Федеральное агентство по образованию
Уральский государственный университет им. А. М. Горького

Ю. Д. Панов, Р. Ф. Егоров

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА.
МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Допущено УМО по классическому университетскому образованию
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных
заведений, обучающихся по направлению 010700 «Физика»

Екатеринбург • 2005

Оглавление

Предисловие

Предлагаемое учебное пособие предназначено для студентов физического факультета университета, изучающих курс «Линейные и нелинейные уравнения физики. Методы математической физики», и может быть использовано при подготовке к практическим занятиям по данному курсу и самостоятельной работе над некоторыми разделами математической физики.

Основное внимание в пособии уделено задаче на собственные значения (гл. 2) и решению смешанных и краевых задач математической физики методом Фурье (гл. 5). Рассмотрены также базовые понятия функционального анализа (гл. 1), методы решения интегральных уравнений (гл. 3), вопросы классификации линейных уравнений в частных производных второго порядка (гл. 4). Глава 6 посвящена теории обобщенных функций и решению задачи Коши для уравнения теплопроводности и уравнения колебаний методом свертки.

Пособие написано на основе многолетнего опыта проведения практических занятий и лекций по методам математической физики на физическом факультете Уральского государственного университета. Материал, изложенный в пособии, несколько превосходит по объему и подробности изложения реальный учебный план практических занятий.

При составлении задач использовались пособия [1, 2, 3]. Эти книги можно рекомендовать для более глубокого изучения курса. Основным учебником, в котором изложение теоретического материала наиболее близко по стилю данному пособию, является учебник [4]. В качестве дополнительных можно рекомендовать учебники [5, 6]. Справочный материал по линейным и нелинейным уравнениям математической физики можно найти в книгах [7, 8]. По вопросам теории специальных функций можно рекомендовать книгу [9], а также справочник [10], по функциональному анализу — учебники [11, 12], по интегральным уравнениям — учебник [13]. Для углубленного изучения теории обобщенных функций можно рекомендовать учебник [14].

Глава 1

Элементы функционального анализа

Понятия и теоремы функционального анализа широко используются в математической и теоретической физике. Здесь мы приводим краткую сводку основных определений и фактов, которые будут использоваться в следующих разделах. Часть понятий и простейших фактов сформулированы в виде задач в конце главы. Для углубленного изучения функционального анализа можно обратиться к пособиям [11, 12].

Множество $\mathbb{M}$ называется *метрическим пространством*, если для любых элементов $x, y \in \mathbb{M}$ задана действительная функция $\rho(x,y)$, которая называется *метрикой* и удовлетворяет следующим аксиомам:

1. $\rho(x,y) > 0$ при $x \neq y$, $\rho(x,x) = 0$;
2. $\rho(x,y) = \rho(y,x)$;
3. $\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y)$ (неравенство треугольника).

Элементы метрического пространства называются также *точками*. Значение функции $\rho(x,y)$ называется *расстоянием* от точки x до точки y.

Метрическими пространствами являются множество $C[a,b]$ функций, определенных и непрерывных на отрезке $[a,b]$, с метрикой $\rho(f,g) = \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x) - g(x)|$, и множество $L_2[a,b]$ функций, определенных и интегрируемых с квадратом по Лебегу на отрезке $[a,b]$, с метрикой $\rho(f,g) = \sqrt{\int_a^b [f(x) - g(x)]^2\,dx}$.

Используя понятие расстояния между элементами, в метрическом пространстве можно определить понятие сходимости. Последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ элементов из $\mathbb{M}$ *сходится* к $x \in \mathbb{M}$ ($x_k \to x$ в $\mathbb{M}$, $k \to \infty$), если числовая последовательность $\rho(x_k, x)$ сходится к нулю: $\rho(x_k, x) \to 0$, $k \to \infty$. Элемент x называется *пределом последовательности* $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ и обозначается $\lim\limits_{k\to\infty} x_k$.

Последовательность элементов $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ из метрического пространства $\mathbb{M}$ называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$ при $m, n \geqslant N(\varepsilon)$. Метрическое пространство $\mathbb{M}$ называется *полным*, если всякая фундаментальная последовательность элементов из $\mathbb{M}$ сходится к некоторому $x \in \mathbb{M}$. Значимость этих понятий обусловлена следующим обстоятельством: общего алгоритма, позволяющего найти предел любой последовательности, не существует, поэтому важны необходимые и достаточные признаки сходимости, основанные на свойствах самой последовательности. В полном метрическом пространстве таким признаком является фундаментальность последовательности.

Множество G из метрического пространства $\mathbb{M}$ называется *ограниченным*, если существуют $\varepsilon > 0$ и элемент $x_0 \in \mathbb{M}$ такие, что для любого $x \in G$: $\rho(x, x_0) \leqslant \varepsilon$. Множество K из метрического пространства $\mathbb{M}$ называется *компактным*, если из любой бесконечной последовательности элементов K можно выделить фундаментальную подпоследовательность.

Множество G из метрического пространства $\mathbb{M}$ называется *всюду плотным* в $\mathbb{M}$, если любой элемент из $\mathbb{M}$ есть предел последовательности элементов из G. Множество называется *счетным*, если все его элементы можно занумеровать всеми натуральными числами. Например, множество всех рациональных чисел отрезка $[0, 1]$ — счетное, а множество всех иррациональных чисел отрезка $[0, 1]$ счетным не является. Метрическое пространство $\mathbb{M}$ называется *сепарабельным*, если в нем существует счетное всюду плотное множество.

Множество $\mathbb{E}$ называется *вещественным* (*комплексным*) *линейным пространством*, если для любых элементов $x, y \in \mathbb{E}$ определен элемент $x + y \in \mathbb{E}$ — *сумма элементов* x и y, для любого элемента $x \in \mathbb{E}$ и любого числа $\alpha \in \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ определен элемент $\alpha\, x \in \mathbb{E}$ — *произведение элемента* x на число α и справедливы следующие аксиомы:

1. $x + y = y + x$;
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$;
3. Существует $0 \in \mathbb{E}$ такой, что для любого $x \in \mathbb{E}$: $0 + x = x$;
4. Для любого $x \in \mathbb{E}$ существует $-x \in \mathbb{E}$ такой, что $-x + x = 0$;
5. $1 \cdot x = x$;
6. $\alpha\,(\beta\, x) = (\alpha\, \beta)\, x$;
7. $\alpha\,(x + y) = \alpha\, x + \alpha\, y$;
8. $(\alpha + \beta)\, x = \alpha\, x + \beta\, x$.

Элементы линейного пространства называются также *векторами.*

Множества $C[a,b]$ и $L_2[a,b]$ являются линейными пространствами.

Конечная система $x_1, \ldots x_n$ векторов из $\mathbb{E}$ называется *линейно независимой*, если равенство $\alpha_1 x_1 + \ldots \alpha_n x_n = 0$ выполняется только при $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. В противном случае система $x_1, \ldots x_n$ *линейно зависима.* Бесконечная система $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ векторов из $\mathbb{E}$ называется линейно независимой, если любая ее конечная подсистема линейно независима. *Линейной оболочкой* $D(X)$ множества $X \subseteq \mathbb{E}$ называется множество всех конечных линейных комбинаций из векторов множества X: $D(X) = \{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k\, x_k :\, x_k \in X,\, \alpha_k \in \mathbb{R}(\mathbb{C})\}$.

Линейное пространство $\mathbb{N}$ называется *нормированным*, если для каждого $x \in \mathbb{N}$ определена действительная функция $\|x\|$, которая называется *нормой* и удовлетворяет следующим аксиомам:

1. $\|x\| > 0$ при $x \neq 0$, $\|0\| = 0$;
2. Для любого числа α: $\|\alpha\, x\| = |\alpha|\, \|x\|$;
3. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Нормированными пространствами являются линейное пространство $C[a,b]$ с нормой $\|f\| = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)|$ и линейное пространство $L_2[a,b]$ с нормой $\|f\| = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\, dx}$.

В каждом нормированном пространстве $\mathbb{N}$ можно ввести *метрику, порожденную нормой*: $\rho(x,y) = \|x - y\|$, и рассматривать $\mathbb{N}$ как метрическое пространство. Отсюда следует, что нормированные пространства обладают всеми свойствами метрических пространств. В частности, последовательность элементов из $\mathbb{N}$ *сходится по норме*, если она сходится по метрике, порожденной нормой; аналогично в $\mathbb{N}$ определяется понятие фундаментальной последовательности. Нормированное пространство $\mathbb{B}$ называется *банаховым*, если оно является полным относительно метрики $\rho(x,y) = \|x - y\|$.

Система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ векторов нормированного пространства $\mathbb{N}$ называется *базисом*, если любой вектор $x \in \mathbb{N}$ может быть единственным образом представлен в виде $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k\, x_k$, где сходимость ряда понимается как сходимость по норме последовательности его частичных сумм.

Будем говорить, что в вещественном (комплексном) линейном пространстве $\mathbb{H}$ задано *скалярное произведение*, если для любых $x, y \in \mathbb{H}$ определена действительная (комплексная) функция (x,y) — скалярное произведение векторов x и y, удовлетворяющая следующим аксиомам в случае вещественного $\mathbb{H}$:

1. $(x,x) > 0$ при $x \neq 0$, $(x,x) = 0$ при $x = 0$;
2. $(x, y+z) = (x,y) + (x,z)$;
3. $(x,y) = (y,x)$;
4. Для любого $\alpha \in \mathbb{R}$: $(\alpha\, x, y) = \alpha\,(x,y)$.

В случае комплексного $\mathbb{H}$ аксиомы 1 и 2 сохраняют свой вид, а аксиомы 3 и 4 следует заменить на

$3'$. $(x,y) = (y,x)^*$, где звездочка обозначает комплексное сопряжение;

$4'$. Для любого $\alpha \in \mathbb{C}$: $(\alpha\, x, y) = \alpha^*\,(x,y)$.

В каждом пространстве $\mathbb{H}$ со скалярным произведением можно ввести *норму, порожденную скалярным произведением*: $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$; следовательно, $\mathbb{H}$ обладает всеми свойствами нормированного пространства.

Линейное пространство $\mathbb{H}$ со скалярным произведением называется *гильбертовым*, если $\mathbb{H}$ является полным относительно нормы, порожденной скалярным произведением.

Примером гильбертова пространства является линейное пространство $L_2[a,b]$ со скалярным произведением $(f,g) = \int_a^b f^*(x)\, g(x)\, dx$.

Векторы $x, y \in \mathbb{H}$ называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю: $(x,y) = 0$. Система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется *ортонормированной*, если $(e_k, e_m) = \delta_{km}$, $k, m = 1, 2, \ldots$. Ортогональные векторы линейно независимы. Система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ векторов из гильбертова пространства $\mathbb{H}$ называется *полной*, если не существует ненулевого вектора из $\mathbb{H}$, ортогонального всем векторам этой системы. Согласно теореме Фурье в гильбертовом пространстве полная ортонормированная система является базисом, т. е. любой вектор $x \in \mathbb{H}$ можно единственным образом представить в виде ряда $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k e_k$, который называется *рядом Фурье* элемента x по системе $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, а числа $c_k = (x, e_k)$ называются *коэффициентами Фурье* элемента x, причем $\|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2$.

Пусть $\mathbb{E}$ — линейное пространство. *Оператор* $\hat{A}$, определенный в пространстве $\mathbb{E}$, есть отображение, которое каждому элементу $x \in \mathbb{E}$ ставит в соответствие элемент $y \in \mathbb{E}$. Оператор $\hat{A}$ называется *линейным*, если для любых $x, y \in \mathbb{E}$ и любых чисел α, β выполняется равенство $\hat{A}\,(\alpha x + \beta y) = \alpha \hat{A} x + \beta \hat{A} y$. Линейный оператор $\hat{A}$, определенный в нормированном пространстве $\mathbb{N}$, называется *ограниченным*, если он переводит ограниченные множества в ограниченные. *Нормой* линейного ограниченного оператора $\hat{A}$ называется число $\|\hat{A}\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|\hat{A}x\|$. Линейный оператор $\hat{A}$, определенный в нормированном пространстве $\mathbb{N}$, называется *непрерывным в точке* $x \in \mathbb{N}$, если для любой последовательности $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, сходящейся к x, последовательность $\{\hat{A}x_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к $\hat{A}x$. Можно доказать, что линейный оператор, непрерывный в какой-либо точке нормированного пространства, непрерывен во всем пространстве и что непрерывность оператора равносильна его ограниченности.

Линейный оператор $\hat{A}$, определенный в нормированном пространстве $\mathbb{N}$, называется *вполне непрерывным*, если он переводит всякое ограниченное множество в компактное. Всякий вполне непрерывный оператор является непрерывным, обратное утверждение несправедливо.

Линейный оператор $\hat{A}$, определенный в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$, называется *неотрицательным*, если для любого $x \in \mathbb{H}$ справедливо $(\hat{A}x, x) \geqslant 0$. Линейный оператор $\hat{A}$, определенный в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$, называется *симметричным*, если для любых векторов $x, y \in \mathbb{H}$ выполняется равенство $(\hat{A}x, y) = (x, \hat{A}y)$.

Одной из главных задач, связанных с изучением линейных операторов в гильбертовом пространстве, является *задача на собственные значения*, имеющая вид $\hat{A}\,x = \lambda\,x$, где λ — число. Каждый элемент $x \neq 0$, удовлетворяющий этому уравнению, называется *собственным вектором*, а λ — *собственным значением*. Удобно также выбирать собственные векторы нормированными: $\|x\| = 1$, чтобы избавиться от неопределенности, связанной с однородностью уравнения по x. Задача на собственные значения в связи с уравнениями математической физики будет подробно рассматриваться в последующих разделах.

Важность задачи на собственные значения определяется теоремой Гильберта: в сепарабельном гильбертовом пространстве собственные векторы линейного симметричного вполне непрерывного оператора образуют ортонормированный базис. Теорема Гильберта дает один из главных инструментов решения задач математической и теоретической физики.

1.1. Докажите, что метрическими пространствами являются:

1) множество $C[a, b]$ функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$, с мет-

рикой $\rho(f,g)=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-g(x)|$;

2) множество $L_2[a,b]$ функций, интегрируемых с квадратом по Лебегу на отрезке $[a,b]$, с метрикой $\rho(f,g)=\sqrt{\int_a^b[f(x)-g(x)]^2dx}$.

1.2. Пусть $\mathbb{M}$ — метрическое пространство. Докажите, что если $x_k\to x$ и $y_k\to y$ в $\mathbb{M}$, $k\to\infty$, то $\rho(x_k,y_k)\to\rho(x,y)$, $k\to\infty$.

1.3. Проверьте фундаментальность последовательности функций $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ из метрического пространства $L_2[0,1]$ и докажите, что $x^n\to 0$ в $L_2[0,1]$, $n\to\infty$.

1.4. Докажите, что следующие множества являются линейными пространствами:

1) множество непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций, удовлетворяющих граничным условиям $f(0)=0$, $f(1)=0$;

2) множество непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0,1]$ функций, удовлетворяющих граничным условиям $f'(0)=0$, $f'(1)=0$;

3) множество непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций, для которых $\int_0^1 f(x)\,dx=0$.

1.5. Докажите, что следующие множества являются линейными пространствами:

1) множество l_2 числовых последовательностей, суммируемых с квадратом: $x=\{x_k\}_{k=1}^{\infty}\in l_2$, если $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k^2$ сходится;

2) множество $L_2[a,b]$ функций, определенных и интегрируемых с квадратом по Лебегу на отрезке $[a,b]$: $f(x)\in L_2[a,b]$, если $\int_a^b f^2(x)\,dx$ сходится.

1.6. Докажите, что следующие множества не являются линейными пространствами:

1) множество непрерывных на отрезке $[0,2]$ функций, принимающих значение $f(1)=1$;

2) множество непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0,1]$ функций, удовлетворяющих граничным условиям $f'(0)=1$, $f'(1)=1$;

3) множество непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций, для которых $\int_0^1 f(x)\,dx=1$.

1.7. Предполагая, что функции $\{1,\ x,\ x^2\}$ линейно независимы, докажите, что функция $f(x) = x$ не принадлежит линейной оболочке функций $\varphi(x) = 1 + x$ и $\psi(x) = 1 + x^2$.

1.8. Пусть $\mathbb{N}$ — нормированное пространство. Покажите, что метрика, порожденная нормой $\rho(x, y) = \|x - y\|$, обладает следующими свойствами:

1) инвариантностью относительно сдвига: $\rho(x + z, y + z) = \rho(x, y)$;
2) однородностью: $\rho(\alpha\, x, \alpha\, y) = |\alpha|\, \rho(x, y)$.

1.9. Пусть l_2 — линейное пространство суммируемых с квадратом числовых последовательностей $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$. Докажите, что выражение $\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^2}$ задает норму для $x \in l_2$.

1.10. Пусть $\mathbb{N}$ — линейное пространство квадратных матриц размера $(n{\times}n)$: $A = (a_{i,j})$, $i, j = 1, \ldots n$ с обычным правилом для сложения матриц и умножения матрицы на число. Докажите, что $\max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{ij}|$ является нормой в $\mathbb{N}$.

1.11. Пусть $C[a, b]$ — нормированное пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с нормой $\|f\| = \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x)|$. Докажите, что в $C[a, b]$ не выполняется *равенство параллелограмма*:

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2\,\|f\|^2 + 2\,\|g\|^2\ .$$

1.12. Пусть $\mathbb{H}$ — пространство со скалярным произведением. Докажите *неравенство Коши—Буняковского*

$$|(x, y)| \leqslant \sqrt{(x, x)}\,\sqrt{(y, y)}\ .$$

1.13. Пусть $\mathbb{H}$ — пространство со скалярным произведением. Докажите, что функция $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ удовлетворяет аксиомам нормы.

1.14. Пусть $\mathbb{H}$ — гильбертово пространство. Покажите, что норма, порожденная скалярным произведением, удовлетворяет равенству параллелограмма: $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2$.

1.15. Пусть l_2 — множество суммируемых с квадратом числовых последовательностей $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$. Докажите, что выражение $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ задает скалярное произведение для $x, y \in l_2$.

1.16. Пусть $\mathbb{H}$ — гильбертово пространство. Докажите, что если векторы $x \neq 0$ и $y \neq 0$ ортогональны, то они линейно независимы.

1.17. Докажите, что следующие функции образуют ортогональную систему в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega, \rho)$, в котором скалярное произведение задано правилом

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(x)\, g(x)\, \rho(x)\, dx\ , \text{ где } \ \rho(x) \geqslant 0;$$

1) $\sin kx$, $k = 1, 2, \ldots$, $\Omega = (0, \pi)$, $\rho(x) = 1$;

2) $e^{im\varphi}$, $m = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$, $\Omega = (0, 2\pi)$, $\rho(x) = 1$;

3) $P_l(x) = \dfrac{1}{2^l\, l!} \dfrac{d^l}{dx^l} \left(x^2 - 1\right)^l$ – полиномы Лежандра, $l = 0, 1, 2, \ldots$, $\Omega = (-1, +1)$, $\rho(x) = 1$;

4) $P_l^m(x) = \left(1 - x^2\right)^{\frac{m}{2}} \dfrac{d^m}{dx^m} P_l(x)$ – присоединенные функции Лежандра 1-го рода ($m \geqslant 0$), $l = 0, 1, 2, \ldots$, $\Omega = (-1, +1)$, $\rho(x) = 1$;

5) $J_\nu(z_k x)$, $k = 1, 2, \ldots$, $\Omega = (0, 1)$, $\rho(x) = x$. Здесь $J_\nu(x)$ – функции Бесселя 1-го рода порядка ν, z_k – k-й корень уравнения $J_\nu(z) = 0$.

1.18. Докажите, что оператор $\hat{A} : U \to L_2[a, b]$ линейный:

1) $\hat{A} f(x) = \varphi(x) \dfrac{d}{dx} f(x)$, где $\varphi(x) \in L_2[a, b]$ задана; U — множество непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[a, b]$;

2) $\hat{A} f(x) = \int_a^b K(x, y)\, f(y)\, dy$, где $K(x, y) \in L_2\left([a, b] \otimes [a, b]\right)$ и $U = L_2[a, b]$.

1.19. Докажите, что оператор $\hat{A} : L_2[a, b] \to L_2[a, b]$ не является линейным:

1) $\hat{A} f(x) = f^2(x)$;

2) $\hat{A} f(x) = f(x) + 1$.

1.20. Пусть оператор $\hat{A} : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$ действует по правилу $\hat{A}f(x) = \varphi(x)f(x)$, где $\varphi(x)$ – заданная непрерывная функция. Докажите, что оператор $\hat{A}$ является непрерывным.

1.21. Пусть $K(x,y) \in L_2\left([a,b] \otimes [a,b]\right)$. Докажите, что интегральный оператор Фредгольма $\hat{A} : L_2[a,b] \to L_2[a,b]$, действующий по правилу

$$\hat{A}\,\varphi(x) = \int_a^b K(x,y)\,\varphi(y)\,dy\,,$$

является непрерывным.

1.22. Пусть U — множество непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[a,b]$ и оператор $\hat{A} : U \to L_2[0,\pi]$ действует по правилу

$$\hat{A}f(x) = f'(x)\,.$$

Докажите, что оператор $\hat{A}$ не является непрерывным.

1.23. Докажите, что единичный оператор $\hat{E} : l_2 \to l_2$ является непрерывным, но не является вполне непрерывным.

1.24. Пусть M — конечномерное подпространство нормированного пространства N. Докажите, что любой линейный ограниченный оператор $\hat{A} : N \to M$ является вполне непрерывным.

1.25. Пусть оператор $\hat{A} : U \to L_2[a,b]$ действует по правилу

$$\hat{A}f(x) = -f''(x)\,.$$

Докажите, что оператор $\hat{A}$ является неотрицательным и симметричным, если U — множество дважды непрерывно дифференцируемых функций из $L_2[a,b]$, удовлетворяющих граничным условиям:

1) $f(a) = 0,\ f(b) = 0\,;$

2) $f'(a) = 0,\ f(b) = 0\,;$

3) $f'(a) = 0,\ f'(b) = 0\,.$

Ответы и указания к главе 1

1.1. 1) *Указание.* Справедливость аксиом метрики 1 и 2 для $\rho(f, g)$ очевидна. Необходимо проверить неравенство треугольника, опираясь на свойства модуля и максимума.

2) *Указание.* Справедливость аксиом метрики 1 и 2 для $\rho(f, g)$ очевидна. Необходимо проверить неравенство треугольника, опираясь на неравенство Коши—Буняковского

$$\left|\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}\,\sqrt{\int_a^b g^2(x)\,dx}$$

(см. задачу **1.12.**).

1.2. *Указание.* Рассматривая $\rho(x_k, y_k)$, необходимо применить неравенство треугольника, последовательно используя точки x и y, а затем учесть сходимость последовательностей $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$.

1.3. *Указание.* Чтобы проверить определение фундаментальной последовательности, необходимо вычислить $\rho(x^m, x^n) = \sqrt{\int_0^1 (x^m - x^n)^2\,dx}$ и доказать, что предел при $m, n \to \infty$ равен нулю. Аналогично, сходимость $x^n \to 0$ в $L_2[0,1]$ означает сходимость к нулю $\rho(x^n, 0) = \sqrt{\int_0^1 x^{2n}\,dx}$ при $n \to \infty$.

1.4. *Указание.* Необходимо для произвольных элементов указанных множеств проверить аксиомы линейного пространства.

1.5. *Указание.* При доказательстве того, что сумма элементов также суммируема (интегрируема) с квадратом, можно использовать элементарное числовое неравенство

$$2ab \leqslant a^2 + b^2\,.$$

1.6. *Указание.* Достаточно показать, например, что сумма элементов не является элементом указанного множества.

1.7. *Указание.* Предполагая тождество $\alpha\varphi(x) + \beta\psi(x) \equiv f(x)$ и пользуясь линейной независимостью функций $\{1,\ x,\ x^2\}$, получить систему уравнений для коэффициентов α и β и показать, что она несовместна.

1.8. *Указание.* Необходимо непосредственно воспользоваться определением метрики, порожденной нормой.

1.9. Очевидно, аксиомы нормы 1 и 2 выполнены. Для проверки аксиомы 3 воспользуемся неравенством Коши—Буняковского (см. задачу **1.12.**):

$$|\sum_{k=1}^{\infty} x_k\, y_k| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2}\,\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} y_k^2} = \|x\|\cdot\|y\| \ .$$

Запишем

$$\|x-y\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}(x_k-y_k)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 - 2\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k + \sum_{k=1}^{\infty} y_k^2 \leqslant$$
$$\leqslant \|x\|^2 + 2\,\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\|+\|y\|)^2 .$$

Отсюда следует, что аксиома 3 также выполняется.

1.10. *Указание.* Справедливость аксиом нормы 1 и 2 для $\max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{ij}|$ очевидна. Необходимо проверить аксиому 3, используя свойства модуля и максимума.

1.11. *Указание.* Достаточно привести контрпример, используя в качестве $f(x)$ и $g(x)$ линейные функции.

1.12. Пусть $x, y \in \mathbb{H}$. Для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ справедливо $(x+\lambda y, x+\lambda y) \geqslant 0$. Раскрывая скалярное произведение, получим квадратичное по λ неравенство

$$(x,x) + 2\lambda\,(x,y) + \lambda^2\,(y,y) \geqslant 0\,.$$

Оно выполняется для всех λ, только если дискриминант отрицателен или равен нулю: $4(x,y)^2 - 4(x,x)(y,y) \leqslant 0$. Отсюда следует неравенство Коши—Буняковского

$$|(x,y)| \leqslant \sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}\,.$$

1.13. *Указание.* При проверке аксиомы 3 необходимо использовать неравенство Коши—Буняковского (см. задачу **1.12.**).

1.14. *Указание.* Необходимо непосредственно воспользоваться определением нормы, порожденной скалярным произведением.

1.15. *Указание.* При доказательстве сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ можно использовать указание к задаче **1.5.** Аксиомы скалярного произведения проверяются непосредственно.

1.16. Рассуждая от противного, предположим, что $\alpha\, x + \beta\, y = 0$, где хотя бы одно из чисел α или β отлично от нуля. Умножая равенство скалярно на x, получим

$$\alpha\,(x, x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0\,.$$

Умножая равенство скалярно на y, получим, что и $\beta = 0$. Следовательно, предположение о линейной зависимости несправедливо.

1.17. 1) $(\sin kx, \sin mx) = \displaystyle\int_0^\pi \sin kx\, \sin mx\, dx = \frac{\pi}{2}\,\delta_{km}$,

где $\delta_{km} = \begin{cases} 1, & k{=}m\,, \\ 0, & k{\neq}m\,. \end{cases}$

2) $$\left(e^{im\varphi}, e^{im'\varphi}\right) = \int_0^{2\pi} e^{i(-m+m')\varphi} d\varphi = 2\pi\,\delta_{mm'}\,.$$

3) Рассмотрим скалярное произведение полиномов Лежандра:

$$(P_l, P_{l'}) = \int_{-1}^1 P_l(x)\, P_{l'}(x)\, dx = \frac{1}{2^{l+l'}\, l!\, l'!} \int_{-1}^1 \frac{d^l}{dx^l}\left(x^2{-}1\right)^l \frac{d^{l'}}{dx^{l'}}\left(x^2{-}1\right)^{l'} dx.$$

Предполагая, что $l \geqslant l'$, проинтегрируем по частям:

$$\int_{-1}^1 \frac{d^l}{dx^l}\left(x^2 - 1\right)^l \frac{d^{l'}}{dx^{l'}}\left(x^2 - 1\right)^{l'} dx =$$

$$= \frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}}\left(x^2{-}1\right)^l \frac{d^{l'}}{dx^{l'}}\left(x^2{-}1\right)^{l'}\Bigg|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}}\left(x^2{-}1\right)^l \frac{d^{l'+1}}{dx^{l'+1}}\left(x^2{-}1\right)^{l'} dx.$$

Внеинтегральный член здесь равен нулю, поскольку выражение $\dfrac{d^{l-1}}{dx^{l-1}}\left(x^2 - 1\right)^l$ содержит множитель $\left(x^2 - 1\right)$. Повторяя интегрирование по частям l' раз, получим

$$\int_{-1}^1 \frac{d^l}{dx^l}\left(x^2 - 1\right)^l \frac{d^{l'}}{dx^{l'}}\left(x^2 - 1\right)^{l'} dx =$$

$$= (-1)^{l'} \int_{-1}^1 \frac{d^{l-l'}}{dx^{l-l'}}\left(x^2 - 1\right)^l \frac{d^{2l'}}{dx^{2l'}}\left(x^2 - 1\right)^{l'} dx =$$

$$= (-1)^{l'}(2l')! \int_{-1}^1 \frac{d^{l-l'}}{dx^{l-l'}}\left(x^2 - 1\right)^l dx\,.$$

При $l > l'$, в силу предыдущего рассуждения, интеграл равен нулю. При $l = l'$ имеем

$$\int_{-1}^{1} \left[\frac{d^l}{dx^l} \left(x^2 - 1\right)^l \right]^2 dx = (-1)^l (2l)! \int_{-1}^{1} \left(x^2 - 1\right)^l dx \; .$$

Вычислим

$$I_l = \int_{-1}^{1} \left(x^2 - 1\right)^l dx = x \left(x^2 - 1\right)^l \Big|_{-1}^{1} - 2l \int_{-1}^{1} \left(x^2 - 1\right)^{l-1} x^2 dx =$$

$$= -2l \left(I_l + I_{l-1}\right) .$$

Получим рекуррентное соотношение и найдем

$$I_l = -\frac{2l}{2l+1} \, I_{l-1} = (-1)^2 \frac{2l\,(2l-2)}{(2l+1)(2l-1)} \, I_{l-2} = \ldots = (-1)^l \frac{(2^l\, l!)^2}{(2l+1)!} \, I_0 \; ,$$

где, очевидно, $I_0 = 2$. Собирая найденные результаты, получим

$$\left(P_l, P_{l'}\right) = \frac{2}{2l+1} \, \delta_{ll'} \; .$$

4) Введем обозначение $P_l^{(m)}(x) \equiv \dfrac{d^m}{dx^m} \, P_l(x)$ и найдем скалярное произведение присоединенных функций Лежандра с одинаковым индексом m:

$$\begin{aligned}
\left(P_l^m, P_{l'}^m\right) &= \int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right)^m P_l^{(m)}(x) \, P_{l'}^{(m)}(x) \, dx = \\
&= \left(1 - x^2\right)^m P_l^{(m)}(x) \, P_{l'}^{(m-1)}(x) \Big|_{-1}^{1} - \\
&\quad - \int_{-1}^{1} P_{l'}^{(m-1)}(x) \, \frac{d}{dx} \left[\left(1 - x^2\right)^m P_l^{(m)}(x) \right] dx \; .
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь произведено интегрирование по частям; внеинтегральный член обращается в ноль. Найдем уравнение для m-й производной полиномов Лежандра $P_l^{(m)}(x)$. Полиномы Лежандра удовлетворяют уравнению

$$\left(1 - x^2\right) \frac{d^2}{dx^2} \, P_l(x) - 2x \, \frac{d}{dx} \, P_l(x) + l(l+1) \, P_l(x) = 0 \; .$$

Дифференцируя его m раз, получим

$$\left(1 - x^2\right) P_l^{(m+2)}(x) - 2x \, (m+1) \, P_l^{(m+1)}(x) + \left[\, l(l+1) - m(m+1) \right] P_l^{(m)}(x) = 0 \, .$$

Домножим это уравнение на $\left(1-x^2\right)^m$ и запишем

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)^{m+1} P_l^{(m+1)}(x)\right]+[l(l+1)-m(m+1)]\left(1-x^2\right)^m P_l^{(m)}(x)=0.$$

Заменяя в этом выражении m на $m-1$, найдем

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)^m P_l^{(m)}(x)\right]=-\left[l(l+1)-m(m-1)\right]\left(1-x^2\right)^{m-1} P_l^{(m-1)}(x).$$

Подставляя это выражение в интеграл (1.1), получим рекуррентное соотношение по m:

$$\begin{aligned}\left(P_l^m,P_{l'}^m\right) &= \left[l(l+1)-m(m-1)\right]\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^{m-1}P_l^{(m-1)}(x)\,P_{l'}^{(m-1)}(x)\,dx=\\ &= (l+m)(l-m+1)\left(P_l^{m-1},P_{l'}^{m-1}\right)\ .\end{aligned}$$

Применяя его последовательно, получим

$$\begin{aligned}(P_l^m,P_{l'}^m) &= \frac{(l+m)!}{(l+m-k)!}\,\frac{(l-m+k)!}{(l-m)!}\,(P_l^{m-k},P_{l'}^{m-k})=\\ &= \frac{(l+m)!}{(l-m)!}\,(P_l,P_{l'})=\frac{2}{2l+1}\,\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\,\delta_{ll'}\ ,\end{aligned}\tag{1.2}$$

где для $(P_l,P_{l'})$ использованы результаты предыдущей задачи.

5) Функции Бесселя $J_\nu(x)$ удовлетворяют уравнению

$$x^2\frac{d^2}{dx^2}J_\nu(x)+x\frac{d}{dx}J_\nu(x)+\left(x^2-\nu^2\right)J_\nu(x)=0\ ,$$

которое можно привести к виду

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}J_\nu(x)\right)+\left(x-\frac{\nu^2}{x}\right)J_\nu(x)=0\ .$$

Производя замену переменной: $x\to z\,x$, где $z=z_k$ и $z=z_m$ – различные корни уравнения $J_\nu(z)=0$, получим ДУ для $J_\nu(z_kx)$ и $J_\nu(z_mx)$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}J_\nu(z_kx)\right)+\left(z_k^2x-\frac{\nu^2}{x}\right)J_\nu(z_kx)=0\ ,\\ \frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}J_\nu(z_mx)\right)+\left(z_m^2x-\frac{\nu^2}{x}\right)J_\nu(z_mx)=0\ .\end{aligned}$$

Умножая первое уравнение на $J_\nu(z_m x)$, второе — на $J_\nu(z_k x)$ и вычитая из первого уравнения второе, получим

$$J_\nu(z_m x)\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}J_\nu(z_k x)\right) - J_\nu(z_k x)\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}J_\nu(z_m x)\right) + \\ + \left(z_k^2 - z_m^2\right) x\, J_\nu(z_k x)\, J_\nu(z_m x) = 0\ .$$

Замечая, что

$$\frac{d}{dx}\left[J_\nu(z_m x)\, x\,\frac{d}{dx}J_\nu(z_k x) - J_\nu(z_k x)\, x\,\frac{d}{dx}J_\nu(z_m x)\right] = \\ = J_\nu(z_m x)\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}J_\nu(z_k x)\right) - J_\nu(z_k x)\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}J_\nu(z_m x)\right)\ ,$$

найдем

$$\begin{aligned} &\left(z_m^2 - z_k^2\right)\int_0^1 J_\nu(z_k x)\, J_\nu(z_m x)\, x\, dx = \\ &= \left[J_\nu(z_m x)\, x\,\frac{d}{dx}J_\nu(z_k x) - J_\nu(z_k x)\, x\,\frac{d}{dx}J_\nu(z_m x)\right]\Bigg|_0^1 = \\ &= z_k\, J_\nu(z_m)\, J_\nu'(z_k) - z_m\, J_\nu(z_k)\, J_\nu'(z_m) = 0\ , \end{aligned} \tag{1.3}$$

поскольку $J_\nu(z_k) = 0$ и $J_\nu(z_m) = 0$. Учитывая, что $z_k \neq z_m$, получим

$$\int_0^1 J_\nu(z_k x)\, J_\nu(z_m x)\, x\, dx = 0\ .$$

Замечание. Ортогональными с весом $\rho(x) = x$ на интервале $(0, 1)$ будут также функции $J_\nu(z_k x)$, $k = 1, 2, \ldots$, где z_k – k-й корень уравнения $\alpha J_\nu(z) + \beta z J_\nu'(z) = 0$, $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta > 0$. Действительно, рассмотрим уравнения

$$\alpha J_\nu(z_k) + \beta z_k J_\nu'(z_k) = 0\ ,$$
$$\alpha J_\nu(z_m) + \beta z_m J_\nu'(z_m) = 0$$

как систему относительно α и β. Тогда нетривиальные решения $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ существуют только при равном нулю определителе этой системы:

$$z_k\, J_\nu(z_m)\, J_\nu'(z_k) - z_m\, J_\nu(z_k)\, J_\nu'(z_m) = 0\ .$$

Отсюда, в силу (1.3), следует, что функции $J_\nu(z_k x)$ ортогональны.

1.18. *Указание.* Необходимо непосредственно воспользоваться определением линейного оператора.

1.19. *Указание.* Достаточно показать, например, что $\hat{A}(\alpha f(x)) \neq \alpha \hat{A} f(x)$ для $\alpha \in \mathbb{R}$.

1.20. *Указание.* Достаточно показать, что оператор $\hat{A}$ ограниченный. Для этого можно использовать неравенство Коши—Буняковского (см. задачу **1.12.**), либо неравенство в указании к задаче **1.5.**

1.21. *Указание.* Достаточно показать, что интегральный оператор Фредгольма ограничен. Это можно сделать, используя неравенство Коши—Буняковского (см. задачу **1.12.**) и квадратичную интегрируемость ядра $K(x, y)$.

1.22. *Указание.* Достаточно показать неограниченность оператора $\hat{A}$ на множестве нормированных в $L_2[a, b]$ функций $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kx$.

1.23. *Указание.* Непрерывность оператора $\hat{E}$ проверяется непосредственно по определению. Чтобы доказать, что $\hat{E}$ не является вполне непрерывным оператором, достаточно доказать, например, что единичный шар $B(0, 1)$ в l_2, являясь ограниченным, не является компактным множеством, и учесть, что $\hat{E} : B(0, 1) \to B(0, 1)$.

1.24. *Указание.* Достаточно доказать компактность ограниченного множества в конечномерном пространстве.

1.25. *Указание.* При доказательстве воспользоваться интегрированием по частям.

Глава 2

Задача на собственные значения для оператора Лапласа

Впервые задача на собственные значения встречается в линейной алгебре. Эта задача естественно возникает при рассмотрении важной проблемы приведения квадратичной формы к диагональному виду, что эквивалентно проблеме приведения к диагональному виду симметричной (эрмитовой) матрицы A (соответственно для вещественного или комплексного случая). Хорошо известно, что матрица, в свою очередь, может рассматриваться как линейный оператор $\hat{A}$ в линейном пространстве $\mathbb{R}^n$.

