
20	0,8	0,95	0,25	1,16	20	0,8	0,95	0,25	5,96	20	0,8	0,95	0,25	14,84
21	0,5	0,7	0,75	4,83	21	0,5	0,7	0,75	18,11	21	0,5	0,7	0,75	3,13
22	0,8	0,7	0,75	14,37	22	0,8	0,7	0,75	20,32	22	0,8	0,7	0,75	16,10
23	0,5	0,95	0,75	19,84	23	0,5	0,95	0,75	21,42	23	0,5	0,95	0,75	21,35
24	0,8	0,95	0,75	13,47	24	0,8	0,95	0,75	14,66	24	0,8	0,95	0,75	15,60

Вариант 13					Вариант 14					Вариант 15				
N эксп.	X1	X2	X3	Y	N эксп.	X1	X2	X3	Y	N эксп.	X1	X2	X3	Y
1	0,5	0,7	0,25	11,79	1	0,5	0,7	0,25	9,99	1	0,5	0,7	0,25	6,41
2	0,8	0,7	0,25	3,82	2	0,8	0,7	0,25	2,46	2	0,8	0,7	0,25	15,25
3	0,5	0,95	0,25	1,54	3	0,5	0,95	0,25	7,22	3	0,5	0,95	0,25	2,37
4	0,8	0,95	0,25	12,52	4	0,8	0,95	0,25	7,61	4	0,8	0,95	0,25	16,10
5	0,5	0,7	0,75	11,11	5	0,5	0,7	0,75	10,42	5	0,5	0,7	0,75	14,47
6	0,8	0,7	0,75	7,72	6	0,8	0,7	0,75	6,21	6	0,8	0,7	0,75	18,16
7	0,5	0,95	0,75	21,59	7	0,5	0,95	0,75	15,40	7	0,5	0,95	0,75	8,69
8	0,8	0,95	0,75	10,59	8	0,8	0,95	0,75	12,80	8	0,8	0,95	0,75	23,37
9	0,5	0,7	0,25	12,12	9	0,5	0,7	0,25	3,41	9	0,5	0,7	0,25	5,51
10	0,8	0,7	0,25	10,64	10	0,8	0,7	0,25	14,34	10	0,8	0,7	0,25	1,77
11	0,5	0,95	0,25	14,72	11	0,5	0,95	0,25	10,95	11	0,5	0,95	0,25	1,87
12	0,8	0,95	0,25	1,45	12	0,8	0,95	0,25	7,41	12	0,8	0,95	0,25	10,34

Вариант 13					Вариант 14					Вариант 15				
N эксп.	X1	X2	X3	Y	N эксп.	X1	X2	X3	Y	N эксп.	X1	X2	X3	Y
13	0,5	0,7	0,75	4,95	13	0,5	0,7	0,75	6,51	13	0,5	0,7	0,75	0,56
14	0,8	0,7	0,75	11,85	14	0,8	0,7	0,75	9,94	14	0,8	0,7	0,75	13,94
15	0,5	0,95	0,75	11,62	15	0,5	0,95	0,75	7,33	15	0,5	0,95	0,75	9,03
16	0,8	0,95	0,75	5,65	16	0,8	0,95	0,75	21,89	16	0,8	0,95	0,75	22,76
17	0,5	0,7	0,25	1,75	17	0,5	0,7	0,25	11,26	17	0,5	0,7	0,25	11,32
18	0,8	0,7	0,25	3,36	18	0,8	0,7	0,25	3,09	18	0,8	0,7	0,25	0,53
19	0,5	0,95	0,25	3,40	19	0,5	0,95	0,25	13,09	19	0,5	0,95	0,25	13,39
20	0,8	0,95	0,25	5,90	20	0,8	0,95	0,25	18,78	20	0,8	0,95	0,25	19,94
21	0,5	0,7	0,75	17,22	21	0,5	0,7	0,75	10,89	21	0,5	0,7	0,75	5,69
22	0,8	0,7	0,75	14,22	22	0,8	0,7	0,75	20,62	22	0,8	0,7	0,75	22,35
23	0,5	0,95	0,75	1,20	23	0,5	0,95	0,75	5,70	23	0,5	0,95	0,75	10,32
24	0,8	0,95	0,75	10,38	24	0,8	0,95	0,75	21,56	24	0,8	0,95	0,75	9,85

Вариант 16					Вариант 17					Вариант 18				
N эксп.	X1	X2	X3	Y	N эксп.	X1	X2	X3	Y	N эксп.	X1	X2	X3	Y
1	0,5	0,7	0,25	6,87	1	0,5	0,7	0,25	3,25	1	0,5	0,7	0,25	8,24
2	0,8	0,7	0,25	16,24	2	0,8	0,7	0,25	13,27	2	0,8	0,7	0,25	12,92
3	0,5	0,95	0,25	2,27	3	0,5	0,95	0,25	15,82	3	0,5	0,95	0,25	14,08
4	0,8	0,95	0,25	7,92	4	0,8	0,95	0,25	11,03	4	0,8	0,95	0,25	3,68
5	0,5	0,7	0,75	9,25	5	0,5	0,7	0,75	12,38	5	0,5	0,7	0,75	17,08
6	0,8	0,7	0,75	13,71	6	0,8	0,7	0,75	4,53	6	0,8	0,7	0,75	14,42
7	0,5	0,95	0,75	12,00	7	0,5	0,95	0,75	21,38	7	0,5	0,95	0,75	9,71
8	0,8	0,95	0,75	23,58	8	0,8	0,95	0,75	14,21	8	0,8	0,95	0,75	1,31
9	0,5	0,7	0,25	6,09	9	0,5	0,7	0,25	11,35	9	0,5	0,7	0,25	1,21
10	0,8	0,7	0,25	17,32	10	0,8	0,7	0,25	12,63	10	0,8	0,7	0,25	11,41
11	0,5	0,95	0,25	9,41	11	0,5	0,95	0,25	16,06	11	0,5	0,95	0,25	12,09
12	0,8	0,95	0,25	19,37	12	0,8	0,95	0,25	6,51	12	0,8	0,95	0,25	2,32
13	0,5	0,7	0,75	2,16	13	0,5	0,7	0,75	8,60	13	0,5	0,7	0,75	5,93
14	0,8	0,7	0,75	6,03	14	0,8	0,7	0,75	15,21	14	0,8	0,7	0,75	14,10
15	0,5	0,95	0,75	16,35	15	0,5	0,95	0,75	13,94	15	0,5	0,95	0,75	15,62
16	0,8	0,95	0,75	7,49	16	0,8	0,95	0,75	16,26	16	0,8	0,95	0,75	1,07
17	0,5	0,7	0,25	8,11	17	0,5	0,7	0,25	7,42	17	0,5	0,7	0,25	6,00
18	0,8	0,7	0,25	10,88	18	0,8	0,7	0,25	1,62	18	0,8	0,7	0,25	15,46
19	0,5	0,95	0,25	12,14	19	0,5	0,95	0,25	9,56	19	0,5	0,95	0,25	14,95
20	0,8	0,95	0,25	11,77	20	0,8	0,95	0,25	4,66	20	0,8	0,95	0,25	7,86
21	0,5	0,7	0,75	18,08	21	0,5	0,7	0,75	15,72	21	0,5	0,7	0,75	11,06
22	0,8	0,7	0,75	9,27	22	0,8	0,7	0,75	4,82	22	0,8	0,7	0,75	11,24
23	0,5	0,95	0,75	3,59	23	0,5	0,95	0,75	17,34	23	0,5	0,95	0,75	13,34
24	0,8	0,95	0,75	14,16	24	0,8	0,95	0,75	22,69	24	0,8	0,95	0,75	8,00

Вариант 19					Вариант 20					Вариант 21				
N эксп.	X1	X2	X3	Y	N эксп.	X1	X2	X3	Y	N эксп.	X1	X2	X3	Y
1	0,5	0,7	0,25	11,16	1	0,5	0,7	0,25	0,17	1	0,5	0,7	0,25	13,91
2	0,8	0,7	0,25	2,95	2	0,8	0,7	0,25	9,05	2	0,8	0,7	0,25	8,46
3	0,5	0,95	0,25	3,49	3	0,5	0,95	0,25	0,46	3	0,5	0,95	0,25	7,67
4	0,8	0,95	0,25	9,53	4	0,8	0,95	0,25	11,61	4	0,8	0,95	0,25	2,92
5	0,5	0,7	0,75	13,93	5	0,5	0,7	0,75	15,77	5	0,5	0,7	0,75	10,25
6	0,8	0,7	0,75	21,02	6	0,8	0,7	0,75	14,05	6	0,8	0,7	0,75	0,25
7	0,5	0,95	0,75	17,11	7	0,5	0,95	0,75	13,57	7	0,5	0,95	0,75	4,74
8	0,8	0,95	0,75	14,50	8	0,8	0,95	0,75	10,08	8	0,8	0,95	0,75	6,72
9	0,5	0,7	0,25	0,78	9	0,5	0,7	0,25	9,85	9	0,5	0,7	0,25	1,46
10	0,8	0,7	0,25	6,05	10	0,8	0,7	0,25	4,73	10	0,8	0,7	0,25	5,49
11	0,5	0,95	0,25	1,76	11	0,5	0,95	0,25	2,27	11	0,5	0,95	0,25	12,11
12	0,8	0,95	0,25	12,17	12	0,8	0,95	0,25	15,83	12	0,8	0,95	0,25	12,54
13	0,5	0,7	0,75	17,26	13	0,5	0,7	0,75	18,17	13	0,5	0,7	0,75	4,23
14	0,8	0,7	0,75	1,36	14	0,8	0,7	0,75	5,08	14	0,8	0,7	0,75	21,15
15	0,5	0,95	0,75	6,64	15	0,5	0,95	0,75	21,63	15	0,5	0,95	0,75	13,59
16	0,8	0,95	0,75	23,68	16	0,8	0,95	0,75	12,60	16	0,8	0,95	0,75	9,73
17	0,5	0,7	0,25	8,45	17	0,5	0,7	0,25	8,23	17	0,5	0,7	0,25	12,65
18	0,8	0,7	0,25	11,15	18	0,8	0,7	0,25	15,11	18	0,8	0,7	0,25	2,30
19	0,5	0,95	0,25	0,07	19	0,5	0,95	0,25	5,35	19	0,5	0,95	0,25	2,82
20	0,8	0,95	0,25	9,96	20	0,8	0,95	0,25	9,25	20	0,8	0,95	0,25	12,18
21	0,5	0,7	0,75	12,94	21	0,5	0,7	0,75	8,98	21	0,5	0,7	0,75	11,08
22	0,8	0,7	0,75	16,83	22	0,8	0,7	0,75	2,23	22	0,8	0,7	0,75	15,90
23	0,5	0,95	0,75	0,45	23	0,5	0,95	0,75	4,01	23	0,5	0,95	0,75	6,33
24	0,8	0,95	0,75	17,00	24	0,8	0,95	0,75	4,78	24	0,8	0,95	0,75	7,70

3.2 *Планы для описания поверхности отклика*

Применение линейных планов совместно с методом градиентного поиска оптимума позволяет достичь окрестностей точки оптимума. Поиск оптимального решения в этой области требует перехода от линейных моделей к моделям более высокого порядка – как минимум к полиномам второй степени. Полиномы второго порядка содержат $N = (k+1)(k+2)/2$ эффектов:

$$\tilde{y} = b_o + \sum_{i=1}^{k} b_i x_i + \sum_{i,j=1}^{k} b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{k} b_{ii} x_i^2, \quad j > i \tag{3.19}$$

Построение такой модели требует применения плана, в котором каждая переменная принимает хотя бы три различных значения. Существуют различные подходы к построению планов второго порядка. Можно воспользоваться ПФЭ типа 3^k, но такие планы обладают большой избыточностью. Например, для трех переменных количество точек плана составит 27, а количество оцениваемых коэффициентов в функции отклика равно 10. В соответствии с идеей пошагового эксперимента планирование рационально осуществлять путем добавления специально подобранных точек к «ядру», образованному планированием для линейного приближения. Такие планы называют *композиционными* (последовательными), они позволяют использовать информацию, полученную в результате реализации линейного плана.

Композиционные планы используются обычно на заключительном этапе исследования, когда модель приходится подбирать последовательно, начиная с простейшего линейного уравнения, которое потом достраивается до полной квадратичной формулы. В этом случае композиционные планы дают выигрыш по числу опытов по сравнению с другими планами. Эти планы можно применять и при непосредственном построении функции отклика в виде полинома.

Решение подобных задач основано на применении *ортогональных* или *ротатабельных центральных композиционных планов* (ЦКП). Эти планы используют в качестве ядра полный факторный эксперимент или минимально возможные регулярные дробные реплики типа 2^{k-p}. В качестве дробной реплики применяют такую, в которой два любых парных взаимодействия по модулю не равны друг другу (для любых попарно различных индексов):

$$|x_i x_j| \neq |x_s x_z| \qquad (3.20)$$

Именно план ПФЭ или дробные реплики, удовлетворяющие указанному условию, служат ядром ЦКП. На практике широкое распространение получили два типа ЦКП, известные как планы Бокса и Хартли. Понятие «центральный» означает, что факторы принимают значения, симметричные относительно центра плана.

В планах Бокса к ядру, построенному на основе ПФЭ или ДФЭ, добавляется одна точка в центре плана с координатами (0, 0, ..., 0) и 2^k «звездных» точек с координатами ($\pm\gamma$, 0, ..., 0), ..., (0, 0, ..., $\pm\gamma$) [18].

Построенный таким образом план будет ЦКП второго порядка. Общее количество точек плана при использовании композиционного планирования составит:

$$N = N_0 + 2k + 1, \tag{3.21}$$

где N_0 – количество точек ядра плана.

В таблице 3.5 содержится описание соответствующих матриц планирования для ЦКП при k=2. Количество опытов для данного плана $N=2^2+2\cdot2+1=9$. Аналогично строятся ЦКП для произвольного числа факторов, при этом каждый фактор варьируется на пяти уровнях: –γ; – 1; 0; 1; γ.

Таблица 3.5 – Описание матриц планирования для ЦКП при k=2

Ядро плана		Дополнительные точки	
x_1	x_2	x_1	x_2
+1	+1	γ	0
–1	+1	-γ	0
+1	–1	0	γ
–1	–1	0	-γ
		0	0

В матрице плана второго порядка не у всех столбцов соблюдается условие симметрии и не все пары столбцов ортогональны. Например, рассмотрим ЦКП второго порядка для трех переменных, представленный в таблице 3.6 [2].

Для устранения асимметрии и нарушений ортогональности ЦКП Бокса необходимо провести преобразование квадратичных параметров и специальным образом выбрать величину плеча γ.

Чтобы добиться соблюдения свойства симметричности, следует перейти от $\tilde{o}_i^2$ к центрированным величинам $x_i^* = x_i^2 - x_{i\,cp}^2$ (сумма центрированных величин равна нулю). Среднее значение $x_{i\,cp}^2$, как видно из табл. 3.4, для всех $\tilde{o}_i^2$ одинаково и равно:

$$c = \frac{(N_0 + 2\gamma^2)}{N} \tag{3.22}$$

Таблица 3.6 – Пример ЦКП второго порядка для трех переменных

План	x_0	x_1	x_2	x_3	$x_1\ x_2$	$x_1\ x_3$	$x_2\ x_3$	x_1^2	x_2^2	x_3^2
ПФЭ	+1	–1	–1	–1	+1	+1	+1	+1	+1	+1
	+1	+1	–1	–1	–1	–1	+1	+1	+1	+1
	+1	–1	+1	–1	–1	+1	–1	+1	+1	+1
	+1	+1	+1	–1	+1	–1	–1	+1	+1	+1
	+1	–1	–1	+1	+1	–1	–1	+1	+1	+1
	+1	+1	–1	+1	–1	+1	–1	+1	+1	+1
	+1	–1	+1	+1	–1	–1	+1	+1	+1	+1
	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1
Звездный план	+1	$-\gamma$	0	0	0	0	0	γ^2	0	0
	+1	γ	0	0	0	0	0	γ^2	0	0
	+1	0	$-\gamma$	0	0	0	0	0	γ^2	0
	+1	0	γ	0	0	0	0	0	γ^2	0
	+1	0	0	$-\gamma$	0	0	0	0	0	γ^2
	+1	0	0	γ	0	0	0	0	0	γ^2
Центр плана	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Тогда исходную квадратичную модель можно преобразовать

$$\tilde{y} = \boldsymbol{\beta}_0 + \boldsymbol{\beta}_1 x_1 + \ldots + \boldsymbol{\beta}_1 x_k + \boldsymbol{\beta}_{12} x_1 x_2 + \ldots + \boldsymbol{\beta}_{k-1,\,k}\, x_{k-1} x_k + \boldsymbol{\beta}_{11}(x_1^2 -$$
$$- x^2_{1\ \text{ср}} + x^2_{1\ \text{ср}}) + \ldots + \boldsymbol{\beta}_{kk}(x_k^2 - x^2_{k\text{ср}} + x^2_{k\text{ср}}) = d_0 + \boldsymbol{\beta}_1 x_1 + \ldots + \boldsymbol{\beta}_1 x_k + \boldsymbol{\beta}_{12} x_1 x_2 +$$
$$\ldots + \boldsymbol{\beta}_{k-1,\,k}\, x_{k-1} x_k + \boldsymbol{\beta}_{11} x_1^* + \ldots + \boldsymbol{\beta}_{kk} x_k^*,$$

где $d_0 = \boldsymbol{\beta}_0 + \boldsymbol{\beta}_{11}\, x^2_{1\ \text{ср}} + \ldots + \boldsymbol{\beta}_{k-1,\,k}\, x^2_{k\ \text{ср}} = \boldsymbol{\beta}_0 + c(\boldsymbol{\beta}_{11} + \ldots + \boldsymbol{\beta}_{k-1,\,k})$.

Исходная и преобразованная модели эквивалентны, в них все коэффициенты, за исключением нулевого, совпадают.

После преобразования получим матрицу планирования, представленную в таблице 3.7.

Величина γ, которая придает матрице планирования (в том числе таблице 3.7) свойство ортогональности, определяется как:

$$\gamma = \left\{ \frac{\left[(N \cdot N_0)^{\frac{1}{2}} - N_0 \right]}{2} \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{3.23}$$

Таблица 3.7 – Преобразованный ЦКП второго порядка для трех переменных

План	x_0	x_1	x_2	x_3	$x_1 x_2$	$x_1 x_3$	$x_2 x_3$	x_1^*	x_2^*	x_3^*
ПФЭ	+	–	–	–	+	+	+	1–c	1–c	1–c
	+	+	–	–	–	–	+	1–c	1–c	1–c
	+	–	+	–	–	+	–	1–c	1–c	1–c
	+	+	+	–	+	–	–	1–c	1–c	1–c
	+	–	–	+	+	–	–	1–c	1–c	1–c
	+	+	–	+	–	+	–	1–c	1–c	1–c
	+	–	+	+	–	–	+	1–c	1–c	1–c
	+	+	+	+	+	+	+	1–c	1–c	1–c
Звездный план	+	–γ	0	0	0	0	0	γ²–c	–c	–c
	+	γ	0	0	0	0	0	γ²–c	–c	–c
	+	0	–γ	0	0	0	0	–c	γ²–c	–c
	+	0	γ	0	0	0	0	–c	γ²–c	–c
	+	0	0	–γ	0	0	0	–c	–c	γ²–c
	+	0	0	γ	0	0	0	–c	–c	γ²–c
Центр плана	+	0	0	0	0	0	0	–c	–c	–c

Значения γ, обеспечивающие ортогональность, например, для ядер 2^2, 2^3, 2^4, 2^{5-1}, составляют соответственно 1; 1,215; 1,414; 1,547.

Оценки коэффициентов регрессии определяются по модифицированной матрице независимых переменных (таблица 3.7):

$$\beta = \frac{\sum_{u=1}^{N} x_{iu}\bar{y}_u}{\sum_{u=1}^{N} x^2_{iu}}, \quad i = \overline{1,m} \qquad (3.24)$$

В приведенной формуле m равно числу сочетаний из k+2 по два и обозначает общее количество оцениваемых коэффициентов полинома, за исключением нулевого.

Оценка коэффициента:

$$d_0 = \sum_{u=1}^{N} \frac{\bar{y}_u}{N}, \qquad (3.25)$$

тогда:

$$\beta_0 = d_0 - c\sum_{j=1}^{k}\beta_{ij} \tag{3.26}$$

Оценки дисперсии коэффициентов:

$$\sigma^2(\beta_i) = \frac{\sum_{u=1}^{N} x_{iu}^2 \cdot \sigma^2(\bar{y}_u)}{\left[\sum_{u=1}^{N} x_{iu}^2\right]^2};$$

$$\sigma^2(d_0) = \frac{\sum_{u=1}^{N} \sigma^2(\bar{y}_u)}{N^2}; \tag{3.27}$$

$$\sigma^2(\beta_0) = \sigma^2(d_0) + c^2 \cdot \sum_{i=1}^{k} \sigma^2(\beta_{ii}),$$

где $\sigma^2(\bar{y}_u)$ – оценка дисперсии среднего значения функции отклика в u-й точке плана.

Оценка дисперсии функции отклика:

$$\sigma^2(y) = \sigma^2(\beta_0) + \sum_{1\le i\le k} x_i^2 \cdot \sigma^2(\beta_i) + \sum_{1\le i<j\le k} x_i^2 \cdot x_j^2 \cdot \sigma^2(\beta_{ij}) + \sum_{1\le i\le k}(x_i^2 - c)^2 \cdot \sigma^2(\beta_{ii}) \tag{3.28}$$

Оценки дисперсии коэффициентов являются различными, так как вычисляются по разным совокупностям точек плана. Оценка дисперсии функции отклика зависит не только от расстояния до заданной точки от центра, но и от ее положения в пространстве, т.е. ортогональный план второго порядка не являются ротатабельным [18].

Проверка однородности дисперсии воспроизводимости, адекватности модели, значимости коэффициентов полинома в случае применения ортогональных ЦКП второго порядка осуществляется по той же схеме, что и в случае ПФЭ.

3.2.1 Пример создания и анализа центрального композиционного плана в Minitab

Задача. Руководством дилерско-сервисного центра КАМАЗ установлена новая стратегическая цель: снизить суммарные среднегодовые издержки. Проведя оценку многих потенциально важных факторов, аналитики отдела планирования пришли к выводу, что целевой функционал (общие издержки) представляет собой сумму функций: издержки, связанные с хранением запасных частей, себестоимость обслуживания (заработная плата, амортизация оборудования), издержки, связанные с простоями рабочих постов, а также нереализованная прибыль вследствие потери клиентов из-за длительного времени обслуживания. Выделены следующие факторы, влияющие на целевую функцию: объем ежемесячного заказа запасных частей (X1), доля высококвалифицированных рабочих от общего числа работников (X2), доля работ, выполняемых с помощью высокотехнологичного оборудования (X3).

Определить, какая комбинация исходных факторов приведет к снижению стратегического показателя эффективности дилерско-сервисного центра КАМАЗ – суммарных издержек предприятия (Y).

Решение задачи. Для более точного решения данной задачи используем центральное композиционное планирование.

Необходимо создать факторный план, чтобы построить полную квадратичную модель с участием трёх факторов. Для того, чтобы составить центральный композиционный план третьего порядка, необходимо выбрать команду **Stat** – **DOE** – **Response Surface – Create Response Surface Design…**. В появившемся окне необходимо выбрать тип плана – **Type of design** (выберем **Central composite – Центральный композиционный**), количество факторов – **Number of factors** (выберем **3**).

Нажмите кнопку **Designs** (планы). В верхнем окне перечислены все планы экспериментов, отличающиеся количеством блоков в модели. Блоки используются в случае, когда число экспериментов очень велико, и существует большая вероятность ошибки регистрации данных, в таком случае коэффициенты для факторов считаются отдельно для каждого блока. Разделение на блоки может означать, к примеру, выбор разных поставщиков, партии товаров, различных операторов и т.д. Выберем для нашего эксперимента 1 блок.

В поле **Number of Center Points** определяется, сколько центральных точек (с координатами 0,0,0) добавить в план. Если план эксперимента разделен на блоки, в каждый блок по умолчанию вставляется по одной центральной точке; в обратном случае – столько, сколько указано в полях группы **Custom**.

В поле **Value of Alpha** указывается значения «звёздной» точки. Если стоит значение **Default**, значение звёздой точки рассчитывается автоматически. При выборе опции **Face Centered** звёздная точка приравнивается к 1, также существует возможность ввести значение звёздой точки вручную (опция **Custom**)

В поле **Number of replicates for corner points** (число повторов для угловых точек) выберите 3. Нажмите кнопку **OK**, чтобы вернуться в основное диалоговое окно. Обратите внимание, что остальные кнопки стали активными.

Нажмите кнопку **Factors** (факторы). В строке **Factor A** (фактор А) введите *X1* (объем ежемесячного заказа запасных частей) в столбце **Name** (имя), *75* в столбце **Low** (нижний) и *125* в столбце **High** (верхний).

В строке **Factor B** (фактор В) введите *X2* (доля высококвалифицированных рабочих от общего числа работников) в столбце **Name** (имя), *0,5* в столбце **Low** (нижний) и *0,8* в столбце **High** (верхний).

В строке **Factor C** (фактор С) введите *X3* (доля работ, выполняемых с помощью высокотехнологичного оборудования) в столбце **Name** (имя), *0,3* в столбце **Low** (нижний) и *0,7* в столбце **High** (верхний).

Выберите над таблицей с наименованиями факторов опцию **Axial Points** (Осевые точки). Это опция позволяет исключить отрицательные значения, которые могут получиться в случае расчёта отрицательной «звёздной точки» (-γ). В таком случае Minitab корректирует минимальное и максимальное значение факторов следующим образом:

$$\min{}^{*} = \frac{(\gamma - 1)\cdot \max + (\gamma + 1)\cdot \min}{2\cdot\gamma} \tag{3.29}$$

$$\max{}^{*} = \frac{(\gamma - 1)\cdot \min + (\gamma + 1)\cdot \max}{2\cdot\gamma} \tag{3.30}$$

Нажмите кнопку **OK**, чтобы вернуться в основное диалоговое окно. Нажмите кнопку **Options** (параметры). Проверьте, что флажок **Store design in worksheet** (сохранить план в рабочем листе) установлен, а флажок **Randomize runs** – напротив, отключен. Последовательность действий представлена на рисунке 3.17.

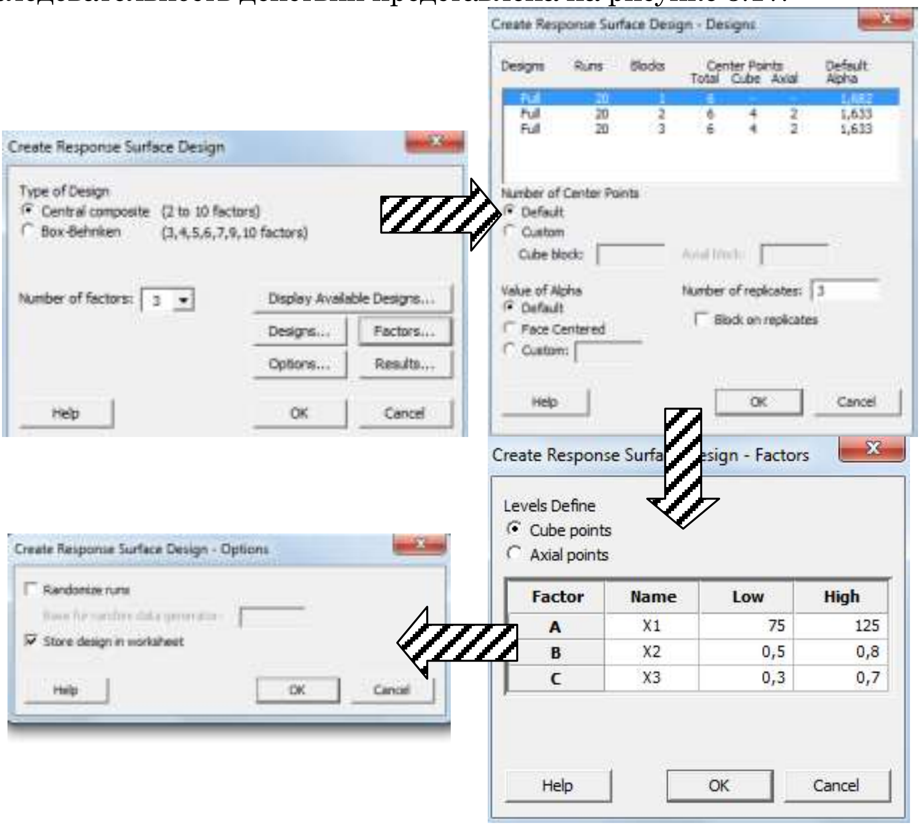


Рисунок 3.17 – Создание центрального композиционного плана

Когда создается план, программа Minitab сохраняет информацию о плане и факторах в столбцах рабочего листа. Откройте окно данных, чтобы познакомиться со структурой плана. Как представлено на рисунке 3.18, Minitab пересчитал крайние значения факторов: теперь минимальное значение, к примеру, фактора X_1 стало равно 57,955, а максимальное – 142,045. Значения же 75 и 125 в таком случае являются «звёздными» точками плана.

↓	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
	StdOrder	RunOrder	PtType	Blocks	X1	X2	X3
1	1	1	1	1	75,000	0,500000	0,300000
2	2	2	1	1	125,000	0,500000	0,300000
3	3	3	1	1	75,000	0,800000	0,300000
4	4	4	1	1	125,000	0,800000	0,300000
5	5	5	1	1	75,000	0,500000	0,700000
6	6	6	1	1	125,000	0,500000	0,700000
7	7	7	1	1	75,000	0,800000	0,700000
8	8	8	1	1	125,000	0,800000	0,700000
9	9	9	-1	1	57,955	0,650000	0,500000
10	10	10	-1	1	142,045	0,650000	0,500000
11	11	11	-1	1	100,000	0,397731	0,500000
12	12	12	-1	1	100,000	0,902269	0,500000
13	13	13	-1	1	100,000	0,650000	0,163641
14	14	14	-1	1	100,000	0,650000	0,836359
15	15	15	0	1	100,000	0,650000	0,500000
16	16	16	0	1	100,000	0,650000	0,500000
17	17	17	0	1	100,000	0,650000	0,500000
18	18	18	0	1	100,000	0,650000	0,500000
19	19	19	0	1	100,000	0,650000	0,500000
20	20	20	0	1	100,000	0,650000	0,500000
21	21	21	1	1	75,000	0,500000	0,300000
22	22	22	1	1	125,000	0,500000	0,300000
23	23	23	1	1	75,000	0,800000	0,300000
24	24	24	1	1	125,000	0,800000	0,300000

Рисунок 3.18 – Центральный композиционный план эксперимента, построенный в Minitab

После проведения эксперимента и сбора данных, полученные значения целевой функции можно ввести в рабочий лист, как это представлено на рисунке 3.19.

↓	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8
	StdOrder	RunOrder	PtType	Blocks	X1	X2	X3	Y
1	1	1	1	1	75,000	0,500000	0,300000	654897
2	2	2	1	1	125,000	0,500000	0,300000	165476
3	3	3	1	1	75,000	0,800000	0,300000	123489
4	4	4	1	1	125,000	0,800000	0,300000	987120
5	5	5	1	1	75,000	0,500000	0,700000	1653165
6	6	6	1	1	125,000	0,500000	0,700000	897965
7	7	7	1	1	75,000	0,800000	0,700000	465789
8	8	8	1	1	125,000	0,800000	0,700000	465138
9	9	9	-1	1	57,955	0,650000	0,500000	654890
10	10	10	-1	1	142,045	0,650000	0,500000	465319
11	11	11	-1	1	100,000	0,397731	0,500000	148965
12	12	12	-1	1	100,000	0,902269	0,500000	564698
13	13	13	-1	1	100,000	0,650000	0,163641	354897
14	14	14	-1	1	100,000	0,650000	0,836359	298735
15	15	15	0	1	100,000	0,650000	0,500000	254987
16	16	16	0	1	100,000	0,650000	0,500000	465134
17	17	17	0	1	100,000	0,650000	0,500000	986432
18	18	18	0	1	100,000	0,650000	0,500000	653100
19	19	19	0	1	100,000	0,650000	0,500000	986465
20	20	20	0	1	100,000	0,650000	0,500000	216150
21	21	21	1	1	75,000	0,500000	0,300000	684300
22	22	22	1	1	125,000	0,500000	0,300000	165432
23	23	23	1	1	75,000	0,800000	0,300000	266520
24	24	24	1	1	125,000	0,800000	0,300000	597530

Рисунок 3.19 – Результат выполнения экспериментов на имитационной модели

Когда факторный план создан и сохранен, программа Minitab делает активными команду **Analyze Response Surface Design** (анализ плана для описания поверхности отклика) в меню **DOE – Response Surface**. Теперь можно построить полную квадратическую модель функции отклика, т.е. найти коэффициенты при соответствующих комбинациях факторов. Выберите пункт меню **Stat – DOE – Response Surface – Analyze Response Surface Design ...**. В окне **Analyze Response Surface Design в** поле **Responses** (отклики) введите *Y*, в группе переключателей **Analyze data using** (Анализ данных основан на…) выберите *Uncoded units* (Незакодированные факторы). Столбец откликов необходимо указать прежде, чем открывать дополнительные диалоговые окна.

Нажмите кнопку **Terms** (условия). Проверьте, указаны в правой части все сочетания факторов, а также Full quadratic (Полноквадратичная) в группе переключателей **Include the following terms** (включить следующие факторы). Нажмите кнопку **ОК**.

Нажмите кнопку **Result** (графики). В группе переключателей **Display of results** (Вывод результатов на экран) установите флажок **Full table of fits and residuals in addition to the above** (полная таблица модельных значений и отклонения в придачу к предыдущему) (рисунок 3.20).

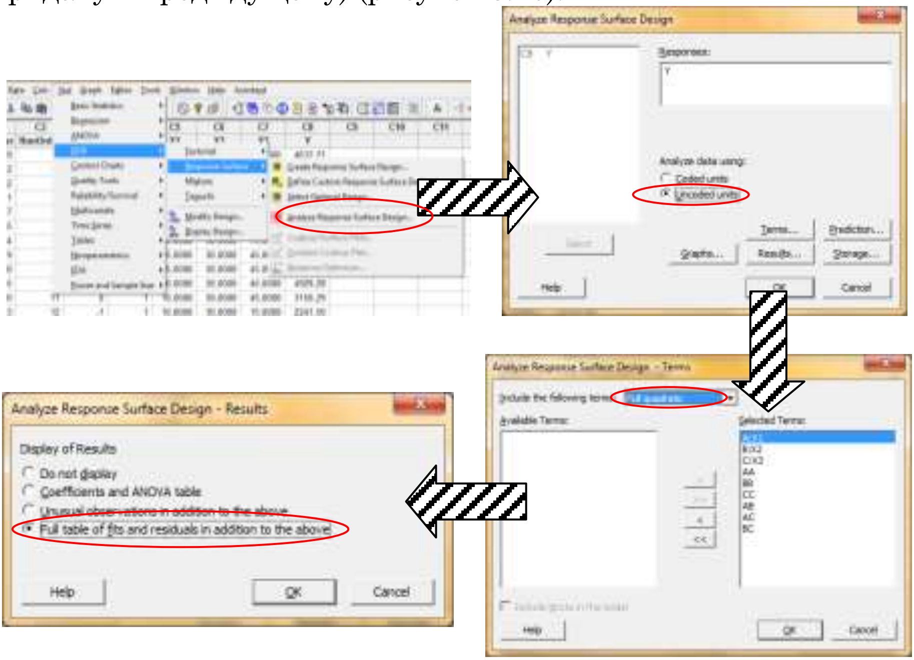


Рисунок 3.20 – Анализ плана экспериментов

Целью анализа данных является построение полной квадратической модели, включающей три основных влияния, взаимодействия этих факторов и их квадраты:

$$\tilde{y} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_{12} x_1 x_2 + \beta_{13} x_1 x_3 + \beta_{23} x_2 x_3 + \ldots$$
$$\beta_{11} x_1^2 + \beta_{22} x_2^2 + \beta_{33} x_3^2 + \varepsilon, \tag{3.31}$$

где β_i - коэффициент полинома, построенного для закодированных факторов, значения которого отображаются в столбце **Coef** таблицы **Estimated Regression Coefficients for Y** (рисунок 3.21).

Session

Response Surface Regression: Y versus X1; X2; X3

The analysis was done using uncoded units.

Estimated Regression Coefficients for Y

Term	Coef	SE Coef	T	P
Constant	-297378	1779993	-0,167	0,868
X1	-15876	18330	-0,866	0,391
X2	1126071	3138546	0,359	0,721
X3	5256739	2056221	2,557	0,014
X1*X1	11	70	0,163	0,871
X2*X2	-1007153	1940640	-0,519	0,606
X3*X3	-1860152	1091610	-1,704	0,095
X1*X2	23464	15628	1,501	0,140
X1*X3	-4954	11721	-0,423	0,674
X2*X3	-4282840	1953496	-2,192	0,033

S = 287104 PRESS = 6,064245E+12
R-Sq = 17,89% R-Sq(pred) = 0,00% R-Sq(adj) = 3,11%

Рисунок 3.21 – Определение коэффициентов β_i для полинома функции

Таким образом, функция отклика для реальных значений факторов имеет вид:

$$\tilde{y} = -297378 - 15876 X_1 + 1126071 X_2 + 5256739 X_3 + 11 X_1^2 - 1007153 X_2^2 - 1860152 X_3^2 +$$
$$+ 23464 X_1 X_2 - 4954 X_1 X_3 - 4282840 X_2 X_3 + \varepsilon,$$

где ε отклонения наблюдаемых значений от модельных.

Для определения значимости факторов воспользуемся значениями вероятности (P) в таблице Estimated Regression Coefficients for Y (рисунок 3.21). При α = 0,05 основные влияния X_1, X_2 являются статистически незначимыми, а фактор X_3 – статистически значимым (P = 0,014), взаимодействиями факторов можно пренебречь, за исключением значимого взаимодействия X_2X_3 (P = 0,033).

Согласно анализу дисперсий (**Analysis of Variance for Y**) (рисунок 3.22), в модели статистически значимой является линейная часть уравнения (Linear, P = 0,043), а квадратичная часть (Square, P = 0,377) и часть взаимовлияний факторов является статистически незначимой (Interaction, P = 0,078). Уравнение в целом также является статистически незначимым (Regression, P = 0,310). Однако, уравнение регрессии оценивается как адекватное, поскольку расчётное значение Lack-of-fit (неадекватность) больше, чем 0,05 (P = 0,531).

Session

Analysis of Variance for Y

Source	DF	Seq SS	Adj SS	Adj MS	F	P
Regression	9	8,97831E+11	8,97831E+11	99758979904	1,21	0,310
Linear	3	40448519922	7,20659E+11	2,40220E+11	2,91	0,043
X1	1	17442437725	61831994913	61831994913	0,75	0,391
X2	1	436863760	10610935944	10610935944	0,13	0,721
X3	1	22569218438	5,38731E+11	5,38731E+11	6,54	0,014
Square	3	2,60639E+11	2,60639E+11	86879500422	1,05	0,377
X1*X1	1	11099327909	2186017381	2186017381	0,03	0,871
X2*X2	1	10185123987	22201363128	22201363128	0,27	0,606
X3*X3	1	2,39354E+11	2,39354E+11	2,39354E+11	2,90	0,095
Interaction	3	5,96744E+11	5,96744E+11	1,98915E+11	2,41	0,078
X1*X2	1	1,85816E+11	1,85816E+11	1,85816E+11	2,25	0,140
X1*X3	1	14724625587	14724625587	14724625587	0,18	0,674
X2*X3	1	3,96203E+11	3,96203E+11	3,96203E+11	4,81	0,033
Residual Error	50	4,12144E+12	4,12144E+12	82428804693		
Lack-of-Fit	5	3,50629E+11	3,50629E+11	70125786842	0,84	0,531
Pure Error	45	3,77081E+12	3,77081E+12	83795806677		
Total	59	5,01927E+12				

Рисунок 3.22 – Результаты анализа дисперсий

На рисунке 3.23 приведены экспериментальные значения функции (Y), модельные значения (Fit), а также отклонения (Residual).

Session

Unusual Observations for Y

Obs	StdOrder	Y	Fit	SE Fit	Residual	St Resid
5	5	1653165,000	776277,802	135656,629	876887,198	3,47 R

Рисунок 3.23 – Таблица **Unusual Observations for Y**

3.2.1.1 Построение графиков поверхности функции отклика

Для того, чтобы построить графики поверхности функции отклика, необходимо в Minitab выбрать команду **Stat – DOE – Response Surface – Contour/Surface Plots...**. В появившемся диалоговом окне необходимо установить флажки Contour Plot (Контурный график) (рисунок 3.24) и Surface Plot (График поверхности) (рисунок 3.25).

Кроме того, обязательно необходимо настроить выводимую на экран информацию, используя кнопки **Setup...**. Внутри окна настройки укажите опцию **Generate plots for all pairs of factors – In separate panels of the same graph** (Создать графики всех пар факторов – В раздельных частях одного окна). При нажатии на кнопку OK производится генерация выбранных типов поверхностей и контуров, примеры которых показаны на рисунке 3.24 и рисунке 3.25.