В итоге возникает следующая задача на собственные значения. Дана симметричная матрица A, $A_{ij} = A_{ji}$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$ (соответственно дан линейный оператор $\hat{A}$). Требуется найти векторы $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ и числа $\lambda \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие уравнению

$$\hat{A}\,\vec{x} = \lambda\,\vec{x} \tag{2.1}$$

и дополнительным условиям

$$\vec{x} \neq 0\,, \quad |\vec{x}| = 1\,. \tag{2.2}$$

Эти условия непосредственно связаны с однородностью уравнения (2.1): оно всегда (т. е. для любого λ) имеет тривиальное решение $\vec{x} = 0$, которое в данном случае не представляет интереса, и решение уравнения определено с точностью до умножения на произвольную постоянную, которую удобно зафиксировать условием нормировки $|\vec{x}| = 1$. Подчеркнем, что эта задача фактически требует решения системы n нелинейных уравнений специального вида с $n+1$ неизвестными, которыми являются n компонент вектора $\vec{x}$ и число λ. Поэтому дополнительное условие $\vec{x} \neq 0$ существенно. Векторы $\vec{x}$, являющиеся решениями этой задачи, называются *собственными векторами*, а числа λ — *собственными значениями*. Наиболее важным результатом решения задачи (2.1) является тот факт, что множество собственных векторов образует базис в $\mathbb{R}^n$, причем в этом базисе матрица $\hat{A}$ диагональна. В практическом плане это означает, что при переходе к этому базису легко решаются любые задачи линейной алгебры, связанные с матрицей A.

Можно надеяться, что нечто аналогичное должно иметь место и для других классов линейных операторов, таких, например, как дифференциальные и интегральные операторы. Для этого необходимо должным образом обобщить понятие линейного пространства, симметричного линейного оператора, ортогональности векторов и модуля вектора.

Необходимость такого обобщения диктуется и физическими соображениями. Дело в том, что в классической физике к задаче на собственные значения приводит, например, задача о нахождении собственных колебаний струн, мембран и т. д., а в квантовой механике — фундаментальная задача о нахождении допустимых уровней энергии для квантовых частиц.

Как доказывается в теории уравнений математической физики, указанное обобщение возможно для дифференциальных операторов, если поступить следующим образом. Введем лебегово пространство:

$$L_2[\Omega] = \left\{ f(x) : \int_\Omega f^2(x)\, dx < \infty \,;\ \Omega \subset \mathbb{R}^n \right\} \ , \tag{2.3}$$

где Ω — ограниченное множество. Определим в $L_2[\Omega]$ скалярное произведение:

$$(f, g) = \int_\Omega f(x)\, g(x)\, dx \ . \tag{2.4}$$

Тогда $L_2[\Omega]$ становится сепарабельным гильбертовым пространством, где определено понятие ортогональности векторов и нормы вектора:

$$(f, g) = 0 \ , \quad \|f\| = \sqrt{(f, f)} \ . \tag{2.5}$$

В некоторых случаях удобно ввести в рассмотрение комплекснозначные функции. Тогда определение скалярного произведения изменится:

$$(f, g) = \int_\Omega f^*(x)\, g(x)\, dx \ . \tag{2.6}$$

Эта ситуация встретится нам в дальнейшем, а при рассмотрении задач квантовой механики является обычной практикой.

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор

$$\hat{L}u \stackrel{\text{def}}{=} [-\text{div}\,(p\,\text{grad}) + q\,]\,u = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + q(x)\,u\ , \tag{2.7}$$

где $p(x) \in C^1(\bar{\Omega})$, $q(x) \in C(\bar{\Omega})$, $p(x) > 0$, $q(x) \geqslant 0$. Будем считать, что оператор $\hat{L}$ определен в подпространстве $U \subset L_2[\Omega]$, которое состоит из функций класса $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, удовлетворяющих однородным граничным условиям:

$$\left(\alpha(x)\,u + \beta(x)\,\frac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_{\partial G} = 0\ , \tag{2.8}$$

где $\alpha(x), \beta(x) \in C(\partial G)$, $\alpha(x), \beta(x) \geqslant 0$ и $\alpha(x) + \beta(x) > 0$. Можно доказать, что $\hat{L}$ — симметричный неотрицательный оператор.

Задача на собственные значения для оператора $\hat{L}$ формулируется следующим образом: найти такие числа λ и функции $u(x) \in U$, которые удовлетворяют уравнению

$$\hat{L}u(x) = \lambda\,u(x) \tag{2.9}$$

и дополнительным условиям

$$u(x) \not\equiv 0\ , \quad \|u(x)\| = 1\ . \tag{2.10}$$

Функции $u(x)$ называются *собственными функциями*, а числа λ — *собственными значениями*. При $n = 1$ эта задача называется *задачей Штурма—Лиувилля*.

В простейшем случае, $p(x) = 1$ и $q(x) = 0$, получим задачу на собственные значения для оператора $\hat{L} = -\Delta$, где $\Delta = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ — оператор Лапласа. Мы рассмотрим эту задачу в случаях $n = 1, 2, 3$ для разных типов ограниченных областей и граничных условий.

В этой главе ставятся следующие цели: 1) накопить практический опыт по решению задач на собственные значения в простейших, но тем не менее наиболее часто встречающихся в практике случаях; 2) получить явные решения, которые могут быть использованы в дальнейших главах как часть более сложных задач математической физики; 3) на рассмотренных примерах проиллюстрировать основные положения общей теории задач на собственные значения.

2.1. Одномерный случай: отрезок

Найдем собственные функции и собственные значения следующей задачи:

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2}{dx^2}\,y(x) = \lambda\,y(x)\;, \quad x \in (0,1)\,, \\ y(0) = 0\,, \\ y(1) = 0\,, \\ y(x) \not\equiv 0\;, \quad \|y(x)\| = 1\,. \end{cases} \tag{2.11}$$

Условие нормировки принимает вид

$$\|y(x)\|^2 \equiv \int_0^1 |y(x)|^2 dx = 1\;. \tag{2.12}$$

Дифференциальное уравнение в (2.11) является линейным однородным ОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Подстановка Эйлера $y(x) \propto e^{\alpha x}$ приводит к характеристическому уравнению для α: $-\alpha^2 = \lambda$. В зависимости от значения неизвестного параметра λ возможны три случая.

1. $\underline{\lambda < 0}$. Тогда $\alpha_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda} = \pm\sqrt{|\lambda|}$ и общее решение ДУ имеет вид

$$y(x) = C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}\,x} + C_2 e^{\sqrt{-\lambda}\,x}\;. \tag{2.13}$$

Из граничных условий имеем систему уравнений для C_1 и C_2

$$\begin{cases} y(0) = 0\,, \\ y(1) = 0\,, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_1 \; + \; C_2 = 0\,, \\ C_1\,e^{-\sqrt{-\lambda}} + C_2\,e^{\sqrt{-\lambda}} = 0\,. \end{cases} \tag{2.14}$$

Дополнительное условие $y(x) \not\equiv 0$ требует, чтобы эта система имела нетривиальные решения. Нетривиальные решения будут существовать только в том случае, когда определитель системы равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{-\sqrt{-\lambda}} & e^{\sqrt{-\lambda}} \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\,\mathrm{sh}\,\sqrt{-\lambda} = 0\;. \tag{2.15}$$

Мы пришли к уравнению для отыскания собственных значений λ. Из вида функции $\mathrm{sh}\,x$ следует, что при $\lambda < 0$ уравнение (2.15) не имеет решений, и, следовательно, решений исходной задачи на собственные значения при $\lambda < 0$ не существует.

2. $\underline{\lambda = 0}$. Это случай кратных корней характеристического уравнения: $\alpha_{1,2} = 0$. Общее решение ДУ имеет вид

$$y(x) = C_1\,x + C_2\;. \tag{2.16}$$

Аналогично первому случаю

$$\begin{cases} y(0) = 0\,, \\ y(1) = 0\,, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_2 = 0\,, \\ C_1 + C_2 = 0\,, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0. \quad (2.17)$$

Снова — решение задачи на собственные значения не существует.

3. $\underline{\lambda > 0}$. В этом случае $\alpha_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}$, где корень понимается в смысле арифметического значения. Общее решение ДУ можно записать либо как сумму экспонент с мнимыми показателями, либо через действительные функции $\cos\sqrt{\lambda}\,x$ и $\sin\sqrt{\lambda}\,x$ (окончательный ответ от этого выбора не зависит). Запишем общее решение ДУ в виде

$$y(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}\,x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}\,x\;. \qquad (2.18)$$

Из граничных условий запишем систему уравнений для C_1 и C_2:

$$\begin{cases} y(0) = 0\,, \\ y(1) = 0\,, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_1 \cdot 1 \;+\; C_2 \cdot 0 = 0\,, \\ C_1 \cos\sqrt{\lambda} + C_2 \sin\sqrt{\lambda} = 0\,. \end{cases} \qquad (2.19)$$

Условие существования нетривиальных решений этой системы приводит к уравнению для определения собственных значений λ:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos\sqrt{\lambda} & \sin\sqrt{\lambda} \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\sqrt{\lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\lambda} = \pi k\,,\; k = 1, 2, \ldots\,. \qquad (2.20)$$

Мы получили счетное множество значений параметра $\lambda = \lambda_k = (\pi k)^2$, $k = 1, 2, \ldots$, при которых система (2.19) имеет нетривиальные решения. Подставляя найденные λ_k в (2.19), находим, что уравнения становятся линейно зависимыми. Решение системы (2.19) при $\lambda = \lambda_k$ имеют вид $C_1 = 0$, $C_2 = N_k$, где N_k на этом этапе остаются неопределенными. Собственная функция, соответствующая собственному значению λ_k, имеет вид

$$y_k(x) = N_k \sin \pi k x\;. \qquad (2.21)$$

Условие нормировки определяет модуль N_k:

$$1 = \|y_k\| = \sqrt{\int_0^1 |N_k \sin \pi k x|^2\, dx} = |N_k| \sqrt{\int_0^1 \sin^2 \pi k x\, dx}\;. \qquad (2.22)$$

Вычисляя интеграл, получим $|N_k| = \sqrt{2}$. Знак N_k (в комплексном случае — фазовый множитель $e^{i\alpha}$) остается неопределенным; положим его равным $+1$ (можно и -1). Геометрически этот факт можно интерпретировать как произвол в выборе направления оси координат при выборе базисных векторов.

Окончательно, собственные функции и собственные значения задачи (2.11) имеют вид

$$\lambda_k = (\pi k)^2\,, \quad y_k(x) = \sqrt{2}\sin \pi k x\ , \quad k = 1, 2, \dots\ . \tag{2.23}$$

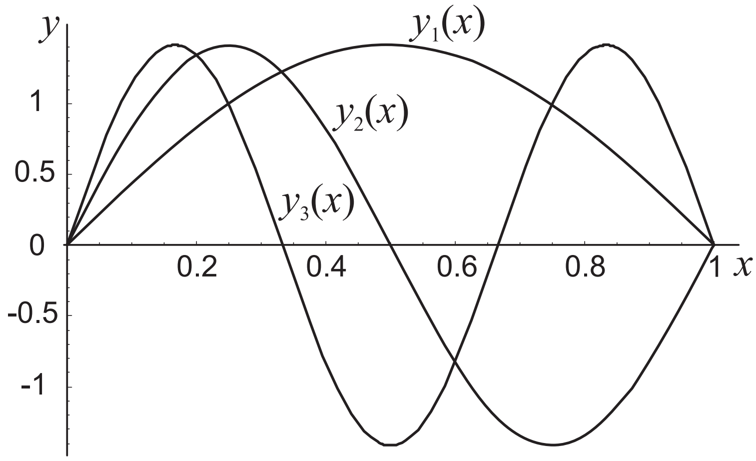


Рис. 2.1

Задача (2.11) является частным случаем задачи Штурма—Лиувилля, и решения (2.23) обладают рядом характерных свойств, в справедливости которых можно убедиться на нашем примере.

1. Собственные значения образуют неотрицательную бесконечно возрастающую последовательность с единственной точкой сгущения на бесконечности; каждому собственному значению соответствует одна собственная функция.

2. Собственные функции образуют ортонормированную систему в $L_2[0,1]$:
$$(y_k, y_m) = \int_0^1 y_k(x)\, y_m(x)\, dx = \delta_{mn}\ .$$

3. Собственная функция, соответствующая наименьшему собственному значению, не имеет узлов, т. е. не обращается в нуль внутри отрезка $[0,1]$; следующая собственная функция имеет ровно один узел; и далее, k-я собственная функция имеет $k-1$ узлов, причем узлы функции $y_{k+1}(x)$ находятся между узлами функции $y_k(x)$ (рис. 2.1).

4. Можно доказать, что $\{y_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ образуют базис в $L_2[0,1]$.

Решения рассмотренной задачи допускают следующую физическую интерпретацию. В квантовой механике (с точностью до выбора системы единиц) оператор $-\dfrac{d^2}{dx^2}$ имеет смысл оператора кинетической энергии и λ_k являются допустимыми значениями энергии квантовой частицы, движущейся в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками; функции $y_k(x)$ являются волновыми функциями частицы; величина $|y_k(x)|^2$ имеет смысл плотности вероятности обнаружить квантовую частицу в состоянии с номером k в точке $x \in (0,1)$.

Интересно сравнить классическое и квантовое описание этой физической ситуации. В классической физике кинетическая энергия может принимать любые значения от нуля до бесконечности. Напротив, в квантовой механике кинетическая энергия принимает лишь определенные дискретные (квантовые) значения (отсюда и название — *квантовая* физика). В обоих описаниях кинетическая энергия неотрицательна, однако в классической физике она может принимать нулевое значение, а в квантовом случае в данной задаче это невозможно. Вероятность нахождения частицы для наинизшего уровня энергии максимальна в центре потенциальной ямы, а для следующего уровня максимумы симметрично смещаются к краям ямы и т. д. Более детально физические аспекты этой задачи рассматриваются в курсе квантовой механики.

2.1. Решить следующие задачи на собственные значения ($y(x) \not\equiv 0,\ \|y\| = 1$):

$$1)\ \begin{cases} -y''(x) = \lambda\, y(x)\,,\ x \in (0,1), \\ y'(0) = 0\,, \\ y'(1) = 0\,; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} -y''(x) = \lambda\, y(x)\,,\ x \in (-l,l), \\ y(-l) = 0\,, \\ y(l) = 0\,; \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} -y''(x) = \lambda\, y(x)\,,\ x \in (0,\pi), \\ y(0) = 0\,, \\ y'(\pi) = 0\,; \end{cases} \qquad 4)\ \begin{cases} -y''(x) = \lambda\, y(x)\,,\ x \in (0,\frac{\pi}{2}), \\ y'(0) = 0\,, \\ y(\frac{\pi}{2}) = 0\,. \end{cases}$$

2.2. Найти собственные значения $\{\lambda_k\}$ и собственные функции $\{y_k(x)\}$ ($y_k(x) \not\equiv 0,\ \|y_k\| = 1$) и рассмотреть их поведение при $k \gg 1$:

$$1)\ \begin{cases} -y''(x) = \lambda\, y(x)\,,\ x \in (0,l), \\ y(0) = 0\,, \\ \alpha\, y(l) + y'(l) = 0\,,\ \alpha > 0\,; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} -y''(x) = \lambda\, y(x)\,,\ x \in (0,l), \\ y'(0) = 0\,, \\ y(l) + \beta\, y'(l) = 0\,,\ \beta > 0\,; \end{cases}$$

3) $\begin{cases} -y''(x) = \lambda\, y(x)\,,\ x\in(0,1), \\ y(0) = \beta\, y'(0)\,,\ \beta > 0\,, \\ y(1) = 0\,; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} -y''(x) = \lambda\, y(x)\,,\ x\in(0,1), \\ y(0) = y'(0)\,, \\ y(1) = y'(1)\,. \end{cases}$

2.2. Двумерный случай: прямоугольник

Рассмотрим следующую задачу на собственные значения для оператора Лапласа в случае прямоугольной области $G = \{(x,y) : 0<x<a\,, 0<y<b\}$ (рис. 2.2):

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u\,,\ (x,y) \in G\,, \\ u|_{\partial G} = 0\,, \\ u \not\equiv 0,\quad \|u\| = 1\,. \end{cases} \tag{2.24}$$

Здесь $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$, $u = u(x,y) \in U \subset L_2(G)$ — неизвестная функция, λ — неизвестное число, ∂G — граница прямоугольника G, $\|u\| = \sqrt{\int_G |u|^2 dG}$.

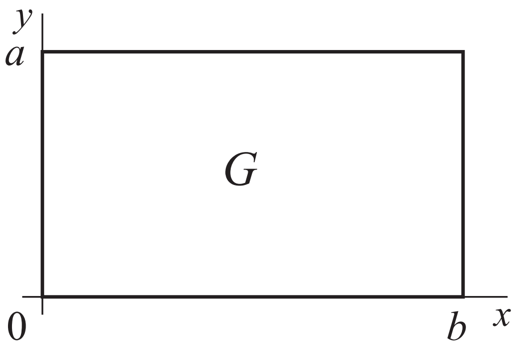


Рис. 2.2

Будем решать эту задачу *методом разделения переменных.* Основное его предположение состоит в том, что неизвестная функция $u(x,y)$ ищется в виде

$$u(x,y) = X(x)\,Y(y)\,. \tag{2.25}$$

Для применимости этого метода необходимо выполнение следующих условий: *а*) область G должна быть представлена в виде прямого произведения одномерных областей; *б*) граничные условия должны разделяться на граничные условия для каждой из переменных; *в*) в уравнении переменные должны разделяться.

В рассматриваемой задаче первое условие выполняется: $G = (0,a) \otimes (0,b)$. Далее, подставим, например, в граничные условия на отрезке $y = 0$, $x \in (0,a)$ функцию (2.25):

$$u \Big|_{\substack{y=0 \\ x\in(0,a)}} = X(x)\, Y(0) = 0 \; . \tag{2.26}$$

Это возможно, если $Y(0) = 0$ или $X(x) \equiv 0$. В последнем случае $u \equiv 0$, это соответствует тривиальному решению, что недопустимо. Следовательно, из (2.26) получаем граничное условие для функции $Y(y)$: $Y(0) = 0$. Аналогично, рассматривая отрезки $y = b$, $x = 0$, $x = a$, получим $Y(b)$=0, $X(0) = 0$, $X(a) = 0$.

Разделим переменные в уравнении (2.24). Подставим явный вид оператора Лапласа и выражение (2.25) для $u(x,y)$ в уравнение (2.24):

$$\begin{gathered} -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) X(x)\, Y(y) = \\ = -X''(x)\, Y(y) - X(x)\, Y''(y) = \lambda\, X(x)\, Y(y)\,. \end{gathered} \tag{2.27}$$

Разделим это уравнение на $X(x)\, Y(y)$ и перенесем слагаемые, зависящие от y, в правую часть:

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda + \frac{Y''(y)}{Y(y)} \; . \tag{2.28}$$

Тождество (2.28) должно выполняться при всех значениях независимых переменных x и y. Это возможно, только если обе части равны некоторой константе:

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = \mu = \lambda + \frac{Y''(y)}{Y(y)} \; . \tag{2.29}$$

Постоянная μ называется *константой разделения переменных.*

Таким образом, выполняются все три условия *а – в*. В итоге получаем две одномерные задачи:

$$\begin{cases} -X''(x) = \mu X(x)\,, \\ X(0) = 0\,, \\ X(a) = 0\,, \\ X \not\equiv 0, \quad \|X\| = 1\,; \end{cases} \qquad \begin{cases} -Y''(y) = \nu Y(y)\,, \\ Y(0) = 0\,, \\ Y(b) = 0\,, \\ Y \not\equiv 0, \quad \|Y\| = 1\,. \end{cases} \tag{2.30}$$

Здесь $\nu = \lambda - \mu$. Условия нормировки функций $X(x)$ и $Y(y)$ достаточны для получения нормированной функции $u(x, y)$, поскольку

$$\begin{aligned} \|u\| &= \sqrt{\int_0^a\!\!\int_0^b |u(x,y)|^2 dxdy} = \\ &= \sqrt{\int_0^a |X(x)|^2 dx}\,\sqrt{\int_0^b |Y(Y)|^2 dy} = \|X\|\,\|Y\|\,. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Собственные значения и собственные функции одномерных задач (2.30) имеют вид

$$\begin{aligned} \mu_m &= \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 , \quad X_m(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\frac{\pi m x}{a} , \quad m = 1, 2, \dots ; \\ \nu_n &= \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 , \quad Y_n(y) = \sqrt{\frac{2}{b}} \sin\frac{\pi n y}{b} , \quad n = 1, 2, \dots . \end{aligned} \tag{2.32}$$

Это позволяет записать решения исходной задачи:

$$\begin{aligned} \lambda_{mn} &= \mu_m + \nu_n = \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 , \quad m, n = 1, 2, \dots ; \\ u_{mn}(x, y) &= X_m(x)\, Y_n(y) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin\frac{\pi m x}{a} \sin\frac{\pi n y}{b} \,. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Отметим, что собственные значения для разных m и n могут совпадать и количество собственных функций для данного собственного значения, или кратность вырождения, может быть больше единицы. Например, в случае квадрата $(a = b)$ кратность вырождения для λ_{11} равна 1, для $\lambda = \lambda_{12} = \lambda_{21}$ — 2, для $\lambda = \lambda_{47} = \lambda_{74} = \lambda_{18} = \lambda_{81}$ — 4.

Остается открытым вопрос, все ли решения задачи (2.24) (при выполнении условий *а* — *в* могут быть найдены методом разделения переменных, т. е. в предположении (2.25). В теории доказывается, что множество решений $u_{mn}(x, y)$ (2.33) образует базис в $L_2(G)$, и, таким образом, найдены все возможные решения.

Условимся в дальнейшем обозначать частные производные с помощью индексов:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_x \,, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = u_{xy} \quad \text{и т. д.}$$

2.3. Найти собственные значения и собственные функции оператора Лапласа в прямоугольной области $G = \{(x, y) : 0 < x < a,\ 0 < y < b\}$ (рис. 2.2):

1) $$\begin{cases} -\Delta u = \lambda\, u\,, \ (x,y)\in G\,, \\ u|_{x=0} = 0\,, \\ u_x|_{x=a} = 0\,, \\ u_y|_{y=0} = 0\,, \\ u|_{y=b} = 0\,, \\ u \not\equiv 0\,, \quad \|u\| = 1\,; \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} -\Delta u = \lambda\, u\,, \ (x,y)\in G\,, \\ u|_{x=0} = 0\,, \\ u|_{x=a} = 0\,, \\ u_y|_{y=0} = 0\,, \\ u_y|_{y=b} = 0\,, \\ u \not\equiv 0\,, \quad \|u\| = 1\,. \end{cases}$$

2.3. Двумерный случай: круг

Пусть область G — круг радиуса a: $G = \{(x,y) : x^2 + y^2 < a^2\}$ (рис. 2.3). Рассмотрим следующую задачу на собственные значения для оператора Лапласа:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda\, u\,, \quad (x,y)\in G\,, \\ u|_{\partial G} = 0\,, \\ u \not\equiv 0\,, \quad \|u\| = 1\,. \end{cases} \tag{2.34}$$

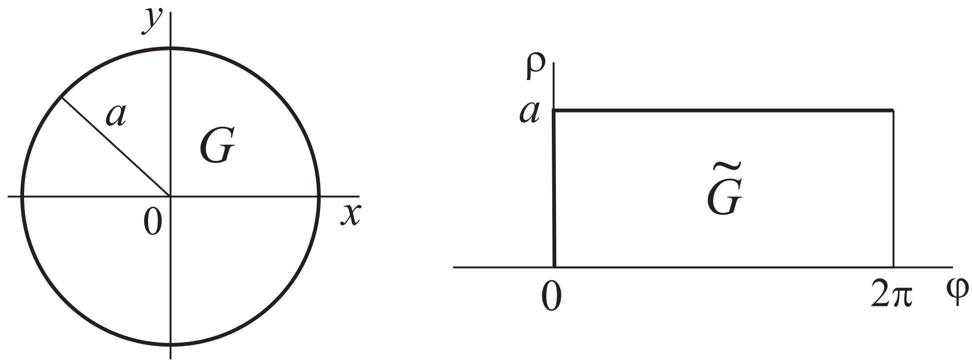


Рис. 2.3

Как легко заметить, в декартовых координатах условие a не выполняется, и для использования метода разделения переменных необходима другая система координат. Попытаемся использовать полярную систему координат:

$$\begin{aligned} &x = \rho\cos\varphi\,, \quad y = \rho\sin\varphi\,; \\ &\rho = \sqrt{x^2+y^2}\,, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}\,. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Как известно, соответствие между двумя системами координат будет взаимно однозначным лишь при условии, что якобиан преобразования не равен нулю. Вычислим якобиан:

$$\mathrm{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \rho} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho = \sqrt{x^2+y^2}\,. \tag{2.36}$$

Он обращается в нуль в точке $(x,y)=(0,0)$. Так как в нашей задаче искомая функция в начале координат должна быть заведомо непрерывной, то можно временно исключить из рассмотрения эту точку, а искомую функцию в конце вычислений доопределить по непрерывности, т. е. с помощью предельного перехода.

Другая проблема связана с областью изменения угловой переменной φ. Часто встречающиеся условия $\varphi\in[0,2\pi)$ или $\varphi\in[-\pi,\pi)$ не совсем корректны, так как данные множества не являются областями и к тому же без всяких на то оснований выделяются углы $\varphi=0$ или $\varphi=\pi$. Поступим иначе. Будем считать $\varphi\in(-\infty,+\infty)$, но при этом потребуем однозначности всех рассматриваемых функций при изменении угловой переменной на любое целое число поворотов на угол 2π:

$$f(\varphi+2\pi p) = f(\varphi) \quad \forall p\in\mathbb{Z}\,,\ \forall\varphi\,. \tag{2.37}$$

Легко видеть, что это условие можно заменить на условие $f(\varphi+2\pi)=f(\varphi)$, $\forall\varphi$, которое обычно называют *условием периодичности.*

Учитывая связь между функциями в декартовых и полярных координатах

$$u(x,y) = u(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi) = \tilde{u}(\rho,\varphi) = \tilde{u}\left(\rho(x,y),\varphi(x,y)\right)\ , \tag{2.38}$$

произведем замену переменных в уравнении. Для этого необходимо выразить вторые производные по x и y через производные по ρ и φ. Находим последовательно

$$\begin{aligned} &\tilde{u}_x = \tilde{u}_\rho\,\rho_x + \tilde{u}_\varphi\,\varphi_x\ ,\\ &\tilde{u}_{xx} = \tilde{u}_{\rho\rho}\,\rho_x^2 + 2\,\tilde{u}_{\rho\varphi}\,\rho_x\,\varphi_x + \tilde{u}_{\varphi\varphi}\,\varphi_x^2 + \tilde{u}_\rho\,\rho_{xx} + \tilde{u}_\varphi\,\varphi_{xx}\ . \end{aligned} \tag{2.39}$$

Выражения для $\tilde{u}_y$ и $\tilde{u}_{yy}$ получаются путем замены $x\to y$. Теперь нужно вычислить частные производные функций $\rho(x,y)$ и $\varphi(x,y)$. При вычислении частных производных $\varphi(x,y)$ возникает нюанс. Обычно вместо $\operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x}$ записывают $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, и тогда производные легко находятся (и ответ правильный). Однако второе соотношение по определению функции $\operatorname{arctg} x$ справедливо лишь для $\varphi \in (-\pi/2, +\pi/2)$. Проще и правильнее поступить так. Найдем дифференциал первого выражения:

$$\frac{1}{\cos^2\varphi}\, d\varphi = \frac{1}{x}\, dy - \frac{y}{x^2}\, dx\ . \tag{2.40}$$

Отсюда

$$\varphi_x = -\frac{y\cos^2\varphi}{x^2} = -\frac{y}{\rho^2}\ , \quad \varphi_y = \frac{\cos^2\varphi}{x} = \frac{x}{\rho^2}\ , \quad \varphi_{xx} = -\varphi_{yy} = \frac{2xy}{\rho^4}\ .$$

Подставляя найденные частные производные и приводя подобные, получим

$$\tilde{u}_{xx} + \tilde{u}_{yy} = \Delta_{\rho\varphi}\tilde{u}\ , \quad \Delta_{\rho\varphi} = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\ . \tag{2.41}$$

Задача (2.34) принимает вид

$$\begin{cases} -\left(\dfrac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho} + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\tilde{u}(\rho,\varphi) = \lambda\,\tilde{u}(\rho,\varphi)\,, \\ \tilde{u}(a,\varphi) = 0\,, \\ \tilde{u}(\rho,\varphi+2\pi) = \tilde{u}(\rho,\varphi)\,,\ \forall\varphi\,, \\ \tilde{u} \not\equiv 0, \quad \|\tilde{u}\| = 1\,. \end{cases} \tag{2.42}$$

Полагая $\tilde{u}(\rho,\varphi) = R(\rho)\,\Phi(\varphi)$, разделим переменные в (2.42); для этого домножим уравнение на ρ^2, разделим на $R(\rho)\Phi(\varphi)$ и введем константу разделения переменных μ:

$$-\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \lambda\rho^2 + \frac{\rho^2 R''(\rho)}{R(\rho)} + \frac{\rho R'(\rho)}{R(\rho)} = \mu\ . \tag{2.43}$$

Из граничных условий получим одно условие для радиальной функции:

$$\tilde{u}(a,\varphi) = R(a)\Phi(\varphi) = 0 \quad \Rightarrow \quad R(a) = 0\ . \tag{2.44}$$

Второе условие (в точке $\rho = 0$) найдем с помощью предельного перехода. Как указывалось выше, должен существовать предел $\lim\limits_{x,\,y\to 0} u(x,y)$, и он не должен зависеть от закона стремления $x \to 0$, $y \to 0$. При переходе к переменным ρ,φ потребуем, чтобы $\rho \to 0$, но при этом угловая переменная φ принимала любое произвольное, но фиксированное значение. Отсюда получим, что $\lim\limits_{\rho\to 0} R(\rho) = R(0)$ существует и конечен.

Принято записывать это условие в виде $R(0) < \infty$ и называть его *условием ограниченности в нуле.*

Из условия $\tilde{u}(\rho, \varphi + 2\pi) = \tilde{u}(\rho, \varphi)$, $\forall\varphi$, очевидно, имеем $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$, $\forall\varphi$.

Выполнены все условия *а* – *в*, и в итоге получаем одномерные задачи на собственные значения для угловой и радиальной функций:

$$\begin{cases} -\Phi''(\varphi) = \mu\,\Phi(\varphi)\,, \\ \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi{+}2\pi)\,, \forall\varphi\,, \\ \Phi(\varphi) \not\equiv 0, \quad \|\Phi\| = 1\,; \end{cases} \tag{2.45}$$

$$\begin{cases} \rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) + (\lambda\rho^2{-}\mu) R(\rho) = 0\,, \\ R(a) = 0\,, \\ R(0) < \infty\,, \\ R(\rho) \not\equiv 0, \quad \|R\| = 1\,. \end{cases} \tag{2.46}$$

Для интеграла нормировки получим выражение

$$\|u\| = \sqrt{\int_G |u(x,y)|^2 dxdy} = \sqrt{\int_{\tilde{G}} |\tilde{u}(\rho,\varphi)|^2 \rho\, d\rho d\varphi} = \|R\|\|\Phi\|\,, \tag{2.47}$$

где

$$\|\Phi\| = \sqrt{\int_0^{2\pi} |\Phi(\varphi)|^2 d\varphi}\,, \quad \|R\| = \sqrt{\int_0^a |R(\rho)|^2 \rho\, d\rho}\,. \tag{2.48}$$

Рассмотрим сначала угловую часть задачи, поскольку (2.45) содержит только один неопределенный параметр — μ; если сначала решать уравнение для радиальной функции (2.46) с двумя параметрами λ и μ, то придется рассмотреть бóльшее число возможностей.

1. $\underline{\mu < 0}$. Подставляя общее решение ДУ $\Phi(\varphi) = C_1\, e^{-\sqrt{-\mu}\,\varphi} + C_2\, e^{\sqrt{-\mu}\,\varphi}$ в условие 2π-периодичности и группируя подобные, получим

$$C_1 \left(1 - e^{-\sqrt{-\mu}\,2\pi}\right) e^{-\sqrt{-\mu}\,\varphi} + C_2 \left(1 - e^{\sqrt{-\mu}\,2\pi}\right) e^{\sqrt{-\mu}\,\varphi} = 0\,,\ \forall\varphi. \tag{2.49}$$

Мы получили линейную комбинацию линейно независимых функций $e^{\sqrt{-\mu}\,\varphi}$ и $e^{-\sqrt{-\mu}\,\varphi}$, которая тождественно равна нулю. Поскольку выражения в скобках в данном случае не обращаются в ноль, тождество (2.49) для всех φ возможно только при $C_1 = C_2 = 0$. Но тогда $\Phi(\varphi) \equiv 0$, следовательно, решения задачи нет.

2. $\underline{\mu = 0}$. В этом случае $\Phi(\varphi) = C_1 + C_2\,\varphi$. Учитывая периодичность, получим $C_1 = C$ и $C_2 = 0$. С учетом нормировки, собственная функция для $\mu_0 = 0$ имеет вид

$$\Phi_0(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,. \tag{2.50}$$

3. $\underline{\mu > 0}$. Здесь удобно воспользоваться (и так принято в физической литературе) комплексной формой общего решения ДУ:

$$\Phi(\varphi) = C_1\, e^{-i\sqrt{\mu}\,\varphi} + C_2\, e^{i\sqrt{\mu}\,\varphi}\,. \tag{2.51}$$

Используя условие периодичности, получим

$$C_1\left(1 - e^{-i\sqrt{\mu}\,2\pi}\right) e^{-i\sqrt{\mu}\,\varphi} + C_2\left(1 - e^{i\sqrt{\mu}\,2\pi}\right) e^{i\sqrt{\mu}\,\varphi} = 0\,. \tag{2.52}$$

Поступая аналогично первому случаю, находим, что (с учетом комплексности экспонент) выражения в скобках обращаются в нуль, и притом одновременно, только при $\sqrt{\mu} = m$, где $m = 1, 2\ldots$. Этот факт проще всего получить, используя формулу Эйлера

$$e^{\pm i\sqrt{\mu}\,2\pi} = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos\sqrt{\mu}\,2\pi \pm i\sin\sqrt{\mu}\,2\pi = 1$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \cos\sqrt{\mu}\,2\pi = 1 \\ \sin\sqrt{\mu}\,2\pi = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\mu} = m\,, \quad m = 1, 2\ldots\,.$$

Константы C_1 и C_2 остаются произвольными. В качестве двух линейно независимых решений можно взять случаи

$$\begin{aligned} &C_1 = N^{(-)},\ \ C_2 = 0 &&\Rightarrow \quad \Phi_m^{(-)}(\varphi) = N^{(-)} e^{-im\varphi}\,, \\ &C_1 = 0\,, \quad\ C_2 = N^{(+)} &&\Rightarrow \quad \Phi_m^{(+)}(\varphi) = N^{(+)} e^{im\varphi}\,. \end{aligned} \tag{2.53}$$

Это значит, что собственное значение $\mu_m = m^2$ двукратно вырождено. Из нормировки находим $N^{(\pm)} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Окончательно, собственные функции и собственные значения задачи (2.45) удобно записать в следующем виде:

$$\Phi_m(\varphi) = \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}}\,, \quad \mu_m = m^2\,, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\,. \tag{2.54}$$

Любая линейная комбинация собственных функций $\Phi_m(\varphi)$ и $\Phi_{-m}(\varphi)$ также отвечает собственному значению $\mu_m = m^2$. В частности, можно выбрать вещественные функции

$$\begin{gathered} \Phi_0(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,,\ \Phi_m^{(1)}(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos m\varphi,\ \Phi_m^{(2)}(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin m\varphi, \\ \mu_m = m^2\,, \quad m = 0, 1, 2, \ldots\,. \end{gathered} \tag{2.55}$$

Этот выбор часто используется в математической литературе.

Далее, рассмотрим задачу (2.46). Учитывая, что $\mu = \mu_m = m^2$, запишем уравнение для радиальной функции

$$\rho^2 \frac{d^2}{d\rho^2} R(\rho) + \rho \frac{d}{d\rho} R(\rho) + \left(\lambda\rho^2 - m^2\right) R(\rho) = 0 \ . \tag{2.56}$$

Последовательно рассмотрим три случая.

1. $\underline{\lambda < 0}$. Обозначим $\alpha = -\lambda$ и сделаем замену $z = \sqrt{\alpha}\,\rho$. Тогда для $\tilde{R}(z) = \tilde{R}(\sqrt{\alpha}\rho) = R(\rho)$

$$\frac{d}{d\rho} R(\rho) = \frac{d}{d\rho} \tilde{R}(z) = \sqrt{\alpha} \frac{d}{dz} \tilde{R}(z) \ , \quad \frac{d^2}{d\rho^2} R(\rho) = \alpha \frac{d^2}{dz^2} \tilde{R}(z) \tag{2.57}$$

и ДУ принимает вид

$$z^2 \frac{d^2}{dz^2} \tilde{R}(z) + z \frac{d}{dz} \tilde{R}(z) - \left(z^2 + m^2\right) \tilde{R}(z) = 0 \ . \tag{2.58}$$

Его частные решения носят название *функций Бесселя мнимого аргумента* или *модифицированных функций Бесселя*. Общее решение при $z \geqslant 0$ можно записать в виде

$$\tilde{R}_m(z) = C_1 I_{|m|}(z) + C_2 K_{|m|}(z) \ . \tag{2.59}$$

Свойства решений уравнения (2.58), а также уравнения (2.63), т. е. цилиндрических функций или функций Бесселя, подробно обсуждаются в [9, 10]. Необходимо также отметить, что уравнения (2.58) и (2.63) зависят от m^2, и, следовательно, их решения (2.59) и (2.64) зависят от $|m|$. Учитывая это, будем при обсуждении решений радиального уравнения полагать, что $m = |m| = 0, 1, 2, \ldots$.

Модифицированные функции Бесселя $I_m(z)$ и $K_m(z)$ могут быть представлены в виде рядов

$$I_m(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(m+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{m+2k} , \tag{2.60}$$

$$K_m(z) = (-1)^{m+1} I_m(z) \ln\frac{z}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^k (m-k-1)!}{k!} \left(\frac{2}{z}\right)^{m-2k} + \\ + \frac{(-1)^m}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi(m+k+1) + \psi(k+1)}{k!(m+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{m+2k} , \tag{2.61}$$

где $\psi(x)=\Gamma'(x)/\Gamma(x)$ — логарифмическая производная гамма-функции [9, 10], в частности, $\psi(n+1) = -\gamma + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $\gamma = 0.5772\ldots$ — постоянная Эйлера. При $m = 0$ первую сумму в (2.61) следует полагать равной нулю. Вид функций $I_m(z)$ и $K_m(z)$ для разных m показан на рис. 2.4. Поскольку $K_m(z)$ расходятся при $z \to 0$, то из требования ограниченности решений при $\rho \to 0$ следует, что необходимо положить $C_2 = 0$. Функции $I_m(z)$ положительны и монотонно возрастают при $z > 0$, следовательно, из граничного условия при $\rho = a$ получаем $C_1 = 0$. В итоге при $\lambda < 0$ решений задачи нет.