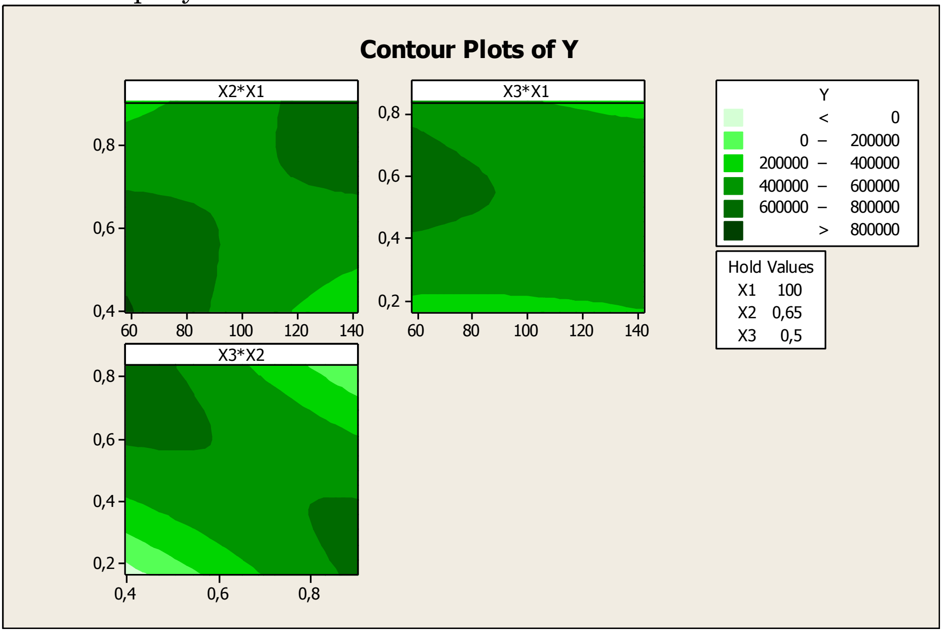


Рисунок 3.24 – Графики контуров функции отклика

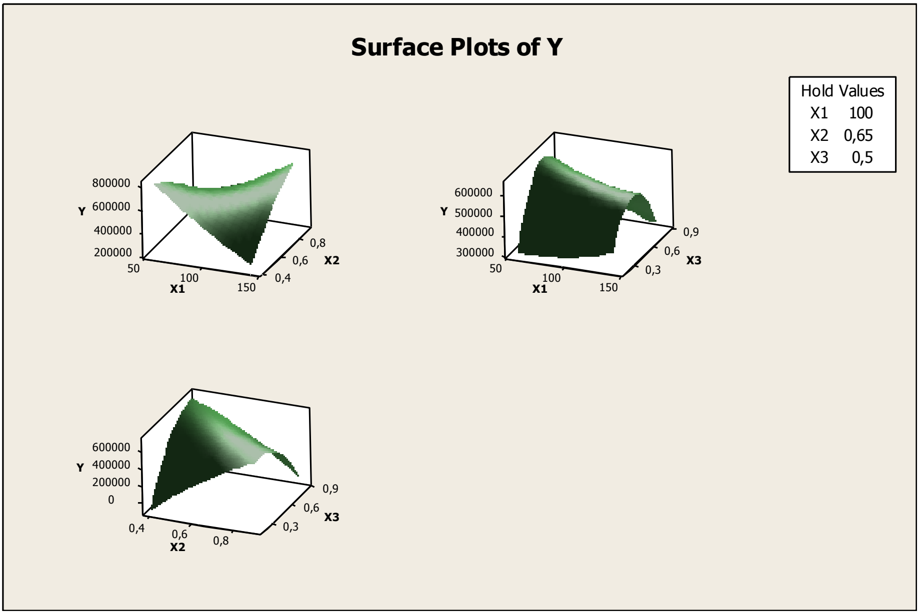


Рисунок 3.25 – Графики поверхностей функции отклика

3.2.1.2 Оптимизация функции отклика

Задача минимизации суммарных издержек предприятия, решается с использованием встроенного оптимизатора функции отклика. Фактически, задача сводится к поиску таких значений факторов X1, X2 и X3, при которых суммарные издержки (Y) будут минимальными.

Для этого выполним следующие шаги:

1. Выберите команду **Stat - DOE - Response Surface - Response Optimizer**.
2. В открывшемся диалоговом окне переведите функцию Y в колонку Selected.
3. Нажмите Setup. Заполните таблицу так, как показано на рисунке 3.26.
4. Нажмите ОК в каждом диалоговом окне.

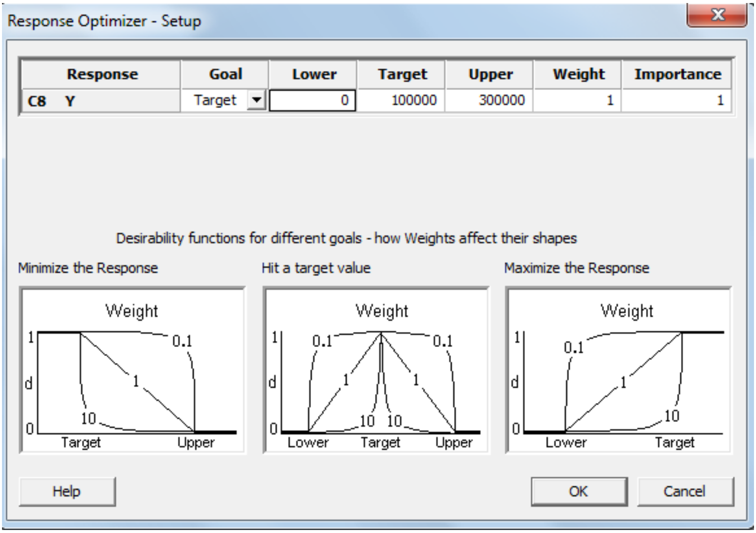


Рисунок 3.26 – Настройка окна оптимизации

На рисунке 3.27 представлены результаты оптимизации.

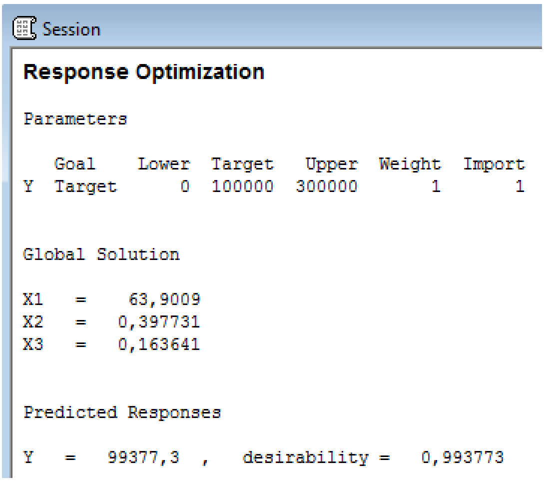


Рисунок 3.27 – Оптимальное решение задачи

Встроенный оптимизатор определил, что целевое значение функции отклика Y_{min} = 99377,3, при этом оптимальные значения факторов равны X_1^* = 63,9, X_2^* = 0,397, X_3^* = 0,163.

График поиска минимума функции представлен на рисунке 3.28.

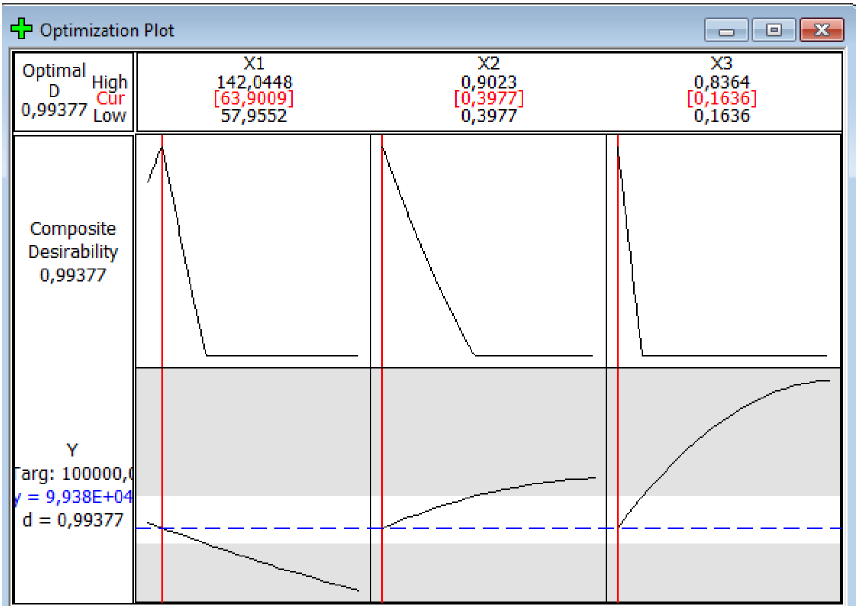


Рисунок 3.28 – Оптимизация функции отклика

3.2.2 Варианты для самостоятельного решения

Задача. Руководством дилерско-сервисного центра КАМАЗ установлена новая стратегическая цель: снизить суммарные среднегодовые издержки. Проведя оценку многих потенциально важных факторов, аналитики отдела планирования выделили следующие факторы, влияющие на целевую функцию: объем ежемесячного заказа запасных частей (X1), доля высококвалифицированных рабочих от общего числа работников (X2), доля работ, выполняемых с помощью высокотехнологичного оборудования (X3).

Определить, какая комбинация исходных факторов приведет к снижению стратегического показателя эффективности дилерско-сервисного центра КАМАЗ – суммарных издержек предприятия (Y). Исходные данные по вариантам представлены в таблице 3.8 (значения факторов закодированы, значения Y – в тыс.руб).

Таблица 3.8 – Данные для выполнения задания

Вариант 1						Вариант 2					
X1	X2	X3	Y1	Y2	Y3	X1	X2	X3	Y1	Y2	Y3
-1	-1	-1	361	397	279	-1	-1	-1	296	307	505
1	-1	-1	631	320	467	1	-1	-1	434	667	526
-1	1	-1	275	483	502	-1	1	-1	299	268	253
1	1	-1	529	313	594	1	1	-1	360	282	616
-1	-1	1	593	313	439	-1	-1	1	309	584	622
1	-1	1	345	657	727	1	-1	1	458	500	289
-1	1	1	499	457	747	-1	1	1	385	446	664
1	1	1	703	736	407	1	1	1	841	705	491
-1,68	0	0	372	378	205	-1,68	0	0	535	536	358
1,68	0	0	643	676	497	1,68	0	0	741	548	501
0	-1,68	0	74	514	306	0	-1,68	0	238	475	217
0	1,68	0	323	666	250	0	1,68	0	645	408	686
0	0	-1,68	289	393	548	0	0	-1,68	108	439	398
0	0	1,68	708	606	616	0	0	1,68	515	540	621
0	0	0	511	463	500	0	0	0	417	543	596

Вариант 3						Вариант 4					
X1	X2	X3	Y1	Y2	Y3	X1	X2	X3	Y1	Y2	Y3
-1	-1	-1	253	342	168	-1	-1	-1	405	50	368
1	-1	-1	251	194	244	1	-1	-1	636	488	338
-1	1	-1	270	392	362	-1	1	-1	510	374	517
1	1	-1	406	340	662	1	1	-1	521	506	666
-1	-1	1	316	308	404	-1	-1	1	410	108	303
1	-1	1	766	437	568	1	-1	1	399	537	815
-1	1	1	560	600	488	-1	1	1	342	663	471
1	1	1	711	560	502	1	1	1	661	709	752
-1,68	0	0	397	509	448	-1,68	0	0	129	587	352
1,68	0	0	298	255	749	1,68	0	0	531	331	563
0	-1,68	0	404	438	447	0	-1,68	0	275	209	228
0	1,68	0	338	602	232	0	1,68	0	751	698	302
0	0	-1,68	300	628	484	0	0	-1,68	352	181	175
0	0	1,68	694	516	653	0	0	1,68	408	468	701
0	0	0	396	427	331	0	0	0	268	329	427

Вариант 5						Вариант 6					
X1	X2	X3	Y1	Y2	Y3	X1	X2	X3	Y1	Y2	Y3
-1	-1	-1	229	169	380	-1	-1	-1	535	275	496
1	-1	-1	444	555	436	1	-1	-1	688	287	225
-1	1	-1	474	355	374	-1	1	-1	622	554	291
1	1	-1	633	415	219	1	1	-1	377	578	376
-1	-1	1	331	384	615	-1	-1	1	421	577	476
1	-1	1	450	348	546	1	-1	1	388	365	612
-1	1	1	345	383	620	-1	1	1	436	541	598
1	1	1	782	463	550	1	1	1	394	462	564
-1,68	0	0	335	300	118	-1,68	0	0	339	387	623
1,68	0	0	577	589	488	1,68	0	0	606	333	819
0	-1,68	0	127	318	608	0	-1,68	0	279	61	437
0	1,68	0	455	798	372	0	1,68	0	409	577	674
0	0	-1,68	362	113	587	0	0	-1,68	518	445	124
0	0	1,68	410	637	364	0	0	1,68	620	582	523
0	0	0	260	286	400	0	0	0	339	392	439

Вариант 7						Вариант 8					
X1	X2	X3	Y1	Y2	Y3	X1	X2	X3	Y1	Y2	Y3
-1	-1	-1	196	465	119	-1	-1	-1	267	322	324
1	-1	-1	516	396	468	1	-1	-1	533	605	308
-1	1	-1	536	535	588	-1	1	-1	494	595	590
1	1	-1	545	485	338	1	1	-1	580	617	667
-1	-1	1	344	468	480	-1	-1	1	426	239	663
1	-1	1	254	590	527	1	-1	1	807	787	569
-1	1	1	323	550	588	-1	1	1	580	392	577
1	1	1	415	442	642	1	1	1	516	707	399
-1,68	0	0	601	194	263	-1,68	0	0	285	83	592
1,68	0	0	285	698	478	1,68	0	0	491	633	592
0	-1,68	0	371	106	572	0	-1,68	0	512	445	487
0	1,68	0	657	420	318	0	1,68	0	304	680	643
0	0	-1,68	592	598	256	0	0	-1,68	609	438	302
0	0	1,68	278	744	546	0	0	1,68	540	490	371
0	0	0	443	694	349	0	0	0	668	627	279
Вариант 9						Вариант 10					
X1	X2	X3	Y1	Y2	Y3	X1	X2	X3	Y1	Y2	Y3
-1	-1	-1	288	496	91	-1	-1	-1	28	411	39
1	-1	-1	654	637	702	1	-1	-1	392	402	552
-1	1	-1	380	191	539	-1	1	-1	430	492	280
1	1	-1	458	755	717	1	1	-1	721	469	432
-1	-1	1	194	400	237	-1	-1	1	359	576	652
1	-1	1	493	800	375	1	-1	1	639	448	438
-1	1	1	457	672	776	-1	1	1	582	364	241
1	1	1	566	554	625	1	1	1	756	537	443
-1,68	0	0	373	447	489	-1,68	0	0	491	481	376
1,68	0	0	533	274	511	1,68	0	0	356	445	417
0	-1,68	0	572	192	189	0	-1,68	0	237	396	408
0	1,68	0	444	690	350	0	1,68	0	508	742	585
0	0	-1,68	281	505	214	0	0	-1,68	600	427	678
0	0	1,68	493	390	566	0	0	1,68	731	252	651
0	0	0	616	407	669	0	0	0	329	336	390
Вариант 11						Вариант 12					
X1	X2	X3	Y1	Y2	Y3	X1	X2	X3	Y1	Y2	Y3
-1	-1	-1	198	133	376	-1	-1	-1	317	97	363
1	-1	-1	511	430	189	1	-1	-1	223	621	613
-1	1	-1	442	349	639	-1	1	-1	631	604	377
1	1	-1	554	508	475	1	1	-1	348	314	414
-1	-1	1	324	505	440	-1	-1	1	654	361	345
1	-1	1	307	466	524	1	-1	1	432	413	476
-1	1	1	525	386	619	-1	1	1	617	388	213
1	1	1	579	511	617	1	1	1	395	514	684
-1,68	0	0	299	111	133	-1,68	0	0	393	312	244
1,68	0	0	363	387	638	1,68	0	0	627	668	563
0	-1,68	0	263	371	557	0	-1,68	0	349	260	155
0	1,68	0	693	299	657	0	1,68	0	350	430	638
0	0	-1,68	271	504	394	0	0	-1,68	574	589	662
0	0	1,68	793	517	724	0	0	1,68	601	826	728
0	0	0	483	244	261	0	0	0	254	556	619

Вариант 13						Вариант 14					
X1	X2	X3	Y1	Y2	Y3	X1	X2	X3	Y1	Y2	Y3
-1	-1	-1	164	516	425	-1	-1	-1	166	71	208
1	-1	-1	692	531	248	1	-1	-1	559	506	429
-1	1	-1	646	571	412	-1	1	-1	117	574	305
1	1	-1	608	353	403	1	1	-1	516	528	548
-1	-1	1	436	228	360	-1	-1	1	617	224	230
1	-1	1	374	301	681	1	-1	1	451	636	689
-1	1	1	559	451	701	-1	1	1	481	583	472
1	1	1	443	521	648	1	1	1	686	547	495
-1,68	0	0	137	367	194	-1,68	0	0	336	140	340
1,68	0	0	657	593	612	1,68	0	0	605	509	796
0	-1,68	0	231	208	351	0	-1,68	0	383	419	424
0	1,68	0	305	369	649	0	1,68	0	448	348	451
0	0	-1,68	620	457	241	0	0	-1,68	626	491	419
0	0	1,68	400	724	362	0	0	1,68	343	320	743
0	0	0	244	675	700	0	0	0	439	347	526
Вариант 15						Вариант 16					
X1	X2	X3	Y1	Y2	Y3	X1	X2	X3	Y1	Y2	Y3
-1	-1	-1	614	441	555	-1	-1	-1	272	549	186
1	-1	-1	475	525	427	1	-1	-1	288	291	369
-1	1	-1	460	306	210	-1	1	-1	218	301	258
1	1	-1	332	552	268	1	1	-1	355	653	761
-1	-1	1	371	557	669	-1	-1	1	159	279	481
1	-1	1	551	527	386	1	-1	1	574	315	485
-1	1	1	679	341	480	-1	1	1	360	434	760
1	1	1	648	643	601	1	1	1	508	449	500
-1,68	0	0	185	563	385	-1,68	0	0	449	381	638
1,68	0	0	489	341	725	1,68	0	0	281	499	673
0	-1,68	0	399	467	659	0	-1,68	0	359	160	454
0	1,68	0	469	380	322	0	1,68	0	630	402	566
0	0	-1,68	292	140	388	0	0	-1,68	315	514	550
0	0	1,68	665	857	667	0	0	1,68	780	466	560
0	0	0	258	679	219	0	0	0	207	458	261
Вариант 17						Вариант 18					
X1	X2	X3	Y1	Y2	Y3	X1	X2	X3	Y1	Y2	Y3
-1	-1	-1	404	87	94	-1	-1	-1	480	260	185
1	-1	-1	613	357	433	1	-1	-1	283	225	599
-1	1	-1	121	524	207	-1	1	-1	370	189	452
1	1	-1	841	462	609	1	1	-1	459	377	398
-1	-1	1	546	566	276	-1	-1	1	225	398	523
1	-1	1	689	380	681	1	-1	1	666	462	339
-1	1	1	311	681	689	-1	1	1	546	673	479
1	1	1	459	545	643	1	1	1	488	568	843
-1,68	0	0	303	314	202	-1,68	0	0	416	557	414
1,68	0	0	544	511	294	1,68	0	0	273	387	723
0	-1,68	0	290	324	648	0	-1,68	0	655	214	236
0	1,68	0	461	608	404	0	1,68	0	443	465	679
0	0	-1,68	508	149	331	0	0	-1,68	134	187	391
0	0	1,68	728	768	574	0	0	1,68	658	497	300
0	0	0	622	600	277	0	0	0	329	676	639

Вариант 19						Вариант 20					
X1	X2	X3	Y1	Y2	Y3	X1	X2	X3	Y1	Y2	Y3
-1	-1	-1	273	570	501	-1	-1	-1	211	122	47
1	-1	-1	132	617	543	1	-1	-1	656	546	69
-1	1	-1	490	232	514	-1	1	-1	411	376	370
1	1	-1	605	422	736	1	1	-1	331	604	560
-1	-1	1	538	317	332	-1	-1	1	307	677	386
1	-1	1	726	671	569	1	-1	1	189	437	286
-1	1	1	468	265	735	-1	1	1	273	472	701
1	1	1	646	532	836	1	1	1	490	702	682
-1,68	0	0	184	408	277	-1,68	0	0	191	613	229
1,68	0	0	756	753	663	1,68	0	0	459	307	338
0	-1,68	0	170	352	255	0	-1,68	0	569	408	389
0	1,68	0	592	720	631	0	1,68	0	719	600	618
0	0	-1,68	366	206	668	0	0	-1,68	261	435	468
0	0	1,68	382	693	642	0	0	1,68	586	441	299
0	0	0	229	200	640	0	0	0	524	673	525
Вариант 21						Вариант 22					
X1	X2	X3	Y1	Y2	Y3	X1	X2	X3	Y1	Y2	Y3
-1	-1	-1	300	69	475	-1	-1	-1	504	214	513
1	-1	-1	198	640	595	1	-1	-1	629	351	246
-1	1	-1	234	481	287	-1	1	-1	308	134	275
1	1	-1	328	426	654	1	1	-1	371	407	595
-1	-1	1	303	643	743	-1	-1	1	93	202	308
1	-1	1	565	677	567	1	-1	1	712	495	702
-1	1	1	700	662	250	-1	1	1	348	757	711
1	1	1	731	688	591	1	1	1	708	480	401
-1,68	0	0	518	547	457	-1,68	0	0	349	604	466
1,68	0	0	571	740	422	1,68	0	0	436	752	695
0	-1,68	0	177	389	96	0	-1,68	0	464	602	420
0	1,68	0	561	778	542	0	1,68	0	544	343	557
0	0	-1,68	593	518	318	0	0	-1,68	333	378	233
0	0	1,68	560	716	302	0	0	1,68	408	462	575
0	0	0	242	516	630	0	0	0	683	559	603
Вариант 23						Вариант 24					
X1	X2	X3	Y1	Y2	Y3	X1	X2	X3	Y1	Y2	Y3
-1	-1	-1	54	44	335	-1	-1	-1	154	171	264
1	-1	-1	524	541	715	1	-1	-1	596	278	607
-1	1	-1	528	234	347	-1	1	-1	216	278	402
1	1	-1	191	399	341	1	1	-1	690	417	389
-1	-1	1	166	573	306	-1	-1	1	568	186	251
1	-1	1	418	623	508	1	-1	1	362	658	629
-1	1	1	368	648	177	-1	1	1	460	707	340
1	1	1	365	659	741	1	1	1	618	634	738
-1,68	0	0	444	395	329	-1,68	0	0	521	255	219
1,68	0	0	262	507	336	1,68	0	0	672	693	437
0	-1,68	0	415	99	351	0	-1,68	0	238	332	59
0	1,68	0	215	449	622	0	1,68	0	283	597	720
0	0	-1,68	314	186	404	0	0	-1,68	452	248	355
0	0	1,68	630	456	372	0	0	1,68	599	546	755
0	0	0	236	300	294	0	0	0	695	364	626

3.3 *Экспериментальные планы для смесей*

В экспериментальных планах для смесей независимые факторы являются пропорциями различных компонентов определенной смеси.