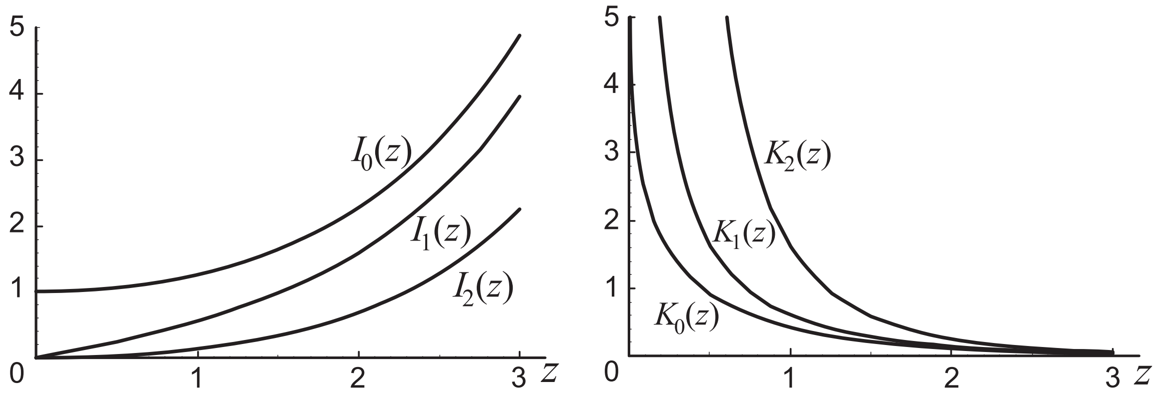


Рис. 2.4

2. $\underline{\lambda = 0}$. Уравнение (2.56) является уравнением Эйлера, которое имеет общее решение

$$R_0(\rho) = C_1 + C_2 \ln\rho\,, \quad R_m(\rho) = C_1\,\rho^m + C_2\,\rho^{-m}\,, \quad m \neq 0\,. \tag{2.62}$$

В первом случае, при $m = 0$, уравнение элементарно интегрируется, а во втором случае решение может быть найдено с помощью подстановки $R(\rho) \sim \rho^\gamma$. Из ограниченности решений при $\rho \to 0$ следует, что $C_2 = 0$; из граничного условия $R(a) = 0$ получаем $C_1 = 0$. Снова решений задачи нет.

3. $\underline{\lambda > 0}$. Сделаем замену переменной: $z = \sqrt{\lambda}\,\rho$, $\tilde{R}(z) = R(\rho)$; задача (2.46) примет вид

$$\begin{cases} z^2\tilde{R}''(z) + z\tilde{R}'(z) + \left(z^2 - m^2\right)\tilde{R}(z) = 0\,, \\ \tilde{R}(\sqrt{\lambda}\,a) = 0\,, \\ \tilde{R}(0) < \infty\,. \end{cases} \tag{2.63}$$

Уравнение (2.63) — уравнение Бесселя; его общее решение для $z \geqslant 0$ имеет вид

$$\tilde{R}_m(z) = C_1 J_{|m|}(z) + C_2 Y_{|m|}(z)\,. \tag{2.64}$$

Здесь $J_m(z)$ и $Y_m(z)$— *функции Бесселя* порядка m 1-го рода и 2-го рода (функция Неймана) соответственно.

В общем случае разложение в ряд функции Бесселя 1-го рода порядка ν имеет вид

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k} , \tag{2.65}$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция [9, 10]; $\Gamma(m+1) = m!$ для целых неотрицательных m (и по определению $0! = 1$).

Разложение в ряд функции Бесселя 2-го рода имеет вид

$$\begin{aligned} Y_m(z) \;=\; & \frac{2}{\pi} J_m(z) \ln\frac{z}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m-k-1)!}{k!} \left(\frac{2}{z}\right)^{m-2k} - \\ & - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{\psi(m+k+1)+\psi(k+1)}{k!(m+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{m+2k} . \end{aligned} \tag{2.66}$$

Здесь при $m = 0$ первую сумму следует полагать равной нулю.

Используя представление функций Бесселя в виде ряда, можно получить следующие рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned} &[z^\nu Z_\nu(z)]' = z^\nu Z_{\nu-1}(z) , && Z_{\nu-1}(z) = \frac{\nu}{z} Z_\nu(z) + Z'_\nu(z) , \\ &[z^{-\nu} Z_\nu(z)]' = -z^{-\nu} Z_{\nu+1}(z) , && Z_{\nu+1}(z) = \frac{\nu}{z} Z_\nu(z) - Z'_\nu(z) . \end{aligned} \tag{2.67}$$

Здесь $Z_\nu(z)$ означает $J_\nu(z)$ или $Y_\nu(z)$.

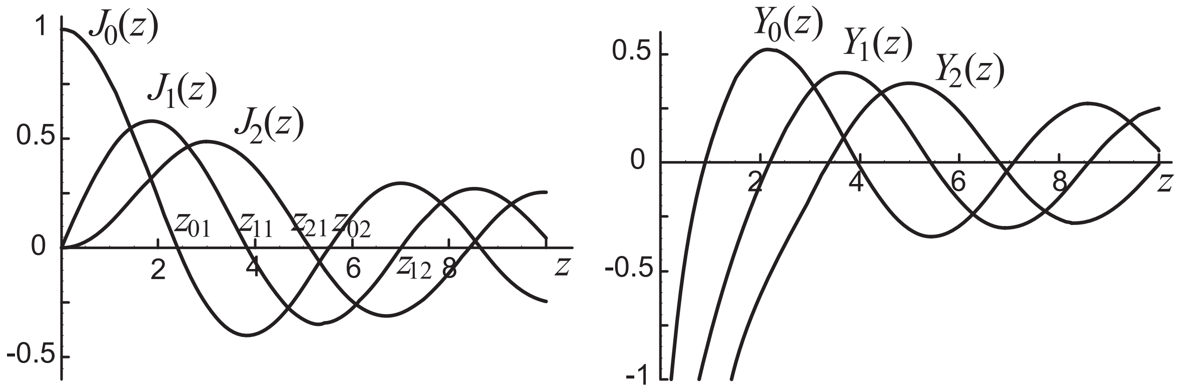


Рис. 2.5

Вид функций Бесселя 1-го и 2-го рода для нескольких значений порядка m показан на рис. 2.5. Учитывая поведение $Y_m(z)$ при $z \to 0$, в

(2.64) следует положить $C_2 = 0$. Граничное условие при $\rho = a$ приводит к уравнениям для отыскания собственных значений λ:

$$\tilde{R}(\sqrt{\lambda}\, a) = 0 \quad \Rightarrow \quad J_m(\sqrt{\lambda}\, a) = 0\ . \tag{2.68}$$

Эти трансцендентные уравнения могут быть решены только численно. Обозначим через z_{mk} k-й (в порядке возрастания) корень уравнения $J_m(z) = 0$ (рис. 2.5), тогда

$$\sqrt{\lambda}\, a = z_{mk} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{mk} = \left(\frac{z_{mk}}{a}\right)^2\ , \quad k = 1, 2, \ldots\ . \tag{2.69}$$

Возвращаясь к переменной ρ, запишем радиальную часть собственной функции:

$$R_{mk}(\rho) = C_{mk}\, J_m\Big(z_{mk}\,\frac{\rho}{a}\Big)\ . \tag{2.70}$$

Константы C_{mk} найдем из условия нормировки

$$1 = \int_0^a |R_{mk}(\rho)|^2 \rho\, d\rho = C_{mk}^2 \int_0^a J_m^2\Big(z_{mk}\,\frac{\rho}{a}\Big)\, \rho\, d\rho = C_{mk}^2 \left(\frac{a}{z_{mk}}\right)^2 I, \tag{2.71}$$

где

$$I = \int_0^{z_{mk}} J_m^2(z)\, z\, dz\ . \tag{2.72}$$

Вычислим неопределенный интеграл типа (2.72) для функции Бесселя 1-го рода порядка ν. Интегрируя по частям, получим

$$\int J_\nu^2(z)\, z\, dz = \frac{1}{2}\, z^2 J_\nu^2(z) - \int J_\nu(z) J_\nu'(z)\, z^2\, dz\ . \tag{2.73}$$

Умножим уравнение Бесселя для $J_\nu(z)$ на $J_\nu'(z)$ и найдем

$$\begin{gathered} z^2 J_\nu''(z) J_\nu'(z) + z J_\nu'^2(z) + \left(z^2 - \nu^2\right) J_\nu(z) J_\nu'(z) = 0 \\ \Rightarrow \quad -J_\nu(z) J_\nu'(z)\, z^2 = \frac{1}{2}\left(z^2 J_\nu'^2(z) - \nu^2 J_\nu^2(z)\right)'\ . \end{gathered} \tag{2.74}$$

Отсюда получим

$$\int J_\nu^2(z)\, z\, dz = \frac{1}{2}\left[z^2 J_\nu'^2(z) + \left(z^2 - \nu^2\right) J_\nu^2(z)\right]\ . \tag{2.75}$$

Учитывая, что в данной задаче $J_m(z_{mk}) = 0$, определим константу нормировки:

$$I = \frac{1}{2}\, z_{mk}^2 J_m'^2(z_{mk}) \quad \Rightarrow \quad |C_{mk}| = \frac{\sqrt{2}}{a\, |J_m'(z_{mk})|}\ . \tag{2.76}$$

Используя соотношения (2.67), можно получить другое выражение для C_{mk}:

$$I = \frac{1}{2}\, z_{mk}^2 J_{m+1}^2(z_{mk}) \quad \Rightarrow \quad |C_{mk}| = \frac{\sqrt{2}}{a\,|J_{m+1}(z_{mk})|}\,. \tag{2.77}$$

Вид некоторых радиальных функций показан на рис. 2.6.

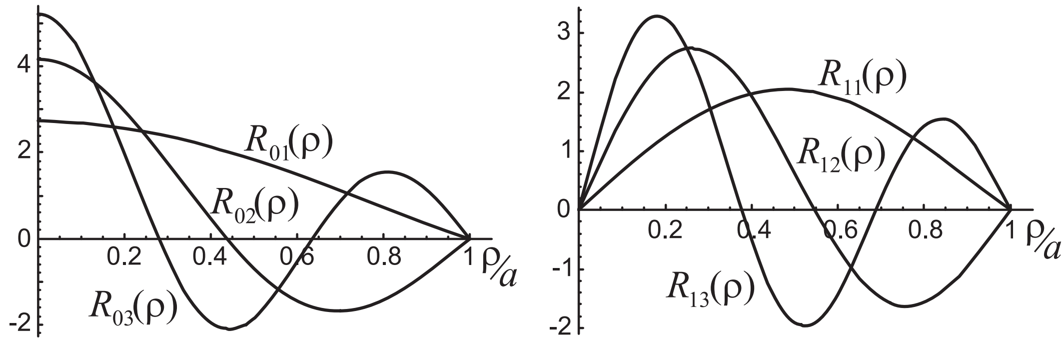


Рис. 2.6

В итоге для задачи (2.34) собственные значения имеют вид

$$\lambda_{mk} = \left(\frac{z_{mk}}{a}\right)^2, \quad |m| = 0, 1, 2, \ldots\,, \quad k = 1, 2, \ldots\,, \tag{2.78}$$

где z_{mk} — k-й корень уравнения $J_{|m|}(z) = 0$. Собственные функции могут быть выбраны в комплексной форме:

$$u_{mk}(\rho, \varphi) = N_{mk}\, e^{im\varphi} J_{|m|}\left(z_{mk}\frac{\rho}{a}\right)\,, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots\,. \tag{2.79}$$

При $m = 0$ все собственные значения невырождены, а при $m \neq 0$ все λ_{mk} вырождены двукратно: каждому λ_{mk} соответствуют две комплексно сопряженные функции с одинаковыми $|m|$ и k.

В математической литературе чаще используют собственные функции при $m \neq 0$ в действительной форме:

$$\begin{cases} u_{mk}^{(1)}(\rho, \varphi) = \sqrt{2} N_{mk}\, J_m\left(z_{mk}\frac{\rho}{a}\right)\, \cos m\varphi\,, \\ u_{mk}^{(2)}(\rho, \varphi) = \sqrt{2} N_{mk}\, J_m\left(z_{mk}\frac{\rho}{a}\right)\, \sin m\varphi\,, \end{cases} \quad \text{где} \;\; m = 1, 2, \ldots\,. \tag{2.80}$$

Константы нормировки равны

$$N_{0k} = \frac{\sqrt{2}}{a\sqrt{\pi}\,|J_0'(z_{0k})|}\,, \quad N_{mk} = \frac{1}{a\sqrt{\pi}\,|J_{|m|}'(z_{mk})|}\,. \tag{2.81}$$

Можно показать, что собственные функции для различных λ_{mk} ортогональны (см. задачи 1.17.2 и 1.17.5).

2.4. Решить задачу на собственные значения для оператора Лапласа в круге $G = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 < a^2\right\}$:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda\, u\,, \quad (x, y) \in G\,, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial G} = 0\,, \\ u \not\equiv 0\,, \quad \|u\| = 1\,, \end{cases}$$

где $\dfrac{\partial u}{\partial n} = \left(\vec{n}, \vec{\nabla} u\right)$ — производная функции u по внешней нормали $\vec{n}$ к границе круга.

2.5. Решить задачу на собственные значения для оператора Лапласа в круговом секторе $G = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 < a^2,\ x > 0,\ y > 0\right\}$:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda\, u\,, \quad (x, y) \in G\,, \\ u|_{\partial G} = 0\,, \\ u \not\equiv 0\,, \quad \|u\| = 1\,. \end{cases}$$

2.6. Решить задачу на собственные значения для оператора Лапласа в кольце $G = \left\{(x, y) : a^2 < x^2 + y^2 < b^2\right\}$:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda\, u\,, \quad (x, y) \in G\,, \\ u|_{\partial G} = 0\,, \\ u \not\equiv 0\,, \quad \|u\| = 1\,. \end{cases}$$

2.4. Оператор Лапласа в криволинейных ортогональных координатах

Рассмотрим для определенности 3-мерное пространство. Помимо декартовых координат (x, y, z) координаты точки в этом случае могут задаваться тремя независимыми числами (u, v, w). Производная радиус-вектора по какой-либо из координат является касательным вектором к соответствующей координатной линии (см. рис. 2.7). Определим единичный орт $\vec{e}_u$ правилом

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = H_u \vec{e}_u \,, \quad H_u = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2} \,. \qquad (2.82)$$

Орт $\vec{e}_u$ направлен по касательной к координатной линии u, и его направление будет разным для различных точек пространства, т. е. $\vec{e}_u = \vec{e}_u(u, v, w)$. Величина H_u — коэффициент Ламе — также является функцией координат: $H_u = H_u(u, v, w)$. В точках, где якобиан $\mathrm{J} = \dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$ не равен нулю, однозначно определены три линейно независимых вектора: $\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w$ — локальный базис. Если векторы $\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w$ взаимно ортогональны везде, где $\mathrm{J} \neq 0$, то координаты называются ортогональными.

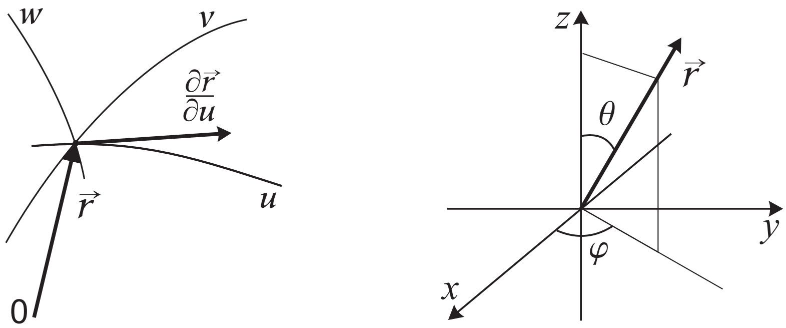


Рис. 2.7

Найдем выражение для оператора градиента $\vec{\nabla}$ в криволинейных ортогональных координатах. Для функции $f = f(u, v, w)$ можно записать

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial u}\vec{\nabla} u + \frac{\partial f}{\partial v}\vec{\nabla} v + \frac{\partial f}{\partial w}\vec{\nabla} w \equiv \left(\vec{\nabla} u \frac{\partial}{\partial u} + \vec{\nabla} v \frac{\partial}{\partial v} + \vec{\nabla} w \frac{\partial}{\partial w}\right) f \,. \quad (2.83)$$

Вектор $\vec{\nabla} u$ направлен в сторону наибольшего возрастания u, т. е. $\vec{\nabla} u = h_u \vec{e}_u$. Рассматривая u как функцию декартовых координат, получим

$$\frac{\partial u}{\partial u} = 1 = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} = \left(\vec{\nabla} u \,, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right) = h_u H_u \,. \qquad (2.84)$$

Следовательно, $\vec{\nabla} u = \vec{e}_u / H_u$ и оператор градиента в криволинейных ортогональных координатах имеет вид

$$\vec{\nabla} = \frac{\vec{e}_u}{H_u}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\vec{e}_v}{H_v}\frac{\partial}{\partial v} + \frac{\vec{e}_w}{H_w}\frac{\partial}{\partial w} \,. \qquad (2.85)$$

Далее, найдем выражение для дивергенции вектора $\vec{a}$: $\operatorname{div}\vec{a} = (\vec{\nabla}, \vec{a})$. Разложение вектора $\vec{a}$ в локальном базисе имеет вид $\vec{a} = \vec{e}_u a_u + \vec{e}_v a_v + \vec{e}_w a_w$. Найдем

$$\left(\vec{\nabla}\,, \vec{e}_u a_u\right) = \left(\frac{\vec{e}_u}{H_u}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\vec{e}_v}{H_v}\frac{\partial}{\partial v} + \frac{\vec{e}_w}{H_w}\frac{\partial}{\partial w}\,, \vec{e}_u a_u\right)\,. \tag{2.86}$$

Для первого слагаемого получим

$$\left(\frac{\vec{e}_u}{H_u}\frac{\partial}{\partial u}\,, \vec{e}_u a_u\right) = \frac{1}{H_u}\left(\vec{e}_u\,, \frac{\partial \vec{e}_u}{\partial u}\right) a_u + \frac{1}{H_u}\left(\vec{e}_u\,, \vec{e}_u\right)\frac{\partial a_u}{\partial u} = \frac{1}{H_u}\frac{\partial a_u}{\partial u}\,. \tag{2.87}$$

Здесь мы учли, что

$$\left(\vec{e}_u\,,\, \vec{e}_u\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial u}\left(\vec{e}_u\,, \vec{e}_u\right) = 0 = 2\left(\vec{e}_u\,, \frac{\partial \vec{e}_u}{\partial u}\right). \tag{2.88}$$

Рассмотрим второе слагаемое в (2.86):

$$\left(\frac{\vec{e}_v}{H_v}\frac{\partial}{\partial v}\,, \vec{e}_u a_u\right) = \frac{1}{H_v}\left(\vec{e}_v\,, \frac{\partial \vec{e}_u}{\partial v}\right) a_u + \frac{1}{H_v}\left(\vec{e}_v\,, \vec{e}_u\right)\frac{\partial a_u}{\partial v} = \frac{1}{H_v}\left(\vec{e}_v\,, \frac{\partial \vec{e}_u}{\partial v}\right) a_u\,. \tag{2.89}$$

Преобразуем скалярное произведение:

$$\left(\vec{e}_v\,, \frac{\partial \vec{e}_u}{\partial v}\right) = \left(\vec{e}_v\,, \frac{\partial}{\partial v}\frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}}{H_u}\right) = \left(\vec{e}_v\,, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right)\frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{H_u} + \frac{1}{H_u}\left(\vec{e}_v\,, \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial v \partial u}\right) =$$
$$= \frac{1}{H_u}\left(\vec{e}_v\,, \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right) = \frac{1}{H_u}\left(\vec{e}_v\,, \frac{\partial}{\partial u} H_v \vec{e}_v\right) = \frac{1}{H_u}\frac{\partial H_v}{\partial u}\,. \tag{2.90}$$

В результате

$$\left(\frac{\vec{e}_v}{H_v}\frac{\partial}{\partial v}\,, \vec{e}_u a_u\right) = \frac{a_u}{H_u H_v}\frac{\partial H_v}{\partial u}\,. \tag{2.91}$$

Записывая аналогичное выражение для третьего слагаемого в (2.86), получим

$$\left(\vec{\nabla}\,, \vec{e}_u a_u\right) = \frac{1}{H_u}\left(\frac{\partial a_u}{\partial u} + \frac{a_u}{H_v}\frac{\partial H_v}{\partial u} + \frac{a_u}{H_w}\frac{\partial H_w}{\partial u}\right) = \frac{1}{H_u H_v H_w}\frac{\partial}{\partial u} H_v H_w a_u\,. \tag{2.92}$$

Суммируя все компоненты $\vec{a}$, получим выражение для дивергенции вектора $\vec{a}$ в криволинейных ортогональных координатах

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{1}{H_u H_v H_w}\left(\frac{\partial}{\partial u} H_v H_w a_u + \frac{\partial}{\partial v} H_u H_w a_v + \frac{\partial}{\partial w} H_u H_v a_w\right). \tag{2.93}$$

Отсюда, учитывая, что $\Delta = (\vec{\nabla},\vec{\nabla})$, запишем оператор Лапласа:

$$\Delta = \frac{1}{H_u H_v H_w}\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{H_v H_w}{H_u}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{H_u H_w}{H_v}\frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial w}\frac{H_u H_v}{H_w}\frac{\partial}{\partial w}\right). \quad (2.94)$$

Пример. Рассмотрим сферические координаты (рис. 2.7):

$$x = r\sin\theta\cos\varphi\ , \quad y = r\sin\theta\sin\varphi\ , \quad z = r\cos\theta\ . \quad (2.95)$$

Подставляя коэффициенты Ламе

$$H_r = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = 1\ , \quad (2.96)$$

$$H_\theta = r\ , \quad H_\varphi = r\sin\theta\ ,$$

в формулу (2.94), получим выражение для оператора Лапласа в сферических координатах

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r}r^2\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial\theta}\frac{r\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{r}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) = \\ &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right). \quad (2.97)\end{aligned}$$

2.5. Трехмерный случай: прямоугольный параллелепипед и цилиндр

В случае прямоугольного параллелепипеда разделение переменных удобно провести в два этапа:
1) $u(x,y,z) = X(x)\,F(y,z)$; 2) $F(y,z) = Y(y)\,Z(z)$.

В итоге задача сводится к трем одномерным задачам, уравнения которых имеют вид

$$-X''(x) = \mu X(x)\ , \quad -Y''(y) = \nu Y(y)\ , \quad -Z''(z) = \tau Z(z)\ , \quad (2.98)$$

где μ,ν,τ — константы разделения переменных, при этом $\lambda = \mu+\nu+\tau$.

2.7. Решить задачу на собственные значения для оператора Лапласа в прямоугольном параллелепипеде $G = \{(x,y,z) : 0 < x < a, 0 < y < b,$

$0 < z < c\}$:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda\, u\,, \quad (x,y,z) \in G\,, \\ u|_{\partial G} = 0\,, \\ u \not\equiv 0\,, \quad \|u\| = 1\,. \end{cases}$$

В случае цилиндра необходимо перейти в цилиндрическую систему координат:

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi\,, \quad z = z\,. \tag{2.99}$$

Здесь условие взаимно однозначного соответствия нарушается на всей оси z, а оператор Лапласа имеет вид

$$\Delta \;=\; \Delta_{r\varphi} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \;=\; \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,. \tag{2.100}$$

Разделение переменных удобно провести в два этапа:
1) $u(r,\varphi,z) = F(r,\varphi)\,Z(z)$; 2) $F(r,\varphi) = R(r)\,\Phi(\varphi)$.
В итоге задача сводится к трем одномерным задачам, уравнения для которых имеют вид

$$\begin{aligned} &-Z''(z) = \nu Z(z)\,, \quad -\Phi''(\varphi) = \mu\Phi(\varphi)\,, \\ &r^2R''(r) + rR'(r) + \big[(\lambda-\nu)\,r^2 - \mu\big]\,R(r) = 0\,, \end{aligned} \tag{2.101}$$

где μ, ν — константы разделения переменных.

2.8. Решить задачу на собственные значения для оператора Лапласа в цилиндре $G = \big\{(x,y,z) : x^2+y^2 < a^2,\, 0 < z < h\big\}$:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda\, u\,, \quad (x,y,z) \in G\,, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial G} = 0\,, \\ u \not\equiv 0\,, \quad \|u\| = 1\,. \end{cases}$$

2.6. Трехмерный случай: шар

Пусть область G — шар радиуса a: $G = \big\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 < a^2\big\}$ (рис. 2.8). Рассмотрим следующую задачу на собственные значения для оператора Лапласа:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u\,, \quad (x,y,z) \in G\,, \\ u|_{\partial G} = 0\,, \\ u \not\equiv 0\,, \quad \|u\| = 1\,. \end{cases} \tag{2.102}$$

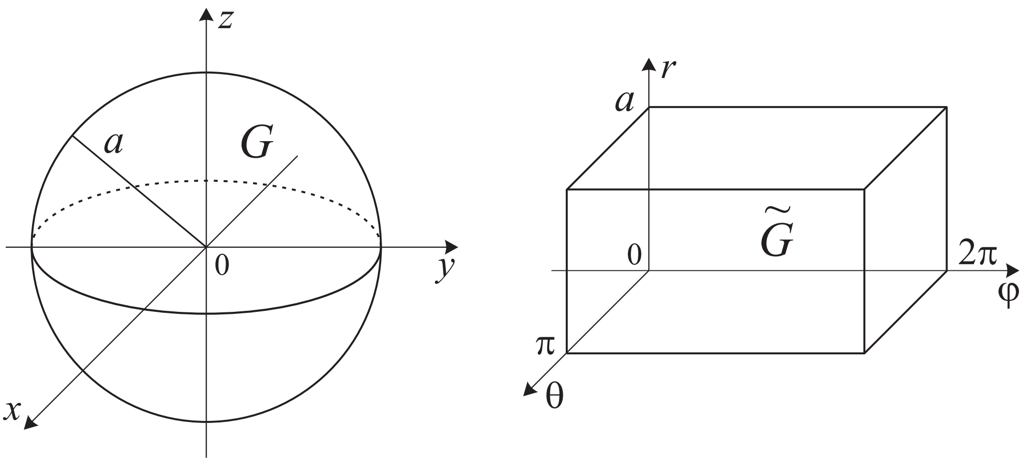


Рис. 2.8

Удобно перейти к сферическим координатам (2.95). Обратные преобразования имеют вид

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\ , \quad \cos\theta = \frac{z}{r}\ , \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}\ . \tag{2.103}$$

Якобиан перехода $\mathrm{J} = r^2\sin\theta$, следовательно, условие взаимной однозначности нарушается на всей оси z, и эту ось мы временно исключаем из рассмотрения. Выберем область изменения новых переменных:

$$r \in (0,a)\ , \quad \theta \in (0,\pi)\ , \quad \varphi \in (-\infty,+\infty)\ .$$

Как и в случае круга, потребуем по угловой переменной φ выполнения условия однозначности для функции $\tilde{u}(r,\theta,\varphi)$.

Оператор Лапласа в сферических координатах имеет вид

$$\Delta = \Delta_r + \frac{1}{r^2}\Delta_{\theta,\varphi}\ , \tag{2.104}$$

$$\Delta_r = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}\ , \quad \Delta_{\theta,\varphi} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\ .$$

Интересно отметить, что оператор $-\Delta_{\theta,\varphi}$, с точностью до выбора системы единиц, в квантовой механике соответствует оператору квадрата углового момента: $\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2 = -\Delta_{\theta,\varphi}$.

Разделение переменных проведем в два этапа. Сначала представим неизвестную функцию в виде произведения радиальной и угловой части: $\tilde{u}(r,\theta,\varphi) = R(r)Y(\theta,\varphi)$ — и подставим в уравнение (2.102):

$$-Y\Delta_r R - \frac{R}{r^2}\Delta_{\theta,\varphi}Y = \lambda\,RY \quad \Rightarrow \quad -\frac{\Delta_{\theta,\varphi}Y(\theta,\varphi)}{Y(\theta,\varphi)} = \frac{r^2\Delta_r R(r)}{R(r)} + \lambda\,r^2\ . \tag{2.105}$$

Вводя константу разделения переменных $\varkappa$, получим два уравнения:

$$-\Delta_{\theta,\varphi} Y(\theta,\varphi) = \varkappa\, Y(\theta,\varphi)\ , \tag{2.106}$$

$$r^2 \Delta_r R(r) + \big(\lambda\, r^2 - \varkappa\big) R(r) = 0\ . \tag{2.107}$$

Далее, разделим угловые переменные. Поставим $Y(\theta,\varphi) = T(\theta)\Phi(\varphi)$ в (2.106):

$$-\frac{\Phi(\varphi)}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial T(\theta)}{\partial\theta} - \frac{T(\theta)}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi(\varphi)}{\partial\varphi^2} = \varkappa\, T(\theta)\Phi(\varphi) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sin\theta}{T(\theta)}\frac{d}{d\theta}\sin\theta\frac{dT(\theta)}{d\theta} + \varkappa\sin^2\theta = -\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}\ . \tag{2.108}$$

Вводя еще одну константу разделения переменных μ, получим два обыкновенных ДУ:

$$-\Phi''(\varphi) = \mu\,\Phi(\varphi)\ , \tag{2.109}$$

$$\sin\theta\frac{d}{d\theta}\sin\theta\frac{dT(\theta)}{d\theta} + \big(\varkappa\sin^2\theta - \mu\big)\,T(\theta) = 0\ . \tag{2.110}$$

Граничные условия (2.102) приводят к граничным условиям для радиальной функции: $R(a) = 0$. Фиксируя произвольным образом угловые переменные θ, φ, из условия существования предела при $r \to 0$ имеем, как и в случае круга, условие ограниченности в начале координат функции R: $R(0) < \infty$. Наконец, для фиксированных произвольным образом переменных r, φ из условия существования предела при $\theta \to 0$ или $\theta \to \pi$ получим условие ограниченности для функции T: $T(0) < \infty$, $T(\pi) < \infty$. Для функции Φ, как и в случае круга, из условий однозначности функции $\tilde{u}$: $\tilde{u}(r,\theta,\varphi) = \tilde{u}(r,\theta,\varphi+2\pi)$, $\forall\varphi$, имеем условие периодичности для функции Φ: $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi+2\pi)$, $\forall\varphi$.

В результате мы свели исходную трехмерную задачу к трем одномерным краевым задачам:

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2}{d\varphi^2}\,\Phi(\varphi) = \mu\,\Phi(\varphi)\,, \\ \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi+2\pi),\ \forall\varphi\,, \\ \Phi(\varphi) \not\equiv 0\,, \quad \|\Phi\| = 1\,; \end{cases} \tag{2.111}$$

$$
\begin{cases}
\sin\theta \dfrac{d}{d\theta} \sin\theta \dfrac{dT(\theta)}{d\theta} + \bigl(\varkappa \sin^2\theta - \mu\bigr)\, T(\theta) = 0\,, \\
T(0) < \infty\,, \\
T(\pi) < \infty\,, \\
T(\theta) \not\equiv 0\,, \quad \|T\| = 1\,;
\end{cases} \tag{2.112}
$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{d}{dr} r^2 \dfrac{d}{dr}\, R(r) + \bigl(\lambda\, r^2 - \varkappa\bigr)\, R(r) = 0\,, \\
R(0) < \infty\,, \\
R(a) = 0\,, \\
R(r) \not\equiv 0\,, \quad \|R\| = 1\,.
\end{cases} \tag{2.113}
$$

Интегралы нормировки имеют вид

$$
\|\Phi\|^2 = \int_0^{2\pi} |\Phi(\varphi)|^2\, d\varphi = 1\ , \quad \|T\|^2 = \int_0^{\pi} |T(\theta)|^2 \sin\theta d\theta = 1\ , \tag{2.114}
$$

$$
\|R\|^2 = \int_0^{a} |R(r)|^2\, r^2 dr = 1\ . \tag{2.115}
$$

Решение задачи (2.111) известно:

$$
\Phi_m(\varphi) = \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}}\ , \quad \mu_m = m^2\ , \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ . \tag{2.116}
$$

В задаче (2.112) перейдем к новой переменной $x = \cos\theta$ и введем, как обычно, новую функцию $\tilde{T}(x) = \tilde{T}(\cos\theta) = T(\theta)$, тогда

$$
\frac{dT(\theta)}{d\theta} = \frac{d\tilde{T}(x)}{d\theta} = \frac{d\tilde{T}(x)}{dx}\frac{dx}{d\theta} = -\sin\theta \frac{d\tilde{T}(x)}{dx}\ . \tag{2.117}
$$

Уравнение (2.112) примет вид

$$
\sin^2\theta \frac{d}{dx} \sin^2\theta \frac{d\tilde{T}(x)}{dx} + \bigl(\varkappa \sin^2\theta - \mu\bigr)\, \tilde{T}(x) = 0\ . \tag{2.118}
$$

Учтем, что $\mu = m^2$, поделим уравнение на $\sin^2\theta = 1 - x^2$ и в результате получим

$$
\begin{cases}
\dfrac{d}{dx}(1 - x^2)\dfrac{d\tilde{T}(x)}{dx} + \left(\varkappa - \dfrac{m^2}{1 - x^2}\right) \tilde{T}(x) = 0\,, \\
\tilde{T}(-1) < \infty\,, \\
\tilde{T}(1) < \infty\,, \\
\tilde{T}(x) \not\equiv 0\,, \quad \|\tilde{T}\| = 1\,.
\end{cases} \tag{2.119}
$$

При $m = 0$ ДУ в (2.119) является уравнением Лежандра. Ограниченные при $x \in [-1, 1]$ решения этого уравнения, как известно [9], существуют только при $\varkappa = l(l+1)$, $l = 0, 1, 2\ldots$ и представляют собой, с точностью до произвольного множителя, *полиномы Лежандра* (рис. 2.9):

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l\, l!}\frac{d^l}{dx^l}\left(x^2 - 1\right)^l \,. \tag{2.120}$$

Полиномы Лежандра образуют ортогональную систему полиномов на отрезке $[-1, 1]$ (см. задачу **1.17.**3):

$$\left(P_l, P_{l'}\right) = \frac{2}{2l+1}\,\delta_{ll'} \,. \tag{2.121}$$

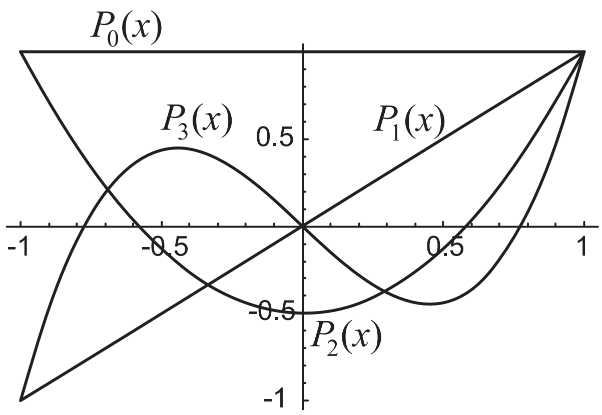


Рис. 2.9

При $m \neq 0$ уравнение (2.119) является уравнением для присоединенных функций Лежандра. Их свойства подробно обсуждаются в [9]. Решения уравнения (2.119) построены для всех значений параметров $\varkappa$ и m, но, как и в случае $m = 0$, ограниченные на отрезке $[-1, 1]$ решения существуют только при $\varkappa = l(l+1)$, $l = 0, 1, 2\ldots$. Эти решения называются *присоединенными функциями Лежандра 1-го рода* и имеют вид

$$P_l^m(x) = \left(1 - x^2\right)^{\frac{|m|}{2}} \frac{d^{|m|}}{dx^{|m|}} P_l(x) = \frac{(-1)^l}{2^l\, l!}\left(1 - x^2\right)^{\frac{|m|}{2}} \frac{d^{\,l+|m|}}{dx^{l+|m|}}\left(1 - x^2\right)^l. \tag{2.122}$$

Уравнение (2.119) не изменяется при замене m на $-m$, и поэтому решение фактически зависит лишь от $|m|$. Из выражения (2.122) следует ограничение на значения $|m|$ при заданном l: $|m| \leq l$.

Убедиться в справедливости (2.122) можно, сделав подстановку $\tilde{T}(x) = \left(1-x^2\right)^{\frac{|m|}{2}} v(x)$ в уравнение (2.119). Тогда для функции $v(x)$ получим

$$\left(1-x^2\right) v''(x) - 2x\,(|m|+1)\,v'(x) + [\varkappa - |m|(|m|+1)]\,v(x) = 0\,. \quad (2.123)$$

Такое же уравнение получается при дифференцировании уравнения Лежандра $|m|$ раз, следовательно, учитывая, что $\varkappa = l(l+1)$, можно положить $v(x) = \dfrac{d^{|m|}}{dx^{|m|}}\,P_l(x)$.

Присоединенные функции Лежандра с одинаковым индексом m образуют ортогональную систему на отрезке $[-1,1]$ (задача **1.17.** 4):

$$(P_l^m, P_{l'}^m) = \frac{2}{2l+1}\,\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\,\delta_{ll'}\,. \quad (2.124)$$

С учетом этого *нормированные присоединенные функции Лежандра* имеют вид

$$\Theta_{lm}(x) = \sqrt{\frac{2l+1}{2}\,\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}\,P_l^{|m|}(x) \quad (2.125)$$

Графики некоторых нормированных присоединенных функций Лежандра приведены на рис. 2.10.