Например, если необходимо оптимизировать вкус фруктового пунша, состоящего из соков 5 фруктов, то сумма долей всех соков в каждой смеси должна быть равна 100%. Такая задача оптимизации смесей часто встречается в производстве пищи, очистке или производстве химикатов или лекарств [19].

Общим способом, с помощью которого могут быть представлены пропорции в смеси, являются треугольные диаграммы (диаграммы на треугольнике). Например, предположим, что у вас есть смесь, которая состоит из трех компонент A, B, C. Любая смесь трех компонент может быть представлена точкой в системе координат на треугольнике, определяемой тремя переменными.

Например, возьмем 6 смесей из трех компонент, как это представлено в таблице 3.9.

Таблица 3.9 – План эксперимента для смеси

A	B	C
1	0	0
0	1	0
0	0	1
0.5	0.5	0
0.5	0	0.5
0	0.5	0.5

Сумма для каждой смеси равна 1.0, так что значения компонент в каждой смеси могут интерпретироваться как пропорции. При нанесении этих данных на график в виде обычной 3-х мерной диаграммы рассеяния, становится очевидно, что точки образуют треугольник в трехмерном пространстве. Только точки внутри треугольника, где сумма значений компонент равна 1, представляют настоящие смеси. Следовательно, можно просто наносить данные только в треугольник (в данном случае двумерный), чтобы изображать значения компонент (пропорции) для каждой смеси (рисунок 3.29).

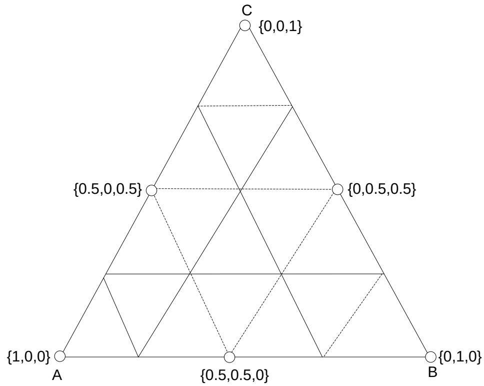


Рисунок 3.29 – Тернарная диаграмма

Чтобы определить координаты точки в треугольном графике, необходимо соединить прямой линией точку с вершинами треугольника (рисунок 3.30).

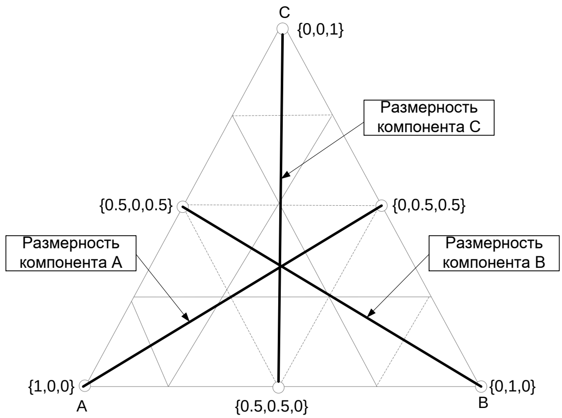


Рисунок 3.30 – Размерности компонент в тернарной диаграмме

Вершина, соответствующая конкретному фактору, представляет собой чистую смесь, то есть состоящую только из данной компоненты. Так что координата соответствующей вершине компоненты равна *1* (или *100%* или любой другой величине в зависимости от шкалирования) и равна *0* (нулю) для всех других компонент. На стороне, противоположной соответствующей вершине, значение данной компоненты равно *0* (нулю), а для других компонент *0.5* (или *50%* и так далее) [2].

Тернарные поверхности и контуры

Можно теперь добавить четвертое измерение и нанести на график значения зависимой переменной или функцию (поверхность) для каждой точки внутри треугольника. Заметим, что поверхность отклика может быть представлена либо в трехмерном пространстве, где предсказываемый отклик наносится как расстояние поверхности от плоскости треугольника, либо представлена в виде контурной диаграммы, где контуры равной высоты наносятся в двумерном треугольнике.

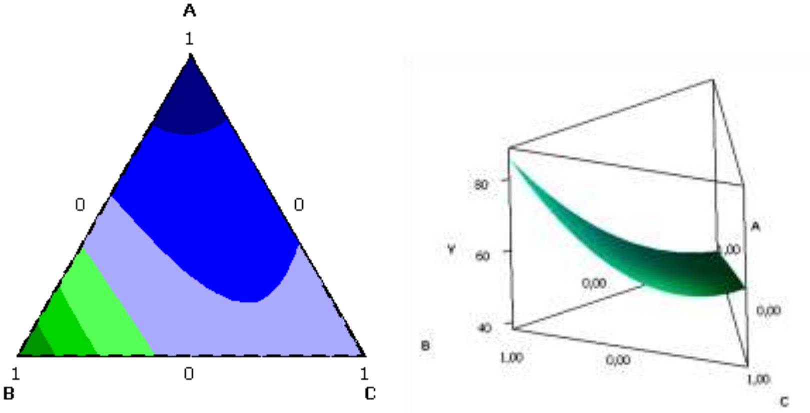


Рисунок 3.31 – Тернарные поверхности и контуры

Здесь следует упомянуть о том, что категоризованные графики позволяют построить категоризованные диаграммы, заданные на треугольнике. Они полезны, поскольку позволяют подгонять зависимую переменную поверхностью отклика для различных уровней четвертой компоненты [20].

Канонический вид полиномов для смесей

Подгонка поверхности отклика к данным по смесям, в принципе, осуществляется таким же образом, как и подгонка поверхности для данных, полученных, например, с помощью центральных композиционных планов. Однако имеется проблема, состоящая в том, что в данных о смесях накладывается ограничение, состоящее в том, что сумма значений компонент должна быть постоянной.

Рассмотрим простой пример с двумя факторами A и B. Желательно подогнать простую линейную модель:

$$\boldsymbol{y = b_0 + b_A \cdot x_A + b_B \cdot x_B}$$

Здесь y обозначает зависимую переменную, b_A и b_B обозначают коэффициенты регрессии, x_A и x_B – значения факторов. Предположим, что x_A и x_B должны в сумме давать 1. Тогда можно умножить b_0 на $x_A + x_B$ $((x_A + x_B)=1)$:

$$\boldsymbol{y = (b_0 \cdot x_A + b_0 \cdot x_B) + b_A \cdot x_A + b_B \cdot x_B} \qquad (3.32)$$

Преобразовав (3.32):

$$\boldsymbol{y = b'_A \cdot x_A + b'_B \cdot x_B,} \qquad (3.33)$$

где $b'_A = b_0 + b_A$ и $b'_B = b_0 + b_B$.

Таким образом, оценивание в этой модели сводится к подгонке модели множественной регрессии без свободного члена.

Общие модели для смесей

Квадратичную и кубическую модели также можно упростить (как показано выше на примере простой линейной модели), что приводит к четырем стандартным моделям, обычно применяемым для подгонки смесей. Здесь приведены формулы для трех переменных для таких моделей.

Линейная модель:

$$\boldsymbol{y = b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3} \qquad (3.34)$$

Квадратичная модель:

$$\boldsymbol{y = b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + b_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + b_{13} \cdot x_1 \cdot x_3 + b_{23} \cdot x_2 \cdot x_3} \qquad (3.35)$$

Специальная кубическая модель:

$$\boldsymbol{y = b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + b_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + b_{13} \cdot x_1 \cdot x_3 + b_{23} \cdot x_2 \cdot x_3 + b_{123} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3} \qquad (3.36)$$

Полная кубическая модель:

$$\boldsymbol{y = b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + b_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + b_{13} \cdot x_1 \cdot x_3 + b_{23} \cdot x_2 \cdot x_3 + d_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot (x_1 - x_2) + d_{13} \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot (x_1 - x_3) + d_{23} \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot (x_2 - x_3) + b_{123} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3} \qquad (3.37)$$

Примечание:

Коэффициенты d_{ij} также являются параметрами модели.

3.3.1 Стандартные планы экспериментов для смесей

Обычно используются два типа стандартных планов экспериментов для смесей. Оба они оценивают поверхности отклика в вершинах треугольника и в центрах сторон. Иногда в эти планы добавляют дополнительные внутренние точки [21].

3.3.1.1 Симплекс-вершинные планы

При этом размещении точек плана m+1 для каждого фактора или компоненты в модели тестируются равноразмещенные точки: xi = 0, 1/m, 2/m, ..., 1   i = 1,2,...,q, а также все их комбинации. Получающийся план называется simplex-lattice – симплекс-вершинным планом (симплекс – ограниченная область, содержащаяся в треугольнике).

Например, симплекс-вершинный план с {q=3, m=2} включает точки, представленные в таблице 3.10, а симплекс-вершинный план с {*q=3,m=3*} – точки, представленные в таблице 3.11.

Таблица 3.10 – Симплекс-вершинный план при m=2

A	B	C
1	0	0
0	1	0
0	0	1
0.5	0.5	0
0.5	0	0.5
0	0.5	0.5

Таблица 3.11 – Симплекс-вершинный план при m=3

A	B	C
1	0	0
0	1	0
0	0	1
1/3	2/3	0
1/3	0	2/3
0	1/3	2/3
2/3	1/3	0
2/3	0	1/3
0	2/3	1/3
1/3	1/3	1/3

3.3.1.2 Симплекс-центроидные планы

Альтернативное размещение факторов является так называемым симплекс-центроидным планом. При его применении точки плана соответствуют всем перестановкам чистых смесей (например, 1 0 0; 0 1 0; 0 0 1), перестановкам бинарных смесей (S S 0; S 0 S; 0 S S), перестановкам с тремя одинаковыми по пропорции компонентами и так далее. Например, для трех факторов симплекс-центроидный план состоит из точек (вершины, центры сторон, центр треугольника) (таблица 3.12).

Таблица 3.12 – Симплекс-центроидный план для трёх факторов

A	B	C
1	0	0
0	1	0
0	0	1
1/2	1/2	0
1/2	0	1/2
0	1/2	1/2
1/3	1/3	1/3

Подобные планы иногда дополняются внутренними точками. Например, для трех факторов можно добавить следующие внутренние точки (таблица 3.13).

Таблица 3.13 – Добавление внутренних точек

A	B	C
2/3	1/6	1/6
1/6	2/3	1/6
1/6	1/6	2/3

Если нанести их на диаграмму рассеяния в треугольных координатах, можно увидеть, как ровно эти планы заполняют экспериментальную область, определенную на треугольнике.

3.3.1.3 Планы для смесей с ограничениями

Когда в эксперименте со многими факторами имеются ограничения на значения факторов и их комбинаций, не ясно, как подойти к решению такой задачи. Разумный подход состоит в том, чтобы включить в эксперимент экстремальные вершинные точки (extreme vertices) и центроиды ограниченной области, которые обычно образуют хорошее ее покрытие.

Обычный способ задания большинства ограничений состоит в применении линейных неравенств:

$$\boldsymbol{A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_qx_q + A_0 \geq 0} \qquad (3.38)$$

Здесь A_0, .., A_q являются параметрами линейного ограничения, наложенного на q факторов, а x_1,.., x_q обозначают значения факторов (уровни) для q факторов. Эта общая формула может описать даже очень сложные ограничения. Например, предположим, что в двухфакторном эксперименте первый фактор всегда должен быть установлен на уровнях по крайней мере в два раза больших второго фактора, что может быть записано в виде:

$$x_1 \geq 2 \cdot x_2 \qquad (3.39)$$

Далее ограничение (3.39) может быть переписано как:

$$x_1 - 2 \cdot x_2 \geq 0 \qquad (3.40)$$

Другое ограничение $2 \cdot x_1 / x_2 \geq 1$ может быть записано в виде:

$$2 \cdot x_1 - x_2 \geq 0 \qquad (3.41)$$

Например, в трехкомпонентной смеси фруктовых соков ограничения сверху и снизу на компоненты таковы:

$$\begin{gathered} 40\% \leq \text{Дыня } (x_1) \leq 80\% \\ 10\% \leq \text{Ананас } (x_2) \leq 50\% \\ 10\% \leq \text{Апельсин } (x_3) \leq 30\% \end{gathered} \qquad (3.42)$$

Эти ограничения могут быть переписаны как линейные ограничения в виде:

Дыня:	$x1-40 \geq 0$
	$-x1+80 \geq 0$
Ананас:	$x2-10 \geq 0$
	$-x2+50 \geq 0$
Апельсин:	$x3-10 \geq 0$
	$-x3+30 \geq 0$

Таким образом, проблема нахождения точек плана для экспериментов на смесях с компонентами, на которые наложено несколько ограничений сверху и снизу, является частным случаем общих линейных ограничений.

Для специального случая смесей с ограничениями часто используются алгоритмы типа XVERT для того, чтобы найти вершинные и центроидные точки для ограниченных областей (внутри треугольника, тетраэдра). Пипелем и Сни был предложен общий алгоритм для нахождения вершин и центров тяжести (центроидов) и приложимый как к смесям, так и к другим подобным экспериментам.

А именно, программа рассматривает ограничения, записанные с помощью линейных неравенств, как это было описано выше, одно за другим. Каждое ограничение описывает прямую (или гиперплоскость), проходящую в экспериментальной области. Для каждого последовательного ограничения программа оценивает, пересекает ли она текущую ограниченную область. Если это так, вычисляются новые вершины, определяющие новую экспериментальную область, подправленную с учетом последнего ограничения. Затем проверяется, не становятся ли предыдущие ограничения излишними, то есть определяют прямую или плоскость, целиком находящуюся вне рассматриваемой области. После того как обработаны все ограничения, программа вычисляет центроиды для сторон ограниченной области (упорядоченные по запросу пользователя). В двумерном (двухфакторном) случае можно легко воссоздать этот процесс, просто проводя прямые через экспериментальную область (по одной на ограничение), так что получится искомая область (рисунок 3.32).

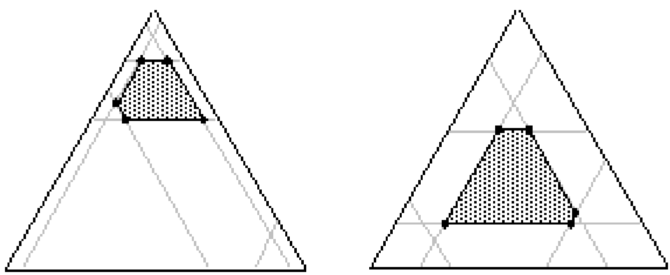


Рисунок 3.32 – Планы с экстремальными вершинными точками

Как только вершины и центры вычислены, вы сталкиваетесь с проблемой выбора подмножества точек для эксперимента. Если каждый его опыт дорогостоящ, то не разумно использовать все вершины и центроиды. В частности, если имеется много факторов и ограничений, то число центроидов может расти очень быстро [21].

3.3.2 Анализ экспериментов для смесей

Анализ экспериментов для смесей похож на множественную регрессию со свободным членом, равным нулю. Как объяснялось ранее, основное ограничение: сумма всех компонент должна быть постоянной – может быть реализовано в подгонке модели множественной регрессии, не включающей свободный член.

Специальные модели, рассматриваемые обычно, описаны ранее. Суммируя это описание, отметим, что к значениям зависимой переменной подгоняется поверхность отклика возрастающей сложности, начиная с линейной модели, затем продолжая квадратичной моделью, специальной кубической моделью и, наконец, завершая полной кубической моделью. В таблице 3.14 представлена зависимость числа параметров каждой модели от количества компонент.

Таблица 3.14 – Анализ экспериментов для смесей

	Модель (Степень полинома)			
Кол-во вычислений	**Линейная**	**Квадратическая**	**Специальная кубическая**	**Полная кубическая**
2	2	3	-	-
3	3	6	7	10
4	4	10	14	20
5	5	15	25	35
6	6	21	41	56
7	7	28	63	84
8	8	36	92	120

3.3.3 Пример создания и анализа экспериментальных планов для смесей в пакете Minitab

Задача. Для получения сплава используются четыре металла I, II, III и IV с разными температурами плавления. Перед исследователями стоит задача получения сплава с максимальной температурой плавления. Необходимо составить и проанализировать следующие планы экспериментов:

1. Симплекс-центроидный план;
2. Симплекс-вершинный план;
3. План для смеси с ограничениями с учётом следующих ограничений:

Металл I	не более 80%
Металл II	не менее 30%
Металл II	от 40% до 60%
Металл IV	не более 70%

3.3.3.1 Симплекс-центроидный план

Чтобы составить симплекс-центроидный план эксперимента в Minitab, необходимо выбрать команду **Stat** – **DOE** – **Mixture – Create Mixture Design…**. В меню **Type of design** выбрать **Simplex-centroid**, установить количество факторов – (**Number of factors**) – **4**.

Нажмите кнопку **Designs** (планы). В верхней части окна убедитесь в том, что флажок **Augment the design with axial point** (Дополнить план осевыми точками) активен (рисунок 3.33). Данная опция добавляет в план эксперименты в точках, располагающихся между вершинами плана. Так, симплекс-центроидный план для трех факторов дополняется точками (2/3, 1/6, 1/6), (1/6, 2/3, 1/6), (1/6, 1/6, 2/3), для четырех факторов – (5/8, 1/8, 1/8, 1/8), (1/8, 5/8, 1/8, 1/8), (1/8, 1/8, 5/8, 1/8), (1/8, 1/8, 1/8, 5/8) и т.д. Таким образом, общее число экспериментов для трёх факторов при включенной данной опции равно 10 (три вершины, центр треугольника, середины трех ребер и три дополнительные точки), а для четырех – 19 (четыре вершины, центр тетраэдра, середины шести ребер, центры четырех граней и четыре дополнительные точки).

В поле **Number of replicates for the whole design** (число повторов для всего плана) оставьте значение 1. Нажмите кнопку **OK**, чтобы вернуться в основное диалоговое окно. Обратите внимание, что остальные кнопки стали активными.

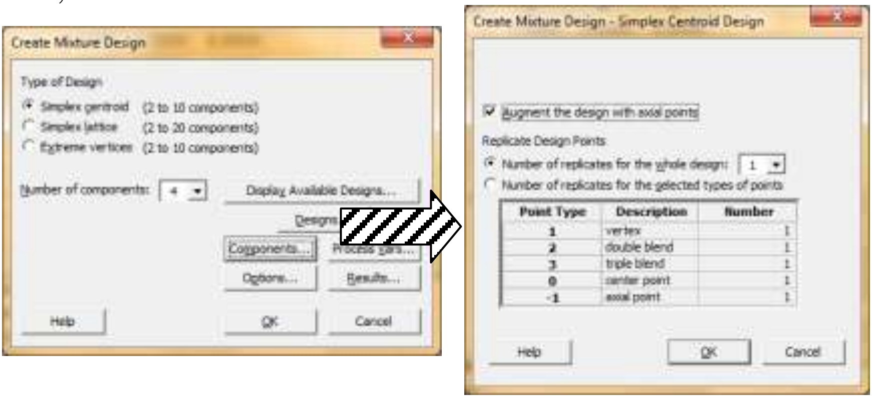


Рисунок 3.33 – Создание плана эксперимента для смеси

Нажмите кнопку **Components** (компоненты). Для того, чтобы задать общую сумму факторов, необходимо ввести её в поле **Single total** (Однозначная сумма). В строке **Component A** (компонент A) введите *Metal1* в столбце **Name** (имя), в строке **Component B** (компонент B) введите *Metal2* в столбце **Name** (имя), в строке **Component C** (компонент C) введите *Metal3* в столбце **Name** (имя), в строке **Component D** (компонент D) введите *Metal4* в столбце **Name** (имя) (рисунок 3.34).

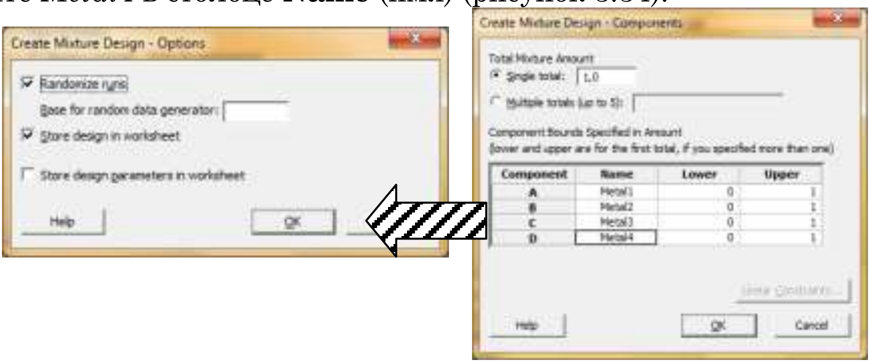


Рисунок 3.34 – Ввод наименований компонентов смеси

Кнопка **Process Vars** вызывает диалоговое окно **Process Variables** (технологические параметры), которые позволяют добавить в план дополнительные факторы, не являющиеся компонентами смеси. В нашей задаче мы не будем учитывать такие параметры.

Нажмите кнопку **Options** (параметры). Проверьте, что флажки **Randomize runs** и **Store design in worksheet** (сохранить план в рабочем листе) установлены. Нажмите кнопку OK в каждом диалоговом окне

Когда создается план, программа Minitab сохраняет информацию о плане и факторах в столбцах рабочего листа. Откройте окно данных, чтобы познакомиться со структурой плана (рисунок 3.35).

↓	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8
	StdOrder	RunOrder	PtType	Blocks	Metal1	Metal2	Metal3	Metal4
1	11	1	3	1	0,33333	0,33333	0,33333	0,00000
2	5	2	2	1	0,50000	0,50000	0,00000	0,00000
3	16	3	-1	1	0,62500	0,12500	0,12500	0,12500
4	14	4	3	1	0,00000	0,33333	0,33333	0,33333
5	13	5	3	1	0,33333	0,00000	0,33333	0,33333
6	15	6	0	1	0,25000	0,25000	0,25000	0,25000
7	7	7	2	1	0,50000	0,00000	0,00000	0,50000
8	1	8	1	1	1,00000	0,00000	0,00000	0,00000
9	17	9	-1	1	0,12500	0,62500	0,12500	0,12500
10	12	10	3	1	0,33333	0,33333	0,00000	0,33333
11	3	11	1	1	0,00000	0,00000	1,00000	0,00000
12	18	12	-1	1	0,12500	0,12500	0,62500	0,12500
13	9	13	2	1	0,00000	0,50000	0,00000	0,50000
14	8	14	2	1	0,00000	0,50000	0,50000	0,00000
15	10	15	2	1	0,00000	0,00000	0,50000	0,50000
16	19	16	-1	1	0,12500	0,12500	0,12500	0,62500
17	2	17	1	1	0,00000	1,00000	0,00000	0,00000
18	6	18	2	1	0,50000	0,00000	0,50000	0,00000
19	4	19	1	1	0,00000	0,00000	0,00000	1,00000

Рисунок 3.35 – План эксперимента для смеси

В окне данных Minitab щелкните ячейку с именем столбца **C9** и введите *Y*. Введите значения, полученные в ходе наблюдений в столбце *Y* в окне данных с учётом того, что результаты наблюдений в данном листе рандомизированы (рисунок 3.36).

+	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9
	StdOrder	RunOrder	PtType	Blocks	Metal1	Metal2	Metal3	Metal4	Y
1	11	1	3	1	0,33333	0,33333	0,33333	0,00000	2397
2	5	2	2	1	0,50000	0,50000	0,00000	0,00000	1942
3	16	3	-1	1	0,62500	0,12500	0,12500	0,12500	1826
4	14	4	3	1	0,00000	0,33333	0,33333	0,33333	2111
5	13	5	3	1	0,33333	0,00000	0,33333	0,33333	1718
6	15	6	0	1	0,25000	0,25000	0,25000	0,25000	1983
7	7	7	2	1	0,50000	0,00000	0,00000	0,50000	2096
8	1	8	1	1	1,00000	0,00000	0,00000	0,00000	1954
9	17	9	-1	1	0,12500	0,62500	0,12500	0,12500	1779
10	12	10	3	1	0,33333	0,33333	0,00000	0,33333	1516
11	3	11	1	1	0,00000	0,00000	1,00000	0,00000	2380
12	18	12	-1	1	0,12500	0,12500	0,62500	0,12500	2003
13	9	13	2	1	0,00000	0,50000	0,00000	0,50000	2362
14	8	14	2	1	0,00000	0,50000	0,50000	0,00000	2086
15	10	15	2	1	0,00000	0,00000	0,50000	0,50000	1659
16	19	16	-1	1	0,12500	0,12500	0,12500	0,62500	1785
17	2	17	1	1	0,00000	1,00000	0,00000	0,00000	1621
18	6	18	2	1	0,50000	0,00000	0,50000	0,00000	2418
19	4	19	1	1	0,00000	0,00000	0,00000	1,00000	1732

Рисунок 3.36 – Результат выполнения экспериментов

Итак, мы создали план и собрали данные отклика. Теперь мы можем подобрать модель данных и построить графики, чтобы оценить влияние факторов. Результаты подбора модели и построения графиков помогут определить, какие факторы являются важными для определения оптимальной температуры плавления.

Для построения тернарной диаграммы выберите пункт меню **Stat – DOE – Mixture – Simplex Design Plot**. В появившемся диалоговом окне выберите опцию **Select four component for a matrix plot** (выберите четыре компонента для матрицы тернарных диаграмм) и нажмите ОК. В появившемся окне будут отображены четыре тернарные диаграммы – сочетания смесей по три компонента (рисунок 3.37).

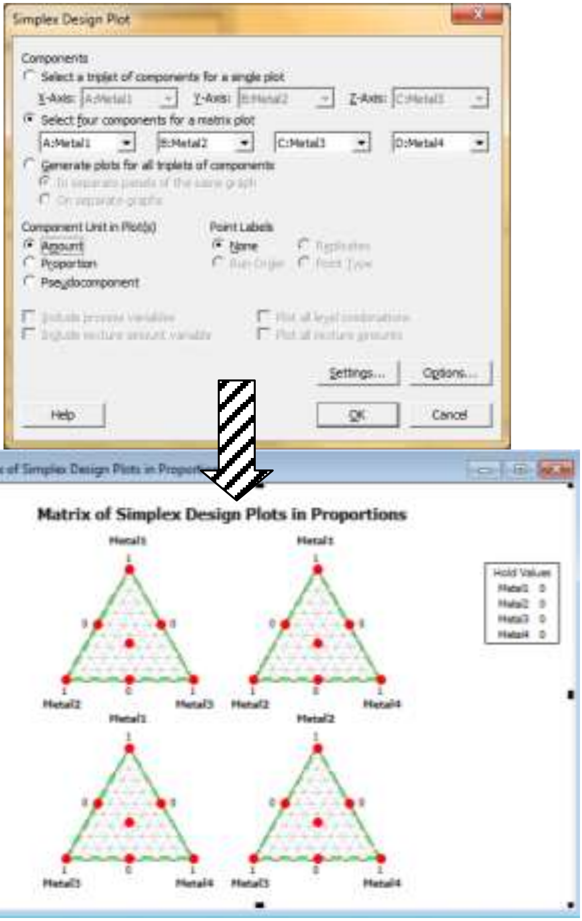


Рисунок 3.37 – Составление матрицы тернарных диаграмм

Для того, чтобы проанализировать получившийся план, выберите пункт меню **Stat – DOE – Mixture – Analyze Mixture Design…**. В поле **Responses** (отклики) введите *Y*. Нажмите кнопку ОК для того, чтобы получить коэффициенты модели функции отклика.

На рисунке 3.38 представлены результаты анализа построенного симплекс-центроидного плана.

Session

Regression for Mixtures: Y versus Metal1; Metal2; Metal3; Metal4

Estimated Regression Coefficients for Y (component proportions)

Term	Coef	SE Coef	T	P	VIF
Metal1	1992	237,0	*	*	2,405
Metal2	1629	237,0	*	*	2,405
Metal3	2366	237,0	*	*	2,405
Metal4	1811	237,0	*	*	2,405
Metal1*Metal2	-171	1039,8	-0,16	0,873	1,860
Metal1*Metal3	772	1039,8	0,74	0,477	1,860
Metal1*Metal4	-529	1039,8	-0,51	0,623	1,860
Metal2*Metal3	658	1039,8	0,63	0,543	1,860
Metal2*Metal4	1749	1039,8	1,68	0,127	1,860
Metal3*Metal4	-2024	1039,8	-1,95	0,083	1,860

S = 245,645   PRESS = 4723758
R-Sq = 61,00%   R-Sq(pred) = 0,00%   R-Sq(adj) = 21,99%

Analysis of Variance for Y (component proportions)

Source	DF	Seq SS	Adj SS	Adj MS	F	P
Regression	9	849262	849262	94362	1,56	0,258
Linear	3	341190	319436	106479	1,76	0,224
Quadratic	6	508072	508072	84679	1,40	0,311
Metal1*Metal2	1	6342	1641	1641	0,03	0,873
Metal1*Metal3	1	44657	33265	33265	0,55	0,477
Metal1*Metal4	1	14172	15613	15613	0,26	0,623
Metal2*Metal3	1	25100	24128	24128	0,40	0,543
Metal2*Metal4	1	189189	170635	170635	2,83	0,127
Metal3*Metal4	1	228612	228612	228612	3,79	0,083
Residual Error	9	543071	543071	60341		

Рисунок 3.38 – Результаты анализа симплекс-центроидного плана

Коэффициенты перед одиночными факторами (значения столбца Coef) указывают на то, что компоненты *Metal3* (β = 2366) и *Metal1* (β = 1992) имеют наибольшее влияние на температуру плавления общей смеси.

Положительные коэффициенты перед двойным сочетанием факторов *Metal1*Metal3* (β = 772), *Metal2*Metal3* (β = 658), *Metal2*Metal4* (β = 1749) указывают на то, что металлы в указанных парах действуют совместно и дополняют друг друга. Это значит, что смеси с такими сочетаниями факторов более предпочтительны, чем их компоненты, взятые по отдельности.

Отрицательные коэффициенты указывают на то, что металлы в таком сочетании друг с другом несовместимы.

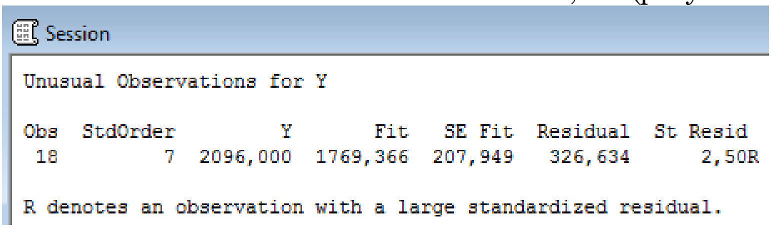
Из всех сочетаний компонентов единственно статистически значимым на уровне *α=0,1* является сочетание *Metal3*Metal4* (P = 0,083)

В целом, построенная модель:

$$\tilde{y} = 1992 \cdot Metal1 + 1692 \cdot Metal2 + 2366 \cdot Metal3 + 1811 \cdot Metal4 -$$
$$-171 \cdot Metal1 \cdot Metal2 + 772 \cdot Metal1 \cdot Metal3 - 529 \cdot Metal1 \cdot Metal4 +$$
$$+658 \cdot Metal2 \cdot Metal3 + 1749 \cdot Metal2 \cdot Metal4 - 2024 \cdot Metal3 \cdot Metal4$$

адекватна экспериментальным данным на 61% (*R-Sq* = 61,00%).

Кроме того, в ходе предварительного анализа был выявлен аномальный уровень ряда U(7) = 2096, который при построении модели был заменён на сглаженное значение 1769,366 (рисунок 3.39).


```
Session

Unusual Observations for Y

Obs  StdOrder         Y       Fit   SE Fit  Residual  St Resid
 18         7  2096,000  1769,366  207,949   326,634     2,50R

R denotes an observation with a large standardized residual.
```

Рисунок 3.39 – Выявление аномальных значений ряда Y

Задача максимизации температуры плавления сплава решается с использованием встроенного оптимизатора функции отклика. Фактически, задача сводится к поиску такого сочетания компонентов, при котором температуры плавления смеси будет максимальна. Для этого выполним следующие шаги:

1. Выберите команду **Stat - DOE - Mixture - Response Optimizer**.
2. В открывшемся диалоговом окне переведите функцию Y в колонку **Selected**.
3. Нажмите **Setup**. Заполните таблицу так, как показано на рисунке 3.40.
4. Нажмите **OK** в каждом диалоговом окне.

Результаты оптимизации представлены на рисунке 3.41.

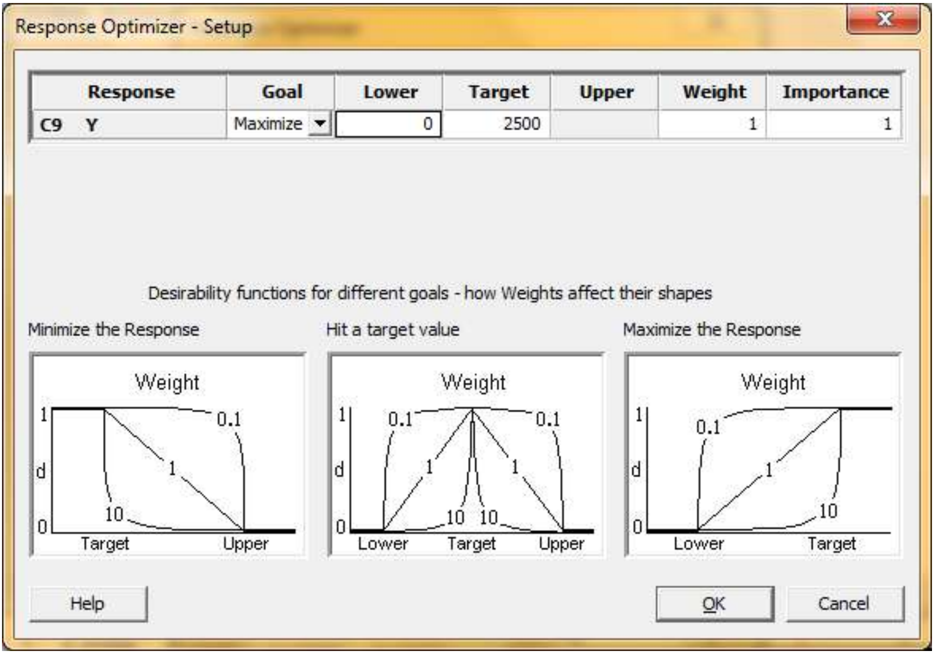
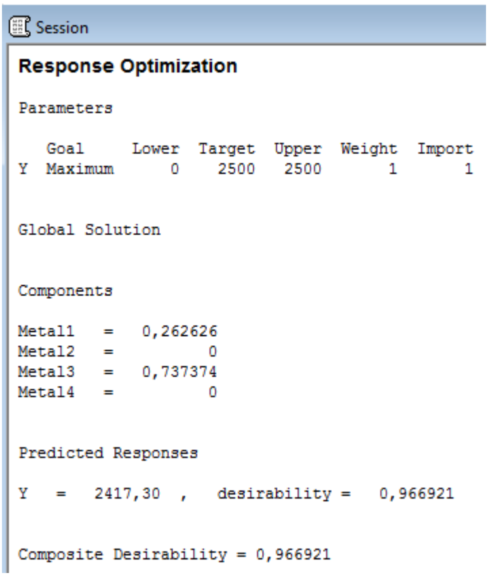


Рисунок 3.40 – Настройка окна оптимизации



Session

Response Optimization

```
Parameters

   Goal      Lower  Target  Upper  Weight  Import
Y  Maximum       0    2500   2500       1       1


Global Solution


Components

Metal1   =   0,262626
Metal2   =          0
Metal3   =   0,737374
Metal4   =          0


Predicted Responses

Y   =   2417,30   ,   desirability =   0,966921


Composite Desirability = 0,966921
```

Рисунок 3.41 – Результаты оптимизации

Таким образом, функция отклика (температура плавления сплава) принимает наибольшее значение, равное 2417,3 К, при следующем сочетании компонент:

Металл 1 – 26,26%,

Металл 2 – 0%,

Металл 3 – 73,74%,

Металл 4 – 0%.

График поиска минимума функции представлен на рисунке 3.42.

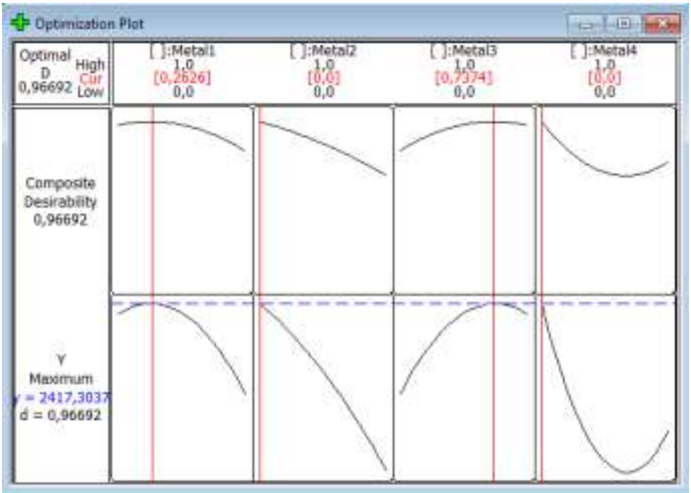


Рисунок 3.42 – Оптимизация функции отклика

3.3.3.2 Симплекс-вершинный план

Для того, чтобы составить симплекс-вершинный план эксперимента в Minitab, необходимо выбрать команду **Stat** – **DOE** – **Mixture – Create Mixture Design…**. В появившемся окне необходимо выбрать тип плана – **Type of design** (выберем **Simplex-lattice**), установить количество факторов – **Number of factors** (выберем **4**).

Нажмите кнопку **Designs** (планы). В верхней части окна убедитесь в том, что флажки **Augment the design with center point** (Дополнить план центральными точками) и **Augment the design with axial point** (Дополнить план осевыми точками) активны. Так, общее число экспериментов для трёх факторов при включенной данной опции равно 7 (три вершины, центр треугольника и три дополнительных точки), а для четырех факторов – 9 (четыре вершины, центр тетраэдра и четыре дополнительных точки).

В поле **Number of replicates for the whole design** (число повторов для всего плана) оставьте значение 1. Нажмите кнопку **OK**, чтобы вернуться в основное диалоговое окно. Обратите внимание, что остальные кнопки стали активными.

Нажмите кнопку **Components** (компоненты). Для того, чтобы задать общую сумму факторов, необходимо ввести её в поле **Single total** (Однозначная сумма). В строке **Component A** (компонент A) введите *Metal1* в столбце **Name** (имя), в строке **Component B** (компонент B) введите *Metal2* в столбце **Name** (имя), в строке **Component C** (компонент C) введите *Metal3* в столбце **Name** (имя), в строке **Component D** (компонент D) введите *Metal4* в столбце **Name** (имя).

Нажмите кнопку OK для создания плана эксперимента на рабочем листе Minitab. Откройте окно данных, чтобы познакомиться со структурой плана (рисунок 3.43).

↓	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8
	StdOrder	RunOrder	PtType	Blocks	Metal1	Metal2	Metal3	Metal4
1	9	1	-1	1	0,125	0,125	0,125	0,625
2	5	2	0	1	0,250	0,250	0,250	0,250
3	6	3	-1	1	0,625	0,125	0,125	0,125
4	7	4	-1	1	0,125	0,625	0,125	0,125
5	1	5	1	1	1,000	0,000	0,000	0,000
6	3	6	1	1	0,000	0,000	1,000	0,000
7	8	7	-1	1	0,125	0,125	0,625	0,125
8	2	8	1	1	0,000	1,000	0,000	0,000
9	4	9	1	1	0,000	0,000	0,000	1,000

Рисунок 3.43 – Симплекс-вершинный план эксперимента для смеси

В окне данных Minitab щелкните ячейку с именем столбца **C9** и введите *Y*. Введите значения, полученные в ходе наблюдений в столбце *Y* в окне данных с учётом того, что результаты наблюдений в данном листе рандомизированы (рисунок 3.44).