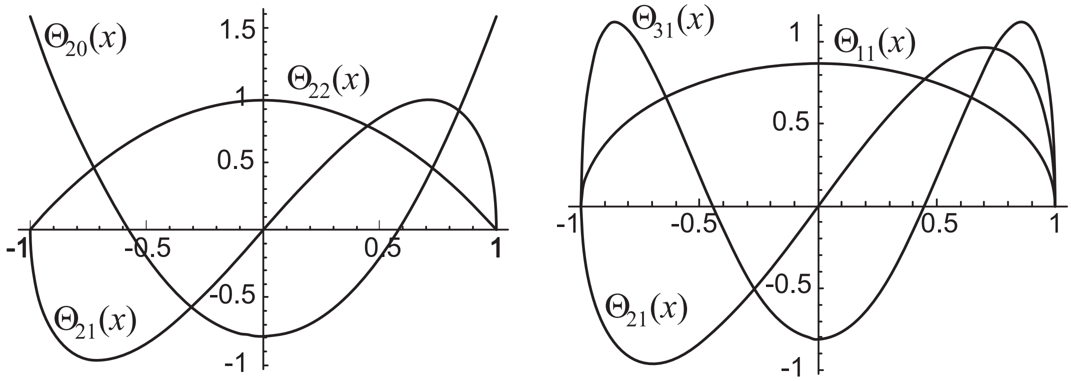


Рис. 2.10

Таким образом, задачи (2.111) и (2.112) для функции $Y(\theta,\varphi)$ и параметров $\mu, \varkappa$ имеют решения

$$\varkappa = l(l+1)\,, \quad l = 0,1,2\ldots\,; \quad \mu = m^2\,, \quad -l \leqslant m \leqslant l\,;$$

$$\tilde{Y}_{lm}(\theta,\varphi) = \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}}\,\Theta_{lm}(\cos\theta) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\,\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}\,P_l^{|m|}(x)\,e^{im\varphi}. \quad (2.126)$$

Функции $\tilde{Y}_{lm}(\theta, \varphi)$ называются *сферическими гармониками.*

Обратим внимание на одно важное обстоятельство. Как уже отмечалось выше, для вещественных функций условие нормировки определяет вид собственных функций с точностью до знака, который может быть, вообще говоря, разным для различных собственных функций. Для комплекснозначных собственных функций, например сферических гармоник, произвол еще больше: любую собственную функцию можно умножить на произвольный фазовый множитель $e^{i\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. К счастью, этот произвол как в классической физике, так и в квантовой механике не влияет на окончательный результат. Однако промежуточные вычисления зависят от этого выбора. Исторически получилось, что разные авторы используют разный выбор фазовых множителей, причем часто этот выбор явно не указывается. В итоге одни и те же формулы в разных руководствах записываются несколько иначе. Во избежание путаницы мы рекомендуем использовать исторически наиболее общепринятый выбор фазовых множителей по Кондону—Шортли. При этом выборе вместо естественного на первый взгляд выражения (2.126) сферические гармоники определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} Y_{lm}(\theta, \varphi) &= (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \Theta_{lm}(\cos\theta) = \\ &= (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(x)\, e^{im\varphi}. \end{aligned} \tag{2.127}$$

Сферические гармоники часто встречаются в различных разделах математической и теоретической физики, поскольку естественно появляются в задачах со сферической симметрией. Свойства сферических гармоник подробно обсуждаются в [9, 15]. Отметим лишь тот факт, что эти функции образуют ортонормированную систему:

$$\big(Y_{lm}\,, Y_{l'm'}\big) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} Y^*_{lm}(\theta, \varphi)\, Y_{l'm'}(\theta, \varphi)\, \sin\theta\, d\theta \;=\; \delta_{ll'}\, \delta_{mm'}\;, \tag{2.128}$$

полную в $L_2(S)$, где S — поверхность сферы произвольного радиуса.

С учетом полученных результатов радиальная часть задачи принимает вид

$$
\begin{cases}
r^2 R''(r) + 2r R'(r) + \big(\lambda r^2 - l(l+1)\big) R(r) = 0\,, \\
R(0) < \infty\,, \\
R(a) = 0\,, \\
R(r) \not\equiv 0\,, \quad \|R\| = 1\,.
\end{cases} \tag{2.129}
$$

Рассмотрим различные возможные значения параметра λ.

В случае $\lambda < 0$ замена переменной $x = \sqrt{|\lambda|}\, r$ и замена функции $R(r) = \tilde{R}(x) = x^{-\frac{1}{2}} I(x)$ приводят к уравнению для модифицированных функций Бесселя полуцелого порядка:

$$
x^2 I''(x) + x\, I'(x) - \Big(x^2 + \big(l + \tfrac{1}{2}\big)^2\Big)\, I(x) = 0\;. \tag{2.130}
$$

В общем решении этого уравнения

$$
\tilde{R}(x) = C_1\, x^{-\frac{1}{2}} I_{l+\frac{1}{2}}(x) + C_2\, x^{-\frac{1}{2}} K_{l+\frac{1}{2}}(x) \tag{2.131}
$$

константу C_2 необходимо положить равной нулю из-за неограниченности функции $K_{l+\frac{1}{2}}(x)$ при $x \to 0$, а константа C_1 обращается в ноль в силу условия $R(a) = \tilde{R}(\sqrt{|\lambda|}\, a) = 0$, поскольку функция $x^{-\frac{1}{2}} I_{l+\frac{1}{2}}(x)$ положительна и монотонно возрастает.

При $\lambda = 0$ уравнение (2.129) является уравнением Эйлера, и его решение находится подстановкой $R(r) \sim r^{\alpha}$:

$$
R(r) = C_1\, r^l + C_2\, r^{-l-1}\;. \tag{2.132}
$$

Второе слагаемое при $l = 0, 1, 2, \ldots$ не ограничено в нуле, следовательно, $C_2 = 0$. С учетом этого условие $R(a) = 0$ выполняется только при $C_1 = 0$.

В случае $\lambda > 0$ замена переменных $x = \sqrt{\lambda}\, r$, $R(r) = \tilde{R}(x)$ приводит к уравнению

$$
x^2\, \tilde{R}''(x) + 2x\, \tilde{R}'(x) + \big(x^2 - l(l+1)\big)\, \tilde{R}(x) = 0\;. \tag{2.133}
$$

Решениями этого уравнения являются $j_l(x)$ и $n_l(x)$ — *сферические функции Бесселя* 1-го и 2-го рода, и они образуют фундаментальную систему решений. Следовательно, общее решение имеет вид

$$
\tilde{R}(x) = C_1\, j_l(x) + C_2\, n_l(x)\;. \tag{2.134}
$$

Сферические функции Бесселя подробно рассмотрены в [9, 10]; перечислим некоторые свойства этих функций. Замена функции $\tilde{R}(x) =$

$= x^{-\frac{1}{2}}J(x)$ приводит к уравнению Бесселя с $\nu = l + \frac{1}{2}$. Отсюда следует, что сферические функции Бесселя выражаются через функции Бесселя полуцелого порядка:

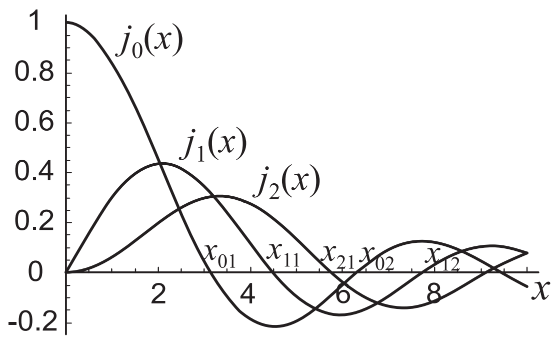
$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, J_{l+\frac{1}{2}}(x)\;, \quad n_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, Y_{l+\frac{1}{2}}(x)\;. \tag{2.135}$$

Для них справедливы следующие рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned} \left[x^{l+1} f_l(x)\right]' &= x^{l+1} f_{l-1}(x)\;, & f_{l-1}(x) &= \frac{l+1}{x}\, f_l(x) + f_l'(x)\;, \\ \left[x^{-l} f_l(x)\right]' &= -x^{-l} f_{l+1}(x)\;, & f_{l+1}(x) &= \frac{l}{x}\, f_l(x) - f_l'(x)\;. \end{aligned} \tag{2.136}$$

Здесь в качестве $f_l(x)$ могут быть $j_l(x)$, $n_l(x)$ или их линейная комбинация.

Графики некоторых сферических функций Бесселя приведены на рис. 2.11.



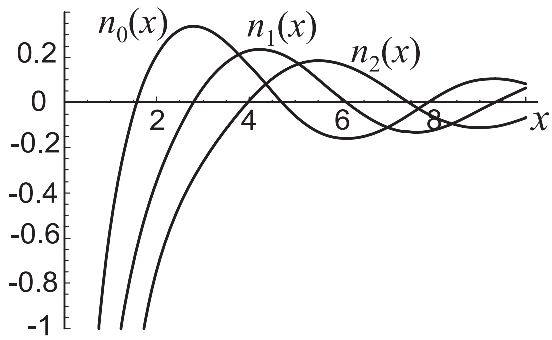


Рис. 2.11

Функция $n_l(x)$ неограничена при $x \to 0$, поэтому в $\tilde{R}(x)$ константу C_2 следует положить равной нулю. Оставшееся граничное условие при $r = a$ приводит к уравнениям для определения собственных значений:

$$j_l(\sqrt{\lambda}\, a) = 0\;. \tag{2.137}$$

При $l = 0$ можно получить аналитические выражения для λ. Используя разложение функции Бесселя $J_{\frac{1}{2}}(x)$ в ряд

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+\frac{1}{2}+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}} \tag{2.138}$$

и учитывая, что $\Gamma(n+\dfrac{1}{2}) = \dfrac{\sqrt{\pi}\,(2n)!}{2^{2n}\,n!}$, получим

$$j_0(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, x^{2k} = \frac{\sin x}{x}\;. \tag{2.139}$$

Следовательно, при $l = 0$ решения уравнения (2.137) имеют вид

$$\sqrt{\lambda}\,a = \pi k\ , \quad k = 1, 2, 3\ldots \quad \Rightarrow \quad \lambda_{0k} = \left(\frac{\pi k}{a}\right)^2 . \tag{2.140}$$

Для сферических функций Бесселя $j_l(x)$ справедлива формула Рэлея

$$j_l(x) = (-x)^l \left[\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right]^l \frac{\sin x}{x} . \tag{2.141}$$

Таким образом, $j_l(x)$ также выражаются через элементарные функции, однако при $l = 1, 2, \ldots$ уравнение (2.137) не решается аналитически.

Обозначим k-й корень уравнения $j_l(x) = 0$ через x_{lk} (см. рис. 2.11), тогда собственные значения и радиальные функции имеют вид

$$\lambda_{lk} = \left(\frac{x_{lk}}{a}\right)^2,\ R_{lk}(r) = N_{lk}\, j_l\!\left(x_{lk}\frac{r}{a}\right),\ l = 0, 1, 2, \ldots;\ k = 1, 2, \ldots . \tag{2.142}$$

Константу N_{lk} найдем из условия нормировки

$$\|R_{lk}\|^2 = 1 = N_{lk}^2 \int_0^a j_l^2\!\left(x_{lk}\frac{r}{a}\right) r^2 dr . \tag{2.143}$$

Учитывая связь между функциями Бесселя и формулу (2.75), получим выражение для константы нормировки

$$N_{lk} = \frac{2\sqrt{x_{lk}}}{a\sqrt{\pi}\,|J'_{l+\frac{1}{2}}(x_{lk})|} . \tag{2.144}$$

Вид некоторых радиальных функций показан на рис. 2.12.

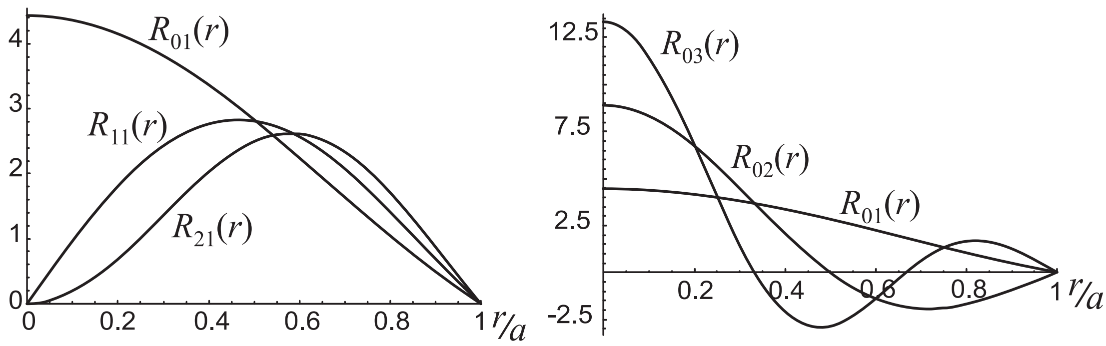


Рис. 2.12

В итоге собственные значения и собственные функции задачи (2.102) имеют вид

$$\begin{aligned} \lambda_{lk} &= \left(\frac{x_{lk}}{a}\right)^2 , \quad l = 0, 1, 2, \ldots\ ;\ k = 1, 2, 3, \ldots , \\ u_{klm}(r, \theta, \varphi) &= N_{lk}\, j_l\!\left(x_{lk}\frac{r}{a}\right) Y_{lm}(\theta, \varphi) , \quad -l \leqslant m \leqslant l . \end{aligned} \tag{2.145}$$

Здесь x_{lk} — k-й корень уравнения $j_l(x) = 0$. Каждое собственное значение λ_{lk} имеет кратность вырождения $2l + 1$: собственные функции u_{klm}, имеющие одинаковые индексы k и l, соответствуют одному собственному значению λ_{lk}.

2.9. Решить задачу на собственные значения для оператора Лапласа в шаре $G = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 < a^2\}$:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda\, u\,, \quad (x, y, z) \in G\,, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial G} = 0\,, \\ u \not\equiv 0\,, \ \ \|u\| = 1\,. \end{cases}$$

Ответы и указания к главе 2

2.1.

1) $\lambda_k = (\pi k)^2$, $k = 0, 1, \ldots$; $y_0(x) = 1$, $y_k(x) = \sqrt{2}\cos \pi k x$, $k = 1, 2, \ldots$.

2) *Указание.* Удобно сделать замену переменной $z = x + l$.

Ответ: $\lambda_k = \left(\dfrac{\pi k}{2l}\right)^2$, $y_k(x) = \dfrac{1}{\sqrt{l}} \sin \dfrac{\pi k(x+l)}{2\,l}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$.

3) $\lambda_k = \left(k + \dfrac{1}{2}\right)^2$, $y_k(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \sin\left(k + \dfrac{1}{2}\right)x$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

4) $\lambda_k = (2k+1)^2$, $y_k(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \cos(2k+1)\,x$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

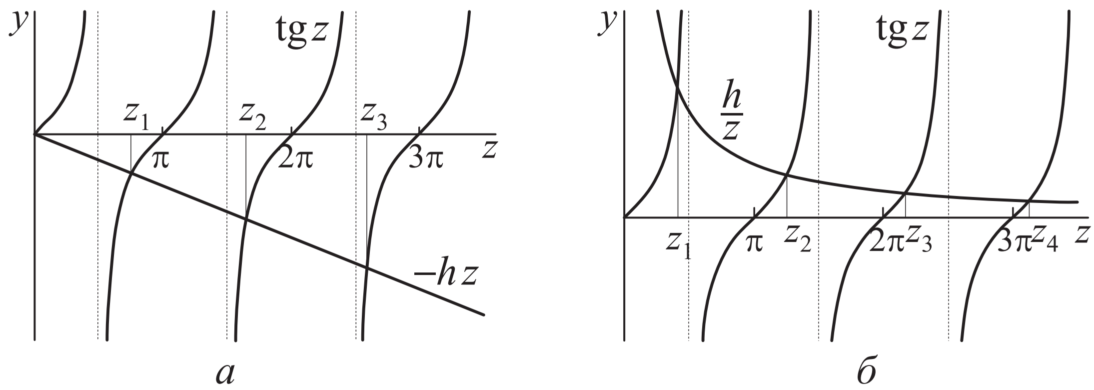


Рис. 2.13

2.2.

1) $\lambda_k = \left(\dfrac{z_k}{l}\right)^2$, $y_k(x) = \sqrt{\dfrac{2\,(\alpha^2 l^2 + z_k^2)}{l\,(\alpha^2 l^2 + \alpha l + z_k^2)}} \sin \dfrac{z_k x}{l}$, $k = 1, 2, \ldots$,

где $z_k > 0$ — k-й корень трансцендентного уравнения $\operatorname{tg} z = -\dfrac{z}{\alpha\, l}$ (см. рис. 2.13, *a*).

При больших k: $\lambda_k \approx [\dfrac{\pi}{l}(k - \dfrac{1}{2})]^2$, $y_k(x) \approx \sqrt{\dfrac{2}{l}} \sin \dfrac{\pi(k - \frac{1}{2})\,x}{l}$.

2) $\lambda_k = \left(\dfrac{z_k}{l}\right)^2$, $y_k(x) = \sqrt{\dfrac{2\,(l^2 + \beta^2 z_k^2)}{l\,(l^2 + l\beta + \beta^2 z_k^2)}} \cos \dfrac{z_k x}{l}$, $k = 1, 2, \ldots$,

где $z_k > 0$ — k-й корень трансцендентного уравнения $\operatorname{tg} z = \dfrac{l}{\beta\, z}$ (см. рис. 2.13, *б*).

При больших k: $\lambda_k \approx \left(\dfrac{\pi(k-1)}{l}\right)^2$, $y_k(x) \approx \sqrt{\dfrac{2}{l}} \cos \dfrac{\pi(k-1)x}{l}$.

3) $\lambda_k = z_k^2,\ \ y_k(x) = \sqrt{\dfrac{2}{1+\beta^2 z_k^2}}\,(\beta\, z_k \cos z_k x + \sin z_k x)\,,\quad k = 1, 2, \ldots\,,$

где $z_k > 0$ — k-й корень трансцендентного уравнения $\operatorname{tg} z = -\beta\, z$ (см. рис. 2.13, *а*).

При больших k: $\quad \lambda_k \approx \left[\pi\Big(k - \dfrac{1}{2}\Big)\right]^2,\ \ y_k(x) \approx \sqrt{2}\,\cos\pi\Big(k-\dfrac{1}{2}\Big)x.$

4) $\lambda_0 = -1\,,\ y_0(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{e\operatorname{sh}1}};$

$\lambda_k = (\pi k)^2\,,\ y_k(x) = \sqrt{\dfrac{2}{1+\pi^2k^2}}\,\Big(\pi k\cos\pi kx + \sin\pi kx\Big),\ k{=}1, 2, \ldots\,.$

При больших k: $\quad y_k(x) \approx \sqrt{2}\,\cos\pi kx\,.$

Замечание. Появление отрицательного собственного значения обусловлено тем, что данная задача не является задачей Штурма—Лиувилля.

2.3.

1) $\lambda_{mn} = \left(\dfrac{\pi(2m+1)}{2a}\right)^2 + \left(\dfrac{\pi(2n+1)}{2b}\right)^2,\ \ m, n = 1, 2, \ldots;$

$$u_{mn}(x,y) = \frac{2}{\sqrt{ab}}\,\sin\frac{\pi(2m+1)x}{2a}\,\cos\frac{\pi(2n+1)y}{2b}.$$

2) $\lambda_{mn} = \left(\dfrac{\pi m}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{\pi n}{b}\right)^2,\qquad m = 1, 2, \ldots,\ n = 0, 1, 2, \ldots;$

$$u_{m0}(x,y) = \sqrt{\frac{2}{ab}}\,\sin\frac{\pi mx}{a},\qquad u_{mn}(x,y) = \frac{2}{\sqrt{ab}}\,\sin\frac{\pi mx}{a}\,\cos\frac{\pi ny}{b},$$

$m, n = 1, 2, \ldots\,.$

2.4. *Указание.* Необходимо перейти в полярную систему координат. Внешняя нормаль к границе круга совпадает по направлению с радиусом–вектором: $\vec{n} = \vec{\rho}/\rho$, значит, $\dfrac{\partial u}{\partial n} = \dfrac{\partial u}{\partial\rho}$.

Ответ. $\lambda_{00} = 0\,,\quad u_{00}(\rho,\varphi) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}a};$

$\lambda_{mk} = \left(\dfrac{z_{mk}}{a}\right)^2,\quad u_{mk}(\rho,\varphi) = N_{mk}\,e^{im\varphi}J_{|m|}\Big(z_{mk}\dfrac{\rho}{a}\Big),$

где z_{mk} — k-й корень уравнения $J'_{|m|}(z) = 0$; $m = 0, \pm1, \ldots,\ k = 1, 2\ldots;$

$$N_{0k} = \frac{\sqrt{2}}{a\sqrt{\pi}\,|J_0(z_{0k})|}\,,\qquad N_{mk} = \frac{1}{a\sqrt{\pi\,(1 - m^2/z_{mk}^2)}\,\big|J_{|m|}(z_{mk})\big|}.$$

2.5. *Указание.* Необходимо перейти в полярную систему координат; тогда граничные условия примут вид $u|_{\rho=a} = 0$, $u|_{\varphi=0} = 0$, $u|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = 0$.

Ответ. $\lambda_{mk} = \left(\dfrac{z_{mk}}{a}\right)^2$, где z_{mk} — k-й корень уравнения $J_{2m}(z) = 0$;

$$u_{mk}(\rho,\varphi) = \frac{2\sqrt{2}}{a\sqrt{\pi}\,\left|J'_{2m}(z_{mk})\right|}\, J_{2m}\left(z_{mk}\frac{\rho}{a}\right)\sin 2m\varphi\,, \quad m,k = 1,2,\ldots.$$

2.6. *Указание.* Необходимо перейти в полярную систему координат. Граничные условия примут вид $u|_{\rho=a} = 0$, $u|_{\rho=b} = 0$.

Ответ. $\lambda_{mk} = \left(\dfrac{z_{mk}}{a}\right)^2$, $m = 0, \pm1, \pm2\ldots$, $k = 1, 2\ldots$, где z_{mk} — k-й корень уравнения $J_{|m|}(z)\,Y_{|m|}\left(z\frac{b}{a}\right) - J_{|m|}\left(z\frac{b}{a}\right)Y_{|m|}(z) = 0$;

$$u_{mk}(\rho,\varphi) = N_{mk}\,e^{im\varphi}\left[Y_{|m|}(z_{mk})\,J_{|m|}\left(z_{mk}\frac{\rho}{a}\right) - J_{|m|}(z_{mk})\,Y_{|m|}\left(z_{mk}\frac{\rho}{a}\right)\right],$$

где $N_{0k} = \dfrac{\sqrt{2\pi}\,z_{0k}\left|J_0(z_{0k}\frac{b}{a})\right|}{2a\sqrt{J_0^2(z_{0k}) - J_0^2(z_{0k}\frac{b}{a})}}$, $\quad N_{mk} = \dfrac{\sqrt{\pi}\,z_{mk}\left|J_{|m|}(z_{mk}\frac{b}{a})\right|}{2a\sqrt{J_{|m|}^2(z_{mk}) - J_{|m|}^2(z_{mk}\frac{b}{a})}}$.

2.7. *Указание.* Граничные условия имеют вид $X(0) = X(a) = 0$, $Y(0) = Y(b) = 0$, $Z(0) = Z(c) = 0$.

Ответ. $\lambda_{klm} = \left(\dfrac{\pi k}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{\pi l}{b}\right)^2 + \left(\dfrac{\pi m}{c}\right)^2$, $\quad k,l,m = 1,2,\ldots$;

$$u_{klm}(x,y,z) = \sqrt{\frac{8}{a\,b\,c}}\,\sin\frac{\pi k x}{a}\,\sin\frac{\pi l y}{b}\,\sin\frac{\pi m z}{c}\,.$$

2.8. $\lambda_{00n} = \left(\dfrac{\pi n}{h}\right)^2$, $\quad \lambda_{mkn} = \left(\dfrac{z_{mk}}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{\pi n}{h}\right)^2$, где z_{mk} — k-й корень уравнения $J'_{|m|}(z) = 0$; $m = 0, \pm1, \ldots$, $k = 1, 2, \ldots$, $n = 0, 1, 2, \ldots$;

$u_{mkn}(\rho,\varphi,z) = u_{mk}(\rho,\varphi)\,Z_n(z)$, где $Z_0(z) = \dfrac{1}{\sqrt{h}}$, $\ Z_n(z) = \sqrt{\dfrac{2}{h}}\cos\dfrac{\pi z}{h}$, $u_{mk}(\rho,\varphi)$ — собственные функции задачи **2.4.**

2.9. $\lambda_{00} = 0$, $\lambda_{lk} = \left(\dfrac{x_{lk}}{a}\right)^2$, где x_{lk} — k-й корень уравнения $j'_l(x) = 0$;

$u_{000}(r,\theta,\varphi) = \sqrt{\dfrac{3}{4\pi a^3}}$, $\quad u_{klm}(r,\theta,\varphi) = N_{lk}\,j_l\Big(x_{lk}\dfrac{r}{a}\Big)\,Y_{lm}(\theta,\varphi)$, $\quad$ где

$N_{lk} = \dfrac{\sqrt{2}\,x_{lk}}{\sqrt{a^3\,(x_{lk}^2 - l(l+1))}\,\left|j_l(x_{lk})\right|}$, $k = 1, 2\ldots$, $l = 0, 1, 2\ldots$, $-l \leqslant m \leqslant l$.

Глава 3

Интегральные уравнения

3.1. Интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода

Физические задачи часто приводят к необходимости рассмотрения и решения интегральных уравнений (ИУ) специального вида — уравнений Фредгольма 2-го рода, изучением которого мы и ограничимся.

Интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода имеет вид

$$\varphi(x) = \mu \int_a^b K(x,y)\,\varphi(y)\,dy + f(x)\;. \tag{3.1}$$

Неизвестной здесь является функция $\varphi(x)$, которая входит и под знак интеграла; заданными считаются ядро $K(x,y) \in L_2\left([a,b]\otimes[a,b]\right)$ и свободный член $f(x) \in L_2[a,b]$. Параметр μ может иметь определенное значение либо уравнение требуется решить при всех возможных значениях $\mu \in \mathbb{R}$. Если $f(x) = 0$, то ИУ называется *однородным*, в противном случае — *неоднородным*. Решить ИУ означает найти все его решения для любых вещественных μ или доказать, что решений нет.

Важную роль в решении ИУ играет линейный *интегральный оператор Фредгольма* $\hat{A} : L_2[a,b] \to L_2[a,b]$, который определяется следующим образом:

$$\psi(x) = \hat{A}\varphi(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int_a^b K(x,y)\,\varphi(y)\,dy\;, \tag{3.2}$$

где $K(x,y) \in L_2\left([a,b]\otimes[a,b]\right)$. Оператор $\hat{A}$ — вполне непрерывный (следовательно, непрерывный и ограниченный). Он, вообще говоря, не является неотрицательным и является симметричным, если его ядро является симметричной функцией своих аргументов: $K(x,y) = K(y,x)$.

3.2. Задача на собственные значения для интегрального оператора Фредгольма с симметричным ядром

Рассмотрим задачу на собственные значения для оператора $\hat{A}$:

$$\begin{cases} \hat{A}\,\varphi(x) = \lambda\,\varphi(x)\,, \\ \varphi(x) \not\equiv 0\,, \quad \|\varphi\|^2 = \displaystyle\int_a^b \varphi^2(x)\,dx = 1\,. \end{cases} \tag{3.3}$$

Для произвольного оператора Фредгольма не существует алгоритма явного построения решения этой задачи, однако для операторов специального вида такой алгоритм может быть указан. А именно, предположим, что ядро оператора *вырождено*. Это означает по определению, что оно может быть представлено в виде

$$K(x,y) = \sum_{l=1}^{n} p_l(x)\,q_l(y)\,, \tag{3.4}$$

где $p_l(x) \in L_2[a,b]$, $q_l(y) \in L_2[a,b]$ и системы $\{p_l(x)\}_{l=1}^n$ и $\{q_l(y)\}_{l=1}^n$ линейно-независимы. При выборе функций $p_l(x)$ и $q_l(y)$ имеется большая степень произвола, но результат решения задачи от этого произвола не зависит. Подстановка этого ядра в уравнение на собственные значения дает

$$\sum_{l=1}^{n} p_l(x) \int_a^b q_l(y)\varphi(y)\,dy = \lambda\,\varphi(x)\,. \tag{3.5}$$

Отсюда следует, что если $\lambda \neq 0$, то решение, если оно существует, обязательно имеет вид

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k p_k(x)\,, \tag{3.6}$$

где c_k — пока еще неопределенные коэффициенты. Случай $\lambda = 0$, как мы увидим далее, не представляет интереса. Решением в этом случае является любая функция, ортогональная ко всем функциям $\{q_l(y)\}_{l=1}^n$. В дальнейшем полагаем, что $\lambda \neq 0$.

Для нахождения коэффициентов $\{c_k\}_{k=1}^n$ подставим найденный вид решения в исходное уравнение и воспользуемся свойством линейной независимости функций $\{p_l(x)\}_{l=1}^n$. Тогда получим алгебраическую задачу на собственные значения:

$$\begin{cases} (\mathbf{K} - \lambda\,\mathbf{E})\,\vec{c} = 0\,, \\ \vec{c} \neq 0\,. \end{cases} \tag{3.7}$$

Здесь $\mathbf{E}$ — единичная матрица, $\vec{c}$ — столбец неизвестных $\{c_k\}_{k=1}^n$, а элементы матрицы $\mathbf{K}$ вычисляются по формуле

$$K_{lm} = (q_l, p_m) = \int_a^b q_l(t)\,p_m(t)\,dt\ . \tag{3.8}$$

Условием существования нетривиального решения, $\vec{c} \neq 0$, однородной системы (3.7) является равенство нулю ее определителя:

$$\det|\,\mathbf{K} - \lambda\,\mathbf{E}| = 0\ . \tag{3.9}$$

Это уравнение n-го порядка относительно λ имеет n корней: $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ (среди которых могут быть и кратные). Они и будут собственными значениями оператора $\hat{A}$.

Для произвольного вырожденного ядра нет гарантии того, что удачным выбором функций $p_l(x)$ и $q_l(y)$ можно добиться симметричности матрицы $\mathbf{K}$. Значит, как это следует из линейной алгебры, в этих случаях алгебраическая задача на собственные значения не допускает решения в полном объеме. Попросту говоря, произвольную квадратную матрицу диагонализовать невозможно.

Иная ситуация в случае симметричного ядра. Всегда можно выбрать функции $p_l(x)$ и $q_l(y)$ так, чтобы матрица $\mathbf{K}$ была симметричной; следовательно, задача (3.7) всегда имеет решение. Поскольку результат решения, как уже отмечалось выше, не зависит от этого выбора, делать его необязательно, важен сам факт существования такого выбора. Заметим также, что симметричность оператора $\hat{A}$ гарантирует, что все λ_k — вещественные. Подставляя каждое λ_k в систему (3.7), найдем $\vec{c}^{\,(1)}, \vec{c}^{\,(2)}, \ldots \vec{c}^{\,(n)}$; тогда собственные функции оператора $\hat{A}$ будут иметь вид

$$\varphi_k(x) = \sum_{l=1}^{n} c_l^{(k)} p_l(x)\ . \tag{3.10}$$

Если собственное значение λ_k невырожденное, то ранг матрицы $(\mathbf{K}-\lambda\mathbf{E})$ равен $n-1$. Это означает, что одно из уравнений однородной системы является линейной комбинацией остальных и, значит, без ущерба может быть отброшено, что упрощает решение оставшихся уравнений. В этом случае $\varphi_k(x)$ будет содержать одну произвольную постоянную, которую можно определить из условия нормировки: $\|\varphi\| = 1$. Если кратность вырождения собственного значения равна ν: $\lambda_{k_1} = \lambda_{k_2} = \ldots = \lambda_{k_\nu}$, то решение системы (3.7) при $\lambda = \lambda_{k_i}$ будет содержать ν произвольных постоянных. Если с целью дальнейшего использования нужно построить в подпространстве гильбертова пространства $L_2[a,b]$, где $\lambda \neq 0$ базис, то их следует выбирать так, чтобы собственные функции $\varphi_{k_1}, \varphi_{k_2}, \ldots \varphi_{k_\nu}$ были ортогональными (следовательно, линейно независимыми) и нормированными. Для этого иногда требуется использовать процедуру ортогонализации по Шмидту.

В заключение напомним основные свойства решений задачи на собственные значения для симметричного оператора Фредгольма. Собственные значения $\lambda_k \in [\,-\|\hat{A}\|, +\|\hat{A}\|\,]$, где $\|\hat{A}\|$ — норма оператора Фредгольма:

$$\|\hat{A}\| = \max_{\|\varphi\|=1} \|\hat{A}\| = \max_{\lambda_k} |\lambda_k| \ . \tag{3.11}$$

Собственные значения λ_k сгущаются к точке 0. Собственные функции, отвечающие различным собственным значениям автоматически ортогональны, а в случае вырождения могут быть выбраны ортогональными, т. е. образуют базис.

Пример. Найдем собственные значения и собственные функции интегрального оператора с симметричным ядром

$$\hat{A}\varphi(x) = \int_{-1}^{1} (x + y + 2xy)\, \varphi(y)\, dy \tag{3.12}$$

в пространстве $L_2[-1,1]$.

Выберем функции p_l и q_l в виде

$$\begin{aligned} p_1(x) &= x \ , \qquad q_1(y) = 1 + 2y \ , \\ p_2(x) &= 1 \ , \qquad q_1(y) = y \ . \end{aligned} \tag{3.13}$$

Вычислим элементы матрицы $\mathbf{K}$:

$$\begin{aligned} K_{11} &= \int_{-1}^{1} (1+2t)\, t\, dt = \frac{4}{3} \ , \quad K_{12} = \int_{-1}^{1} (1+2t)\, dt = 2 \ , \\ K_{21} &= \int_{-1}^{1} t^2\, dt = \frac{2}{3} \ , \qquad\qquad K_{22} = \int_{-1}^{1} t\, dt = 0 \ . \end{aligned} \tag{3.14}$$

Запишем систему уравнений (3.7):

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{3} - \lambda & 2 \\ \frac{2}{3} & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ . \tag{3.15}$$

Для отыскания нетривиального решения приравняем нулю определитель этой системы и найдем собственные значения:

$$\begin{vmatrix} \frac{4}{3}-\lambda & 2 \\ \frac{2}{3} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{4}{3}\lambda - \frac{4}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -\frac{2}{3}\,, \ \ \lambda_2 = 2\,. \tag{3.16}$$

Подставляя λ_1, а затем λ_2 в систему (3.15) и оставляя лишь одно уравнение, найдем собственные функции.

$$\underline{\lambda = \lambda_1 = -\frac{2}{3}} \tag{3.17}$$

$$2c_1 + 2c_2 = 0 \ \Rightarrow \ \vec{c}^{\,(1)} = C\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \text{где } C \text{ – произвольная постоянная,}$$

$$\varphi_1(x) = C\,(1-x)\ \ ; \quad \|\varphi_1(x)\| = 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{\varphi_1(x) = \sqrt{\frac{3}{8}}\,(1-x)}\,.$$

$$\underline{\lambda = \lambda_2 = 2} \tag{3.18}$$

$$-\frac{2}{3}\,c_1 + 2\,c_2 = 0 \ \Rightarrow \ \vec{c}^{\,(2)} = C\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ \text{где } C \text{ – произвольная постоянная,}$$

$$\varphi_2(x) = C\,(3x+1)\ \ ; \quad \|\varphi_2(x)\| = 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{\varphi_2(x) = \sqrt{\frac{1}{8}}\,(1+3x)}\,.$$

Легко проверить непосредственной подстановкой, что найденные собственные функции удовлетворяют уравнению на собственные значения, а также, что $(\varphi_1, \varphi_2) = 0$. Напомним, что выбор функций $p_l(x)$ и $q_l(x)$ неоднозначен, однако при любом выборе собственные значения и собственные функции получатся одинаковыми. Норма оператора $\|\hat{A}\| = 2$. Функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ образуют часть базиса в $L_2[-1,1]$, остальные $\varphi_k(x)$ соответствуют $\lambda = 0$.

3.1. Найти отличные от нуля собственные значения и соответствующие собственные функции следующих интегральных операторов:

1) $$\hat{A}\varphi(x) = \int\limits_0^{2\pi} \left[\sin(x+y) + \frac{1}{2}\right] \varphi(y)\,dy\,;$$

2) $$\hat{A}\varphi(x) = \int\limits_0^{2\pi} \left[\cos^2(x+y) + \frac{1}{2}\right] \varphi(y)\,dy\,;$$

3) $\hat{A}\varphi(x) = \int\limits_0^1 \left(5x^2y^2 - 1\right) \varphi(y)\, dy\,;$

4) $\hat{A}\varphi(x) = \int\limits_0^1 \left[\left(\frac{x}{y}\right)^{2/5} + \left(\frac{y}{x}\right)^{2/5}\right] \varphi(y)\, dy\,;$

5) $$\begin{aligned}\hat{A}\varphi(x) \;=\; &\int\limits_0^\pi (\sin x\, \sin 4y + \sin 2x\, \sin 3y + \sin 3x\, \sin 2y + \\ &+ \sin 4x\, \sin y)\, \varphi(y)\, dy\,.\end{aligned}$$

3.3. Решение интегральных уравнений с симметричным ядром

В случае симметричного ядра система собственных функций для интегрального оператора Фредгольма, согласно теореме Гильберта, является базисом в $L_2[a,b]$ и решение интегрального уравнения (3.1) ищется в виде разложения по собственным функциям оператора $\hat{A}$.

Пусть $\{\lambda_k\}$ и $\{\varphi_k(x)\}$ — собственные значения и собственные функции оператора $\hat{A}$. Предположим, что решение существует, и будем искать его в виде ряда Фурье:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, \varphi_k(x)\ , \tag{3.19}$$

где c_k — коэффициенты Фурье, которые еще нужно найти. Подставляя этот вид решения в ИУ и используя линейную независимость базисных функций, получим уравнения для c_k:

$$(1 - \mu\lambda_k)\, c_k = (f, \varphi_k)\ ,\ \forall k\ . \tag{3.20}$$

Отсюда следует

$$c_k = \begin{cases} \dfrac{(f,\varphi_k)}{1-\mu\lambda_k}\,, & \text{если } \mu \neq \dfrac{1}{\lambda_k}\,, \\ C_k \text{ – произвольная постоянная, если } \mu = \dfrac{1}{\lambda_k} & \text{и } (f,\varphi_k) = 0. \end{cases} \tag{3.21}$$

В случае если $\mu = 1/\lambda_k$ и $(f, \varphi_k) \neq 0$, решения не существует. Действительно, соотношение (3.20) в этом случае является противоречивым: $0 \cdot c_k = (f, \varphi_k) \neq 0$, и, поскольку оно было получено в предположении, что решение существует, противоречие означает, что решения на самом деле нет.

В случае вырождения λ_k с кратностью p_k второе условие в (3.21) нужно сформулировать так: если $\mu = 1/\lambda_k$ и все $(f, \varphi_{k_m}) = 0$, где $\varphi_{k_m}(x)$, $m = 1, \ldots p_k$ — собственные функции, принадлежащие данному собственному значению λ_k. Соответственно и различных произвольных постоянных C_k будет p_k штук.