↓	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9
	StdOrder	RunOrder	PtType	Blocks	Metal1	Metal2	Metal3	Metal4	Y
1	9	1	-1	1	0,125	0,125	0,125	0,625	2279
2	5	2	0	1	0,250	0,250	0,250	0,250	2108
3	6	3	-1	1	0,625	0,125	0,125	0,125	2244
4	7	4	-1	1	0,125	0,625	0,125	0,125	2058
5	1	5	1	1	1,000	0,000	0,000	0,000	1866
6	3	6	1	1	0,000	0,000	1,000	0,000	1646
7	8	7	-1	1	0,125	0,125	0,625	0,125	1795
8	2	8	1	1	0,000	1,000	0,000	0,000	1677
9	4	9	1	1	0,000	0,000	0,000	1,000	2266

Рисунок 3.44 – Результат выполнения экспериментов

Для построения тернарной диаграммы выберите пункт меню **Stat – DOE – Mixture – Simplex Design Plot**. В появившемся диалоговом окне выберите опцию **Select four component for a matrix plot** (выберите четыре компонента для матрицы тернарных диаграмм) и нажмите ОК. В появившемся окне будут отображены четыре тернарные диаграммы – сочетания смесей по три компонента (рисунок 3.45).

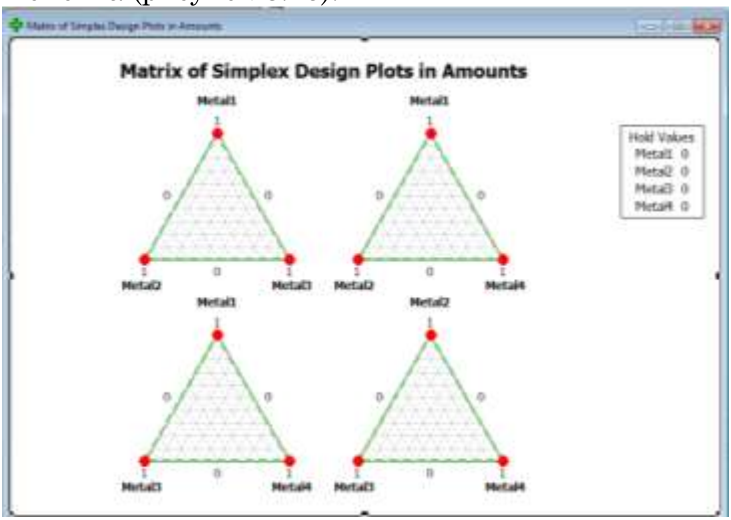


Рисунок 3.45 – Составление матрицы тернарных диаграмм

Итак, мы создали план и собрали данные отклика. Теперь мы можем подобрать модель данных и построить графики, чтобы оценить влияние факторов. Результаты подбора модели и построения графиков помогут определить, какие факторы являются важными для определения оптимальной температуры плавления.

Для того, чтобы проанализировать получившийся план, выберите пункт меню **Stat – DOE – Mixture – Analyze Mixture Design…**. В поле **Responses** (отклики) введите *Y*. Нажмите кнопку ОК для того, чтобы получить коэффициенты модели функции отклика.

Результаты анализа построенного симплекс-центроидного плана представлены на рисунках 3.46-3.48.

Session

Regression for Mixtures: Y versus Metal1; Metal2; Metal3; Metal4

```
The following terms cannot be estimated and were removed:
Metal2*Metal4
Metal3*Metal4
```

Рисунок 3.46 – Сообщение о невозможности оценки взаимодействий металлов *Metal2* с *Metal4* и *Metal3* с *Metal4*

Session

```
Estimated Regression Coefficients for Y (component proportions)

Term              Coef  SE Coef      T      P    VIF
Metal1          1869,6    51,59      *      *  1,493
Metal2          1680,6    51,59      *      *  1,493
Metal3          1649,6    51,59      *      *  1,493
Metal4          2269,6    51,59      *      *  1,493
Metal1*Metal2   3300,0   925,13   3,57  0,174  5,312
Metal1*Metal3   -660,0   925,13  -0,71  0,606  5,313
Metal1*Metal4   2008,6   870,73   2,31  0,260  4,706
Metal2*Metal3   -115,4   870,73  -0,13  0,916  4,706


S = 51,7163     PRESS = 2413726
R-Sq = 99,48%   R-Sq(pred) = 0,00%   R-Sq(adj) = 95,82%


Analysis of Variance for Y (component proportions)

Source               DF  Seq SS  Adj SS   Adj MS      F      P
Regression            7  509699  509699  72814,1  27,22  0,147
   Linear             3  342032  244101  81366,9  30,42  0,132
   Quadratic          4  167667  167667  41916,7  15,67  0,187
     Metal1*Metal2    1  149129   34031  34031,3  12,72  0,174
     Metal1*Metal3    1      37    1361   1361,2   0,51  0,606
     Metal1*Metal4    1   18455   14232  14231,9   5,32  0,260
     Metal2*Metal3    1      47      47     47,0   0,02  0,916
Residual Error        1    2675    2675   2674,6
Total                 8  512374
```

Рисунок 3.47 – Результаты анализа симплекс-вершинного плана

Session

Unusual Observations for Y

Obs	StdOrder	Y	Fit	SE Fit	Residual	St Resid	
1	1	1866,000	1869,552	51,594	-3,552	-1,00	X
2	2	1677,000	1680,552	51,594	-3,552	-1,00	X
3	4	2266,000	2269,552	51,594	-3,552	-1,00	X
4	3	1646,000	1649,552	51,594	-3,552	-1,00	X

X denotes an observation whose X value gives it large leverage.

Рисунок 3.48 – Выявление аномальных значений ряда Y

Коэффициенты перед одиночными факторами (значения столбца Coef) указывают на то, что компоненты *Metal4* (β = 2269,6) и *Metal1* (β = 1869,6) имеют наибольшее влияние на температуру плавления общей смеси.

Положительные коэффициенты перед двойным сочетанием факторов *Metal1*Metal2* (β = 3300), *Metal1*Metal4* (β = 2008,6) указывают на то, что металлы в указанных парах действуют совместно и дополняют друг друга. Это значит, что смеси с такими сочетаниями факторов более предпочтительны, чем их компоненты, взятые по отдельности.

Отрицательные коэффициенты указывают на то, что металлы в таком сочетании друг с другом несовместимы.

Из всех сочетаний компонентов статистически значимых сочетаний нет.

В ходе предварительного анализа были выявлены аномальные уровни ряда U(1) = 1866, U(2) = 1677, U(4) = 2266, U(3) = 1646, которые при построении модели были заменены на сглаженные значения. В целом, построенная модель:

$$\tilde{y} = 1869{,}6 \cdot Metal1 + 1680{,}6 \cdot Metal2 + 1649{,}6 \cdot Metal3 + 2269{,}6 \cdot Metal4 +$$
$$+ 3300 \cdot Metal1 \cdot Metal2 - 660 \cdot Metal1 \cdot Metal3 + 2008{,}6 \cdot Metal1 \cdot Metal4 -$$
$$- 115{,}4 \cdot Metal2 \cdot Metal3$$

практически идеально аппроксимирует экспериментальные данные на 99,48%.

Задача максимизации температуры плавления сплава решается с использованием встроенного оптимизатора функции отклика. Фактически, задача сводится к поиску такого сочетания компонентов, при котором температура плавления смеси будет максимальна. Для оптимизации выберите команду **Stat - DOE - Mixture - Response Optimizer**.

Результаты оптимизации представлены на рисунке 3.49.

```
Session

Response Optimization

Parameters

   Goal       Lower  Target  Upper  Weight  Import
Y  Maximum        0    2500   2500       1       1


Global Solution


Components

Metal1   =   0,525253
Metal2   =   0,474747
Metal3   =          0
Metal4   =          0


Predicted Responses

Y   =   2602,72  ,   desirability =   1,000000


Composite Desirability = 1,000000
```

Рисунок 3.49 – Результаты максимизации температуры плавления

Таким образом, функция отклика (температура плавления сплава) принимает наибольшее значение, равное 2602,72 К, при следующем сочетании компонент:

Металл 1 – 52,53%,

Металл 2 – 47,47%,

Металл 3 – 0%,

Металл 4 – 0%.

График поиска минимума функции представлен на рисунке 3.50.

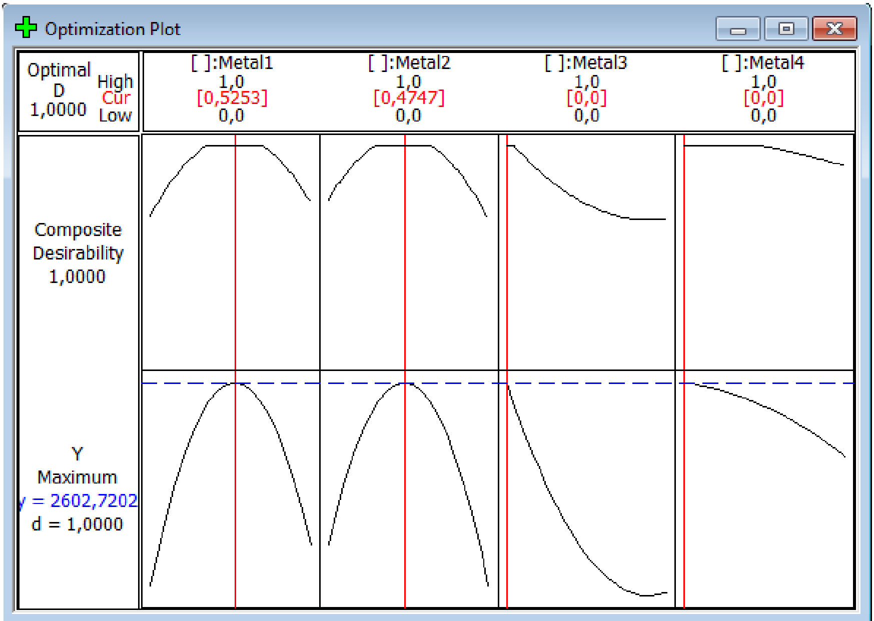


Рисунок 3.50 – Оптимизация функции отклика

3.3.3.3 Планы для смесей с ограничениями

Для того, чтобы составить план для смесей с ограничениями в Minitab, необходимо выбрать команду **Stat – DOE – Mixture – Create Mixture Design…**. В появившемся окне необходимо выбрать тип плана – **Type of design** (выберем **Extreme vertices**), установить количество факторов – **Number of factors** (выберем **4**).

Нажмите кнопку **Designs** (планы). В верхней части окна убедитесь в том, что флажки **Augment the design with center point** (Дополнить план центральными точками) и **Augment the design with axial point** (Дополнить план осевыми точками) активны.

В поле **Number of replicates for the whole design** (число повторов для всего плана) оставьте значение 1. Нажмите кнопку **OK**, чтобы вернуться в основное диалоговое окно. Обратите внимание, что остальные кнопки стали активными.

Нажмите кнопку **Components** (компоненты). Для того, чтобы задать общую сумму факторов, необходимо ввести её в поле **Single total** (Однозначная сумма). В строке **Component A** (компонент A) введите *Metal1* в столбце **Name** (имя), *0* в столбце **Lower**, *0,8* в столбце **Upper**.

В строке **Component B** (компонент B) введите *Metal2* в столбце **Name** (имя), *0,3* в столбце **Lower**, *1* в столбце **Upper.**

В строке **Component C** (компонент C) введите *Metal3* в столбце **Name** (имя), *0,4* в столбце **Lower**, *0,6* в столбце **Upper.**

В строке **Component D** (компонент D) введите *Metal4* в столбце **Name** (имя), *0* в столбце **Lower**, *0,7* в столбце **Upper.**

Нажмите кнопку ОК для создания плана эксперимента на рабочем листе Minitab. Откройте окно данных, чтобы познакомиться со структурой плана (рисунок 3.51).

↓	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8
	StdOrder	RunOrder	PtType	Blocks	Metal1	Metal2	Metal3	Metal4
1	1	1	1	1	0,000000	0,300000	0,40	0,300000
2	11	2	-1	1	0,033333	0,483333	0,45	0,033333
3	12	3	-1	1	0,083333	0,333333	0,55	0,033333
4	5	4	1	1	0,100000	0,300000	0,60	0,000000
5	9	5	-1	1	0,033333	0,333333	0,55	0,083333
6	7	6	0	1	0,066667	0,366667	0,50	0,066667
7	8	7	-1	1	0,033333	0,333333	0,45	0,183333
8	6	8	1	1	0,000000	0,400000	0,60	0,000000
9	3	9	1	1	0,300000	0,300000	0,40	0,000000
10	10	10	-1	1	0,183333	0,333333	0,45	0,033333
11	13	11	-1	1	0,033333	0,383333	0,55	0,033333
12	2	12	1	1	0,000000	0,300000	0,60	0,100000
13	4	13	1	1	0,000000	0,600000	0,40	0,000000

Рисунок 3.51 – План эксперимента для смеси

В окне данных Minitab щелкните ячейку с именем столбца **C9** и введите *Y*. Введите значения, полученные в ходе наблюдений в столбце *Y* в окне данных с учётом того, что результаты наблюдений в данном листе рандомизированы (рисунок 3.52).

↓	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9
	StdOrder	RunOrder	PtType	Blocks	Metal1	Metal2	Metal3	Metal4	Y
1	1	1	1	1	0,000000	0,300000	0,40	0,300000	2462
2	11	2	-1	1	0,033333	0,483333	0,45	0,033333	1715
3	12	3	-1	1	0,083333	0,333333	0,55	0,033333	1588
4	5	4	1	1	0,100000	0,300000	0,60	0,000000	2059
5	9	5	-1	1	0,033333	0,333333	0,55	0,083333	2381
6	7	6	0	1	0,066667	0,366667	0,50	0,066667	1876
7	8	7	-1	1	0,033333	0,333333	0,45	0,183333	2184
8	6	8	1	1	0,000000	0,400000	0,60	0,000000	1773
9	3	9	1	1	0,300000	0,300000	0,40	0,000000	2402
10	10	10	-1	1	0,183333	0,333333	0,45	0,033333	2106
11	13	11	-1	1	0,033333	0,383333	0,55	0,033333	2499
12	2	12	1	1	0,000000	0,300000	0,60	0,100000	1744
13	4	13	1	1	0,000000	0,600000	0,40	0,000000	1514

Рисунок 3.52 – Результат выполнения экспериментов

Для построения тернарной диаграммы выберите пункт меню **Stat – DOE – Mixture – Simplex Design Plot**. В появившемся диалоговом окне выберите опцию **Select four component for a matrix plot** (выберите четыре компонента для матрицы тернарных диаграмм) и нажмите ОК. В появившемся окне будут отображены четыре тернарные диаграммы – сочетания смесей по три компонента (рисунок 3.53).

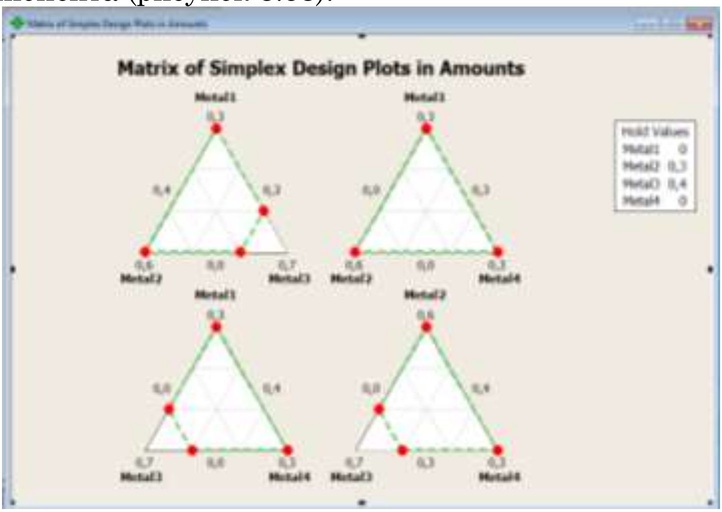


Рисунок 3.53 – Составление матрицы тернарных диаграмм

Для того, чтобы проанализировать получившийся план, выберите пункт меню **Stat – DOE – Mixture – Analyze Mixture Design…**. В поле **Responses** (отклики) введите *Y*. Результаты анализа построенного симплекс-центроидного плана представлены на рисунках 3.54-3.55.

Session

Regression for Mixtures: Y versus Metal1; Metal2; Metal3; Metal4

Estimated Regression Coefficients for Y (component proportions)

Term	Coef	SE Coef	T	P	VIF
Metal1	13399	25623	*	*	525,7
Metal2	-16855	20670	*	*	4211,2
Metal3	-14982	20937	*	*	7809,9
Metal4	-6033	25623	*	*	525,7
Metal1*Metal2	-73202	97808	-0,75	0,509	757,3
Metal1*Metal3	60614	86356	0,70	0,533	1164,4
Metal1*Metal4	-56956	97808	-0,58	0,601	5,8
Metal2*Metal3	73336	86356	0,85	0,458	17837,3
Metal2*Metal4	558	97808	0,01	0,996	757,3
Metal3*Metal4	53873	86356	0,62	0,577	1164,4

S = 432,001   PRESS = 111193991
R-Sq = 60,86%   R-Sq(pred) = 0,00%   R-Sq(adj) = 0,00%

Analysis of Variance for Y (component proportions)

Source	DF	Seq SS	Adj SS	Adj MS	F	P
Regression	9	870451	870451	96717	0,52	0,805
Linear	3	619502	210857	70286	0,38	0,778
Quadratic	6	250949	250949	41825	0,22	0,943
Metal1*Metal2	1	9093	104536	104536	0,56	0,509
Metal1*Metal3	1	5024	91946	91946	0,49	0,533
Metal1*Metal4	1	3798	63286	63286	0,34	0,601
Metal2*Metal3	1	123284	134591	134591	0,72	0,458
Metal2*Metal4	1	37119	6	6	0,00	0,996
Metal3*Metal4	1	72632	72632	72632	0,39	0,577
Residual Error	3	559876	559876	186625		
Total	12	1430327				

Рисунок 3.54 – Результаты анализа построенного плана для смесей с заданными ограничениями

Session

Unusual Observations for Y

Obs	StdOrder	Y	Fit	SE Fit	Residual	St Resid
4	4	1514,000	1494,920	430,645	19,080	0,56 X
5	3	2402,000	2456,250	430,645	-54,250	-1,59 X
10	1	2462,000	2456,197	430,645	5,803	0,17 X

Рисунок 3.55 – Выявление аномальных значений ряда Y

Как видно из данных, представленных в окне **Session** (рисунок 3.54), из всех сочетаний компонентов статистически значимых сочетаний нет.

В ходе предварительного анализа были выявлены аномальные уровни ряда U(4) = 1514, U(5) = 2402, U(10) = 2462, которые при построении модели были заменены на сглаженные значения. В целом, построенная модель:

$$\tilde{y} = 13399 \cdot Metal1 - 16855 \cdot Metal2 - 14982 \cdot Metal3 - 6033 \cdot Metal4 -$$
$$- 73202 \cdot Metal1 \cdot Metal2 + 60614 \cdot Metal1 \cdot Metal3 - 56956 \cdot Metal1 \cdot Metal4 -$$
$$+ 73336 \cdot Metal2 \cdot Metal3 + 558 \cdot Metal2 \cdot Metal4 + 53873 \cdot Metal3 \cdot Metal4$$

аппроксимирует экспериментальные данные на 60,86%.

Задача максимизации температуры плавления сплава решается с использованием встроенного оптимизатора функции отклика. Фактически, задача сводится к поиску такого сочетания компонентов, при котором температуры плавления смеси будет максимальна. Для оптимизации выберите команду **Stat - DOE - Mixture - Response Optimizer**.

Результаты оптимизации представлены на рисунке 3.56.

```
Session

Response Optimization

Parameters

   Goal      Lower  Target  Upper  Weight  Import
Y  Maximum       0    2500   2500       1       1


Global Solution


Components

Metal1   =         0
Metal2   =       0,3
Metal3   =  0,468687
Metal4   =  0,231313


Predicted Responses

Y   =   2716,94  ,   desirability =   1,000000


Composite Desirability = 1,000000
```

Рисунок 3.56 – Результаты максимизации температуры плавления

Таким образом, функция отклика (температура плавления сплава) принимает наибольшее значение, равное 2716,94 К, при следующем сочетании компонент:

Металл 1 – 0%,

Металл 2 – 30%,

Металл 3 – 46,87%,

Металл 4 – 23,13%.

График поиска минимума функции представлен на рисунке 3.57.

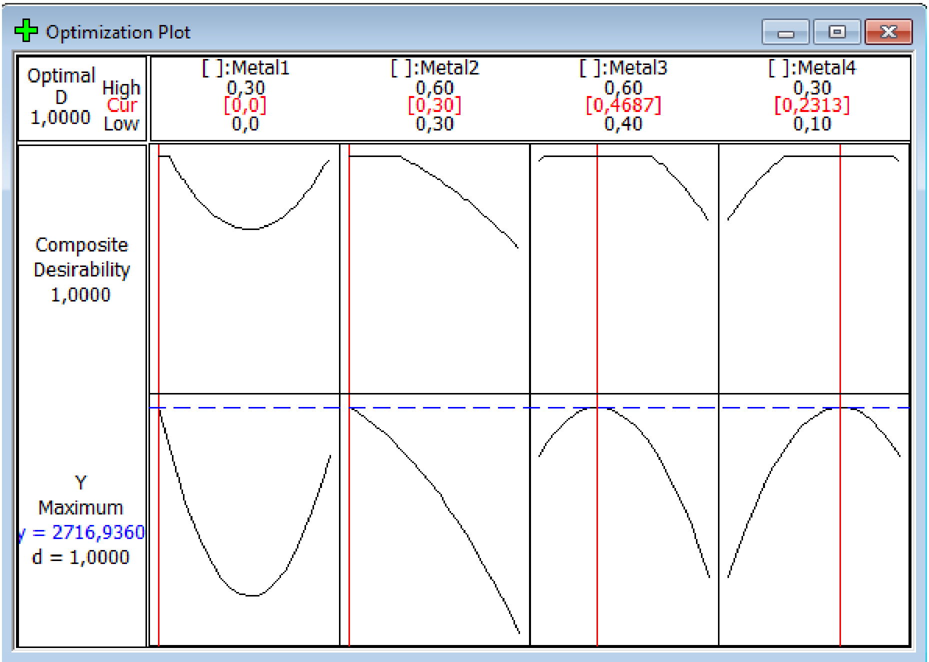


Рисунок 3.57 – Оптимизация функции отклика

3.3.4 Варианты для самостоятельного решения

Задача. Для получения сплава используются четыре металла I, II, III и IV с разными температурами плавления. Составить и проанализировать симплекс-центроидный и симплекс-вершинный планы экспериментов, а также – план для смеси с ограничениями (Металл I: от 25 до 65%, Металл II: не менее 20%, Металл III: от 15% до 80%, Металл IV: не более 50%).

Перед исследователями стоит задача получения сплава с максимальной температурой плавления. Экспериментальные данные представлены в таблице 3.15.

Таблица 3.15 – Данные для выполнения задания

Вариант 1					Вариант 2				
М 1	М 2	М 3	М 4	Y	М 1	М 2	М 3	М 4	Y
1	0	0	0	1710	1	0	0	0	1915
0	1	0	0	1551	0	1	0	0	2222
0	0	1	0	2288	0	0	1	0	2021
0	0	0	1	1635	0	0	0	1	2379
1/2	1/2	0	0	2205	1/2	1/2	0	0	1602
1/2	0	1/2	0	2253	1/2	0	1/2	0	1699
1/2	0	0	1/2	2395	1/2	0	0	1/2	2131
0	1/2	1/2	0	2255	0	1/2	1/2	0	1972
0	1/2	0	1/2	1584	0	1/2	0	1/2	1752
0	0	1/2	1/2	2376	0	0	1/2	1/2	1610
1/3	1/3	1/3	0	2203	1/3	1/3	1/3	0	1853
1/3	1/3	0	1/3	1720	1/3	1/3	0	1/3	2345
1/3	0	1/3	1/3	2388	1/3	0	1/3	1/3	2292
0	1/3	1/3	1/3	2489	0	1/3	1/3	1/3	2317
1/4	1/4	1/4	1/4	1934	1/4	1/4	1/4	1/4	2067
5/8	1/8	1/8	1/8	2184	5/8	1/8	1/8	1/8	1818
1/8	5/8	1/8	1/8	2170	1/8	5/8	1/8	1/8	2480
1/8	1/8	5/8	1/8	1605	1/8	1/8	5/8	1/8	1923
1/8	1/8	1/8	5/8	2245	1/8	1/8	1/8	5/8	1721
13/20	1/5	3/20	0	2336	13/20	1/5	3/20	0	1642
1/2	1/4	1/5	1/20	1503	1/2	1/4	1/5	1/20	2241
1/4	1/5	11/20	0	1613	1/4	1/5	11/20	0	2070
1/4	3/5	3/20	0	1845	1/4	3/5	3/20	0	1584
1/4	1/5	3/20	2/5	1816	1/4	1/5	3/20	2/5	2319
3/10	1/4	1/5	1/4	2339	3/10	1/4	1/5	1/4	1652
3/10	9/20	1/5	1/20	2214	3/10	9/20	1/5	1/20	1839
7/20	3/10	1/4	1/10	2382	7/20	3/10	1/4	1/10	1792
3/10	1/4	4/10	1/20	1696	3/10	1/4	4/10	1/20	1878

Вариант 3					Вариант 4				
М 1	М 2	М 3	М 4	Y	М 1	М 2	М 3	М 4	Y
1	0	0	0	2182	1	0	0	0	1533
0	1	0	0	2267	0	1	0	0	1903
0	0	1	0	1515	0	0	1	0	2360
0	0	0	1	2493	0	0	0	1	1777
1/2	1/2	0	0	2357	1/2	1/2	0	0	2225
1/2	0	1/2	0	1702	1/2	0	1/2	0	1779
1/2	0	0	1/2	2087	1/2	0	0	1/2	1578
0	1/2	1/2	0	2487	0	1/2	1/2	0	2043
0	1/2	0	1/2	2409	0	1/2	0	1/2	1686
0	0	1/2	1/2	2378	0	0	1/2	1/2	1657
1/3	1/3	1/3	0	1769	1/3	1/3	1/3	0	2401
1/3	1/3	0	1/3	1623	1/3	1/3	0	1/3	2256
1/3	0	1/3	1/3	2300	1/3	0	1/3	1/3	1623
0	1/3	1/3	1/3	1675	0	1/3	1/3	1/3	2097
1/4	1/4	1/4	1/4	1551	1/4	1/4	1/4	1/4	2349
5/8	1/8	1/8	1/8	2304	5/8	1/8	1/8	1/8	1547
1/8	5/8	1/8	1/8	1617	1/8	5/8	1/8	1/8	2349
1/8	1/8	5/8	1/8	2227	1/8	1/8	5/8	1/8	2192
1/8	1/8	1/8	5/8	1772	1/8	1/8	1/8	5/8	2117
13/20	1/5	3/20	0	1632	13/20	1/5	3/20	0	2196
1/2	1/4	1/5	1/20	1825	1/2	1/4	1/5	1/20	2145
1/4	1/5	11/20	0	2273	1/4	1/5	11/20	0	2422
1/4	3/5	3/20	0	1592	1/4	3/5	3/20	0	1913
1/4	1/5	3/20	2/5	1601	1/4	1/5	3/20	2/5	2397
3/10	1/4	1/5	1/4	2439	3/10	1/4	1/5	1/4	1596
3/10	9/20	1/5	1/20	2151	3/10	9/20	1/5	1/20	2355
7/20	3/10	1/4	1/10	2168	7/20	3/10	1/4	1/10	1560
3/10	1/4	4/10	1/20	1921	3/10	1/4	4/10	1/20	1888

Вариант 5					Вариант 6				
M 1	M 2	M 3	M 4	Y	M 1	M 2	M 3	M 4	Y
1	0	0	0	1574	1	0	0	0	2498
0	1	0	0	1567	0	1	0	0	2251
0	0	1	0	2120	0	0	1	0	1982
0	0	0	1	2487	0	0	0	1	1686
1/2	1/2	0	0	2127	1/2	1/2	0	0	1789
1/2	0	1/2	0	1674	1/2	0	1/2	0	1949
1/2	0	0	1/2	1663	1/2	0	0	1/2	1521
0	1/2	1/2	0	2135	0	1/2	1/2	0	1782
0	1/2	0	1/2	2443	0	1/2	0	1/2	2001
0	0	1/2	1/2	2270	0	0	1/2	1/2	2073
1/3	1/3	1/3	0	2009	1/3	1/3	1/3	0	1810
1/3	1/3	0	1/3	1662	1/3	1/3	0	1/3	1537
1/3	0	1/3	1/3	2094	1/3	0	1/3	1/3	1752
0	1/3	1/3	1/3	2304	0	1/3	1/3	1/3	2464
1/4	1/4	1/4	1/4	1995	1/4	1/4	1/4	1/4	1758
5/8	1/8	1/8	1/8	2042	5/8	1/8	1/8	1/8	1684
1/8	5/8	1/8	1/8	2096	1/8	5/8	1/8	1/8	1760
1/8	1/8	5/8	1/8	1819	1/8	1/8	5/8	1/8	1969
1/8	1/8	1/8	5/8	2175	1/8	1/8	1/8	5/8	2240
13/20	1/5	3/20	0	1537	13/20	1/5	3/20	0	1976
1/2	1/4	1/5	1/20	2180	1/2	1/4	1/5	1/20	2447
1/4	1/5	11/20	0	2372	1/4	1/5	11/20	0	2221
1/4	3/5	3/20	0	2239	1/4	3/5	3/20	0	2128
1/4	1/5	3/20	2/5	2121	1/4	1/5	3/20	2/5	1583
3/10	1/4	1/5	1/4	2199	3/10	1/4	1/5	1/4	1846
3/10	9/20	1/5	1/20	2265	3/10	9/20	1/5	1/20	2308
7/20	3/10	1/4	1/10	1589	7/20	3/10	1/4	1/10	2161
3/10	1/4	4/10	1/20	2354	3/10	1/4	4/10	1/20	2021

Вариант 7					Вариант 8				
М 1	М 2	М 3	М 4	Y	М 1	М 2	М 3	М 4	Y
1	0	0	0	1876	1	0	0	0	2097
0	1	0	0	1975	0	1	0	0	2165
0	0	1	0	1638	0	0	1	0	1976
0	0	0	1	1579	0	0	0	1	2133
1/2	1/2	0	0	2320	1/2	1/2	0	0	1594
1/2	0	1/2	0	1723	1/2	0	1/2	0	1575
1/2	0	0	1/2	2174	1/2	0	0	1/2	2385
0	1/2	1/2	0	2304	0	1/2	1/2	0	1851
0	1/2	0	1/2	1536	0	1/2	0	1/2	1881
0	0	1/2	1/2	1877	0	0	1/2	1/2	1562
1/3	1/3	1/3	0	2199	1/3	1/3	1/3	0	2043
1/3	1/3	0	1/3	1749	1/3	1/3	0	1/3	1564
1/3	0	1/3	1/3	2158	1/3	0	1/3	1/3	1963
0	1/3	1/3	1/3	2222	0	1/3	1/3	1/3	1533
1/4	1/4	1/4	1/4	1669	1/4	1/4	1/4	1/4	2153
5/8	1/8	1/8	1/8	1702	5/8	1/8	1/8	1/8	2279
1/8	5/8	1/8	1/8	1577	1/8	5/8	1/8	1/8	2418
1/8	1/8	5/8	1/8	1524	1/8	1/8	5/8	1/8	1531
1/8	1/8	1/8	5/8	1852	1/8	1/8	1/8	5/8	1502
13/20	1/5	3/20	0	1671	13/20	1/5	3/20	0	1790
1/2	1/4	1/5	1/20	2472	1/2	1/4	1/5	1/20	2440
1/4	1/5	11/20	0	1514	1/4	1/5	11/20	0	2070
1/4	3/5	3/20	0	1569	1/4	3/5	3/20	0	1671
1/4	1/5	3/20	2/5	1895	1/4	1/5	3/20	2/5	1992
3/10	1/4	1/5	1/4	2130	3/10	1/4	1/5	1/4	2485
3/10	9/20	1/5	1/20	2398	3/10	9/20	1/5	1/20	1845
7/20	3/10	1/4	1/10	1907	7/20	3/10	1/4	1/10	1549
3/10	1/4	4/10	1/20	2306	3/10	1/4	4/10	1/20	1832

Вариант 9					Вариант 10				
М 1	М 2	М 3	М 4	Y	М 1	М 2	М 3	М 4	Y
1	0	0	0	1836	1	0	0	0	1585
0	1	0	0	1838	0	1	0	0	2253
0	0	1	0	2137	0	0	1	0	1573
0	0	0	1	1521	0	0	0	1	1867
1/2	1/2	0	0	1732	1/2	1/2	0	0	1702
1/2	0	1/2	0	2133	1/2	0	1/2	0	2102
1/2	0	0	1/2	1964	1/2	0	0	1/2	2490
0	1/2	1/2	0	2356	0	1/2	1/2	0	2489
0	1/2	0	1/2	2346	0	1/2	0	1/2	1635
0	0	1/2	1/2	1812	0	0	1/2	1/2	1670
1/3	1/3	1/3	0	1521	1/3	1/3	1/3	0	2315
1/3	1/3	0	1/3	1620	1/3	1/3	0	1/3	1957
1/3	0	1/3	1/3	1843	1/3	0	1/3	1/3	2326
0	1/3	1/3	1/3	2083	0	1/3	1/3	1/3	2121
1/4	1/4	1/4	1/4	2484	1/4	1/4	1/4	1/4	2246
5/8	1/8	1/8	1/8	2096	5/8	1/8	1/8	1/8	1786
1/8	5/8	1/8	1/8	1874	1/8	5/8	1/8	1/8	1900
1/8	1/8	5/8	1/8	1628	1/8	1/8	5/8	1/8	2124
1/8	1/8	1/8	5/8	1921	1/8	1/8	1/8	5/8	1728
13/20	1/5	3/20	0	1746	13/20	1/5	3/20	0	1928
1/2	1/4	1/5	1/20	1723	1/2	1/4	1/5	1/20	2095
1/4	1/5	11/20	0	2411	1/4	1/5	11/20	0	2027
1/4	3/5	3/20	0	1836	1/4	3/5	3/20	0	2241
1/4	1/5	3/20	2/5	2390	1/4	1/5	3/20	2/5	2387
3/10	1/4	1/5	1/4	1700	3/10	1/4	1/5	1/4	1743
3/10	9/20	1/5	1/20	2323	3/10	9/20	1/5	1/20	2204
7/20	3/10	1/4	1/10	1533	7/20	3/10	1/4	1/10	1519
3/10	1/4	4/10	1/20	2337	3/10	1/4	4/10	1/20	1830

Вариант 11					Вариант 12				
M 1	M 2	M 3	M 4	Y	M 1	M 2	M 3	M 4	Y
1	0	0	0	1911	1	0	0	0	2337
0	1	0	0	2200	0	1	0	0	1619
0	0	1	0	2271	0	0	1	0	2385
0	0	0	1	1729	0	0	0	1	2073
1/2	1/2	0	0	2416	1/2	1/2	0	0	2428
1/2	0	1/2	0	1532	1/2	0	1/2	0	1839
1/2	0	0	1/2	1797	1/2	0	0	1/2	2409
0	1/2	1/2	0	1644	0	1/2	1/2	0	2376
0	1/2	0	1/2	2297	0	1/2	0	1/2	2473
0	0	1/2	1/2	2151	0	0	1/2	1/2	2063
1/3	1/3	1/3	0	1625	1/3	1/3	1/3	0	2376
1/3	1/3	0	1/3	1540	1/3	1/3	0	1/3	2402
1/3	0	1/3	1/3	2451	1/3	0	1/3	1/3	1634
0	1/3	1/3	1/3	1515	0	1/3	1/3	1/3	1602
1/4	1/4	1/4	1/4	2299	1/4	1/4	1/4	1/4	2491
5/8	1/8	1/8	1/8	2153	5/8	1/8	1/8	1/8	1820
1/8	5/8	1/8	1/8	1518	1/8	5/8	1/8	1/8	1999
1/8	1/8	5/8	1/8	1763	1/8	1/8	5/8	1/8	2215
1/8	1/8	1/8	5/8	2286	1/8	1/8	1/8	5/8	1703
13/20	1/5	3/20	0	1688	13/20	1/5	3/20	0	2309
1/2	1/4	1/5	1/20	2454	1/2	1/4	1/5	1/20	1835
1/4	1/5	11/20	0	2178	1/4	1/5	11/20	0	1562
1/4	3/5	3/20	0	1600	1/4	3/5	3/20	0	1724
1/4	1/5	3/20	2/5	2277	1/4	1/5	3/20	2/5	2400
3/10	1/4	1/5	1/4	1629	3/10	1/4	1/5	1/4	1785
3/10	9/20	1/5	1/20	1664	3/10	9/20	1/5	1/20	2122
7/20	3/10	1/4	1/10	1605	7/20	3/10	1/4	1/10	2334
3/10	1/4	4/10	1/20	1787	3/10	1/4	4/10	1/20	2490

Вариант 13					Вариант 14				
М 1	М 2	М 3	М 4	Y	М 1	М 2	М 3	М 4	Y
1	0	0	0	1721	1	0	0	0	1913
0	1	0	0	1811	0	1	0	0	1503
0	0	1	0	2061	0	0	1	0	2297
0	0	0	1	2355	0	0	0	1	1907
1/2	1/2	0	0	2370	1/2	1/2	0	0	2030
1/2	0	1/2	0	1998	1/2	0	1/2	0	2187
1/2	0	0	1/2	2415	1/2	0	0	1/2	2389
0	1/2	1/2	0	1704	0	1/2	1/2	0	1842
0	1/2	0	1/2	1823	0	1/2	0	1/2	2311
0	0	1/2	1/2	1903	0	0	1/2	1/2	1890
1/3	1/3	1/3	0	2084	1/3	1/3	1/3	0	2226
1/3	1/3	0	1/3	1790	1/3	1/3	0	1/3	1959
1/3	0	1/3	1/3	2097	1/3	0	1/3	1/3	2333
0	1/3	1/3	1/3	2214	0	1/3	1/3	1/3	1796
1/4	1/4	1/4	1/4	2135	1/4	1/4	1/4	1/4	1796
5/8	1/8	1/8	1/8	2200	5/8	1/8	1/8	1/8	1948
1/8	5/8	1/8	1/8	1839	1/8	5/8	1/8	1/8	2030
1/8	1/8	5/8	1/8	2426	1/8	1/8	5/8	1/8	1516
1/8	1/8	1/8	5/8	1907	1/8	1/8	1/8	5/8	2033
13/20	1/5	3/20	0	2083	13/20	1/5	3/20	0	2406
1/2	1/4	1/5	1/20	2437	1/2	1/4	1/5	1/20	1896
1/4	1/5	11/20	0	2474	1/4	1/5	11/20	0	2306
1/4	3/5	3/20	0	2331	1/4	3/5	3/20	0	2111
1/4	1/5	3/20	2/5	2343	1/4	1/5	3/20	2/5	1734
3/10	1/4	1/5	1/4	2002	3/10	1/4	1/5	1/4	2024
3/10	9/20	1/5	1/20	1658	3/10	9/20	1/5	1/20	1654
7/20	3/10	1/4	1/10	1951	7/20	3/10	1/4	1/10	2465
3/10	1/4	4/10	1/20	1632	3/10	1/4	4/10	1/20	2160

Вариант 15					Вариант 16				
M 1	M 2	M 3	M 4	Y	M 1	M 2	M 3	M 4	Y
1	0	0	0	1812	1	0	0	0	2226
0	1	0	0	1549	0	1	0	0	2204
0	0	1	0	1581	0	0	1	0	2271
0	0	0	1	1504	0	0	0	1	2399
1/2	1/2	0	0	1724	1/2	1/2	0	0	2377
1/2	0	1/2	0	2151	1/2	0	1/2	0	2362
1/2	0	0	1/2	2134	1/2	0	0	1/2	1528
0	1/2	1/2	0	1645	0	1/2	1/2	0	1850
0	1/2	0	1/2	2458	0	1/2	0	1/2	2439
0	0	1/2	1/2	2381	0	0	1/2	1/2	1514
1/3	1/3	1/3	0	1913	1/3	1/3	1/3	0	2110
1/3	1/3	0	1/3	1552	1/3	1/3	0	1/3	1733
1/3	0	1/3	1/3	2327	1/3	0	1/3	1/3	1759
0	1/3	1/3	1/3	2284	0	1/3	1/3	1/3	1967
1/4	1/4	1/4	1/4	1830	1/4	1/4	1/4	1/4	2119
5/8	1/8	1/8	1/8	2358	5/8	1/8	1/8	1/8	1542
1/8	5/8	1/8	1/8	2295	1/8	5/8	1/8	1/8	2115
1/8	1/8	5/8	1/8	2285	1/8	1/8	5/8	1/8	1563
1/8	1/8	1/8	5/8	1700	1/8	1/8	1/8	5/8	2486
13/20	1/5	3/20	0	2271	13/20	1/5	3/20	0	1673
1/2	1/4	1/5	1/20	1817	1/2	1/4	1/5	1/20	1514
1/4	1/5	11/20	0	2272	1/4	1/5	11/20	0	2170
1/4	3/5	3/20	0	2460	1/4	3/5	3/20	0	1811
1/4	1/5	3/20	2/5	2440	1/4	1/5	3/20	2/5	1827
3/10	1/4	1/5	1/4	2185	3/10	1/4	1/5	1/4	2138
3/10	9/20	1/5	1/20	1783	3/10	9/20	1/5	1/20	2287
7/20	3/10	1/4	1/10	2054	7/20	3/10	1/4	1/10	2360
3/10	1/4	4/10	1/20	2481	3/10	1/4	4/10	1/20	2095