Подставляя найденные значения коэффициентов Фурье в предполагаемый вид решения, имеем при $\mu \neq 1/\lambda_k$

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)}{1 - \mu\lambda_k} \varphi_k(x) \, . \tag{3.22}$$

Однако эта формула имеет существенный недостаток: необходимо знать все собственные функции, включая отвечающие вырожденному случаю $\lambda = 0$. Однако, как следует из рассмотрения в предыдущем разделе, даже в случае вырожденного ядра явно найти эти функции не удается. К счастью, как показано в теории, выражение для $\varphi(x)$ можно записать и в таком виде:

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k) \, \mu\lambda_k}{1 - \mu\lambda_k} \varphi_k(x) \, . \tag{3.23}$$

Структура этой формулы такова, что слагаемые, отвечающие $\lambda = \lambda_k = 0$, из-за появления этой величины в числителе автоматически зануляются и вопрос о явном виде собственных функций для $\lambda = 0$ снимается. Ситуацию, связанную со второй возможностью для c_k в (3.21), сформулируем в виде следующего «мнемонического правила»: при $\mu = 1/\lambda_k$ и всех $(f, \varphi_{k_m}) = 0$ следует сомножители перед собственными функциями $\varphi_{k_m}(x)$ заменить на произвольные константы C_m.

Таким образом, при $\mu \neq 1/\lambda_k$ решение существует, единственно и дается формулой (3.23). Если $\mu = 1/\lambda_k$ и все $(f, \varphi_{k_m}) = 0$, то решений бесконечно много: формула (3.23) содержит p_k произвольных постоянных. Если $\mu = 1/\lambda_k$, но $(f, \varphi_k) \neq 0$, то решение не существует.

Формула (3.23) справедлива и для однородного уравнения (при $f(x) = 0$). Ясно, что в случае $\mu \neq 1/\lambda_k$, $\forall k$, решение существует, единственно и тривиально: $\varphi(x) = 0$. Если же $\mu = 1/\lambda_k$, то так как $(f, \varphi_k) = 0$, решение существует и имеет вид линейной комбинации собственных функций для λ_k с произвольными коэффициентами, т. е. не единственно.

Пример. Найдем решение следующего интегрального уравнения:

$$\varphi(x) = \mu \int_{-1}^{1} (x + y + 2xy)\, \varphi(y)\, dy + ax + b \,. \tag{3.24}$$

Интегральный оператор этого уравнения рассматривался в примере из предыдущего раздела. Воспользуемся полученными там результатами для задачи на собственные значения:

$$\lambda_1 = -\frac{2}{3}\,, \quad \varphi_1(x) = \sqrt{\frac{3}{8}}\,(1 - x)\ ; \quad \lambda_2 = 2\,, \quad \varphi_2(x) = \sqrt{\frac{1}{8}}\,(1 + 3x)\ . \tag{3.25}$$

Вычислим скалярные произведения (f, φ_k):

$$\begin{aligned}
(f, \varphi_1) &= \sqrt{\frac{3}{8}} \int_{-1}^{1} (at + b)\,(1 - t)\, dt = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{8}}\,(3b - a)\ , \\
(f, \varphi_2) &= \sqrt{\frac{1}{8}} \int_{-1}^{1} (at + b)\,(1 + 3t)\, dt = 2\sqrt{\frac{1}{8}}\,(a + b)\ .
\end{aligned}$$

При $\mu \neq -\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}$ запишем решение, пользуясь (3.23):

$$\varphi(x) = ax + b + \frac{\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{8}}\,(3b - a)\,\mu(-\frac{2}{3})}{1 - \mu(-\frac{2}{3})}\sqrt{\frac{3}{8}}\,(1 - x) + \frac{2\sqrt{\frac{1}{8}}\,(a + b)\,\mu\, 2}{1 - \mu\, 2}\sqrt{\frac{1}{8}}\,(1 + 3x)\,. \tag{3.26}$$

Проводя очевидные упрощения, можно получить

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= ax + b + 2\mu\frac{(2a + 2a\mu + 3b)\,x + a + 2b\mu}{(3 + 2\mu)(1 - 2\mu)} = \\
&= \frac{3\,(a + 2b\mu)\,x + 2a\mu + 3b - 4b\mu}{(3 + 2\mu)(1 - 2\mu)}\ .
\end{aligned} \tag{3.27}$$

При $\mu = -\dfrac{3}{2}$ решение существует, только если $(f, \varphi_1) = 0$, т. е. если $a = 3b$, и имеет вид

$$\varphi(x) = 3bx + b + C\,(1 - x) + \frac{2\sqrt{\frac{1}{8}}\,(3b + b)\,(-\frac{3}{2})\,2}{1 - (-\frac{3}{2})\,2}\sqrt{\frac{1}{8}}\,(1 + 3x) =$$

$$= \frac{1}{4} b\,(1+3x) + C\,(1-x) \ . \tag{3.28}$$

При $\mu = \dfrac{1}{2}$ решение существует, только если $(f, \varphi_2) = 0$, т. е. если $a = -b$, и имеет вид

$$\varphi(x) = -bx + b + \frac{\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{8}}\,(3b+b)\,\frac{1}{2}(-\frac{2}{3})}{1-\frac{1}{2}(-\frac{2}{3})}\sqrt{\frac{3}{8}}\,(1-x) + C\,(1+3x) \ =$$

$$= \frac{3}{4} b\,(1-x) + C\,(1+3x) \ . \tag{3.29}$$

3.2. Решить интегральные уравнения с симметричным ядром с помощью задачи на собственные значения для оператора Фредгольма:

1) $\varphi(x) = \mu \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(xy + x^2y^2\right) \varphi(y)\,dy + x^2 + x^4\,;$

2) $\varphi(x) = \mu \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(x^{1/3} + y^{1/3}\right) \varphi(y)\,dy + 1 - 6x^2\,;$

3) $\varphi(x) = \mu \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(5 + 4xy - 3x^2 - 3y^2 + 9x^2y^2\right) \varphi(y)\,dy + x\,;$

4) $\varphi(x) = \mu \displaystyle\int_{0}^{2\pi} (\sin x\, \sin y + 3\cos 2x\, \cos 2y)\, \varphi(y)\,dy + \sin x\,;$

5) $\varphi(x) = \mu \displaystyle\int_{0}^{2\pi} (\cos x\, \cos y + \cos 2x\, \cos 2y)\, \varphi(y)\,dy + \cos 3x\,;$

6) $\varphi(x) = \mu \displaystyle\int_{0}^{\pi} \cos^2(x-y)\, \varphi(y)\,dy + 1 + \cos 4x\,.$

3.3. Решить интегральные уравнения при всех значениях параметров a, b, c, входящих в свободный член этих уравнений:

1) $\varphi(x) = \mu \displaystyle\int_{0}^{\pi} \cos(x+y)\, \varphi(y)\,dy + a\sin x + b\,;$

2) $\quad \varphi(x) = \mu \int\limits_{-1}^{1} (1 + xy)\,\varphi(y)\,dy + ax^2 + bx + c\,;$

3) $\quad \varphi(x) = \mu \int\limits_{-1}^{1} \left(3xy + 5x^2y^2\right)\varphi(y)\,dy + ax^2 + bx\,;$

4) $\quad \varphi(x) = \mu \int\limits_{-1}^{1} \left[5(xy)^{1/3} + 7(xy)^{2/3}\right]\varphi(y)\,dy + ax + bx^{1/3}\,.$

3.4. Случай произвольного вырожденного ядра

В случае произвольного, симметричного или несимметричного, вырожденного ядра, имеющего вид (3.4), ИУ запишется в виде

$$\varphi(x) = \mu \sum_{l=1}^{n} p_l(x)\,(q_l, \varphi) + f(x)\ . \tag{3.30}$$

Отсюда следует, что если решение существует, то оно имеет вид

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{l=1}^{n} \xi_l\, p_l(x)\ , \tag{3.31}$$

где ξ_l — коэффициенты, которые еще нужно найти. Подставляя (3.31) в предыдущее уравнение и используя свойство линейной независимости $p_l(x)$, находим, что ξ_l являются решениями линейной неоднородной системы алгебраических уравнений:

$$(\mathbf{E} - \mu\mathbf{K})\,\vec{\xi} = \mu\,\overrightarrow{(f, q)}\ , \tag{3.32}$$

где $\overrightarrow{(f,q)}_i = (f, q_i) = \int_a^b f(t)\,q_i(t)\,dt$; $\mathbf{E}$ — единичная матрица, а элементы матрицы $\mathbf{K}$ заданы выражениями (3.8).

В зависимости от параметра μ определитель системы $\det|\,\mathbf{E} - \mu\,\mathbf{K}|$ может быть равен или не равен нулю. Если $\det|\,\mathbf{E} - \mu\,\mathbf{K}| \neq 0$, то решение системы (3.32) существует и единственно, при этом для однородного уравнения оно тривиально: $\varphi(x) = 0$. При $\det|\,\mathbf{E} - \mu\,\mathbf{K}| = 0$ решение либо не существует, если ранг матрицы системы не равен рангу расширенной матрицы, либо содержит произвольные постоянные, если ранги равны.

Вычислять ранги матриц для $n > 2$ довольно утомительная процедура, и лучше использовать метод оптимального исключения Гаусса. Суть его состоит в том, что при последовательном исключении неизвестных на каждом этапе любое новое уравнение анализируется на его тривиальность, т. е. обращение в тождество, что свидетельствует о его линейной зависимости от предыдущих, а также на непротиворечивость, что свидетельствует о несовместности исходной системы уравнений и, значит, ложности предположения о существовании решения.

Пример. Пользуясь рассмотренным выше способом, получим решение уравнения из примера на с. 66:

$$\varphi(x) = \mu \int_{-1}^{1} (x + y + 2xy)\, \varphi(y)\, dy + ax + b\ .$$

Снова выберем функции p_l и q_l в виде

$$\begin{aligned} p_1(x) &= x\ , & q_1(y) &= 1 + 2y\ , \\ p_2(x) &= 1\ , & q_1(y) &= y\ , \end{aligned} \tag{3.33}$$

тогда элементы матрицы $\mathbf{K}$ имеют значения (3.14). Вычислим столбец $\overrightarrow{(f,q)}$:

$$\begin{aligned} (f, q_1) &= \int_{-1}^{1} (at + b)\,(1 + 2t)\, dt = \frac{2}{3}\,(2a + 3b)\ , \\ (f, q_2) &= \int_{-1}^{1} (at + b)\, t\, dt = \frac{2}{3}\, a\ . \end{aligned}$$

Система уравнений (3.32) примет вид

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{4}{3}\mu & -2\mu \\ -\frac{2}{3}\mu & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\,\mu \begin{pmatrix} 2a + 3b \\ a \end{pmatrix}\ . \tag{3.34}$$

Найдем определитель матрицы системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 - \frac{4}{3}\mu & -2\mu \\ -\frac{2}{3}\mu & 1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{4}{3}\,\mu - \frac{4}{3}\,\mu^2\ . \tag{3.35}$$

Особыми значениями параметра μ, при которых $\Delta = 0$, являются $\mu_1 = -\dfrac{3}{2}$ и $\mu_2 = \dfrac{1}{2}$.

При $\mu \neq -\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}$ решения (3.34) можно найти по правилу Крамера:

$$\xi_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}\ , \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{2}{3}\,\mu\,(2a + 3b) & -2\mu \\ \frac{2}{3}\,\mu\, a & 1 \end{vmatrix} = \frac{2}{3}\,\mu\,(2a + 3b + 2a\mu)\ ;$$

$$\xi_2 = \frac{\Delta_1}{\Delta}\,, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1-\frac{4}{3}\,\mu & \frac{2}{3}\,\mu\,(2a+3b) \\ -\frac{2}{3}\,\mu & \frac{2}{3}\,\mu\, a \end{vmatrix} = \frac{2}{3}\,\mu\,(a+2b\mu)\;.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= ax+b+\frac{2}{3}\,\mu\cdot\frac{(2a+3b+2a\mu)\,x+a+2b\mu}{1-\frac{4}{3}\,\mu-\frac{4}{3}\,\mu^2} = \\ &= \frac{3\,(a+2b\mu)\,x+2a\mu+3b-4b\mu}{(3+2\mu)(1-2\mu)}\;. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Это выражение совпадает с (3.27).

При $\mu=\mu_1=-\dfrac{3}{2}$ система (3.34) принимает вид

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}2a+3b\\ a\end{pmatrix}\;. \tag{3.37}$$

Решение существует, только если все миноры расширенной матрицы порядка 2 равны нулю:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2a-3b \\ 1 & -a \end{vmatrix} = -a+3b=0 \quad\Rightarrow\quad a=3b\,. \tag{3.38}$$

При этом условии оба уравнения в системе (3.37) дают

$$\xi_1+\xi_2=-3b \quad\Rightarrow\quad \vec{\xi}=\begin{pmatrix}-3b-C\\ C\end{pmatrix}\;. \tag{3.39}$$

Следовательно,

$$\varphi(x)=3\,b\,x+b+(-3b-C)\,x+C \;=\; b+C\,(1-x)\;. \tag{3.40}$$

Заменой произвольной постоянной $C=C'-\dfrac{3}{4}b$ это выражение можно привести к виду (3.28).

При $\mu=\mu_2=\dfrac{1}{2}$ имеем

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -1 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2a+3b\\ a\end{pmatrix}\;. \tag{3.41}$$

Рассматривая миноры расширенной матрицы, получим, что решение существует, только если $a=-b$. При этом условии

$$\vec{\xi}=\begin{pmatrix}3C+b\\ C\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \varphi(x)=b+C\,(1+3x)\;. \tag{3.42}$$

К виду (3.29) это выражение можно привести заменой произвольной постоянной $C = C' - \dfrac{1}{4}b$.

3.4. Решить интегральные уравнения:

$$1)\quad \varphi(x) = \mu \int\limits_{-1}^{1} \left(x^4 + 5x^3 y\right) \varphi(y)\, dy + x^2 - x^4\,;$$

$$2)\quad \varphi(x) = \mu \int\limits_{-1}^{1} \left(x^2 - xy\right) \varphi(y)\, dy + x^3 + x\,;$$

$$3)\quad \varphi(x) = \mu \int\limits_{-1}^{1} \left(2xy^3 + 5x^2 y^2\right) \varphi(y)\, dy + 7x^4 + 3\,;$$

$$4)\quad \varphi(x) = \mu \int\limits_{0}^{\pi} \sin(2x + y)\, \varphi(y)\, dy + \pi - 2x\,;$$

$$5)\quad \varphi(x) = \mu \int\limits_{0}^{\pi} \cos(2x + y)\, \varphi(y)\, dy + \sin x\,;$$

$$6)\quad \varphi(x) = \mu \int\limits_{0}^{\pi} [\sin y + y \cos x]\, \varphi(y)\, dy + 1 - \frac{2x}{\pi}\,.$$

3.5. Решить интегральные уравнения при всех значениях параметров a и b, входящих в свободный член этих уравнений:

$$1)\quad \varphi(x) = \mu \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (\,y \sin x + \cos y)\, \varphi(y)\, dy + ax + b\,;$$

$$2)\quad \varphi(x) = \mu \int\limits_{-1}^{1} \left(\,3x + xy - 5x^2 y^2\right) \varphi(y)\, dy + ax\,;$$

$$3)\quad \varphi(x) = \mu \int\limits_{-\pi}^{\pi} (\,x \sin y + \cos x)\, \varphi(y)\, dy + ax + b\,;$$

$$4)\quad \varphi(x) = \mu \int\limits_{-\pi}^{\pi} (x \cos y + \sin x \sin y)\, \varphi(y)\, dy + a + b \cos x\,.$$

3.5. Случай малых значений параметра

В случае малых значений параметра решение интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода сводится к решению задачи о неподвижной точке сжимающего отображения.

Параметр μ считается малым, если

$$|\mu| < \frac{1}{\|\hat{A}\|} \,, \tag{3.43}$$

где $\|\hat{A}\|$ — норма интегрального оператора Фредгольма $\hat{A}$. Норму симметричного оператора Фредгольма, если известны его собственные значения, можно найти из соотношения $\|\hat{A}\| = \max\limits_k |\lambda_k|$. В остальных случаях, поскольку для нормы оператора $\hat{A}$ справедлива оценка $\|\hat{A}\| \leqslant \|K\|$, где $\|K\|^2 = \int_a^b\int_a^b K^2(x,y)\,dxdy$, всегда можно использовать более сильное достаточное условие

$$|\mu| < \frac{1}{\|K\|} \,. \tag{3.44}$$

В итоге при малых μ решение уравнения (3.1) всегда существует, единственно и его можно записать в виде

$$\varphi(x) = f(x) + \mu \int_a^b R(x,y;\mu)\, f(y)\, dy \,, \tag{3.45}$$

где функция $R(x,y;\mu)$, резольвента ядра $K(x,y)$, имеет вид

$$R(x,y;\mu) = \sum_{l=0}^{\infty} \mu^l K_{l+1}(x,y) = K_1(x,y) + \mu K_2(x,y) + \mu^2 K_3(x,y) \ldots \,, \tag{3.46}$$

а повторные ядра $K_n(x,y)$ вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} K_1(x,y) &= K(x,y) \,, \\ K_n(x,y) &= \int_a^b K(x,t)\, K_{n-1}(t,y)\, dt = \int_a^b K_{n-1}(x,t)\, K(t,y)\, dt \,. \end{aligned} \tag{3.47}$$

Для однородного уравнения, $f(x) = 0$, очевидно, имеем только тривиальное решение: $\varphi(x) = 0$.

Фактически построение решения сводится к установлению критерия малости, последовательному вычислению повторных ядер, нахождению резольвенты посредством точного и приближенного суммирования ряда (3.46) и, наконец, вычислению интеграла в (3.45).

Пример. Решим этим способом интегральное уравнение (3.24).

Прежде всего найдем критерий малости. В данном случае (см. пример в разд. 3.2) $\|\hat{A}\| = \max\limits_k |\lambda_k| = 2$, и согласно (3.43), имеем $|\mu| < 0.5$. Для сравнения критерий (3.44) приводит к более сильному условию: $|\mu| < 3/\sqrt{40} \approx 0.47$. Таким образом, все дальнейшие вычисления справедливы при $|\mu| < 0.5$.

Вычислим несколько первых повторных ядер:

$$\begin{aligned}
K_1(x,y) &= K(x,y) = x + y + 2xy \ , \\
K_2(x,y) &= \int_{-1}^{1} (x + t + 2xt)\,(t + y + 2ty)\,dt = \\
&= \frac{4}{3}\,(x + y + 2xy) + \frac{2}{3} + 2xy = \frac{4}{3}K(x,y) + \frac{2}{3} + 2xy \ , \\
K_3(x,y) &= \frac{4}{3}K_2(x,y) + \frac{2}{3}\int_{-1}^{1} (1 + 3xt)\,(t + y + 2ty)\,dt = \\
&= \frac{4}{3}K_2(x,y) + \frac{4}{3}K_1(x,y)\,.
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Используя метод полной математической индукции, убеждаемся в справедливости рекуррентного соотношения:

$$K_{l+1}(x,y) = \frac{4}{3}\,K_l(x,y) + \frac{4}{3}\,K_{l-1}(x,y)\ , \quad l = 2, 3, \ldots\ . \tag{3.49}$$

Можно показать, что его существование обусловлено вырожденностью ядра $K(x,y)$. Имея подобное рекуррентное соотношение, всегда можно найти резольвенту в явном виде. Опуская аргументы у функций, запишем

$$R = \sum_{l=0}^{\infty} \mu^l K_{l+1} = K_1 + \mu K_2 + \frac{4}{3}\sum_{l=2}^{\infty} \mu^l \left(K_l + K_{l-1}\right)\ . \tag{3.50}$$

Преобразуем суммы:

$$\begin{aligned}
\sum_{l=2}^{\infty} \mu^l K_l &= \mu \sum_{l=2}^{\infty} \mu^{l-1} K_l = \mu \sum_{l'=1}^{\infty} \mu^{l'} K_{l'+1} = \mu\,(R - K)\ , \\
\sum_{l=2}^{\infty} \mu^l K_{l-1} &= \mu^2 \sum_{l=2}^{\infty} \mu^{l-2} K_{l-1} = \mu^2 \sum_{l'=0}^{\infty} \mu^{l'} K_{l'+1} = \mu^2 R\,.
\end{aligned}$$

В итоге получим уравнение для отыскания R

$$R = K + \frac{2}{3}\mu\,(1 + 3xy) + \frac{4}{3}\mu K + \frac{4}{3}\mu\,(R - K) + \frac{4}{3}\mu^2 R\,. \tag{3.51}$$

Таким образом, получаем явное выражение для резольвенты

$$R(x,y;\mu)=\frac{K(x,y)+\frac{2}{3}\mu\,(1+3xy)}{1-\frac{4}{3}\,\mu-\frac{4}{3}\,\mu^2}=\frac{3K(x,y)+2\mu\,(1+3xy)}{(3+2\mu)\,(1-2\mu)}\ . \quad (3.52)$$

Используя это выражение, можно получить по формуле (3.45) решение ИУ для любого свободного члена (подчеркнем — при малых значениях параметра). В частности, для $f(x)=ax+b$ получается найденное ранее решение (3.27).

На полученное для резольвенты выражение полезно взглянуть с другой точки зрения. Если разложить резольвенту как функцию параметра на простые дроби с помощью хорошо известного метода неопределенных коэффициентов, то получим для нее другое выражение:

$$R(x,y;\mu)=\frac{(3x+1)\,(3y+1)}{4}\cdot\frac{1}{1-2\mu}-\frac{(x-1)\,(y-1)}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{3}\mu}\ . \quad (3.53)$$

Отсюда легко заметить, что в нашем примере суммирование ряда (3.46) фактически можно свести к суммированию двух бесконечно убывающих геометрических прогрессий с показателями $q_1=2\mu$, $q_2=-\frac{2}{3}\mu$ (критерий малости гарантирует сходимость). Разумеется, обнаружить этот факт при вычислении нескольких первых повторных ядер непросто, что лишний раз подчеркивает неконструктивность определения предела последовательности (в данном случае последовательности частичных сумм степенного ряда) в математическом анализе. В общем случае симметричного ядра Фредгольм доказал, что резольвента, как функция параметра μ, имеет не более чем счетное множество вещественных полюсов первого порядка (для вырожденного ядра это число конечно).

Для иллюстрации рассмотрим на нашем примере иной способ построения резольвенты в предположении о наличии двух полюсов:

$$R(x,y;\mu)=\frac{A_1(x,y)}{1-q_1\mu}+\frac{A_2(x,y)}{1-q_2\mu}\ . \quad (3.54)$$

Здесь числа q_1, q_2 и функции A_1, A_2 необходимо определить по известным повторным ядрам. Разлагая правую часть в степенные ряды (при условии малости параметра μ) и сравнивая с (3.46), получим следующую систему уравнений для нахождения неизвестных величин:

$$q_1^k A_1+q_2^k A_2=K_{k+1}\ ,\quad k=0,1,\ldots\ . \quad (3.55)$$

Это нелинейная система уравнений, но простая ее структура позволяет построить явное решение. Последовательно исключая неизвестные, получим следующую цепочку уравнений:

$$A_2=A_1-K_1\ ,\quad A_1=\frac{K_2-q_2K_1}{q_1-q_2}\ ,\quad q_1=\frac{K_3-q_2K_2}{K_2-q_2K_1}\ , \quad (3.56)$$

и наконец для отыскания q_2 получим квадратное уравнение

$$\left(K_2^2-K_3K_1\right)q_2^2-\left(K_3K_2-K_4K_1\right)q_2-\left(K_4K_2-K_3^2\right)=0\ . \quad (3.57)$$

Преобразуем с учетом (3.49):

$$
\begin{gathered}
K_3K_2 - K_4K_1 = \frac{4}{3}\left(K_2 + K_1\right)K_2 - \frac{4}{3}\left(K_3 + K_2\right)K_1 = \frac{4}{3}\left(K_2^2 - K_3K_1\right)\ , \\
\left(K_4K_2 - K_3^2\right) = \frac{4}{3}\left(K_3 + K_2\right)K_2 - K_3^2 = \frac{4}{3}K_2^2 - K_3\left(K_3 - \frac{4}{3}K_2\right) = \frac{4}{3}\left(K_2^2 - K_3K_1\right)\ .
\end{gathered}
\tag{3.58}
$$

После сокращения получим

$$
q_2^2 - \frac{4}{3}q_2 - \frac{4}{3} = 0\ . \tag{3.59}
$$

Решая, имеем корни $(q_2)_1 = 2$, $(q_2)_2 = -\frac{2}{3}$. Это и есть q_1 и q_2 вследствие симметрии исходных уравнений. Отсюда

$$
\begin{gathered}
A_1 = \frac{\frac{4}{3}K_1 + \frac{2}{3} + 2xy + \frac{2}{3}K_1}{\frac{8}{3}} = \frac{(3x+1)\,(3y+1)}{4}\ , \\
A_2 = x + y + 2xy - \frac{1}{4}\left(1 + 9xy + 3x + 3y\right) = -\frac{(x-1)\,(y-1)}{4}\ .
\end{gathered}
\tag{3.60}
$$

Таким образом, мы получили прежнее выражение для резольвенты, используя только явные выражения для первых четырех повторных ядер (по числу неизвестных). Обобщение очевидно, но ясно, что возникнут трудности с решением алгебраических уравнений высоких степеней. Справедливости ради следует отметить, что эти же трудности возникают при стандартном способе решения ИУ с вырожденным ядром.

Резольвента содержит и более богатую информацию. В общей теории ИУ с симметричным ядром доказывается теорема Гильберта—Шмидта, из которой следует, что каждое слагаемое в резольвенте имеет вид $\dfrac{\lambda_k\varphi_k(x)\,\varphi_k(y)}{1-\mu\lambda_k}$, где λ_k — собственное значение (не равное нулю), $\varphi_k(x)$ — соответствующая нормированная собственная функция оператора Фредгольма. Следовательно, в нашем примере $\lambda_1 = q_1 = 2$, $\varphi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{8}}(3x+1)$ и $\lambda_2 = q_2 = -\frac{2}{3}$, $\varphi_2(x) = \sqrt{\frac{3}{8}}(x-1)$. Далее, как следствие этой теоремы, имеем $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2 = \|K\|^2$, что в нашем случае дает $\|K\|^2 = \frac{40}{9}$, что и было получено в самом начале.

Если теперь, используя резольвенту, по формуле (3.45) записать общий вид решения, то получим

$$
\varphi(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(f,\varphi_k)\,\mu\lambda_k}{1-\mu\lambda_k}\,\varphi_k(x)\ ,
$$

что в точности совпадает с выражением (3.23).

Здесь возникает один принципиальный вопрос: так как резольвента была построена с учетом малости параметра, то можно ли ее рассматривать за пределами этого интервала (в данном случае $|\mu| < \frac{1}{2}$)?

Положительный ответ на этот вопрос можно найти в теории функций комплексного переменного, опираясь на принцип аналитического продолжения. Применительно к нашему случаю этот принцип утверждает, что, имея два выражения для некоторой функции параметра μ (а именно исходный степенной ряд и его сумму в виде рациональной функции), которые совпадают на некотором интервале вещественной оси, можно второе выражение продолжить на всю комплексную плоскость (причем единственным образом), в том числе и на все точки вещественной оси, для которых эта функция не имеет особенностей. Это означает, что резольвента определена для всех значений параметра μ (в нашем примере кроме $\mu = \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$). Что касается продолжения решения, то здесь в игру вступает свободный член $f(x)$. Он может уничтожить особенность в точке $\mu = 1/\lambda_k$, если $(f, \varphi_k) = 0$, и тогда, в соответствии с общей теорией линейных неоднородных уравнений, к решению следует добавить с произвольными коэффициентами решения соответствующего однородного уравнения, т. е. собственные функции. Это как раз и приведет в нашем примере, при $f(x) = ax + b$, в точности к тем результатам, которые были получены в п. 3.3.

3.6. Найти резольвенту $R(x, y; \mu)$ следующих интегральных уравнений:

1) $$\varphi(x) = \mu \int_0^\pi \sin(x + y)\,\varphi(y)\,dy + f(x)\,;$$

2) $$\varphi(x) = \mu \int_{-1}^1 (1 - y + 2xy)\,\varphi(y)\,dy + f(x)\,;$$

3) $$\varphi(x) = \mu \int_{-\pi}^\pi (x \sin y + \cos x)\,\varphi(y)\,dy + f(x)\,;$$

4) $$\varphi(x) = \mu \int_0^{2\pi} (\sin x \sin y + \sin 2x \sin 2y)\,\varphi(y)\,dy + f(x)\,.$$

Ответы и указания к главе 3

3.1.

1) $\lambda_1 = -\pi, \quad \varphi_1(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}(\sin x - \cos x);$

$\lambda_{2,3} = \pi, \quad \varphi_2(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}(\sin x + \cos x), \quad \varphi_3(x) = 1.$

2) $\lambda_1 = -\dfrac{\pi}{2}, \quad \varphi_1(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x; \quad \lambda_2 = \dfrac{\pi}{2}, \quad \varphi_2(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x;$

$\lambda_3 = 2\pi, \quad \varphi_3(x) = 1.$

3) $\lambda_1 = -\dfrac{2}{3}, \ \varphi_1(x) = \sqrt{\dfrac{15}{8}}\left(x^2-1\right); \ \lambda_2 = \dfrac{2}{3}, \ \varphi_2(x) = \sqrt{\dfrac{3}{8}}\left(5x^2-1\right).$

4) $\lambda_1 = -\dfrac{2}{3}, \ \varphi_1(x) = \dfrac{1}{2}\left(3x^{2/5} - x^{-2/5}\right); \ \lambda_2 = \dfrac{8}{3}, \ \varphi_2(x) = \dfrac{1}{4}\left(3x^{2/5} + x^{-2/5}\right).$

5) $\lambda_{1,2} = -\dfrac{\pi}{2}, \quad \lambda_{3,4} = \dfrac{\pi}{2};$

$\varphi_1(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}(\sin x - \sin 4x), \ \varphi_2(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}(\sin 2x - \sin 3x);$

$\varphi_3(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}(\sin x + \sin 4x), \ \varphi_4(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}(\sin 2x + \sin 3x).$

3.2.

1) $\varphi(x) = \dfrac{5\,(7+2\mu)}{7\,(5-2\mu)}x^2 + x^4$, если $\mu \neq \dfrac{3}{2}$ и $\mu \neq \dfrac{5}{2}$;

$\varphi(x) = Cx + \dfrac{25}{7}x^2 + x^4$, если $\mu = \dfrac{3}{2}$; если $\mu = \dfrac{5}{2}$, решений нет.

2) $\varphi(x) = 1 - 6x^2 + \dfrac{2\mu\left(5x^{1/3} + 6\mu\right)}{12\mu^2 - 5}$, если $\mu \neq \pm\sqrt{\dfrac{5}{12}}$;

если $\mu = \pm\sqrt{\dfrac{5}{12}}$, решений нет.

3) $\varphi(x) = \dfrac{3x}{3-8\mu}$, если $\mu \neq \dfrac{1}{8}$, $\mu \neq \dfrac{3}{8}$ и $\mu \neq \dfrac{5}{8}$;

$\varphi(x) = C_1 + \dfrac{3x}{2}$, если $\mu = \dfrac{1}{8}$; $\varphi(x) = C_2\left(3x^2 - 1\right) - \dfrac{3x}{2}$, если $\mu = \dfrac{5}{8}$;

если $\mu = \dfrac{3}{8}$, решений нет.

4) $\varphi(x) = \dfrac{\sin x}{1 - \pi\mu}$, если $\mu \neq \dfrac{1}{\pi}$ и $\mu \neq \dfrac{1}{3\pi}$;

$\varphi(x) = \dfrac{3}{2}\sin x + C\cos 2x$, если $\mu = \dfrac{1}{3\pi}$; если $\mu = \dfrac{1}{\pi}$, решений нет.

5) $\varphi(x) = \cos 3x$, если $\mu \neq \dfrac{1}{\pi}$;

$\varphi(x) = \cos 3x + C_1\cos x + C_1\cos 2x$, если $\mu = \dfrac{1}{\pi}$.

6) $\varphi(x) = \dfrac{2}{2-\pi\mu} + \cos 4x$, если $\mu \neq \dfrac{2}{\pi}$ и $\mu \neq \dfrac{4}{\pi}$;

$\varphi(x) = -1 + \cos 4x + C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$, если $\mu = \dfrac{4}{\pi}$;

если $\mu = \dfrac{2}{\pi}$, решений нет.

3.3.

1) $\varphi(x) = b + \dfrac{2\,(a-2b\mu)}{2+\pi\mu}\sin x$, если $\mu \neq \pm\dfrac{2}{\pi}$; если $\mu = \dfrac{2}{\pi}$, то $\varphi(x) = b + \dfrac{a\pi-4b}{2\pi}\sin x + C\cos x$; если $\mu = -\dfrac{2}{\pi}$, то решение существует только при $a = -\dfrac{4b}{\pi}$: $\varphi(x) = b + C\sin x$.

2) $\varphi(x) = ax^2 + \dfrac{3b}{3-2\mu}x + \dfrac{2a\mu+3c}{3\,(1-2\mu)}$, если $\mu \neq \dfrac{1}{2}$, $\mu \neq \dfrac{3}{2}$; если $\mu = \dfrac{1}{2}$, то решение существует только при $c = -\dfrac{a}{3}$: $\varphi(x) = ax^2 + \dfrac{3b}{2}x + C_1$; если $\mu = \dfrac{3}{2}$, то решение существует только при $b = 0$:
$\varphi(x) = ax^2 + C_2x - \dfrac{1}{2}(a+c)$.

3) $\varphi(x) = \dfrac{ax^2+bx}{1-2\mu}$, если $\mu \neq \dfrac{1}{2}$; если $\mu = \dfrac{1}{2}$, то решение существует только при $a = 0$ и $b = 0$: $\varphi(x) = C_1x + C_2x^2$.

4) $\varphi(x) = ax + \dfrac{7b+30a\mu}{7\,(1-6\mu)}x^{1/3}$, если $\mu \neq \dfrac{1}{6}$; если $\mu = \dfrac{1}{6}$, то решение существует только при $b = -\dfrac{7}{5}a$: $\varphi(x) = ax + C_1x^{1/3} + C_2x^{2/3}$.

3.4.

1) $\varphi(x) = \dfrac{5\,(2\mu-3)}{3\,(5-2\mu)}x^4 + x^2$, если $\mu \neq \dfrac{1}{2}$ и $\mu \neq \dfrac{5}{2}$;

$\varphi(x) = x^2 + Cx^3 - \dfrac{5}{6}x^4$, если $\mu = \dfrac{1}{2}$; если $\mu = \dfrac{5}{2}$, решений нет.

2) $\varphi(x) = x^3 + \dfrac{3\,(5-2\mu)}{5\,(3+2\mu)}\,x$, если $\mu \neq \pm\dfrac{3}{2}$;

$\varphi(x) = x^3 + Cx^2 - \dfrac{1}{5}\,x$, если $\mu = \dfrac{3}{2}$; если $\mu = -\dfrac{3}{2}$, решений нет.

3) $\varphi(x) = 7x^4 + 3 + \dfrac{20\mu}{1-2\mu}\,x^2$, если $\mu \neq \dfrac{1}{2}$ и $\mu \neq \dfrac{5}{4}$;

$\varphi(x) = 7x^4 + 3 + Cx - \dfrac{50}{3}\,x^2$, если $\mu = \dfrac{5}{4}$; если $\mu = \dfrac{1}{2}$, решений нет.

4) $\varphi(x) = \pi - 2x + \dfrac{12\mu}{3-4\mu}\,\sin 2x$, если $\mu \neq -\dfrac{3}{2}$ и $\mu \neq \dfrac{3}{4}$; если $\mu = -\dfrac{3}{2}$, то $\varphi(x) = \pi - 2x - 2\sin 2x + C\cos 2x$; при $\mu = \dfrac{3}{4}$ решений нет.

5) $\varphi(x) = \sin x + \dfrac{3\pi\mu}{8\mu^2-9}\left(2\mu\cos 2x + \dfrac{3}{2}\,\sin 2x\right)$, если $\mu \neq \pm\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$; если $\mu = \pm\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$, решений нет.

6) $\varphi(x) = 1 - \dfrac{2x}{\pi} - \dfrac{\pi^2\mu}{6\,(1+2\mu)}\,\cos x$, если $\mu \neq \pm\dfrac{1}{2}$; если $\mu = \dfrac{1}{2}$, то $\varphi(x) = \dfrac{4}{3} - \dfrac{2x}{\pi} + C\left(8 + \pi^2\cos x\right)$; если $\mu = -\dfrac{1}{2}$, решений нет.

3.5. 1) $\varphi(x) = ax + \dfrac{b}{1-2\mu} + \dfrac{a\pi^3\mu}{1-2\mu}\,\sin x$, если $\mu \neq \dfrac{1}{2}$; если $\mu = \dfrac{1}{2}$, то решение существует только при $a = 0$ и $b = 0$: $\varphi(x) = C_1\sin x + C_2$.

2) $\varphi(x) = \dfrac{3a}{3-2\mu}\,x$, если $\mu \neq -\dfrac{1}{2}$, $\mu \neq \dfrac{3}{2}$; если $\mu = \dfrac{3}{2}$, то решение существует только при $a = 0$: $\varphi(x) = C_2 x$; если $\mu = -\dfrac{1}{2}$, то $\varphi(x) = \dfrac{3a}{4}\,x + C_1\left(3x - 4x^2\right)$.

3) $\varphi(x) = \dfrac{a}{1-2\pi\mu}\,x + b + 2\pi b\mu\cos x$, если $\mu \neq \dfrac{1}{2\pi}$; если $\mu = \dfrac{1}{2\pi}$, то решение есть только при $a = 0$: $\varphi(x) = b\,(1+\cos x) + Cx$.

4) $\varphi(x) = a + b\cos x + b\pi\mu x + \dfrac{2\pi^2 b\mu^2}{1-\pi\mu}\,\sin x$, если $\mu \neq \dfrac{1}{\pi}$; если $\mu = \dfrac{1}{\pi}$, то решение есть при $b = 0$ и любом a: $\varphi(x) = a + C\sin x$.

3.6.