Вариант 17					Вариант 18				
М 1	М 2	М 3	М 4	Y	М 1	М 2	М 3	М 4	Y
1	0	0	0	1915	1	0	0	0	2137
0	1	0	0	2405	0	1	0	0	2133
0	0	1	0	2260	0	0	1	0	1867
0	0	0	1	2035	0	0	0	1	2488
1/2	1/2	0	0	1940	1/2	1/2	0	0	2061
1/2	0	1/2	0	1925	1/2	0	1/2	0	2190
1/2	0	0	1/2	2246	1/2	0	0	1/2	1584
0	1/2	1/2	0	1510	0	1/2	1/2	0	2263
0	1/2	0	1/2	1710	0	1/2	0	1/2	1990
0	0	1/2	1/2	2187	0	0	1/2	1/2	2203
1/3	1/3	1/3	0	1525	1/3	1/3	1/3	0	2354
1/3	1/3	0	1/3	1766	1/3	1/3	0	1/3	1662
1/3	0	1/3	1/3	1794	1/3	0	1/3	1/3	2412
0	1/3	1/3	1/3	2197	0	1/3	1/3	1/3	2363
1/4	1/4	1/4	1/4	1818	1/4	1/4	1/4	1/4	2391
5/8	1/8	1/8	1/8	1722	5/8	1/8	1/8	1/8	2352
1/8	5/8	1/8	1/8	2495	1/8	5/8	1/8	1/8	2245
1/8	1/8	5/8	1/8	2355	1/8	1/8	5/8	1/8	2020
1/8	1/8	1/8	5/8	1772	1/8	1/8	1/8	5/8	2499
13/20	1/5	3/20	0	1704	13/20	1/5	3/20	0	1880
1/2	1/4	1/5	1/20	1668	1/2	1/4	1/5	1/20	2170
1/4	1/5	11/20	0	2252	1/4	1/5	11/20	0	2283
1/4	3/5	3/20	0	1608	1/4	3/5	3/20	0	1509
1/4	1/5	3/20	2/5	1618	1/4	1/5	3/20	2/5	2499
3/10	1/4	1/5	1/4	1969	3/10	1/4	1/5	1/4	2037
3/10	9/20	1/5	1/20	2235	3/10	9/20	1/5	1/20	2255
7/20	3/10	1/4	1/10	1746	7/20	3/10	1/4	1/10	1561
3/10	1/4	4/10	1/20	2187	3/10	1/4	4/10	1/20	2158

Вариант 19					Вариант 20				
M 1	M 2	M 3	M 4	Y	M 1	M 2	M 3	M 4	Y
1	0	0	0	2301	1	0	0	0	2452
0	1	0	0	1763	0	1	0	0	2128
0	0	1	0	2280	0	0	1	0	1846
0	0	0	1	1883	0	0	0	1	2302
1/2	1/2	0	0	2281	1/2	1/2	0	0	1742
1/2	0	1/2	0	2254	1/2	0	1/2	0	1990
1/2	0	0	1/2	2084	1/2	0	0	1/2	2466
0	1/2	1/2	0	2372	0	1/2	1/2	0	1802
0	1/2	0	1/2	1710	0	1/2	0	1/2	1909
0	0	1/2	1/2	1795	0	0	1/2	1/2	2241
1/3	1/3	1/3	0	2482	1/3	1/3	1/3	0	2324
1/3	1/3	0	1/3	1839	1/3	1/3	0	1/3	2019
1/3	0	1/3	1/3	1542	1/3	0	1/3	1/3	2357
0	1/3	1/3	1/3	2169	0	1/3	1/3	1/3	1608
1/4	1/4	1/4	1/4	1823	1/4	1/4	1/4	1/4	1557
5/8	1/8	1/8	1/8	1585	5/8	1/8	1/8	1/8	2490
1/8	5/8	1/8	1/8	2398	1/8	5/8	1/8	1/8	1913
1/8	1/8	5/8	1/8	2246	1/8	1/8	5/8	1/8	2298
1/8	1/8	1/8	5/8	1654	1/8	1/8	1/8	5/8	2400
13/20	1/5	3/20	0	1947	13/20	1/5	3/20	0	1549
1/2	1/4	1/5	1/20	2264	1/2	1/4	1/5	1/20	1920
1/4	1/5	11/20	0	1963	1/4	1/5	11/20	0	2463
1/4	3/5	3/20	0	1827	1/4	3/5	3/20	0	1692
1/4	1/5	3/20	2/5	1708	1/4	1/5	3/20	2/5	1999
3/10	1/4	1/5	1/4	1797	3/10	1/4	1/5	1/4	2001
3/10	9/20	1/5	1/20	1766	3/10	9/20	1/5	1/20	1986
7/20	3/10	1/4	1/10	1648	7/20	3/10	1/4	1/10	2107
3/10	1/4	4/10	1/20	1976	3/10	1/4	4/10	1/20	2495

Заключение

Проблемы, стоящие перед различными предприятиями сегодня требуют поиска новых научно-обоснованных путей и методов решения. Моделирование и использование моделей для решения задач управления и принятия решений во многих ситуациях является единственно возможным и эффективным методом, позволяющим получить ответ на поставленный вопрос. Модель обычно отличается от объекта масштабом, а иногда природой. В последнее время наряду с физическими моделями все большее распространение получают абстрактные математические модели.

Однако принятие решений с помощью методов моделирования возможно лишь в случае, если модель достаточно точно описывает объект. Для обеспечения адекватности разрабатываемой модели необходимо использовать такие методы, как: методы математической статистики (при сборе данных и обработке выборки), методы планирования экспериментов, регрессионный анализ (при анализе полученных зависимостей).

Экспериментальные данные, полученные с помощью теории планирования экспериментов, часто являются основой для применения других математических методов, например, градиентных методов оптимизации.

Авторы надеются, что рассмотренные в учебном пособии теоретические основы, а также предложенные практические задания, способствующие ознакомлению с принципами применения различных методов планирования эксперимента, позволит студентам в будущей профессиональной деятельности при проведении экспериментов сделать свое поведение целенаправленным и организованным, а также существенно повысить производительность труда и надежность полученных результатов.

Вопросы к зачету по дисциплине «Модели и методы планирования экспериментов»

1. Методы описательной статистики: законы распределения, гистограмма и полигон распределения.
2. Числовые характеристики выборки.
3. Числовые характеристики связи случайных величин: матрица ковариации и коэффициент корреляции.
4. Методы регрессионного анализа: МНК, значимость параметров, адекватность модели, автокорреляция.
5. Характеристики регрессии: коэффициент детерминации, критерий Стъюдента, критерий Фишера, критерий Дарбина-Уотсона.
6. Нелинейная регрессия, ее линеаризация.
7. Основные понятия теории планирования экспериментов: факторы, отклик, метод наименьших квадратов.
8. Постановка задачи оптимизации, основанной на применении теории планирования экспериментов.
9. Критерии оптимальности и типы планов. Ортогональные и рототабельные планы.
10. Полный факторный эксперимент типа 2k.
11. Оценки коэффициентов функции отклика для полного факторного эксперимента.
12. Дробный факторный эксперимент.
13. Оценки коэффициентов функции отклика в дробном факторном эксперименте.
14. Проверка однородности дисперсии воспроизводимости в результате анализа плана для описания поверхности отклика.
15. Проверка адекватности модели в результате анализа плана для описания поверхности отклика.
16. Планы для описания поверхности отклика. Композиционные планы.
17. Ортогональные центральные композиционные планы.
18. Ротатабельные центральные композиционные планы.
19. Симплекс-вершинные планы для смесей.
20. Симплекс-центроидные планы для смесей.
21. Анализ планов для поверхностей и смесей с ограничениями.

Список рекомендуемых источников

Основные:

1. Коваленко Н. А. Научные исследования и решение инженерных задач в сфере автомобильного транспорта [Электронный ресурс] : учебное пособие / Н.А.Коваленко. – Москва : НИЦ ИНФРА-М; Минск : Новое знание, 2013. – 271 с.: ил. – ISBN 978-5-16-004757-7. - Режим доступа: http://znanium.com/bookread.php?book=376336 (дата обращения: 20.08.2015).
2. Ходасевич Г.Б. Планирование эксперимента и обработка экспериментальных данных на ЭВМ: учеб. пособие/ Г.Б. Ходасевич, О.И. Пантюхин, С.Б. Ногин. Ч. 2: Планирование эксперимента. – СПб.: СПб ГУТ, 2014. – 86 с.
3. Кравченко Н.С. Методы обработки результатов измерений и оценки погрешностей в учебном лабораторном практикуме: учебное пособие / Н.С. Кравченко, О.Г. Ревинская; Национальный исследовательский Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2011. – 88 с.
4. Степанова Е.А. Основы обработки результатов измерений : [учеб. пособие] / Е. А. Степанова, Н. А. Скулкина, А. С. Волегов ; [под общ. ред. Е. А. Степановой] ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Урал. федер. ун-т. – Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2014. – 95 с.
5. Трегубова Е.В. Основы статистической обработки опытных данных: Учебно-методическое пособие / Нижегородская государственная с.-х. академия. – Нижний Новгород, 2013.
6. Лялькина Г.Б. Математическая обработка результатов эксперимента : учеб. пособие / Г.Б. Лялькина, О.В. Бердышев. – Пермь : Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2013. – 78 с.
7. Знакомство с Minitab 16 [Электронный ресурс] // Официальный сайт Minitab. [2015]. URL: http://www.minitab.com/uploadedFiles/Documents/meet-minitab/RU16_MeetMinitab.pdf (дата обращения: 23.08.2015).
8. Вавилова Г.В. Математическая обработка результатов измерения: учебное пособие/ Г.В. Вавилова; Национальный ис-

следовательский Томский политехнический университет. - Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2013.- 167 с.

9. Бекетаев О.Б. Применение однофакторных регрессионно-корреляционных уравнений для решения задач статического исследования. / КГТУ им. И. Раззакова; сост. О.Б. Бекетаев. – Б.: ИЦ «Текник», 2010. – 60 с.

10. Шкляр М. Ф. Основы научных исследований [Электронный ресурс] : Учеб. пособие / М. Ф. Шкляр. – 5-е изд. – Москва : Издательско-торговая корпорация Дашков и К°, 2013. – 244 с. – ISBN 978-5-394-02162-6. - URL: http://znanium.com/bookread.php?book=415019 (дата обращения: 30.08.2015).

11. Елисеева И.И. Эконометрика. Учебник для магистров / С.В. Курышева, Ю.В. Нерадовская, Д.И. Беляков, Л.М. Галиуллина, А.В. Кабачек, И.И. Елисеева. – М.: Юрайт, 2014. – 449 с.

12. Введение в теорию планирования эксперимента: Учеб. пособие / Н.И. Сидняев, Н.Т. Вилисова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. – 463 с.

13. Кузнецов И. Н. Основы научных исследований [Электронный ресурс] : учебное пособие / И. Н. Кузнецов. - Москва : Издательско-торговая корпорация Дашков и Ко, 2013. – 284 с. – ISBN 978-5-394-01947-0. – URL: http://znanium.com/bookread.php?book=415064 (дата обращения: 30.08.2015).

14. Лукьянов С. И. Основы инженерного эксперимента [Электронный ресурс]: Учеб. пособие / С. И. Лукьянов, А. Н. Панов, А. Е. Васильев. – Москва : ИЦ РИОР: НИЦ ИНФРА-М, 2014. – 99 с. - ISBN 978-5-369-01301-4. - URL: http://znanium.com/bookread.php?book=431382 (дата обращения: 30.08.2015).

15. Санников Р.Х. Теория подобия и моделирования. Планирование инженерного эксперимента. – Уфа: УГНТУ, 2010. – 214 с.

16. Щурин К. В. Методика и практика планирования и организации эксперимента [Электронный ресурс] : практикум / К. В. Щурин, Д. А. Косых ; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург : ОГУ, 2012. – 185 с. – URL: http://www.bibliorossica.com/book.html?currBookId=8986 (дата обращения: 01.09.2015).

17. Алибеков А.К., Михалев М.А. Практика применения планирования эксперимента: для инженеров и научных работников / Монография. — Махачкала: ДГТУ, 2013. — 126 с.

18. Казаков А.В. Планирование эксперимента и измерение физических величин. – Пермь: Изд-во Перм. нац. иссслед. политехн. ун-та, 2014. – 89 с. — ISBN 978-5-398-01191-3.

19. Квеско Н.Г., Чубик П.С. Методы и средства исследований. Учебное пособие. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2010. – 112 с.

20. Блинова Е.И. Планирование и организация эксперимента. Учебно-методическое пособие. – Минск: Белорусский государственный технологический университет, 2010. – 130 с.

21. Планирование эксперимента [Электронный ресурс] / StatSoft : Электронный учебник по статистике. URL: http://www.statsoft.ru/home/textbook/modules/stexdes.html (дата обращения: 03.09.2015).

Дополнительные:

22. Fisher R.A. The Design of Experiments, 9th Edition. — Hafner Press, 1971, First Published 1935. — 256 p.

23. Box G.E.P., Draper N.R. Response Surfaces, Mixtures, and Ridge Analyses, 2nd Edition. — Wiley, 2007 — 857 p.

24. Афанасьева Н.Ю. Вычислительные и экспериментальные методы научного эксперимента. – М: КНОРУС, 2010. — 336 с.

25. Никитин О.Р. Теория планирования экспериментальных исследований. – Владимир: Изд-во Владим. гос. ун-та, 2012. - 94 с.

26. Семенов Б.А. Инженерный эксперимент в промышленной теплотехнике, теплоэнергетике и теплотехнологиях. Учебное пособие. 2-е изд., доп. - СПб.: Издательство «Лань», 2013. - 400 с. (Учебники для вузов. Специальная литература).

Приложение А

Критические значения t-критерия Стъюдента при уровне значимости 0,10; 0,05; 0,01

Число степеней свободы *df (n-1)*	*a*			Число степеней свободы *df (n-1)*	*a*		
	0,10	0,05	0,01		0,10	0,05	0,01
1	6,3138	12,706	63,657	18	1,7341	2,1009	2,8784
2	2,9200	4,3027	9,9248	19	1,7291	2,0930	2,8609
3	2,3534	3,1825	5,8409	20	1,7247	2,0860	2,8453
4	2,1318	2,7764	4,6041	21	1,7207	2,0796	2,8314
5	2,0150	2,5706	4,0321	22	1,7171	2,0739	2,8188
6	1,9432	2,4469	3,7074	23	1,7139	2,0687	2,8073
7	1,8946	2,3646	3,4995	24	1,7109	2,0639	2,7969
8	1,8595	2,3060	3,3554	25	1,7081	2,0595	2,7874
9	1,8331	2,2622	3,2498	26	1,7056	2,0555	2,7787
10	1,8125	2,2281	3,1693	27	1,7033	2,0518	2,7707
11	1,7959	2,2010	3,1058	28	1,7011	2,0484	2,7633
12	1,7823	2,1788	3,0545	29	1,6991	2,0452	2,7564
13	1,7709	2,1604	3,0123	30	1,6973	2,0423	2,7500
14	1,7613	2,1448	2,9768	40	1,6839	2,0211	2,7045
15	1,7530	2,1315	2,9467	60	1,6707	2,0003	2,6603
16	1,7459	2,1199	2,9208	120	1,6577	1,9799	2,6174
17	1,7396	2,1098	2,8982	∞	1,6449	1,9600	2,5758

Приложение Б

Таблица значений F-критерия Фишера при уровне значимости 0,05

k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	161,45	199,50	215,72	224,57	230,17	233,97	238,89	243,91	249,04	234,52
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,45	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,64	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,77	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,53	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,84	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,41	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,12	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,90	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,74	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,61	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,50	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,60	2,42	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,35	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,29	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,24	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,38	2,19	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,15	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,31	2,11	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,08	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,25	2,05	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,23	2,03	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,38	2,20	2,00	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,18	1,98	1,73
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,16	1,96	41,71
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,89	1,62
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,13	1,95	1,74	1,44
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,94	1,75	1,52	1,00

Примечание: k_1 – число факторов, а k_2 – общее число экспериментов (n) минус число факторов и минус 1.

Приложение В

Таблица критических точек распределения Дарбина-Уотсона при уровне значимости 0,05

n	k=1		k=2		k=3		k=4		k=5	
	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
6	0,61	1,40								
7	0,70	1,36	0,47	1,90						
8	0,76	1,33	0,56	1,78	0,37	2,29				
9	0,82	1,32	0,63	1,70	0,46	2,13				
10	0,88	1,32	0,70	1,64	0,53	2,02				
11	0,93	1,32	0,66	1,60	0,60	1,93				
12	0,97	1,33	0,81	1,58	0,66	1,86				
13	1,01	1,34	0,86	1,56	0,72	1,82				
14	1,05	1,35	0,91	1,55	0,77	1,78				
16	1,10	1,37	0,98	1,54	0,86	1,73	0,74	1,93	0,62	2,15
17	1,13	1,38	1,02	1,54	0,90	1,71	0,78	1,90	0,67	2,10
18	1,16	1,39	1,05	1,53	0,93	1,69	0,82	1,87	0,71	2,06
19	1,18	1,40	1,08	1,53	0,97	1,68	0,86	1,85	0,75	2,02
20	1,20	1,41	1,10	1,54	1,00	1,68	0,90	1,83	0,79	1,99
21	1,22	1,42	1,13	1,54	1,03	1,67	0,93	1,81	0,83	1,96
22	1,24	1,43	1,15	1,54	1,05	1,66	0,96	1,80	0,86	1,94
23	1,26	1,44	1,17	1,54	1,08	1,66	0,99	1,79	0,90	1,92
24	1,27	1,45	1,19	1,55	1,10	1,66	1,01	1,78	0,93	1,90
25	1,29	1,45	1,21	1,55	1,12	1,66	1,04	1,77	0,95	1,89
26	1,30	1,46	1,22	1,55	1,14	1,65	1,06	1,76	0,98	1,88
27	1,32	1,47	1,24	1,56	1,16	1,65	1,08	1,76	1,01	1,86
28	1,33	1,48	1,26	1,56	1,18	1,65	1,10	1,75	1,03	1,85
29	1,34	1,48	1,27	1,56	1,20	1,65	1,10	1,75	1,03	1,85
30	1,35	1,49	1,28	1,57	1,21	1,65	1,14	1,74	1,07	1,83

Примечание: k – число факторов, а n – общее число экспериментов, d_L – нижнее граничное значение, d_U – верхнее граничное значение.

Приложение Г

Способы преобразования данных и вычисления параметров *a*, *b* по оценкам *a**, *b**

Исходная спецификация	Преобразование $x \to x^*$	Преобразование $y \to y^*$	Вычисление b по b^*	Вычисление b по b^*
$y = a + \frac{b}{x} + \varepsilon$	$x^* = \frac{1}{x}$	$y^* = y$	$b = b^*$	$a = a^*$
$y = \frac{1}{a + bx + \varepsilon}$	$x^* = x$	$y^* = \frac{1}{y}$	$b = b^*$	$a = a^*$
$y = \frac{x}{a + bx + \varepsilon}$	$x^* = \frac{1}{x}$	$y^* = \frac{1}{y}$	$b = a^*$	$a = b^*$
$y = ae^{bx+\varepsilon}$	$x^* = x$	$y^* = \ln y$	$b = b^*$	$a = e^{a^*}$
$y = ae^{\frac{b}{x}+\varepsilon}$	$x^* = \frac{1}{x}$	$y^* = \ln y$	$b = b^*$	$a = e^{a^*}$
$y = \frac{1}{a + be^{-x} + \varepsilon}$	$x^* = e^{-x}$	$y^* = \frac{1}{y}$	$b = b^*$	$a = a^*$
$y = ax^b e^{\varepsilon}$	$x^* = \ln x$	$y^* = \ln y$	$b = b^*$	$a = e^{a^*}$

Подписано в печать 23.11.2015 г.
Формат 60х84/16 Бумага офсетная Печать ризографическая
Уч.-изд.л. 9 Усл.-печ.л. 9 Тираж 50 экз.
Заказ 663
Издательско-полиграфический центр
Набережночелнинского института
Казанского (Приволжского) федерального университета

423810, г. Набережные Челны, Новый город, проспект Мира, 68/19
тел./факс (8552) 39-65-99 e-mail: ic-nchi-kpfu@mail.ru