1) $$R(x,y;\mu) = \frac{\sin(x+y) + \frac{\pi\mu}{2}\cos(x-y)}{1 - \left(\frac{\pi\mu}{2}\right)^2} \ .$$

2) $$R(x,y;\mu) = \frac{1-3y}{1-2\mu} + \frac{6\,(1+x)\,y}{3-4\mu} \ .$$

3) $$R(x,y;\mu) = \cos x + \frac{x \sin y}{1-2\pi\mu} \ .$$

4) $$R(x,y;\mu) = \frac{\sin x \sin y + \sin 2x \sin 2y}{1-\pi\mu} \ .$$

Глава 4

Классификация ЛДУ 2-го порядка в частных производных

4.1. Канонический вид ЛДУ 2-го порядка

Физические законы выражают связи между физическими величинами и обнаруживаются из наблюдений за природными явлениями или в результате проведения целенаправленных опытов (экспериментов). Иногда эти законы удается записать в виде алгебраических соотношений (закон Ома, уравнение состояния для идеального газа и многие другие законы элементарной физики). Но чаще всего физические законы выражают связи между изменениями физических величин в пространстве и во времени. Следовательно, если физическая величина является в общем случае функцией одной временной и трех пространственных переменных, то изменения этой величины математически выражаются через частные производные соответствующей функции по временной и пространственным переменным. В итоге физические законы принимают вид ДУ в частных производных. Это может быть ДУ для одной функции от нескольких переменных (уравнение Пуассона (Лапласа) в электростатике, волновое уравнение, уравнение теплопроводности, уравнение Шредингера в квантовой механике и т. д.) или, чаще всего, система ДУ для нескольких функций от нескольких переменных (система уравнений Ньютона в механике, уравнения Максвелла в электродинамике, уравнения Эйлера в гидродинамике, четырехкомпонентное уравнение Дирака в квантовой механике и т. д.). Все такие уравнения принято называть *уравнениями математической физики* (УМФ), и именно их мы будем рассматривать в нашем курсе.

Вообще говоря, УМФ являются нелинейными ДУ, но если сделать дополнительные упрощения (эту процедуру принято называть линеаризацией исходного ДУ), то можно получить уже линейные УМФ. Исторически сложилось так, что в классической физике основное внимание уделяют линейным уравнениям, и ситуация не изменилась с появлением квантовой механики. В настоящее время подавляющее большинство уравнений, описывающих широкий спектр физических явлений в самых разных разделах современной физики, является линейными УМФ. Для их изучения был развит мощный математический аппарат, с помощью которого были подробно исследованы свойства этих уравнений и найдены эффективные аналитические и численные методы построения решений этих уравнений. С нелинейными уравнениями ситуация значительно сложнее. Накопленный опыт позволяет утверждать, что многие чрезвычайно интересные и практически очень важные физические явления (термоядерные реакции, многие магнитные явления, шаровые молнии, цунами и т. д.) могут быть адекватно описаны лишь в рамках нелинейных моделей. К сожалению, в настоящее время математический аппарат для изучения нелинейных уравнений находится в процессе построения, многие важные свойства этих уравнений еще не до конца поняты, и лишь для небольшого класса уравнений удалось получить решения, да и то лишь частные. В этой и следующей главе будут рассматриваться только линейные УМФ.

На основе многовекового опыта развития физики было обнаружено, что подавляющее число физических явлений описывается достаточно узким классом уравнений, а именно ДУ 2-го порядка. Исключения лишь подтверждают правило: уравнения 4-го порядка в теории упругости, уравнение 3-го порядка — знаменитое уравнение Кортевега-де-Фриза в нелинейных колебаниях и еще ряд таких же экзотических примеров. Поэтому на первом этапе изучения математической физики можно ограничиться линейными ДУ (ЛДУ) 2-го порядка.

Приступая к изучению этих уравнений, естественно попытаться привести их к наиболее простому (так называемому каноническому) виду.

Линейное уравнение 2-го порядка

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \Phi(x, u, \operatorname{grad} u) = 0 \tag{4.1}$$

имеет *канонический вид*, если

$$a_{ij}(x) = \begin{cases} 1 \ \text{ при } \ i \neq j\,, \\ 0\,,\ \pm 1 \ \text{ при } \ i = j\,. \end{cases} \tag{4.2}$$

Записанное в каноническом виде уравнение относится к одному из трех возможных типов:

1. *Эллиптический тип*: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_i} + \Phi = 0\,.$

   В этом случае мы имеем просто сумму вторых производных, число которых равно n.

2. *Гиперболический тип*: $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_i} - \sum_{i=r+1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_i} + \Phi = 0\,,$

   $0 < r < n$. Здесь вторые производные входят с разными знаками, но их число по прежнему равно n.

3. *Параболический тип*: $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_i} - \sum_{i=r+1}^{s} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_i} + \Phi = 0\,,$

   $0 < r < s < n$. В этом случае часть вторых производных отсутствует.

Любое уравнение (4.1) с произвольными коэффициентами может быть приведено к каноническому виду в любой точке $x = x_0$ с помощью неособенной замены независимых переменных: $y_k = y_k(x)$, $\det\left|\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\right| \neq 0$. Выражая производные в (4.1) через производные новой функции $\tilde{u}$ по новым переменным y_k, получим преобразованное уравнение той же структуры, что и исходное:

$$\sum_{k,l=1}^{n} \tilde{a}_{kl} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_k \partial y_l} + \tilde{\Phi} = 0\,. \tag{4.3}$$

Новые коэффициенты $\tilde{a}_{kl}(y)$ выражаются через старые $a_{ij}(x)$:

$$\tilde{a}_{kl} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial y_l}{\partial x_j}\,. \tag{4.4}$$

Нетрудно заметить, что закон преобразования коэффициентов уравнения совпадает с известным из линейной алгебры законом преобразования коэффициентов квадратичной формы при неособенной линейной замене переменных. Действительно, если задана квадратичная форма

$$K(p,p) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, p_i p_j \tag{4.5}$$

и совершено невырожденное линейное преобразование S от старых переменных p_i к новым переменным q_k

$$p_i = \sum_{k=1}^{n} s_{ik}\, q_k \ , \quad \det|S| \neq 0 \ , \tag{4.6}$$

то новая квадратичная форма примет вид

$$K(q,q) = \sum_{k,l=1}^{n} \tilde{a}_{kl}\, q_k q_l \ , \quad \text{где} \ \ \tilde{a}_{kl} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, s_{ik} s_{jl} \ . \tag{4.7}$$

Сравнивая с (4.4), имеем

$$s_{ik} = \frac{\partial y_k}{\partial x_i}\Big|_{x=x_0} \ . \tag{4.8}$$

Как известно из линейной алгебры, преобразование S, приводящее квадратичную форму к каноническому виду, всегда может быть найдено или методом Лагранжа — методом выделения полных квадратов, или методом Якоби — приведения матрицы к треугольному виду. Несмотря на то, что это преобразование определено не единственным образом, тип уравнения (4.1) в точке определяется однозначно на основании закона инерции квадратичной формы, который гласит, что число отрицательных и положительных слагаемых в каноническом виде квадратичной формы не зависит от конкретного выбора преобразования.

Доказанный факт важен в теоретическом отношении, но практически бесполезен. Дело в том, что с точки зрения физики УМФ всегда нужно рассматривать не в отдельной точке, а в некоторой области изменения переменных.

4.2. Уравнения с постоянными коэффициентами

Если коэффициенты уравнения (4.1) постоянны, то матрица S (4.6) определяет линейную замену переменных

$$y_k = \sum_{j=1}^{n} s_{ik}\, x_i \ , \tag{4.9}$$

которая приводит уравнение (4.1) к каноническому виду теперь уже во всей области определения уравнения ($x \in \mathbb{R}^n$).

Пример. Привести к каноническому виду уравнение и определить его тип:

$$u_{xy} - u_{xz} = 0\ . \tag{4.10}$$

Запишем соответствующую этому уравнению квадратичную форму

$$K(p,p) = p_1p_2 - p_1p_3$$

и воспользуемся методом Лагранжа. Суть его состоит в последовательном выделении полных квадратов. В нашем случае $K(p,p)$ не содержит ни одного квадрата. Согласно теории в этом случае рекомендуется вместо p_1 и p_2 ввести новые промежуточные переменные s_1 и s_2:

$$\begin{cases} s_1 = \frac{1}{2}\left(p_1 + p_2\right) \\ s_2 = \frac{1}{2}\left(p_1 - p_2\right) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} p_1 = s_1 + s_2 \\ p_2 = s_1 - s_2 \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} p_1p_2 - p_1p_3 &= s_1^2 - s_2^2 - \left(s_1 + s_2\right)p_3 = \left(s_1 - \tfrac{1}{2}p_3\right)^2 - \left(s_2 + \tfrac{1}{2}p_3\right)^2 = \\ &= \tfrac{1}{4}\left(p_1 + p_2 - p_3\right)^2 - \tfrac{1}{4}\left(p_1 - p_2 + p_3\right)^2\ . \end{aligned}$$

Введем новые переменные квадратичной формы

$$\begin{cases} q_1 = \frac{1}{2}\left(p_1 + p_2 - p_3\right)\ , \\ q_2 = \frac{1}{2}\left(p_1 - p_2 + p_3\right)\ , \\ q_3 = p_3\ , \end{cases} \tag{4.11}$$

в которых она имеет канонический вид

$$K(q,q) = q_1^2 - q_2^2 + 0\,q_3^2\ .$$

Выбор переменной q_3 допускает произвол, но ограничен условием $\det|S| \neq 0$. Из (4.11) находим матрицу S:

$$\begin{cases} p_1 = q_1 + q_2\ , \\ p_2 = q_1 - q_2 + q_3\ , \\ p_3 = q_3\ , \end{cases} \quad \Rightarrow \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и соответствующую линейную замену переменных:

$$\xi = x + y\ , \quad \eta = x - y\ , \quad \zeta = y + z\ .$$

Преобразуя производные

$$\begin{aligned} &u_x = u_\xi + u_\eta\ , \quad u_{xz} = u_{\xi\zeta} + u_{\eta\zeta}\ , \\ &u_{xy} = u_{\xi\xi} - u_{\xi\eta} + u_{\xi\zeta} + u_{\eta\xi} - u_{\eta\eta} + u_{\eta\zeta} = u_{\xi\xi} + u_{\xi\zeta} - u_{\eta\eta} + u_{\eta\zeta}\ , \end{aligned}$$

убеждаемся, что уравнение (4.10) принимает канонический вид

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} = 0 \ .$$

Таким образом, уравнение (4.10) параболического типа.

4.1. Привести уравнение к каноническому виду и определить его тип:

1) $u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yy} + 6u_{zz} = 0\,;$

2) $4u_{xx} - 4u_{xy} - 2u_{yz} + u_y + u_z = 0\,;$

3) $u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yy} + 2u_{zz} = 0\,;$

4) $u_{xy} - u_{xt} + u_{zz} - 2u_{zt} + 2u_{tt} = 0\,;$

5) $u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} - 4u_{yz} + 2u_{yt} + u_{zz} = 0\,;$

6) $u_{xx} + 2u_{xz} - 2u_{xt} + u_{yy} + 2u_{yz} + 2u_{yt} + 2u_{zz} + 2u_{tt} = 0\,.$

4.3. Случай двух независимых переменных

Задача о приведении уравнения (4.1) к каноническому виду в области с помощью преобразования независимых переменных при числе переменных $n > 2$, вообще говоря, может не иметь решения, поскольку на n искомых функций $y_k(x)$ накладываются $\frac{n(n-1)}{2} + n - 1$ условий, вытекающих из требований $\tilde{a}_{kl} = 0$, $k \neq l$, $\tilde{a}_{kl} = 0, \pm 1$, $k = l$. И лишь в случае двух переменных для уравнения вида

$$a(x,y)\,u_{xx} + 2\,b(x,y)\,u_{xy} + c(x,y)\,u_{yy} + \Phi(x,y,u,u_x,u_y) = 0 \ , \qquad (4.12)$$

где, без потери общности, $a(x,y) \neq 0$, всегда можно найти новые переменные $\xi = \xi(x,y)$ и $\eta = \eta(x,y)$, приводящие уравнение к каноническому виду в некоторой области G из области определения уравнения. Тип уравнения в области G определяется знаком функции

$$d(x,y) = b^2(x,y) - a(x,y)\,c(x,y) \ .$$

Выбор новых переменных ξ и η осуществляется по-разному для каждого из трех возможных случаев.

1. $\underline{d > 0}$ — гиперболический тип.

Решая два ОДУ (4.13), находим решения этих уравнений и определяем два интеграла. В качестве ξ и η возьмем эти интегралы J_1 и J_2:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{b+\sqrt{d}}{a} \quad \Rightarrow \quad \xi(x,y) = J_1(x,y) \ , \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{b-\sqrt{d}}{a} \quad \Rightarrow \quad \eta(x,y) = J_2(x,y) \ .
\end{aligned} \tag{4.13}$$

В новых переменных уравнение (4.12) примет вид $u_{\xi\eta} + \tilde{\Phi} = 0$. Это вторая каноническая форма для уравнения гиперболического типа. С помощью дополнительной замены $\sigma = \xi + \eta$, $\rho = \xi - \eta$ получим

$$u_{\sigma\sigma} - u_{\rho\rho} + \Psi(\sigma, \rho, u, u_\sigma, u_\rho) = 0 \ .$$

Это первая каноническая форма для уравнения гиперболического типа.

2. $\underline{d = 0}$ — параболический тип.

Решая ОДУ (4.14), находим один интеграл. В качестве η возьмем этот интеграл:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad \eta(x,y) = J(x,y) \ , \tag{4.14}$$

а в качестве второй переменной выбираем $\xi(x,y) = x$. Уравнение (4.12) примет вид

$$u_{\xi\xi} + \Psi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0 \ .$$

3. $\underline{d < 0}$ — эллиптический тип.

Решая одно ОДУ (4.15) с комплексными коэффициентами, находим один комплексный интеграл. В качестве ξ и η возьмем действительную и мнимую части этого интеграла $J(x,y)$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b + i\sqrt{-d}}{a} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \xi(x,y) = \operatorname{Re} J(x,y) \\ \eta(x,y) = \operatorname{Im} J(x,y) \end{array} \tag{4.15}$$

После преобразований уравнение (4.12) примет вид

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \Psi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0 \ .$$

Легко проверяется, что во всех случаях якобиан преобразования не равен нулю.

Пример. Привести к каноническому виду в области $-\infty < x, y < +\infty$ уравнение Трикоми:

$$u_{xx} + x\, u_{yy} = 0 \ . \tag{4.16}$$

Имеем $a = 1$, $b = 0$, $c = x$ и $d = -x$.

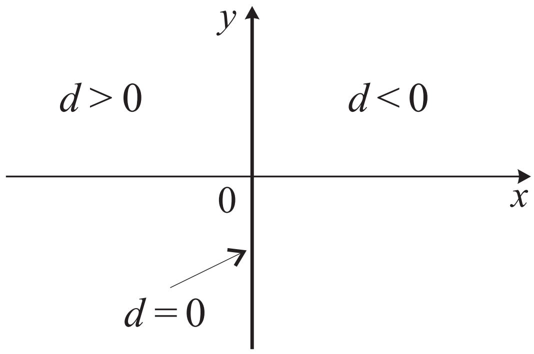


Рис. 4.1

Условие $d > 0 \Leftrightarrow x < 0$ определяет область G (левую полуплоскость, рис. 4.1). Решая ОДУ, найдем интегралы и, следовательно, новые переменные:

$$\begin{array}{ll} \dfrac{dy}{dx} = \sqrt{-x} & \Rightarrow \ \xi = y + \frac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}} \\ \dfrac{dy}{dx} = -\sqrt{-x} & \Rightarrow \ \eta = y - \frac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma = 2y \\ \rho = \frac{4}{3}(-x)^{\frac{3}{2}} \end{array} \right.$$

Преобразуя производные, получим

$$\begin{array}{ll} u_x = u_\sigma \sigma_x + u_\rho \rho_x = -2u_\rho (-x)^{\frac{1}{2}} \ , & u_{xx} = -4x u_{\rho\rho} + (-x)^{-\frac{1}{2}} u_\rho \ , \\ u_y = u_\sigma \sigma_y + u_\rho \rho_y = 2u_\sigma \ , & u_{yy} = 4u_\sigma \ . \end{array}$$

Подставляя их в уравнение (4.16) и выражая x через ρ, получим в области $x < 0$

$$u_{\sigma\sigma} - u_{\rho\rho} + \frac{1}{3\rho} u_\rho = 0 \ .$$

Здесь уравнение Трикоми имеет гиперболический тип.

При $d = 0 \Leftrightarrow x = 0$, очевидно, имеем $u_{xx} = 0 \Rightarrow u_{\xi\xi} = 0$, т. е. уравнение имеет параболический тип. Однако множество $M = \{(x, y) : x = 0, -\infty < y < +\infty\}$ не является областью и этот случай не имеет физического смысла.

Условие $d < 0 \Leftrightarrow x > 0$ определяет область G — правую полуплоскость (рис. 4.1). Решая ОДУ, находим комплексный интеграл этого уравнения и, следовательно, новые переменные:

$$\frac{dy}{dx} = i\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad J = -y + i\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = -y \, , \\ \eta = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \, . \end{array} \right.$$

Найденная замена приводит уравнение (4.16) к каноническому виду в области $x > 0$:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{1}{3\eta}\, u_\eta = 0\,.$$

Здесь уравнение Трикоми имеет эллиптический тип.

Уравнение Трикоми используется в аэродинамике. Смена типа уравнения связана с переходом от дозвуковой скорости полета к сверхзвуковой.

4.2. Привести к каноническому виду уравнения:

1) $u_{xx} - y u_{yy} = 0\,;$

2) $x u_{xx} - y u_{yy} = 0\,;$

3) $x^2 u_{xx} + y^2 u_{yy} = 0\,;$

4) $4y^2 u_{xx} - e^{2x} u_{yy} = 0\,;$

5) $y^2 u_{xx} + 2y u_{xy} + u_{yy} = 0\,;$

6) $x^2 u_{xx} - 2x u_{xy} + u_{yy} = 0\,;$

7) $\left(1 + x^2\right) u_{xx} + \left(1 + y^2\right) u_{yy} + y u_y = 0\,;$

8) $u_{xx} - 2 \sin x\, u_{xy} + \left(2 - \cos^2 x\right) u_{yy} = 0\,.$

Ответы и указания к главе 4

4.1.

1) $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} = 0$, где $\xi = x$, $\eta = y - x$, $x - \dfrac{1}{2}\,y + \dfrac{1}{2}\,z$; эллиптический тип.

2) $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} + u_\eta = 0$, где $\xi = \dfrac{1}{2}\,x$, $\eta = \dfrac{1}{2}\,x + y$, $\zeta = -\dfrac{1}{2}\,x - y + z$; гиперболический тип.

3) $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0$, где $\xi = x$, $\eta = y - x$, $\zeta = 2x - y + z$; параболический тип.

4) $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} + u_{\tau\tau} = 0$, где $\xi = x + y$, $\eta = -x + y$, $\zeta = z$, $\tau = y + z + t$; гиперболический тип.

5) $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} = 0$, где $\xi = x$, $\eta = -x + y$, $\zeta = 2x - y + z$,

$\tau = x + z + t$; параболический тип.

6) $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0$, где $\xi = x$, $\eta = y$, $\zeta = -x - y + z$, $\tau = x - y + t$; параболический тип.

4.2.

1) $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + \frac{1}{\eta} u_\eta = 0$, где $\xi = x$, $\eta = 2\sqrt{y}$ в области $\{y > 0\}$; $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - \frac{1}{\eta} u_\eta = 0$, где $\xi = x$, $\eta = 2\sqrt{-y}$ в области $\{y < 0\}$; $u_{xx} = 0$ на линии $y = 0$.

2) $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} - \frac{1}{\xi} u_\xi + \frac{1}{\eta} u_\eta = 0$, где $\xi = \sqrt{|x|}$, $\eta = \sqrt{|y|}$ в области $\{x > 0,\ y > 0\}$ или $\{x < 0,\ y < 0\}$; $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - \frac{1}{\xi} u_\xi - \frac{1}{\eta} u_\eta = 0$, где $\xi = \sqrt{|x|}$, $\eta = \sqrt{|y|}$ в области $\{x < 0,\ y > 0\}$ или $\{x > 0,\ y < 0\}$; $u_{xx} = 0$ на линии $y = 0$; $u_{yy} = 0$ на линии $x = 0$.

3) $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - u_\xi - u_\eta = 0$, где $\xi = \ln|x|$, $\eta = \ln|y|$ в области $\{x \neq 0,\ y \neq 0\}$; $u_{xx} = 0$ на линии $y = 0$; $u_{yy} = 0$ на линии $x = 0$.

4) $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + \frac{1}{\xi} u_\xi - \frac{1}{2\eta} u_\eta = 0$, где $\xi = e^x$, $\eta = y^2$ в области $\{y \neq 0\}$; $u_{yy} = 0$ на линии $y = 0$.

5) $u_{\eta\eta} - 2u_\xi = 0$, где $\xi = 2x - y^2$, $\eta = y$ в области $\{y \neq 0\}$; $u_{yy} = 0$ на линии $y = 0$.

6) $u_{\eta\eta} - \xi u_\xi = 0$, где $\xi = xe^y$, $\eta = y$ в области $\{x \neq 0\}$; $u_{yy} = 0$ на линии $x = 0$.

7) $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - \operatorname{th}\xi\, u_\xi = 0$, где $\xi = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$, $\eta = \ln(y + \sqrt{1 + y^2})$ на всей плоскости (x, y).

8) $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \cos\xi\, u_\eta = 0$, где $\xi = x$, $\eta = y - \cos x$ на всей плоскости (x, y).

Глава 5

Решение краевых задач с использованием рядов Фурье

5.1. Краевые задачи для УМФ

При изучении физических задач методами математической физики естественно возникает следующий принципиальный вопрос: каким образом при существовании всего лишь трех основных типов ДУ удается успешно описать удивительное многообразие физических явлений в самых различных областях как классической, так и квантовой физики? Ответ на этот вопрос в сущности прост: опытным фактом является и то обстоятельство, что для полного описания конкретного физического явления необходимо дополнить эти уравнения некоторыми дополнительными условиями, которые в общем случае принято называть *краевыми условиями*. Именно многообразие форм и способов задания этих условий в конечном итоге обусловливает возможность адекватного описания удивительного многообразия физических явлений.

К сожалению, по сложившейся издавна традиции этому обстоятельству не уделяется должного внимания. Возьмем простой пример из школьного курса физики: движение тела под действием силы тяжести (тело, брошенное под углом к горизонту). Уравнения движения дает нам опытный закон, открытый Ньютоном. Но для полного описания этого физического процесса необходимо задать еще два условия, а именно координату и скорость в начальный момент времени. Сейчас это воспринимается как совершенно очевидный и всем хорошо известный факт, не требующий доказательства и не заслуживающий рассмотрения. Но возьмем более сложный пример. Считается, что нам достаточно хорошо известны законы аэродинамики. Но как нужно задать аналогичные дополнительные (начальные) условия, чтобы описать такие хорошо известные природные физические явления, как смерч, торнадо и т. д.? Удовлетворительного ответа на этот вопрос до сих пор не найдено. Отсюда вывод: при описании физических явлений наряду с найденными из опыта законами природы в форме ДУ не менее важную роль играют и краевые условия, которые, в сущности, также являются законами природы, найденными из опыта, только выраженными в несколько иной форме.

Вместе уравнения и краевые условия задают *краевую задачу*, являющуюся основным объектом изучения в математической физике. Описать все многообразие краевых задач нереально, и в дальнейшем будут изучены лишь так называемые *корректно поставленные* задачи. К ним относятся краевые задачи, на решения которых накладываются три требования: 1) решение задачи должно существовать, 2) решение задачи должно быть единственным, 3) решение задачи должно непрерывно зависеть от данных задачи.

В процессе исторического развития для каждого из трех основных типов уравнений были найдены свои, наиболее часто встречающиеся типы корректно поставленных краевых задач. Среди них наиболее важным типом является так называемая *смешанная задача*.

5.2. Смешанная задача

Смешанная задача ставится для уравнений гиперболического и параболического типа, примерами которых служат уравнение колебаний и уравнение распространения тепла соответственно. Уточним необходимые обозначения. Неизвестная функция $u = u(t, x)$, где t — временная переменная, $t \in (0, T)$; x — совокупность пространственных переменных, $x \in G \subset \mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3$ (G — ограниченная область); функция $u(t, x)$ ищется в классе функций $C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$, где $D = (0, T) \otimes G$. Линейный дифференциальный оператор задается формулой (2.7)

$$\hat{L} \stackrel{\text{def}}{=} -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(p(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\right) + q(x)\ , \tag{5.1}$$

где заданы коэффициенты $p(x) \in C^1(G)$, $q(x) \in C(G)$; $p(x) > 0$, $q(x) \geqslant 0$. Краевые условия в смешанной задаче принимают вид граничных и начальных условий. Граничные условия записываются в виде

$$\left(\alpha(x)\, u + \beta(x)\frac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_S = v(t, x)\ , \quad \forall\, t \in (0, T)\ , \tag{5.2}$$

где $S \equiv \partial G$ — граница области G (S — кусочно-гладкая поверхность). Символ $\dfrac{\partial}{\partial n}$ обозначает производную по внешней нормали к S. Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ считаются заданными: $\alpha(x), \beta(x) \in C(S)$; $\alpha(x), \beta(x) \geqslant 0$; $\alpha(x) + \beta(x) \neq 0$. Заданная функция $v(t,x) \in C(D)$. Начальные условия записываются в виде

$$\begin{aligned} u|_{t=0} &= u^{(0)}(x)\,, \\ u_t|_{t=0} &= u^{(1)}(x)\,, \end{aligned} \tag{5.3}$$

где функции $u^{(0)}(x)$, $u^{(1)}(x)$ заданы; $u^{(0)}(x)\in C^1(G)$, $u^{(1)}(x)\in C(G)$. Число начальных условий зависит от типа уравнения (и равно порядку производной по времени в уравнении). На функции, входящие в граничные и начальные условия, налагаются условия согласования:

$$\left(\alpha\, u^{(0)} + \beta\, \frac{\partial u^{(0)}}{\partial n}\right)\Big|_S = v|_{t=0}\ . \tag{5.4}$$

Смешанная задача для уравнения колебаний записывается в виде

$$\begin{cases} \rho(x)\, u_{tt}(t,x) = -\hat{L}\, u(t,x) + F(t,x)\,, \\ \left(\alpha(x)\, u + \beta(x)\dfrac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_S = v(t,x)\,, \\ u|_{t=0} = u^{(0)}(x)\,, \\ u_t|_{t=0} = u^{(1)}(x)\,, \end{cases} \tag{5.5}$$

а для уравнения распространения тепла принимает вид

$$\begin{cases} \rho(x)\, u_t(t,x) = -\hat{L}\, u(t,x) + F(t,x)\,, \\ \left(\alpha(x)\, u + \beta(x)\dfrac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_S = v(t,x)\,, \\ u|_{t=0} = u^{(0)}(x)\,. \end{cases} \tag{5.6}$$

Здесь заданы функции $\rho(x) \in C(G)$ и $F(t,x) \in C(D)$. Коэффициенты в ДУ $\rho(x)$, $p(x)$, $q(x)$ описывают свойства среды, а $F(t,x)$ — внешнее воздействие. Функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $u^{(0)}(x)$, $u^{(1)}(x)$ характеризуют специфику воздействия внешних причин на протекание физического процесса. В уравнении колебаний функция $u(t,x)$ обычно имеет смысл отклонения физической величины, которая совершает колебания, от своего равновесного значения. В уравнении распространения тепла $u(t,x)$ имеет смысл температуры среды в момент времени t в точке с координатой x.

Решить смешанную задачу — значит найти такую функцию $u(t,x)$, которая является решением соответствующего уравнения и удовлетворяет граничным и начальным условиям.

Доказано, что смешанная задача поставлена корректно.

В дальнейшем ограничимся случаем однородных сред, когда функции $\rho(x)$, $p(x)$ и $q(x)$ являются константами. Кроме того, функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ будут кусочно-постоянными. В этом случае можно получать решения смешанной задачи в явном виде.

5.2.1. Одномерная задача с однородными граничными условиями

Начнем с простейшего случая: задача одномерна ($n = 1$) и граничные условия однородны ($v = 0$). В этом случае $G = (a,b)$, $S = \{a,b\}$, $D = (0,T) \otimes (a,b)$, а производная по нормали (с точностью до знака) совпадает с производной по x. Основная идея при решении смешанной задачи состоит в использовании разложений в ряды Фурье, что, в свою очередь, требует предварительного построения базиса.

Удобно всю процедуру поиска решения разбить на отдельные этапы.

Первый этап. Построение базиса

В соответствии с общей теорией линейных операторов в гильбертовом пространстве ортонормированный базис в $L_2(G)$ может быть найден как решение задачи на собственные значения:

$$\begin{cases} \hat{L}u(x) = \lambda\, u(x)\,, \\ \left(\alpha(x)\, u + \beta(x)\dfrac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_S = 0\,, \\ u(x) \not\equiv 0\,, \quad \|u\| = 1\,. \end{cases} \tag{5.7}$$

В нашем простейшем случае $\hat{L}u(x) = -p\, u''(x) + q\, u(x)$, а граничные условия имеют вид $\alpha_1 u(a) - \beta_1 u'(a) = 0$, $\alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0$.

Для упрощения вычислений рассмотрим задачу на собственные значения в следующем виде:

$$\begin{cases} -u''(x) = \lambda\, u(x)\,, \\ \alpha_1 u(a) - \beta_1 u'(a) = 0\,, \\ \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0\,, \\ u(x) \not\equiv 0\,, \quad \|u\| = 1\,. \end{cases} \tag{5.8}$$

Задачи такого вида рассматривались в п. 2.1. Будем считать, что задача решена и найдены собственные значения $\{\lambda_k\}$ и собственные функции $\{u_k(x)\}$. Заметим, что переход к $L_2(G)$ вполне допустим, так как представляет собой формальное расширение класса функций, среди которых ищется решение.

Второй этап. Разложение в ряды Фурье искомой и заданных в смешанной задаче функций

Неизвестную функцию $u(t,x)$ можно представить в виде ряда Фурье по найденному базису $\{u_k(x)\}$:

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)\, u_k(x)\ . \tag{5.9}$$

Это сводит исходную задачу к вычислению неизвестных коэффициентов Фурье $c_k(t)$. Вполне естественно представить в виде рядов Фурье также свободный член $F(t,x)$ и функции $u^{(0)}(x)$, $u^{(1)}(x)$ в начальных условиях. Имеем

$$\begin{gathered} F(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t)\, u_k(x)\,, \\ u^{(0)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{0k}\, u_k(x)\,, \quad u^{(1)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{1k}\, u_k(x)\,. \end{gathered} \tag{5.10}$$

Как известно, коэффициенты Фурье выражаются через скалярное произведение функций и тем самым нахождение этих коэффициентов сводится к вычислению соответствующих интегралов:

$$\begin{aligned} F_k(t) &= (F(t,x), u_k(x)) = \int_a^b F(t,x)\, u_k(x)\, dx\ , \\ u_{0k} &= \Big(u^{(0)}(x), u_k(x)\Big) = \int_a^b u^{(0)}(x)\, u_k(x)\, dx\ , \\ u_{1k} &= \Big(u^{(1)}(x), u_k(x)\Big) = \int_a^b u^{(1)}(x)\, u_k(x)\, dx\ . \end{aligned} \tag{5.11}$$

Заметим, что в разложении свободного члена $F(t,x)$ время играет роль параметра, а сделанное выше предположение о гладкости этой функции гарантирует само существование интегралов, а также соответствующую степень гладкости коэффициентов Фурье $F_k(t)$, рассматриваемых как функции времени.

Третий этап. Получение ОДУ для $c_k(t)$ и решение этих уравнений

Уравнения для коэффициентов Фурье $c_k(t)$ получаются из соответствующих уравнений в смешанной задаче. Рассмотрим, например, уравнение колебаний. С учетом принятых упрощений подставим всюду вместо $u(t,x)$ и $F(t,x)$ ряды Фурье. Вычислим соответствующие производные, допуская возможность почленного дифференцирования членов ряда. Тогда получим

$$\rho\sum_{k=1}^{\infty} c_k''(t)\,u_k(x) = -p\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k c_k(t)\,u_k(x) - q\sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)\,u_k(x) + \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t)\,u_k(x). \tag{5.12}$$

Так как функции $u_k(x)$ образуют базис и, следовательно, линейно независимы, то можно приравнять соответствующие коэффициенты при одинаковых функциях $u_k(x)$ в левой и правой частях полученного тождества. Отсюда находим

$$\rho\, c_k''(t) = -p\lambda_k c_k(t) - q c_k(t) + F_k(t)\ ,\ \forall\, k. \tag{5.13}$$

Перепишем полученное уравнение в виде

$$\rho\, c_k''(t) + (\lambda_k p + q)\, c_k(t) = F_k(t)\ . \tag{5.14}$$

Это и есть искомое уравнение для $c_k(t)$ в смешанной задаче для уравнения колебаний.

Рассмотрим теперь уравнение распространения тепла. Легко сообразить, что в этом случае вместо второй производной по времени появится первая производная. Таким образом, искомое уравнение для $c_k(t)$ в смешанной задаче для уравнения распространения тепла имеет вид

$$\rho\, c_k'(t) + (\lambda_k p + q)\, c_k(t) = F_k(t)\ . \tag{5.15}$$

Теперь нужно найти решение этих неоднородных линейных ОДУ второго (соответственно первого) порядка. На примере последнего уравнения напомним вкратце, как строится его общее решение. Рассмотрим однородное уравнение

$$\rho\, c_k'(t) + (\lambda_k p + q)\, c_k(t) = 0\ . \tag{5.16}$$

Воспользуемся подстановкой Эйлера: $c_k(t) = e^{\alpha t}$. Получим характеристическое уравнение

$$\rho\,\alpha + (\lambda_k p + q) = 0 \quad\Rightarrow\quad \alpha = -\frac{\lambda_k p + q}{\rho}\ . \tag{5.17}$$

Следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид

$$c_k(t) = A_k e^{-\frac{\lambda_k p + q}{\rho}\, t}\,, \tag{5.18}$$

где A_k — произвольная постоянная. Теперь нужно найти частное решение $\tilde{c}_k(t)$ исходного неоднородного уравнения. Для этого нужно использовать метод вариации постоянных или метод неопределенных коэффициентов. Тогда общее решение неоднородного уравнения можно записать в виде

$$c_k(t) = \tilde{c}_k(t) + A_k e^{-\frac{\lambda_k p + q}{\rho}\, t}\,. \tag{5.19}$$

Аналогично ищется общее решение уравнения второго порядка (5.14). В общее решение этого уравнения будут входить две произвольные постоянные A_k и B_k.

Четвертый этап. Определение произвольных постоянных из начальных условий

Продолжим рассмотрение предыдущего примера. В смешанной задаче для уравнения распространения тепла начальное условие одно. Подставим в него слева искомую функцию в виде ряда Фурье, а справа ряд Фурье для функции $u^{(0)}(x)$. Получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)\, u_k(x)\Big|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} u_{0k}\, u_k(x) \;\Rightarrow\; \sum_{k=1}^{\infty} c_k(0)\, u_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{0k}\, u_k(x)\,. \tag{5.20}$$

Вновь приравняем коэффициенты при $u_k(x)$ в тождестве:

$$c_k(0) = u_{0k} \quad \Rightarrow \quad \tilde{c}_k(0) + A_k = u_{0k}\,,\ \forall\, k\,. \tag{5.21}$$

Отсюда

$$A_k = u_{0k} - \tilde{c}_k(0)\,,\ \forall\, k\,. \tag{5.22}$$

Аналогично, в смешанной задаче для уравнения колебаний из двух начальных условий получаются два уравнения для определения констант A_k и B_k. Детали вычислений продемонстрированы в нижеследующих конкретных примерах.

Пятый этап. После завершения всех четырех этапов расчета следует записать ответ. Опять продолжим наш пример. Подставляя найденное выражение для A_k в формулу общего решения для $c_k(t)$, получим

$$c_k(t) = \tilde{c}_k(t) + [u_{0k} - \tilde{c}_k(0)]\, e^{-\frac{\lambda_k p + q}{\rho}\, t}\,,\ \forall\, k\,. \tag{5.23}$$

Затем $c_k(t)$ подставляем в ряд Фурье для $u(t,x)$. В итоге

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\tilde{c}_k(t) + (u_{0k} - \tilde{c}_k(0))\, e^{-\frac{\lambda_k p + q}{\rho}\, t} \right] u_k(x)\ . \tag{5.24}$$

Это и есть искомое решение смешанной задачи для уравнения распространения тепла.

Вообще говоря, полученная формула для решения требует более строгого математического обоснования. Необходимо установить сходимость полученного ряда и характер сходимости и тем самым обосновать возможность почленного дифференцирования ряда. Соответствующие теоремы приведены в пособиях [4, 5, 6].

Пример 1. Рассмотрим следующую задачу. Найти распределение температуры в тонком ограниченном однородном стержне, левый конец которого поддерживается при температуре, равной температуре окружающей среды, а правый конец теплоизолирован. На боковой поверхности происходит конвективный теплообмен с внешней средой. По стержню непрерывно распределены источники тепла с известной линейной плотностью, которая зависит от времени и координаты. Известно распределение температуры в начальный момент времени. В подходящих безразмерных единицах приходим к следующей смешанной задаче для уравнения распространения тепла:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - u + e^{-t}\cos x\ , \quad 0 < t < \infty\ , \ \ 0 < x < \dfrac{\pi}{2}\ , \\ u\big|_{x=0} = 0\ , \\ u_x\big|_{x=\pi/2} = 0\ , \\ u\big|_{t=0} = \sin x\ . \end{cases} \tag{5.25}$$

Здесь $u = u(t,x)$ — искомое распределение температуры, которая отсчитывается от температуры внешней среды. В правой части уравнения первый член описывает процесс внутренней теплопроводности, второй — процесс конвективного теплообмена с окружающей средой через боковую поверхность, а третий — влияние внешних источников тепла. Граничные условия описывают ситуацию на левом и правом конце стержня. Функция в правой части начального условия характеризует начальное распределение температуры. Легко проверить, что условия согласования выполнены.

Рассмотрим последовательно все этапы вычислений.

1) Строим базис. Имеем следующую задачу на собственные значения:

$$\begin{cases} -u''(x) = \lambda\, u(x)\,, \ x \in (0, \frac{\pi}{2})\,, \\ u(0) = 0\,, \\ u'(\frac{\pi}{2}) = 0\,, \\ u(x) \not\equiv 0\,, \ \ \|u\| = 1\,. \end{cases}$$

Ее решение (см. разд. 2.1) имеет вид

$$\lambda_k = (2k+1)^2 \ , \quad u_k(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sin(2k+1)x \ , \quad k = 0, 1, 2, \ldots \ .$$

2) Разложение в ряды Фурье.

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(t)\, u_k(x) \ .$$

Разложим в ряд Фурье функцию $\cos x$. Для этого вычислим интегралы

$$\begin{aligned} (\cos x, u_k(x)) \ &= \ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi/2} \cos x \, \sin(2k{+}1)x \, dx = \\ &= \ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi/2} [\sin 2(k{+}1)x + \sin 2kx] \, dx = \\ &= \ -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{\cos 2(k{+}1)x}{2(k{+}1)} \Big|_0^{\pi/2} + \frac{\cos 2kx}{2k} \Big|_0^{\pi/2} \right] = \\ &= \ -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left[\frac{(-1)^{k+1} - 1}{k{+}1} + \frac{(-1)^k - 1}{k} \right] = \\ &= \ \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\pi}(k+1)} \ , \ \text{ если } k \text{ — четное}\,, \\ \dfrac{1}{\sqrt{\pi} k} \ , \ \text{ если } k \text{ — нечетное}\,. \end{cases} \end{aligned}$$

Случай $k = 0$ особый:

$$(\cos x, u_0(x)) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi/2} \cos x \, \sin x \, dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \ .$$

Таким образом,

$$f_k = (\cos x, u_k(x)) = \frac{1}{\sqrt{\pi}(2m+1)} \ , \text{ где } \begin{cases} k = 2m\,, \\ k = 2m+1\,, \end{cases} \quad m = 0, 1, 2, \ldots \ .$$

В итоге имеем разложение

$$e^{-t}\cos x = e^{-t}\sum_{k=0}^{\infty} f_k\, u_k(x)\ .$$

Теперь разложим функцию $\sin x$. Можно снова вычислять интегралы, но проще воспользоваться искусственным приемом. Запишем очевидное тождество

$$\sin x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sin x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,u_0(x) + 0\,u_1(x) + 0\,u_2(x) + \ldots\ .$$

Отсюда очевидно

$$u_{0k} = (\sin x, u_k(x)) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\ , & k=0 \\ 0\ , & k=1,2\ldots \end{cases} \quad\Rightarrow\quad u_{0k} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\delta_{0k}\ .$$

Окончательно

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\delta_{0k}\,u_k(x)\ .$$

Таким образом, все необходимые в нашей задаче функции представлены в виде рядов Фурье.

3) Запишем уравнение для $c_k(t)$:

$$c_k'(t) + (\lambda_k + 1)\,c_k(t) = e^{-t} f_k\ , \quad \forall\, k\ .$$

Явный вид λ_k и f_k подставлять пока рано. Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$c_k^o(t) = A_k\, e^{-(\lambda_k+1)t},$$

где A_k — произвольные константы. Для поиска частного решения неоднородного уравнения проще использовать метод неопределенных коэффициентов. Будем искать частное решение в виде $\tilde{c}_k(t) = C_k e^{-t}$ и для неопределенных коэффициентов C_k получим

$$-C_k + (\lambda_k + 1)\,C_k = f_k \quad\Rightarrow\quad C_k = \frac{f_k}{\lambda_k}\ .$$

В итоге

$$\tilde{c}_k(t) = \frac{f_k}{\lambda_k}\,e^{-t}\ .$$

Значит, общее решение неоднородного ДУ для $c_k(t)$ запишется в виде

$$c_k(t) = \frac{f_k}{\lambda_k}\, e^{-t} + A_k\, e^{-(\lambda_k+1)t}\ , \quad \forall\, k\ .$$

4) Чтобы найти A_k, используем начальное условие

$$c_k(0) = u_{0k} \quad \Rightarrow \quad \frac{f_k}{\lambda_k} + A_k = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\delta_{0k} \quad \Rightarrow \quad A_k = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\delta_{0k} - \frac{f_k}{\lambda_k}\ .$$

Подставляя найденные A_k в общее решение для $c_k(t)$, получим

$$c_k(t) = \frac{f_k}{\lambda_k}\, e^{-t} + \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\delta_{0k} - \frac{f_k}{\lambda_k}\right) e^{-(\lambda_k+1)t} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, e^{-2t}\delta_{0k} + \frac{f_k}{\lambda_k}\, e^{-t}\left(1 - e^{-\lambda_k t}\right).$$

5) Запишем решение. Подставим $c_k(t)$ в ряд Фурье для $u(t,x)$:

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(t)\, u_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}\, e^{-2t}\delta_{0k} + \frac{f_k}{\lambda_k}\, e^{-t}\left(1 - e^{-\lambda_k t}\right)\right] u_k(x).$$

Теперь пора подставлять f_k, λ_k и $u_k(x)$ в явном виде и преобразовывать получившийся ряд:

$$\begin{aligned} u(t,x) \ &= \ \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, e^{-2t} u_0(x) + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f_{2m}}{\lambda_{2m}}\, e^{-t}\left(1 - e^{-\lambda_{2m} t}\right) u_{2m}(x) + \\ &\qquad + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f_{2m+1}}{\lambda_{2m+1}}\, e^{-t}\left(1 - e^{-\lambda_{2m+1} t}\right) u_{2m+1}(x) = \\ &= \ e^{-2t}\sin x + \frac{2}{\pi}\, e^{-t} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1 - e^{-(4m+1)t}}{(2m+1)\,(4m+1)^2}\, \sin(4m{+}1)x + \\ &\qquad + \frac{2}{\pi}\, e^{-t} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1 - e^{-(4m+3)t}}{(2m+1)\,(4m+3)^2}\, \sin(4m{+}3)x\ . \end{aligned}$$

Это и есть искомое решение поставленной задачи. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что найденное решение удовлетворяет уравнению, граничным и начальным условиям задачи (5.25).

Пример 2. Рассмотрим следующую смешанную задачу для уравнения колебаний:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - u + \sin x\ , \quad 0 < x < \pi\ , \ \ 0 < t < \infty\,, \\ u_x\big|_{x=0} = 0\,, \\ u_x\big|_{x=\pi} = 0\,, \\ u\big|_{t=0} = \cos x\,, \\ u_t\big|_{t=0} = \sin x\,. \end{cases}$$

Физическую интерпретацию задачи опустим. Приступаем к поэтапному решению задачи.

1) Строим базис.

$$\begin{cases} -u''(x) = \lambda\, u(x)\,,\ \ x \in (0,\pi)\,, \\ u'(0) = 0\,, \\ u'(\pi) = 0\,, \\ u(x) \not\equiv 0\,, \quad \|u\| = 1\,. \end{cases}$$

В данном случае имеем

$$\lambda_k = k^2\,, \quad k = 0,1,2,\dots\,,$$
$$u_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,, \quad u_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos kx\,, \quad k = 1,2,\dots\,.$$

2) Разложения в ряд Фурье.

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(t)\, u_k(x)\,.$$

Разлагаем функцию $\sin x$. Для этого вычисляем интегралы:

$$\begin{aligned} f_k &= (\sin x, u_k(x)) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\pi \sin x\cos kx\, dx = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{2}\int_0^\pi \left[\sin(k{+}1)x - \sin(k{-}1)x\right] dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-\frac{\cos(k{+}1)x}{k+1}\Big|_0^\pi + \frac{\cos(k{-}1)x}{k-1}\Big|_0^\pi\right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-\frac{(-1)^{k+1}-1}{k+1} + \frac{(-1)^{k-1}-1}{k-1}\right] = \\ &= \begin{cases} 0\,, \ \ \text{если } k \text{ — нечетное}\,, \\ -\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{2}{k^2-1}\,, \ \ \text{если } k \text{ — четное}\,. \end{cases} \end{aligned}$$

Особые случаи здесь $k = 0,1$:

$$f_0 = (\sin x, u_0(x)) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\pi \sin x\, dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,,$$
$$f_1 = (\sin x, u_1(x)) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\pi \sin x\cos x\, dx = 0\,.$$

Выпишем окончательное разложение для $\sin x$:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \, u_k(x) \ ,$$

где

$$f_k = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \ , & \text{если } k = 0 \, , \\ -\sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \dfrac{2}{4m^2 - 1} \ , & k = 2m \, , \ m = 1, 2 \ldots \ , \\ 0 \ , & k = 2m + 1 \, , \ m = 0, 1, 2, \ldots \ . \end{cases}$$

При разложении функции $\cos x$ воспользуемся тем, что с точностью до постоянного множителя эта функция совпадает с $u_1(x)$. Следовательно,

$$u_{0k} = (\cos x, u_k(x)) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} \ , & k = 1 \\ 0 \ , & k = 0, 2, 3 \ldots \end{cases} \quad \Rightarrow \quad u_{0k} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \, \delta_{k,1} \ .$$

Следовательно, для $\cos x$ имеем ряд Фурье

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \, \delta_{k,1} \, u_k(x) \ .$$

3) Уравнение для $c_k(t)$:

$$c_k''(t) + (\lambda_k + 1) \, c_k(t) = f_k \quad \Rightarrow \quad c_k''(t) + \left(k^2 + 1\right) c_k(t) = f_k \ , \ \ \forall \, k \, .$$

Решаем однородное уравнение

$$c_k^o(t) = A_k \cos\left(\sqrt{k^2+1} \, t\right) + B_k \sin\left(\sqrt{k^2+1} \, t\right) \ , \ \ \forall \, k \, .$$

Для отыскания частного решения неоднородного уравнения снова используем метод неопределенных коэффициентов. Пусть $\tilde{c}_k(t) = C_k$, где C_k — константа. Следовательно,

$$\left(k^2 + 1\right) C_k = f_k \quad \Rightarrow \quad C_k = \frac{f_k}{k^2 + 1} \ , \ \ \forall \, k \, .$$

В итоге общее решение неоднородного уравнения для $c_k(t)$ имеет вид

$$c_k(t) = \frac{f_k}{k^2 + 1} + A_k \cos\left(\sqrt{k^2+1} \, t\right) + B_k \sin\left(\sqrt{k^2+1} \, t\right) .$$

4) Использование начальных условий. Из первого условия имеем

$$c_k(0) = u_{0k} \;\Rightarrow\; \frac{f_k}{k^2+1} + A_k = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\delta_{k,1} \;\Rightarrow\; A_k = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\delta_{k,1} - \frac{f_k}{k^2+1}\,,\ \forall\, k\,.$$

Второе условие даст

$$c_k'(0) = u_{0k} \;\Rightarrow\; \sqrt{k^2+1}\,B_k = f_k \;\Rightarrow\; B_k = \frac{f_k}{\sqrt{k^2+1}}\,,\ \forall\, k\,.$$

С учетом вида A_k и B_k получим

$$c_k(t) = \frac{f_k}{k^2+1} + \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\delta_{k,1} - \frac{f_k}{k^2+1}\right)\cos\left(\sqrt{k^2+1}\,t\right) + \frac{f_k}{\sqrt{k^2+1}}\sin\left(\sqrt{k^2+1}\,t\right).$$

5) Теперь для искомой функции имеем

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k(t)\,u_k(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cos\sqrt{2}t\,u_1(x) + \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k}{k^2+1}\left[1 - \cos\left(\sqrt{k^2+1}\,t\right) + \sqrt{k^2+1}\,\sin\left(\sqrt{k^2+1}\,t\right)\right] u_k(x) = \\ &= \cos\sqrt{2}t\,\cos x + \frac{2}{\pi}\,(1 - \cos t + \sin t) - \\ &- \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1 - \cos\left(\sqrt{4m^2+1}\,t\right) + \sqrt{4m^2+1}\,\sin\left(\sqrt{4m^2+1}\,t\right)}{16m^2-1}\cos 2mx\,. \end{aligned}$$

Это и есть решение поставленной задачи.

5.1. Решить смешанные задачи для уравнения теплопроводности:

1) $\begin{cases} u_t = u_{xx}\,, \\ u|_{x=0} = 0\,, \\ u|_{x=\pi} = 0\,, \\ u|_{t=0} = \pi x - x^2\,; \end{cases}$

2) $\begin{cases} u_t = u_{xx} + 4u + 2\cos^2 x\,, \\ u_x|_{x=0} = 0\,, \\ u_x|_{x=\pi} = 0\,, \\ u|_{t=0} = 0\,; \end{cases}$

3) $\begin{cases} u_t = u_{xx} - u + \left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)e^{-t}\,, \\ u_x|_{x=0} = 0\,, \\ u|_{x=\pi/2} = 0\,, \\ u|_{t=0} = 0\,; \end{cases}$

4) $\begin{cases} u_t = u_{xx} + u + \cos t\,, \\ u_x|_{x=0} = 0\,, \\ u_x|_{x=\pi/2} = 0\,, \\ u|_{t=0} = \cos 2x\,; \end{cases}$

$$5)\quad \begin{cases} u_t = u_{xx} + u + \sin x\,, \\ u_x\big|_{x=0} = 0\,, \\ u_x\big|_{x=\pi} = 0\,, \\ u\big|_{t=0} = \cos x\,. \end{cases}$$

5.2. Решить смешанные задачи для уравнения колебаний:

$$1)\quad \begin{cases} u_{tt} = u_{xx}\,, \\ u\big|_{x=0} = 0\,, \\ u\big|_{x=1} = 0\,, \\ u\big|_{t=0} = x^2 - x\,, \\ u_t\big|_{t=0} = 0\,; \end{cases} \qquad 2)\quad \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 4u + 4\sin^2 x\,, \\ u_x\big|_{x=0} = 0\,, \\ u_x\big|_{x=\pi/2} = 0\,, \\ u\big|_{t=0} = 0\,, \\ u_t\big|_{t=0} = 0\,; \end{cases}$$

$$3)\quad \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + x - \pi\,, \\ u_x\big|_{x=0} = 0\,, \\ u\big|_{x=\pi} = 0\,, \\ u\big|_{t=0} = \cos \dfrac{x}{2}\,, \\ u_t\big|_{t=0} = 0\,; \end{cases} \qquad 4)\quad \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 3u + 4\sin x \sin 2t\,, \\ u\big|_{x=0} = 0\,, \\ u_x\big|_{x=\pi/2} = 0\,, \\ u\big|_{t=0} = 0\,, \\ u_t\big|_{t=0} = \sin 3x\,. \end{cases}$$

5.2.2. Случай неоднородных граничных условий

Если в задаче (5.6) или (5.5) функция $v(t,x) \not\equiv 0$, то непосредственно воспользоваться предыдущим методом нельзя, поскольку в задаче на собственные значения (5.7) граничные условия однородные и любая линейная комбинация собственных функций также будет им удовлетворять. Однако неоднородность в граничных условиях можно устранить с помощью замены неизвестной функции. Пусть

$$u(t,x) = \tilde{u}(t,x) + \varphi(t,x)\,, \tag{5.26}$$

где функцию $\varphi(t,x)$ подберем так, чтобы

$$\left(\alpha(x)\,\varphi + \beta(x)\,\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)\Big|_{\partial G} = v(t,x)\,.$$

Тогда функция $\tilde{u}(t,x)$ будет удовлетворять однородным граничным условиям

$$\left(\alpha(x)\,u+\beta(x)\,\frac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_{\partial G}=$$

$$=\left(\alpha(x)\,\tilde{u}+\beta(x)\,\frac{\partial \tilde{u}}{\partial n}\right)\Big|_{\partial G}+\left(\alpha(x)\,\varphi+\beta(x)\,\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)\Big|_{\partial G}\;=\;v(t,x)\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad\left(\alpha(x)\,\tilde{u}+\beta(x)\,\frac{\partial \tilde{u}}{\partial n}\right)\Big|_{\partial G}=0\;.$$

Производя замену (5.26) в уравнении и начальных условиях в (5.6) или (5.5), получим смешанную задачу с однородными граничными условиями для новой неизвестной функции $\tilde{u}(t,x)$.

Выбор функции $\varphi(t,x)$ неоднозначен, поскольку внутри области G никаких ограничений, кроме гладкости, на $\varphi(t,x)$ нет. При решении задач лучше использовать наиболее простую возможность. Так, в случае одной пространственной переменной зачастую достаточно предположить линейный или квадратичный по x вид функции $\varphi(t,x)$:

$$\varphi(t,x)=a(t)\,x+b(t)\;,\quad \varphi(t,x)=a(t)\,x^2+b(t)\,x+c(t)\;.$$

Ясно, что при замене $u=\tilde{u}+\varphi$ изменяются также уравнение и начальные условия. С общей точки зрения это еще раз подчеркивает равноправность и взаимозависимость уравнения и краевых условий в смешанной задаче. С практической точки зрения можно распорядиться имеющимся произволом и дополнительно упростить либо уравнения, либо начальные условия.

Пример. Преобразуем к задаче с однородными граничными условиями следующую смешанную задачу для уравнения колебаний:

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}-u+t\left(x^2-2\right)+\sin x\;,\quad 0<x<\pi\;,\;\; 0<t<\infty\,,\\ u_x\big|_{x=0}=0\,,\\ u_x\big|_{x=\pi}=2\pi t\,,\\ u\big|_{t=0}=\cos x\,,\\ u_t\big|_{t=0}=\sin x+x^2\,. \end{cases}\tag{5.27}$$

Условия, которым должна удовлетворять функция $\varphi(t,x)$ на границе ∂G, следующие:

$$\varphi_x\big|_{x=0}=0\;,\quad \varphi_x\big|_{x=\pi}=2\pi t\;.$$

Нетрудно проверить, что функция $\varphi(t,x) = a(t)\,x + b(t)$ не подходит. Подберем функцию $\varphi(t,x) = a(t)\,x^2 + b(t)\,x + c(t)$:

$$\varphi_x = 2a(t)\,x + b(t) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} b(t) = 0 \\ 2a(t)\,\pi + b(t) = 2\pi t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \varphi = tx^2 \,.$$

Функцию $c(t)$ положим равной нулю. Сделаем замену $u = \tilde{u} + \varphi$ в уравнении, получим

$$\tilde{u}_{tt} = \tilde{u}_{xx} - \tilde{u} + \sin x \,.$$

Начальные условия также изменятся:

$$\begin{aligned} &u\big|_{t=0} = \tilde{u}\big|_{t=0} + tx^2\big|_{t=0} = \tilde{u}\big|_{t=0} &&\Rightarrow \quad \tilde{u}\big|_{t=0} = \cos x \,, \\ &u_t\big|_{t=0} = \tilde{u}_t\big|_{t=0} + x^2 &&\Rightarrow \quad \tilde{u}_t\big|_{t=0} = \sin x \,. \end{aligned}$$

Смешанная задача для $\tilde{u}(t,x)$ принимает вид

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} = \tilde{u}_{xx} - \tilde{u} + \sin x \,, \quad 0 < x < \pi \,, \quad 0 < t < \infty \,, \\ \tilde{u}_x\big|_{x=0} = 0 \,, \\ \tilde{u}_x\big|_{x=\pi} = 0 \,, \\ \tilde{u}\big|_{t=0} = \cos x \,, \\ u_t\big|_{t=0} = \sin x \,. \end{cases}$$

Эта задача в качестве второго примера решена в предыдущем разделе.

5.3. Решить смешанные задачи для уравнения распространения тепла с неоднородными граничными условиями:

1) $$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u - x + 2\sin 2x \cos x \,, \\ u\big|_{x=0} = 0 \,, \\ u_x\big|_{x=\pi/2} = 1 \,, \\ u\big|_{t=0} = x \,; \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 9u + 4\sin^2 t \cos 3x - 9x^2 - 2 \,, \\ u_x\big|_{x=0} = 0 \,, \\ u_x\big|_{x=\pi} = 2\pi \,, \\ u\big|_{t=0} = x^2 + 2 \,; \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 6u + 2t\,(1 - 3t) - 6x + 2\cos x \cos 2x \,, \\ u_x\big|_{x=0} = 1 \,, \\ u\big|_{x=\pi/2} = t^2 + \dfrac{\pi}{2} \,, \\ u\big|_{t=0} = x \,; \end{cases}$$

$$4)\quad \begin{cases} u_t = u_{xx} + 6u + x^2\,(1-6t) - 2\,(t+3x) + \sin 2x\,, \\ u_x\big|_{x=0} = 1\,, \\ u_x\big|_{x=\pi} = 2\pi t + 1\,, \\ u\big|_{t=0} = x\,. \end{cases}$$

5.4. Решить смешанные задачи для уравнения колебаний с неоднородными граничными условиями:

$$1)\quad \begin{cases} u_{tt} + 2u_t = u_{xx} + 4x + 8\,e^t\cos x\,, \\ u_x\big|_{x=0} = 2t\,, \\ u\big|_{x=\pi/2} = \pi t\,, \\ u\big|_{t=0} = \cos x\,, \\ u_t\big|_{t=0} = 2x\,; \end{cases} \qquad 2)\quad \begin{cases} u_{tt} + u_t = u_{xx}\,, \\ u\big|_{x=0} = t\,, \\ u\big|_{x=1} = 0\,, \\ u\big|_{t=0} = 0\,, \\ u_t\big|_{t=0} = 1-x\,; \end{cases}$$

$$3)\quad \begin{cases} u_{tt} - 2u_t = u_{xx} + 4t\,(\sin x - x)\,, \\ u\big|_{x=0} = 3\,, \\ u_x\big|_{x=\pi/2} = t^2 + t\,, \\ u\big|_{t=0} = 3\,, \\ u_t\big|_{t=0} = x + \sin x\,; \end{cases} \qquad 4)\quad \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + u\,, \\ u\big|_{x=0} = 0\,, \\ u\big|_{x=\pi} = t\,, \\ u\big|_{t=0} = 0\,, \\ u_t\big|_{t=0} = \dfrac{x}{\pi}\,. \end{cases}$$

5.2.3. Многомерные смешанные задачи $(n = 2, 3)$

Применение метода Фурье при решении смешанных задач на плоскости или в пространстве в принципиальном плане ничем не отличается от случая одной пространственной переменной. Ограничения на форму пространственной области $G \subset \mathbb{R}^n$ и вид граничных условий связаны с возможностью получения базиса в виде собственных функций оператора $\hat{L} = -\mathrm{div}\,(p\,\mathrm{grad}\,u) + q\,u$ (см. разд. 2.2).

Пример. В сферическом сосуде радиуса r_0 с радиоактивным материалом происходит диффузия нейтронов, сопровождающаяся цепными реакциями, скорость которых пропорциональна концентрации нейтронов $u(t,\vec{r})$. Найти $u(t,\vec{r})$, предполагая, что на поверхности сосуда $u = 0$ и в начальный момент времени концентрация была равна $u^{(0)}(\vec{r})$.

После ряда упрощающих предположений (см. [5]) физическую ситуацию можно описать следующей смешанной задачей:

$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta u + \beta\, u\,, \\ u|_{\partial G} = 0\,, \\ u|_{t=0} = u^{(0)}(\vec{r})\,. \end{cases} \tag{5.28}$$

Здесь a^2 — коэффициент диффузии, $\beta > 0$ — коэффициент размножения (характеристика материала), Δ — оператор Лапласа. Задачу естественно рассматривать в сферических координатах:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi\ , \quad y = r\sin\theta\sin\varphi\ , \quad z = r\cos\theta\ ,$$

в которых оператор Лапласа имеет вид

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right).$$

В качестве ортонормированного базиса возьмем собственные функции следующей задачи на собственные значения для оператора Лапласа:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda\, u\,, \\ u|_{\partial G} = 0\,. \end{cases} \tag{5.29}$$

Ее решение (см. разд. 2.6) имеет вид

$$\begin{aligned} \lambda_{lk} &= \left(\frac{x_{lk}}{r_0}\right)^2, \quad l = 0, 1, 2, \dots\ , \quad k = 1, 2, 3, \dots\ , \\ u_{klm}(\vec{r}) &= N_{lk}\, j_l\!\left(x_{lk}\frac{r}{r_0}\right)\, Y_{lm}(\theta, \varphi)\ , \quad -l \le m \le l\ . \end{aligned} \tag{5.30}$$

Здесь $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ — сферические функции порядка l, определенные формулой (2.127), $j_l(x)$ — сферические функции Бесселя, определенные формулой (2.135), x_{lk} — k-й корень уравнения $j_l(x) = 0$. Каждое собственное значение λ_{lk} имеет кратность вырождения $2l + 1$.

Запишем разложение искомой функции в ряд Фурье по найденному базису:

$$u(t, \vec{r}) = \sum_{klm} u_{klm}(t)\, u_{klm}(\vec{r})\ . \tag{5.31}$$

Подставим это разложение в уравнение (5.28) и, приравнивая коэффициенты при одинаковых базисных функциях, получим уравнение для неизвестных коэффициентов Фурье:

$$u'_{klm}(t) = \left(\beta - a^2\lambda_{lk}\right) u_{klm}(t)\ .$$

Его общее решение имеет вид

$$u_{klm}(t) = A_{klm}\, e^{\left(\beta - a^2\lambda_{lk}\right) t} \ .$$

Из начального условия следует, что константы A_{klm} равны коэффициентам Фурье функции $u^{(0)}(\vec{r})$:

$$A_{klm} = \left(u_{klm}, u^{(0)}\right) = \int\limits_0^{r_0}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} u^*_{klm}(\vec{r})\, u^{(0)}(\vec{r})\, \sin\theta d\theta\, d\varphi\, r^2 dr \ .$$

В итоге решение примет вид

$$u(t,\vec{r}) = \sum_{klm} A_{klm}\, e^{\left(\beta - a^2\lambda_{lk}\right) t}\, u_{klm}(\vec{r}) \ . \tag{5.32}$$

Отметим, что при $\beta - a^2\lambda_{lk} > 0$ имеет место экспоненциальный рост концентрации нейтронов. Учитывая выражение (5.30) для λ_{lk}, можно указать критический радиус r_c рассмотренной сферической области, превышение которого приводит к экспоненциальному росту:

$$r_c = \frac{\pi a}{\sqrt{\beta}} \ .$$

5.5. Для тонкой квадратной пластины $G = \{0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ начальное распределение температуры имеет вид $u|_{t=0} = xy(1-x)(1-y)$. Края пластины все время наблюдений имеют нулевую температуру. Найти температуру любой точки пластины в момент времени $t > 0$.

5.6. Начальная температура бесконечного кругового цилиндра радиуса r_0 равна u_0. Найти температуру в цилиндре в момент времени $t > 0$, если на его поверхности поддерживается постоянный тепловой поток $q = const$.

5.7. Найти распределение температуры в цилиндре $G = \left\{ x^2 + y^2 < 1,\ 0 < z < l \right\}$, если его боковая поверхность и дно теплоизолированы, а через верхнюю крышку осуществляется конвективный теплообмен с окружающей средой, имеющей нулевую температуру. Начальное распределение температуры в цилиндре имеет вид $u|_{t=0} = u_0\left(1 - x^2 - y^2\right)$.

5.8. На поверхности шара $G = \left\{x^2 + y^2 + z^2 < r_0^2\right\}$ поддерживается распределение температуры, имеющее вид $u|_{\partial G} = A\cos\theta$. Найти распределение температуры в шаре в момент времени $t > 0$, если в начальный момент температура в шаре равна нулю.

5.9. Решить задачу о малых свободных поперечных колебаниях квадратной мембраны $G = \{0 < x < \pi, 0 < y < \pi\}$, закрепленной вдоль контура, если начальная форма мембраны задается выражением $3\sin x \sin 2y$, а начальное распределение скоростей имеет вид $5\sin 3x \sin 4y$.

5.10. Найти поперечные колебания круглой мембраны радиуса r_0 с закрепленным краем в среде без сопротивления, вызванные равномерно распределенным давлением $p = p_0 \sin\omega t$, приложенным к одной стороне мембраны. Начальное отклонение и импульсы точек мембраны равны нулю.

5.11. Решить смешанную задачу в шаре G единичного радиуса:

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u + Ar\cos\theta\,, \\ u|_{\partial G} = 0\,, \\ u|_{t=0} = 0\,, \\ u_t|_{t=0} = 0\,. \end{cases}$$

5.12. Сферический сосуд радиуса $r_0 = 1$, наполненный газом, в течение длительного времени двигался равномерно со скоростью v_0, а затем в момент $t = 0$ мгновенно остановился и остался неподвижным. Найти возникшее в сосуде колебание газа.

5.3. Краевая задача в узком смысле для стационарного уравнения

Рассмотрим краевую задачу в узком смысле с однородными граничными условиями:

$$\begin{cases} \hat{L}\, u(x,y) = F(x,y)\,, \\ \left(\alpha\, u + \beta\dfrac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_{\partial G} = 0\,. \end{cases} \tag{5.33}$$

Здесь выделены две группы пространственных переменных — x и y, оператор имеет вид $\hat{L} = -\mathrm{div}\,(p\,\mathrm{grad}\,u) + q\,u$. Неоднородные граничные условия можно привести к однородным с помощью замены функции $u(x,y) = \tilde{u}(x,y) + \varphi(x,y)$, где $\varphi(x,y)$ принимает заданные значения на ∂G.

Пусть задача (5.33) удовлетворяет условиям применимости метода разделения переменных (см. разд. 2.2), т. е. оператор $\hat{L} = \hat{L}(x,y)$ представляется в виде суммы операторов, действующих каждый на свою группу переменных: $\hat{L}(x,y) = \hat{L}_1(x) + \hat{L}_2(y)$, область $G = G(x,y)$ является прямым произведением областей для переменных x и y: $G(x,y) = G_1(x) \otimes G_2(y)$, и граничные условия разделяются: на $\partial G_1(x)$ функции α и β не зависят от y, а на $\partial G_2(y)$ — от x. Тогда в качестве базиса $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ можно взять решения задачи на собственные значения для оператора $\hat{L}_1(x)$:

$$\begin{cases} \hat{L}_1\, u(x) = \lambda\, u(x) \\ \left(\alpha\, u(x) + \beta \dfrac{\partial u(x)}{\partial n}\right)\Big|_{\partial G_1(x)} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}\ , \quad \{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$$

и представить неизвестную функцию в виде ряда Фурье:

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(y)\, u_k(x)\ . \tag{5.34}$$

Подставляя (5.34) и разложение по базису $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ свободного члена

$$F(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(y)\, u_k(x)\ , \quad f_k(y) = (\, u_k(x), F\,) = \int\limits_{G_1(x)} u_k(x)\, F(x,y)\, dx\ ,$$

в уравнение и граничные условия (5.33) и приравнивая коэффициенты при одинаковых базисных функциях, получим краевые задачи для неизвестных коэффициентов Фурье $v_k(y)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$:

$$\begin{cases} \hat{L}_2\, v_k(y) + \lambda_k v_k(y) = f_k(y)\,, \\ \left(\alpha\, v_k(y) + \beta \dfrac{\partial v_k(y)}{\partial n}\right)|_{\partial G_2(y)} = 0\,. \end{cases} \tag{5.35}$$

Найдя $v_k(y)$, запишем ответ в виде (5.34).

Метод Фурье для решения уравнений Лапласа и Пуассона на плоскости или в пространстве можно применять, помимо прямоугольной, в случае круговой, цилиндрической или сферической областей. В этих случаях для построения базиса можно использовать угловую часть оператора Лапласа (см. разд. 2.3, 2.6).

Продемонстрируем метод Фурье в случае круговой области на примере задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге.

Пример. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге G имеет вид

$$\begin{cases} \Delta u = 0\,, \\ u|_{\partial G} = f(\varphi)\,. \end{cases} \tag{5.36}$$

Записывая оператор Лапласа в полярных координатах (ρ,φ): $x=\rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ и умножая уравнение на ρ^2, получим

$$\rho\frac{\partial}{\partial\,\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0\;. \tag{5.37}$$

Очевидно, что переменные в этом уравнении, а также в граничных условиях разделяются.

С учетом круговой симметрии задачи в качестве базиса возьмем собственные функции $\{\Phi_m(\varphi)\}_{m=-\infty}^{+\infty}$ угловой части оператора Лапласа с условиями 2π-периодичности (см. разд. 2.3):

$$\begin{cases} -\Phi''(\varphi) = \mu\,\Phi(\varphi)\,, \\ \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi+2\pi)\;, \quad \forall\,\varphi\,, \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{l} \mu_m = m^2\;,\;\; m = 0, \pm1, \pm2, \ldots\;, \\ \Phi_m(\varphi) = \dfrac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}}\;. \end{array}$$

Подставляя разложение в ряд Фурье по базису $\{\Phi_m(\varphi)\}_{m=-\infty}^{+\infty}$ искомой функции

$$u(\rho,\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_m(\rho)\,\Phi_m(\varphi) \tag{5.38}$$

и заданной функции

$$\begin{gathered} f(\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m\,\Phi_m(\varphi)\;, \\ a_m = (\Phi_m, f) = \int_0^{2\pi} \Phi_m^*(\varphi)\,f(\varphi)\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{e^{-im\varphi}}{\sqrt{2\pi}}\,f(\varphi)\,d\varphi\;, \end{gathered} \tag{5.39}$$

в уравнение (5.37) и граничное условие (5.36) и приравнивая коэффициенты при одинаковых базисных функциях $\Phi_m(\varphi)$, получим краевые задачи для коэффициентов Фурье $R_m(\rho)$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, неизвестной функции:

$$\begin{cases} \rho\,(\rho R_m'(\rho))' - m^2 R_m(\rho) = 0\,, \\ R_m(a) = a_m\,, \\ R_m(0) < \infty\,. \end{cases} \tag{5.40}$$

Условие при $\rho = 0$ следует из естественного требования ограниченности функции $u(\rho, \varphi)$. Уравнение в (5.40) является уравнением Эйлера, его частные решения можно искать в виде $R_m \propto r^\alpha$. Общие решения имеют вид

$$R_0(\rho) = A_0 + B_0 \ln \rho\,, \quad R_m(\rho) = A_m r^{|m|} + B_m r^{-|m|}\,, \quad m \neq 0\,. \tag{5.41}$$

Из граничных условий определим константы:

$$R_m(0) < \infty \;\Rightarrow\; B_m = 0\,,\ \forall\, m; \quad R_m(a) = a_m \;\Rightarrow\; A_m = \frac{a_m}{a^{|m|}}\,. \tag{5.42}$$

Решение, записанное в виде ряда Фурье, имеет вид

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m \left(\frac{\rho}{a}\right)^{|m|} \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}}\,. \tag{5.43}$$

Ряд (5.43) можно просуммировать. Используя выражения (5.39) для коэффициентов Фурье функции $f(\varphi)$, получим

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^{|m|} \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-im\psi}}{\sqrt{2\pi}}\, f(\psi)\, d\psi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^{|m|} e^{im(\varphi-\psi)}\, d\psi.$$

Преобразуем ряд в правой части равенства:

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^{|m|} e^{im(\varphi-\psi)} = \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^{m} e^{im(\varphi-\psi)} + \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^{m} e^{-im(\varphi-\psi)} =$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^{m} e^{im(\varphi-\psi)}\right) - 1\,.$$

Введя обозначение $q = \dfrac{\rho}{a}\, e^{i(\varphi-\psi)}$, просуммируем ряд и выделим реальную часть:

$$\mathrm{Re}\left(2\sum_{m=0}^{+\infty} q^m - 1\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{2}{1-q} - 1\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1+q}{1-q}\right) = \frac{1 - |q|^2}{1-(q+q^*)+|q|^2}\,.$$

Возвращаясь к исходным обозначениям, получим решение задачи (5.36) в виде *интеграла Пуассона*:

$$u(\rho,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\frac{a^2-\rho^2}{a^2-2a\rho\cos(\varphi-\psi)+\rho^2}\,d\psi\,. \tag{5.44}$$

Отметим, что при решении конкретных задач бывает проще использовать формулу (5.43), так как вычислить коэффициенты Фурье a_m функции $f(\varphi)$ по формуле (5.39) зачастую проще, чем вычислить интеграл Пуассона.

5.13. Найти распределение потенциала электростатического поля $u(x,y)$ внутри прямоугольника $G = \{0 < x < a,\ 0 < y < b\}$, если потенциал стороны этого прямоугольника, лежащей вдоль оси $0y$, равен v_0, а три другие стороны прямоугольника заземлены. Предполагается, что внутри G нет электрических зарядов.

5.14. Найти стационарное распределение температуры $u(x,y)$ в прямоугольной однородной пластине $G = \{0 < x < a,\ 0 < y < b\}$, если ее стороны $x = a$ и $y = b$ покрыты тепловой изоляцией, две другие стороны ($x = 0$ и $y = 0$) поддерживаются при нулевой температуре, а в пластинке выделяется тепло с постоянной плотностью q.

5.15. Найти стационарное распределение температуры $u(r,\varphi)$ внутри бесконечного цилиндра радиуса r_0, если на одной половине поверхности цилиндра ($0 < \varphi < \pi$) поддерживается температура $-T_0$, а на другой половине ($\pi < \varphi < 2\pi$) — температура T_0.

5.16. Найти решение краевой задачи для уравнения Пуассона в круге $G = \left\{x^2+y^2 < r_0^2\right\}$:

$$\begin{cases} \Delta u = -Axy\,, \\ u\big|_{x^2+y^2=r_0^2} = 0\,. \end{cases}$$

5.17. Найти решение краевой задачи для уравнения Лапласа в кольце $G = \left\{1 < x^2+y^2 < 4\right\}$ (u_1 и u_2 — константы):

$$\begin{cases} \Delta u = 0\,, \\ u\big|_{x^2+y^2=1} = u_1\,, \\ u\big|_{x^2+y^2=4} = u_2\,. \end{cases}$$

5.18. Найти стационарное распределение температуры $u(\vec{r})$ внутри цилиндра с радиусом основания r_0 и высотой h, если к нижнему основанию подводится постоянный тепловой поток q, а боковая поверхность и верхнее основание поддерживаются при нулевой температуре.

5.19. Найти потенциал электростатического поля внутри цилиндра $G = \{x^2 + y^2 < a^2, 0 < z < h\}$, если на его боковой поверхности поддерживается потенциал $U_0\, z$, U_0 — константа, а на торцах задано нулевое электрическое поле.

5.20. Найти потенциал электростатического поля внутри сферы радиуса a, если потенциал сферы имеет вид

$$f(\theta) = \begin{cases} U_0\,, & 0 < \theta < \pi/2\,, \\ 0\,, & \pi/2 < \theta < \pi\,. \end{cases}$$

Ответы и указания к главе 5

5.1.

1) $$u(t,x)=\frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\,e^{-(2k+1)^2t}\,\sin(2k+1)x\,.$$

2) $$u(t,x)=\frac{1}{4}\left(e^{4t}-1\right)+t\,\cos 2x\,.$$

3) $$u(t,x)=\frac{4}{\pi}\,e^{-t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}\,\left(e^{-(2k+1)^2t}-1\right)\cos(2k+1)x\,.$$

4) $$u(t,x)=e^t+\sin t-\cos t+e^{-3t}\,\cos 2x\,.$$

5) $$u(t,x)=\frac{2}{\pi}\left(e^t-1\right)+\cos x-\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1-e^{-(4m^2-1)\,t}}{\left(4m^2-1\right)^2}\,\cos 2mx\,.$$

5.2.

1) $$u(t,x)=-\frac{8}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\,\cos\left[\pi(2k+1)t\right]\sin\left[\pi(2k+1)x\right]\,.$$

2) $$u(t,x)=\operatorname{sh}^2 t-t^2\,\cos 2x\,.$$

3) $$u(t,x)=\cos\frac{x}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+\frac{1}{2})^4}\left(\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)t-1\right)\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x\,.$$

4) $$u(t,x)=\left(\frac{1}{2}-t\cos 2t\right)\sin x+\frac{1}{2\sqrt{3}}\,\sin[2\sqrt{3}t]\,\sin 3x\,.$$

5.3.

1) $$u(t,x)=x+t\sin x+\frac{1}{8}\left(1-e^{-8t}\right)\sin 3x\,.$$

2) $$u(t,x)=x^2+2e^{9t}+(2t-\sin 2t)\cos 3x\,.$$

3) $$u(t,x)=x+t^2+\frac{1}{5}\left(e^{5t}-1\right)\cos x+\frac{1}{3}\left(1-e^{-3t}\right)\cos 3x\,.$$

4) $$u(t,x)=tx^2+x-\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+3}\right)\frac{e^{\,[6-(2k+1)^2]\,t}-1}{6-(2k+1)^2}\cos(2k+1)x\,.$$

5.4.

1) $$u(t,x)=2tx+\left(2e^t-e^{-t}-3te^{-t}\right)\cos x\,.$$

2) $$u(t,x)=t\,(1-x)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(\pi k)^3}\left[e^{-\frac{t}{2}}\left(2\cos\mu_k t+\frac{\sin\mu_k t}{\mu_k}\right)-2\right]\sin\pi kx,$$

где $\mu_k=\sqrt{(\pi k)^2-\frac{1}{4}}$.

3) $$u(t,x)=3+\left(t+t^2\right)x+\left(8+4t-8e^t+5te^t\right)\sin x\,.$$

4) $u(t,x)=\dfrac{1}{\pi}tx+\dfrac{1}{3\pi}t^3\sin x+\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{k=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k\mu_k^2}\left(\dfrac{1}{\mu_k}\sin\mu_k t-t\right)\sin kx\,,$

где $\mu_k=\sqrt{k^2-1}$.

5.5. *Указание.* Для нахождения температуры $u(t,\vec{r})$ необходимо решить смешанную задачу

$$\begin{cases} u_t=a^2\Delta u\,,\\ u|_{\partial G}=0\,,\\ u|_{t=0}=xy(1-x)(1-y)\,. \end{cases}$$

Ответ.

$$u(t,\vec{r})=\left(\frac{2}{\pi}\right)^6\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{e^{-a^2\pi^2\left[(2m+1)^2+(2n+1)^2\right]t}}{(2m+1)^3\,(2n+1)^3}\,\sin[\pi(2m+1)\,x]\sin[\pi(2n+1)\,y]\,.$$

5.6. *Указание.* Направим ось z по оси цилиндра. Условия задачи предполагают, что зависимости температуры от координаты z нет и граничные условия на торцах цилиндра, удаленных на бесконечность, не оказывают влияния на решение. Переходя к полярным координатам (r,φ) : $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, получаем смешанную задачу для температуры $u=u(t,r,\varphi)$:

$$\begin{cases} u_t=a^2\Delta u\,,\\ u_r|_{r=r_0}=q\,,\\ u|_{t=0}=u_0\,. \end{cases}$$

Ответ.

$$u(t,r)=u_0+2qr_0\left[\frac{a^2t}{r_0}+\frac{1}{4}\left(\frac{r^2}{r_0^2}-\frac{1}{2}\right)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\alpha_k\frac{r}{r_0}\right)}{\alpha_k^2\,J_0(\alpha_k)}\,e^{-\left(\frac{a\alpha_k}{r_0}\right)^2t}\right],$$

где α_k — k-й корень уравнения $J_0'(\alpha)=0$.

5.7. *Указание.* Условие конвективного теплообмена на поверхности S имеет вид

$$-k\,\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S=h\,(u-\theta)|_S\ ,$$

где k — коэффициент теплопроводности; h — коэффициент теплообмена; θ — температура окружающей среды. С учетом этого смешанная задача для определения температуры $u = u(t, \vec{r})$ в цилиндре имеет вид

$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta u \,, \\ u_r\big|_{r=1} = 0 \,, \\ u_z\big|_{z=0} = 0 \,, \\ (u_z + \eta u)\big|_{z=l} = 0 \,, \quad \eta = h/k \,, \\ u\big|_{t=0} = u_0 \left(1 - r^2\right) . \end{cases}$$

Ответ.

$$\begin{aligned} u(t, r, z) \;&=\; u_0 \left(1 - 8 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_k r)}{\alpha_k^2 J_0(\alpha_k)} \, e^{-a^2 \alpha_k^2 t} \right) \times \\ &\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta \, l \sqrt{\beta_n^2 + \eta^2 l^2}}{\beta_n \left(\beta_n^2 + \eta l + \eta^2 l^2\right)} \, e^{-\left(\frac{a\beta_n}{l}\right)^2 t} \cos \frac{\beta_n z}{l} \;, \end{aligned}$$

где α_k — k-й корень уравнения $J_0(\alpha) = 0$; β_n — n-й корень уравнения $\operatorname{tg} \beta = \dfrac{\eta \, l}{\beta}$.

5.8. *Указание.* Смешанная задача для определения температуры $u(t, \vec{r})$ имеет вид

$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta u \,, \\ u\big|_{r=r_0} = 0 \,, \\ u\big|_{t=0} = 0 \,. \end{cases}$$

Ответ. $$u(t, r, \theta) = A \cos \theta \left(\frac{r}{r_0} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{j_1\!\left(x_k \frac{r}{r_0}\right)}{x_k \, j_1'(x_k)} \, e^{-\left(\frac{a x_k}{r_0}\right)^2 t} \right),$$

где x_k — k-й корень уравнения $j_1(x) = 0$.

5.9. $u(t, x, y) = 3 \cos(\sqrt{5} a t) \, \sin x \, \sin 2y + \cos(5at) \, \sin 3x \, \sin 4y$.

5.10. *Указание.* Смешанная задача имеет вид

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u + \dfrac{p_0}{\rho} \sin \omega t \,, \\ u\big|_{r=r_0} = 0 \,, \\ u\big|_{t=0} = 0 \,, \\ u_t\big|_{t=0} = 0 \,, \end{cases}$$

где ρ — поверхностная плотность мембраны.

Ответ. Нерезонансный случай: пусть $\omega \neq \omega_k = \dfrac{a x_k}{r_0}$, где x_k — k-й корень уравнения $J_0(x) = 0$, тогда

$$u(t,r) = 2\,\frac{p_0}{\rho}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\omega_k \sin\omega t - \omega\sin\omega_k t)\,J_0\Big(x_k\dfrac{r}{r_0}\Big)}{\omega_k\,(\omega_k^2-\omega^2)\,x_k J_1(x_k)}\,.$$

Резонансный случай: при $\omega = \omega_n$ получим

$$\begin{aligned} u(t,r) \;=\; & -\frac{p_0}{\rho}\,\frac{(t\,\omega_n\cos\omega_n t - \sin\omega_n t)\,J_0\Big(x_n\dfrac{r}{r_0}\Big)}{\omega_n^2\,x_n\,J_1(x_n)} + \\ & + 2\,\frac{p_0}{\rho}\sum_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}\frac{(\omega_k\sin\omega_n t - \omega_n\sin\omega_k t)\,J_0\Big(x_k\dfrac{r}{r_0}\Big)}{\omega_k\,(\omega_k^2-\omega_n^2)\,x_k J_1(x_k)}\,. \end{aligned} \tag{5.45}$$

В этом случае амплитуда колебаний возрастает линейно по t.

5.11. $u(t,r,\theta) = 2A\cos\theta\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{j_1(x_k r)}{x_k^3\,j_0(x_k)}\,(\cos x_k t - 1)$,

где x_k — k-й корень уравнения $j_1(x) = 0$.

5.12. *Указание.* Возникающие в сосуде акустические колебания газа описываются потенциалом скоростей $u(t,\vec{r})$: $\vec{\nabla}u(t,\vec{r}) = \vec{v}(t,\vec{r})$. В момент времени $t = 0$ все частицы имеют одинаковую скорость $\vec{v}_0$. Направляя ось z параллельно $\vec{v}_0$, получим $u|_{t=0} = v_0 z$. На границе сосуда радиальная компонента скорости равна нулю. Следовательно, смешанная задача для $u(t,\vec{r})$ имеет вид

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta u\,,\\ u_r|_{r=1} = 0\,,\\ u|_{t=0} = v_0 r\cos\theta\,,\\ u_t|_{t=0} = 0\,. \end{cases}$$

Ответ. $u(t,r,\theta) = 2v_0\cos\theta\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{j_1(x_k r)}{(x_k^2-2)\,j_1(x_k)}\,\cos x_k t$,

где x_k — k-й корень уравнения $j_1'(x) = 0$.

5.13. $u(x,y) = \dfrac{2v_0}{b}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\omega_k(a-x)\,\operatorname{sh}\omega_k y}{\omega_k\,\operatorname{sh}\omega_k a}$, где $\omega_k = \dfrac{\pi(2k+1)}{b}$.

5.14. *Указание.* Краевая задача для определения $u(x,y)$ имеет вид

$$\begin{cases} \Delta u = -q/k\,, \\ u|_{x=0} = 0\,, \\ u|_{y=0} = 0\,, \\ u_x|_{x=a} = 0\,, \\ u_y|_{y=b} = 0\,. \end{cases}$$

Здесь k — коэффициент теплопроводности внутри пластины. Для выбора базиса возможны три варианта: из задачи на собственные значения по переменной x, по переменной y или по обеим переменным.
Ответ.

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{2q}{ka}\sum_{m=0}^{\infty}\left[1-\frac{\operatorname{ch}\omega_m(y-b)}{\operatorname{ch}\omega_m b}\right]\frac{\sin\omega_m x}{\omega_m^3} = \\ &= \frac{2q}{kb}\sum_{n=0}^{\infty}\left[1-\frac{\operatorname{ch}\nu_n(x-a)}{\operatorname{ch}\nu_n a}\right]\frac{\sin\nu_n y}{\nu_n^3} = \\ &= \frac{4q}{kab}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\sin\omega_m x\,\sin\nu_n y}{\omega_m\nu_n\left(\omega_m^2+\nu_n^2\right)}\,. \end{aligned}$$

5.15. *Указание.* Функцию $u(r,\varphi)$ можно найти либо в виде ряда, используя формулы (5.39) и (5.43), либо по формуле Пуассона (5.44).

Ответ.

$$\begin{aligned} u(r,\varphi) &= -\frac{4T_0}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{2m+1}\frac{\sin(2m+1)\varphi}{2m+1} = \\ &= -\frac{2T_0}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{2rr_0}{r_0^2-r^2}\sin\varphi\right)\,. \end{aligned}$$

5.16. $u(r,\varphi) = \dfrac{Ar^2}{24}\left(r_0^2-r^2\right)\sin 2\varphi$.

5.17. $u(r) = u_1 + (u_2-u_1)\dfrac{\ln r}{\ln 2}$.

5.18. *Указание.* Функция $u(\vec{r})$ является решением краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta u = 0\,, \\ -ku_z|_{z=0} = q\,, \\ u|_{r=r_0} = 0\,, \\ u|_{z=h} = 0\,, \end{cases}$$

где k — коэффициент теплопроводности.

Ответ. $$u(r,z) = \frac{2qr_0}{k}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\dfrac{\alpha_k(h-z)}{r_0}}{\operatorname{ch}\dfrac{\alpha_k h}{r_0}}\,\frac{J_0\left(\dfrac{\alpha_k r}{r_0}\right)}{\alpha_k^2\,J_1(\alpha_k)}\,,$$

где α_k — k-й корень уравнения $J_0(\alpha)=0$.

5.19. *Указание.* Потенциал $u(\vec{r})$ является решением краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta u = 0\,, \\ u|_{r=a} = U_0\,z\,, \\ u_z|_{z=0} = 0\,, \\ u_z|_{z=h} = 0\,. \end{cases}$$

Ответ. $u(r,z) = \dfrac{U_0 h}{2} - \dfrac{4U_0}{h}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{I_0(\omega_k r)}{I_0(\omega_k a)}\,\frac{\cos\omega_k z}{\omega_k^2}$, где $\omega_k = \dfrac{\pi(2k+1)}{h}$.

5.20. *Указание.* Разлагая неизвестную функцию $u = u(r,\theta,\varphi)$ в ряд Фурье по сферическим гармоникам и оставляя только ограниченные при $r=0$ радиальные функции, получим

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^l\sum_{m=-l}^{l}A_{lm}\,Y_{lm}(\theta,\varphi)\,.$$

Константы A_{lm} необходимо определить, используя граничные условия. В силу аксиальной симметрии задачи (граничные условия не зависят от угла φ), отличны от нуля только A_{l0}:

$$A_{l0} = \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi} f(\theta)\,Y_{l0}(\theta,\varphi)\,\sin\theta d\theta d\varphi = \sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{2l+1}{2}}\,U_0\int_0^{\pi/2}P_l(\cos\theta)\sin\theta d\theta\,.$$

Далее следует использовать рекуррентное соотношение для полиномов Лежандра:

$$P_l(x) = \frac{1}{2l+1}\left(P'_{l+1}(x) - P'_{l-1}(x)\right)\,,\quad P_{-1}(x) = 0\,,$$

и частные значения полиномов Лежандра:

$$P_l(1) = 1\,,\quad P_{2l+1}(0) = 0\,,\quad P_{2l}(0) = (-1)^l\frac{(2l)!}{2^{2l}(l!)^2}\,.$$

Ответ.

$$u(r,\theta) = \frac{U_0}{2} + U_0\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\,\frac{4l+3}{l+1}\,\frac{(2l)!}{2^{2l+2}(l!)^2}\left(\frac{r}{a}\right)^{2l+1}P_{2l+1}(\cos\theta)\,.$$

Глава 6

Обобщенные функции

В математической физике обобщенные функции (ОФ) возникают совершенно естественным образом. Действительно, в основе аналитических методов решения задач математической физики лежит теорема о разложении в ряд Фурье, которая позволяет свести задачу о нахождении искомого решения к нахождению его коэффициентов Фурье. Фактически наряду с известными способами задания функции — явным, неявным и параметрическим — теорема Фурье дает еще один способ, а именно, посредством задания набора ее коэффициентов Фурье, которые очень просто выражаются через исходную функцию. Так, например, для функции $f(x) \in L_2[a,b]$ коэффициенты Фурье

$$c_k = (f, \varphi_k) = \int_a^b f(x)\,\varphi_k(x)\,dx\ , \tag{6.1}$$

где $\{\varphi_k(x)\}$ — ортонормированный базис. При этом функции $f(x)$ однозначно соответствует счетный набор чисел c_k (обратное утверждение, как известно, неверно). Аналог этого в конечномерном случае — задание вектора посредством указания его декартовых координат (проекций вектора на базисные орты). Элементарные алгебраические операции (сложение и умножение на числа) совершенно естественно переносятся с функций на коэффициенты Фурье.

Попытаемся посмотреть на коэффициенты Фурье с другой, более общей точки зрения. Фактически формула (6.1) для вычисления коэффициентов Фурье определяет некоторое правило, по которому каждой функции базиса однозначно соответствует определенное число:

$$\varphi_k(x) \xrightarrow{\ f\ } c_k = (f, \varphi_k) = \int_a^b f(x)\,\varphi_k(x)\,dx\,. \tag{6.2}$$

Такое правило в математике принято называть *функционалом.* Таким образом, функцию можно задать посредством задания некоторого функционала, в данном случае линейного, на функциях базиса. Это утверждение есть просто изменение терминологии, и само по себе не дает ничего нового.

Принципиально важен следующий шаг. На данном этапе областью определения функционала является множество функций, определенных на фиксированном интервале и образующих там ортонормированный базис. Оба ограничения весьма неудобны, так как в различных задачах приходится иметь дело с разными интервалами и разными базисами. Формально снять эти ограничения несложно, нужно просто расширить область определения функционала, т. е., например, определить его тем же выражением на всей вещественной оси и на достаточно широком множестве функций:

$$\varphi(x) \xrightarrow{f} (f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \varphi(x)\, dx\,. \tag{6.3}$$

При этом, однако, возникает проблема существования интеграла от произведения функций (попросту говоря, чем «хуже» свойства функции $f(x)$, тем «лучше» должны быть функций $\varphi(x)$). К счастью, компромисс возможен, и множество функций, образующих область определения функционала, называют *пространством основных функций* (точное определение будет дано далее).

И еще более смелый шаг — откажемся от определения функционала только через интеграл. Будем определять в общем случае функционал (f, φ) просто как заданное правило, сопоставляющее всякой основной функции $\varphi(x)$ некоторое число:

$$\varphi(x) \xrightarrow{f} (f, \varphi)\ , \tag{6.4}$$

однако потребуем, чтобы, как и в случае интеграла, функционал был линейным и непрерывным (эти понятия будут строго определены далее). Теперь появляется возможность наравне с обычными функциями рассматривать и новые объекты. Обозначение для функционала (f, φ), совпадающее с обозначением скалярного произведения, просто дань традиции, и по этой же причине множество всех линейных непрерывных функционалов называют пространством ОФ.

В итоге мы перешли от обычных функций к ОФ. Здесь уместна аналогия: переход от вещественных $x \in \mathbb{R}$ чисел к комплексным $z \in \mathbb{C}$.

Каждому x естественно соответствует z, а именно то, для которого $\operatorname{Re} z = x$ и $\operatorname{Im} z = 0$. Обратное неверно: числу z с $\operatorname{Im} z \neq 0$ нет соответствия в $\mathbb{R}$. Далее, для комплексных чисел можно определить целый ряд действий, привычных для вещественных чисел, причем так, что в частном случае вещественных чисел, т. е. если $\operatorname{Im} z = 0$, старые правила остаются неизменными. При этом некоторые действия (например, сложение) выглядят вполне естественно, а другие (например, умножение и деление) по форме выглядят весьма непривычно. Более того, некоторые понятия (например, понятие неравенства чисел) вообще не имеют аналога для комплексных чисел.

То же происходит и при переходе от обычных функций к ОФ: некоторые действия (сложение и умножение на числа) переносятся вполне естественным образом, другие же (например, операция дифференцирования) вводится весьма необычным образом, а третьи (например, умножение), вообще говоря, не определены для ОФ. В итоге, используя эти правила действий, удается перейти от УМФ для обычных функций к уравнениям для ОФ и, самое главное, указать новые общие методы решения краевых задач математической физики. В настоящее время теория ОФ общепризнанно является основой современной математической физики.

Важно отметить, что зачатки понятия ОФ появились в самом начале создания математического аппарата физики. Действительно, некоторые активно используемые в физических теориях понятия, такие, как точечный заряд, материальная точка, мгновенный импульс и т. п., не могут быть описаны обычными функциями.

Рассмотрим, например, материальную точку с массой $m = 1$ в начале координат, $\vec{r} = 0$, и поставим задачу: найти функцию $\rho(\vec{r})$, которая описывает это распределение массы. Для $\rho(\vec{r})$ естественно потребовать, чтобы

$$\int_V \rho(\vec{r})\, d\vec{r} = \begin{cases} 1\,, & \text{если } 0 \in V\,, \\ 0\,, & \text{если } 0 \notin V\,. \end{cases} \tag{6.5}$$

Попробуем, учитывая определение материальной точки, такой вариант:

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} C\,, & \text{если } \vec{r} = 0\,, \\ 0\,, & \text{если } \vec{r} \neq 0\,. \end{cases} \tag{6.6}$$

Но для такой функции $\int_V \rho(\vec{r})\, d\vec{r} = 0$ при любом V и любом выборе C.

В качестве другого варианта попробуем сначала распределить массу равномерно внутри шара B_ε радиуса ε, а затем найти искомое распределение, вычисляя предел $\varepsilon \to 0$. Тогда

$$\rho_\varepsilon(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi\varepsilon^3}\,, & \text{если } |\vec{r}| < \varepsilon \\ 0\,, & \text{если } |\vec{r}| \geqslant \varepsilon \end{cases} \Rightarrow \int_V \rho_\varepsilon(\vec{r})\,d\vec{r} = 1\,, \quad \text{если } B_\varepsilon \subset V. \tag{6.7}$$

Однако при $\varepsilon \to 0$ получим

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \infty\,, & \text{если } \vec{r} = 0 \\ 0\,, & \text{если } \vec{r} \neq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \int_V \rho(\vec{r})\,d\vec{r} = 0\,, \tag{6.8}$$

где интеграл понимается как несобственный, если $0 \in V$.

Теперь вместо отыскания функции попытаемся найти функционал

$$(f, \varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0} (f_\varepsilon, \varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{|\vec{r}|<\varepsilon} \frac{3}{4\pi\varepsilon^3}\,\varphi(\vec{r})\,d\vec{r} = \tag{6.9}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \Bigg\{ \int\limits_{|\vec{r}|<\varepsilon} \frac{3}{4\pi\varepsilon^3}\,(\varphi(\vec{r}) - \varphi(0))\,d\vec{r} + \varphi(0) \int\limits_{|\vec{r}|<\varepsilon} \frac{3}{4\pi\varepsilon^3}\,d\vec{r} \Bigg\}\,.$$

Пусть функция $\varphi(\vec{r})$ непрерывна в окрестности $\vec{r} = 0$, тогда по теореме о среднем

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \int\limits_{|\vec{r}|<\varepsilon} (\varphi(\vec{r}) - \varphi(0))\,d\vec{r} = \lim_{\varepsilon \to 0} \Big(\varphi(\vec{\xi}) - \varphi(0) \Big) = 0\,, \quad |\vec{\xi}| < \varepsilon\,. \tag{6.10}$$

Следовательно, $(f, \varphi) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} (f_\varepsilon, \varphi) = \varphi(0)$. Определим функционал δ – дельта-функцию Дирака:

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0)\,. \tag{6.11}$$

Этот функционал и следует сопоставить плотности материальной точки; для расчета различных свойств, связанных с плотностью, необходимо вычислять значение функционала δ на соответствующих функциях $\varphi(\vec{r})$.

В этой главе рассмотрены способы задания ОФ, простейшие действия с ними, а также некоторые применения ОФ для решения краевых задач математической физики.

6.1. Действия над обобщенными функциями

Функция $\varphi(x)$, определенная в $\mathbb{R}^n$, называется *финитной*, если существует такая ограниченная область $U \in \mathbb{R}^n$, что $\varphi(x) = 0$ при

$x \notin \overline{U}$. Для непрерывной функции $\varphi(x)$ замыкание множества точек, где $\varphi(x) \neq 0$, называется *носителем* $\varphi(x)$: $\operatorname{spt}\varphi = \overline{A}_\varphi$, $A_\varphi = \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) \neq 0\}$. Носитель финитной функции ограничен. Будем называть *пространством основных функций* $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ множество всех финитных и бесконечно дифференцируемых в $\mathbb{R}^n$ функций, в котором сходимость определена следующим образом: $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ в $\mathcal{D}$ при $n \to \infty$, если носители всех $\varphi_n(x)$ и $\varphi(x)$ содержатся в некоторой ограниченной области $U \in \mathbb{R}^n$ и $\partial^\alpha \varphi_n(x) \rightrightarrows \partial^\alpha \varphi(x)$ на U при $n \to \infty$, $|\alpha| = 0, 1, 2 \ldots$. Здесь $\partial^\alpha \equiv \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} x_1 \ldots \partial^{\alpha_n} x_n}$ — оператор частной производной порядка $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Обозначим $\mathcal{D}(G)$ множество всех функций из $\mathcal{D}$, носитель которых содержится в области $G \subset \mathbb{R}^n$.

Обобщенной функцией (ОФ) $f \in \mathcal{D}'$ называется линейный непрерывный функционал на $\mathcal{D}$:

1. $f \in \mathcal{D}' : \ \varphi(x) \in \mathcal{D} \ \to \ (f, \varphi) \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$;
2. $(f, \alpha\,\varphi + \beta\,\psi) = \alpha\,(f, \varphi) + \beta\,(f, \psi), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C}),\ \forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}$;
3. $\forall\, \varphi_k \to 0$ в $\mathcal{D}$ при $k \to \infty \quad \Rightarrow \quad (f, \varphi_k) \to 0$ при $k \to \infty$.

Пусть $f(x)$ — произвольная локально интегрируемая функция, т. е. функция, интегрируемая на любой ограниченной области $U \in \mathbb{R}^n$. Тогда *регулярная* ОФ $f \in \mathcal{D}'$ определяется формулой

$$(f, \varphi) \overset{\text{def}}{=} \int f(x)\,\varphi(x)\,dx\,, \quad \forall\,\varphi \in \mathcal{D}\,. \tag{6.12}$$

Формально интегрирование в (6.12) производится по всему $\mathbb{R}^n$ (для краткости записи пределы не указываются), но фактически — по некоторой ограниченной области, поскольку φ по определению финитна. Например, ОФ

$$\begin{aligned} &(x, \varphi) = \int_{-R}^{R} x\,\varphi(x)\,dx,\ \forall\,\varphi \in \mathcal{D}, \\ &(\theta, \varphi) = \int_{-R}^{R} \theta(x)\,\varphi(x)\,dx = \int_0^R \varphi(x)\,dx,\ \forall\,\varphi \in \mathcal{D}\ \ — \end{aligned} \tag{6.13}$$

регулярные. ОФ не являющиеся регулярными, называются *сингулярными*. Примерами сингулярных ОФ являются *δ-функция Дирака*:

$$(\delta, \varphi) \overset{\text{def}}{=} \varphi(0)\,, \quad \forall\,\varphi \in \mathcal{D}\,, \tag{6.14}$$

а также функционал
$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}\,,\varphi\right) \overset{\text{def}}{=} \text{v. p.}\int \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \int_{-R}^{R}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx\ , \quad \forall\,\varphi\in\mathcal{D}\ . \tag{6.15}$$

Последовательность регулярных ОФ может сходиться в $\mathcal{D}'$ к сингулярной ОФ. Например, справедлива следующая

Лемма. Пусть $f_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{\varepsilon}\,f\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$, где $f(x)$ — локально интегрируемая на $\mathbb{R}$ функция, такая, что $f(x)\geqslant 0$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$. Тогда $f_\varepsilon(x)\to\delta(x)$ в $\mathcal{D}'$, $\varepsilon\to 0$.

Доказательство. Возьмем произвольные $\varphi(x)\in\mathcal{D}$ и $\delta>0$. Тогда
$$|\,(f_\varepsilon,\varphi)-\varphi(0)| = \left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\varepsilon}\,f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\varphi(x)\,dx - \varphi(0)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt\right| = \begin{bmatrix} \dfrac{x}{\varepsilon}=t \\ \dfrac{dx}{\varepsilon}=dt \end{bmatrix} =$$
$$= \left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,[\varphi(t\varepsilon)-\varphi(0)]\,dt\right| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,|\varphi(t\varepsilon)-\varphi(0)|\,dt\ .$$

Разобьем последний интеграл на три части:
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,|\varphi(t\varepsilon)-\varphi(0)|\,dt = \left(\int\limits_{-\infty}^{-C} + \int\limits_{-C}^{C} + \int\limits_{C}^{+\infty}\right) f(t)\,|\varphi(t\varepsilon)-\varphi(0)|\,dt\ .$$

Функция $\varphi(x)$ ограничена, так как непрерывна и финитна, и пусть $M=\max\limits_{x\in\mathbb{R}}|\varphi(x)|$. Пользуясь сходимостью $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$, можно подобрать константу C так, что
$$\left(\int\limits_{-\infty}^{-C} + \int\limits_{C}^{+\infty}\right) f(t)\,|\varphi(t\varepsilon)-\varphi(0)|\,dt \ \leqslant\ 2M\left(\int\limits_{-\infty}^{-C} + \int\limits_{C}^{+\infty}\right) f(t)\,dt\ <\ \frac{\delta}{2}\ .$$

Поскольку $\varphi(x)$ непрерывна, то можно указать такое $\varepsilon>0$, что для всех $t\in[-C,C]$ справедливо $|\varphi(t\varepsilon)-\varphi(0)|<\dfrac{\delta}{2}$. Тогда
$$\int\limits_{-C}^{C} f(t)\,|\varphi(t\varepsilon)-\varphi(0)|\,dt\ <\ \frac{\delta}{2}\int\limits_{-C}^{C} f(t)\,dt\ \leqslant\ \frac{\delta}{2}\ .$$

В итоге для произвольных $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ и $\delta > 0$ при определенном выборе $\varepsilon > 0$

$$|\,(f_\varepsilon, \varphi) - \varphi(0)| < \delta\ ,$$

что и означает $f_\varepsilon(x) \to \delta(x)$ в $\mathcal{D}'$, $\varepsilon \to 0$.

ОФ f и g из $\mathcal{D}'$ *равны в области* $G \subset \mathbb{R}^n$, если

$$(f, \varphi) = (g, \varphi)\ , \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(G)\ . \tag{6.16}$$

В частности, ОФ $f \in \mathcal{D}'$ *равна нулю в области* $G \subset \mathbb{R}^n$, если $(f, \varphi) = 0$, $\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(G)$. *Носителем ОФ* $f \in \mathcal{D}'$ называется замыкание множества точек $x \in \mathbb{R}^n$, в любой окрестности которых $f \neq 0$. ОФ $f \in \mathcal{D}'$ называется *финитной*, если ее носитель ограничен.

Произведением $f \in \mathcal{D}'$ и $a(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ называется ОФ, действующая по правилу

$$(a\, f, \varphi) \overset{\text{def}}{=} (f, a\,\varphi)\ , \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}\ . \tag{6.17}$$

Для ОФ определена линейная замена переменных $(n = 1)$:

$$(f(ax+b)\,, \varphi(x)) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{|a|}\left(f(y)\,, \varphi\left(\frac{y-b}{a}\right)\right)\ , \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}\ , \tag{6.18}$$

где $a \neq 0$.

6.1. Вычислить в $\mathcal{D}'$ пределы функциональных последовательностей при $\varepsilon \to +0$:

1) $f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1/(2\varepsilon)\,, & |x| < \varepsilon, \\ 0\,, & |x| \geqslant \varepsilon; \end{cases}$

2) $\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2}\,;$

3) $\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\, e^{-\frac{x^2}{\varepsilon}}\,;$

4) $\dfrac{\varepsilon}{x^2}\, \sin^2 \dfrac{x}{\varepsilon}\,;$

5) $\dfrac{1}{x}\, \sin \dfrac{x}{\varepsilon}\,;$

6) $\dfrac{1}{x \pm i\varepsilon}\,.$

6.2. Вычислить:

1) $x\,\delta(x)\,;$

2) $\cos x\,\delta(x)\,;$

3) $x\,\mathcal{P}\dfrac{1}{x}\,;$

4) $x^n\,\mathcal{P}\dfrac{1}{x}\,, \quad n \geqslant 1.$

6.3. Вычислить значения функционалов на функциях $\varphi(x) \in \mathcal{D}$:

1) $\delta(-x)$;

2) $\delta(x+1)$;

3) $\delta(3x+5)$;

4) $x^2\delta(1-2x)$;

5) $\delta(a\,x)$, $a \in \mathbb{R}$;

6) $a(x)\,\delta(x)$, $a(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Производной ОФ $f \in \mathcal{D}'$ называется ОФ $f' \in \mathcal{D}'$, определенная правилом

$$(f', \varphi) \overset{\text{def}}{=} -(f, \varphi') \ , \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}\,. \tag{6.19}$$

Каждая ОФ имеет производные любого конечного порядка m; $f^{(m)} \in \mathcal{D}'$ определяется формулой

$$\left(f^{(m)}, \varphi\right) \overset{\text{def}}{=} (-1)^m \left(f, \varphi^{(m)}\right) \ , \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}\,. \tag{6.20}$$

В случае частных производных эта формула имеет вид

$$(\partial^\alpha f, \varphi) \overset{\text{def}}{=} (-1)^{|\alpha|}\,(f, \partial^\alpha \varphi)\,, \tag{6.21}$$

где $|\alpha|$ — порядок производной.

В некоторых случаях выражению для производной ОФ можно придать более удобный вид. Рассмотрим одномерный случай ($n = 1$) и функцию $f(x)$ — непрерывно дифференцируемую всюду, кроме точки $x = x_0$, в которой она имеет разрыв первого рода. Эта функция локально интегрируемая, и ей сопоставляется регулярная ОФ по формуле

$$(f, \varphi) = \int\limits_{-R}^{R} f(x)\,\varphi(x)\,dx \ \overset{\text{def}}{=} \ \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int\limits_{-R}^{x_0-\varepsilon_1} f(x)\,\varphi(x)\,dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int\limits_{x_0+\varepsilon_2}^{R} f(x)\,\varphi(x)\,dx\,.$$

Функция $f'(x)$ определена всюду, кроме точки x_0. Она также локально интегрируема; обозначим соответствующую ей регулярную ОФ $\{f'\}$:

$$(\{f'\}, \varphi) = \int\limits_{-R}^{R} f'(x)\,\varphi(x)\,dx = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int\limits_{-R}^{x_0-\varepsilon_1} f'(x)\,\varphi(x)\,dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int\limits_{x_0+\varepsilon_2}^{R} f'(x)\,\varphi(x)\,dx\,.$$

Покажем, что ОФ f' не совпадает с регулярной ОФ $\{f'\}$:

$$(f', \varphi) = -(f, \varphi') = -\lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int\limits_{-R}^{x_0-\varepsilon_1} f(x)\,\varphi'(x)\,dx - \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int\limits_{x_0+\varepsilon_2}^{R} f(x)\,\varphi'(x)\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \Big[-f(x)\,\varphi(x)\,\Big|_{-R}^{x_0-\varepsilon_1} + \int\limits_{-R}^{x_0-\varepsilon_1} f'(x)\,\varphi(x)\,dx \Big] +$$

$$+ \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \Big[-f(x)\,\varphi(x)\,\Big|_{x_0+\varepsilon_2}^{R} + \int\limits_{x_0+\varepsilon_2}^{R} f'(x)\,\varphi(x)\,dx \Big] =$$

$$= \lim_{\varepsilon_2 \to 0} [f(x_0+\varepsilon_2)\,\varphi(x_0+\varepsilon_2)] - \lim_{\varepsilon_1 \to 0} [f(x_0-\varepsilon_1)\,\varphi(x_0-\varepsilon_1)] + (\{f'(x)\}, \varphi) =$$

$$= (\{f'(x)\}, \varphi(x)) + \varphi(x_0)\,[f(x_0+0) - f(x_0-0)] =$$

$$= (\{f'(x)\}, \varphi(x)) + [f]_{x_0}\,(\delta(x-x_0), \varphi(x)) \ ,$$

где $[f]_{x_0} = f(x_0+0) - f(x_0-0)$ — скачок функции $f(x)$ в точке $x = x_0$. Следовательно,

$$f'(x) = \{f'(x)\} + [f]_{x_0}\delta(x-x_0) \ . \qquad (6.22)$$

Эта формула, очевидно, обобщается на конечное число точек разрыва первого рода, а также допускает обобщение на случай $n > 1$ [4].

Также можно показать, что при дифференцировании ОФ выполняется аналог правила Лейбница для дифференцирования произведения:

$$(a \cdot f)' = a' \cdot f + a \cdot f' \ , \qquad (6.23)$$

где $a(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $f \in \mathcal{D}'$.

6.4. Вычислить:

1) $\theta'(x)$; 2) $\theta'(x_0 - x)$;

3) $|x|'$; 4) $|x|''$;

5) $[\theta(x)\,\sin x]'$; 6) $[\theta(x)\,\cos x]'$;

7) $(\theta(a - |x|))'$, $a > 0$; 8) $(\mathrm{sign}\,\sin x)'$;

9) $(|x|\,\sin x)'''$; 10) $(|x|\,\cos x)'''$;

11) $x\,\delta^{(m)}(x)$, $m = 1, 2, \ldots$; 12) $x^k \delta^{(m)}(x)$, $m = 0, 1, \ldots k{-}1$.

6.5. Доказать:

1) $|\sin x|'' + |\sin x| = 2\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x-k\pi)\,;$

2) $\dfrac{1}{2\pi}\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ikx} = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x-2k\pi)\,.$

Пусть для функций $f(x)$ и $g(x)$, локально интегрируемых в $\mathbb{R}^n$, функция $h(x) = \displaystyle\int |f(y)\,g(x-y)|\,dx$ также локально интегрируема. Тогда *сверткой* функций $f(x)$ и $g(x)$ называется функция

$$(f*g)\,(x) = \int f(y)\,g(x-y)\,dx = \int g(y)\,f(x-y)\,dx = (f*g)\,(x)\;.$$

Чтобы дать корректное определение свертки ОФ, необходимо ввести понятие последовательности $\{\eta_k(x)\}$ функций из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, *сходящейся к* 1 в $\mathbb{R}^n$. Будем говорить, что $\eta_k(x) \to 1$ в $\mathbb{R}^n$ при $k\to\infty$, если

а) для любого шара U_R найдется такой номер N, что $\eta_k(x) = 1$ для всех $x \in U_R$ и $k \geqslant N$;

б) $\{\partial^\alpha \eta_k(x)\}$ равномерно ограничены: $|\partial^\alpha \eta_k(x)| \leqslant C_\alpha$ при $k = 1, 2, \ldots$ для всех α.

Выберем любую последовательность $\eta_k(x,y) \to 1$ в $\mathbb{R}^{2n}$ при $k\to\infty$, и пусть ОФ $f(x)$ и $g(x)$ из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ таковы, что для любой $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ предел числовой последовательности $(f(x)\cdot g(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y))$ при $k\to\infty$ существует и не зависит от выбора $\{\eta_k\}$. *Сверткой* $f*g$ называется функционал

$$(f*g,\varphi) = (f(x)\cdot g(y), \varphi(x+y)) = \lim_{k\to\infty}\,(f(x)\cdot g(y), \eta_k(x,y)\,\varphi(x+y))\,.$$

Свойства свертки:

1. Свертка коммутативна: $f*g = g*f$ (но в общем случае свертка не ассоциативна).

2. Свертка линейна: $(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)*g = \lambda_1\,(f_1*g) + \lambda_2\,(f_2*g)$ для любых $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ (но в общем случае свертка не непрерывна).

3. Если свертка $f*g$ существует, то

$$\partial^\alpha\,(f*g) = \partial^\alpha f*g = f*\partial^\alpha g\;.$$

Достаточные условия существования свертки:

1. Если f — произвольная, а g — финитная ОФ из $\mathcal{D}'$, то свертка $f * g$ существует в $\mathcal{D}'$.

2. Пусть $\mathcal{D}'_+$ — множество ОФ из $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, равных нулю при $x < 0$. Если $f, g \in \mathcal{D}'_+$, то их свертка существует и принадлежит $\mathcal{D}'_+$.

6.6. Доказать:

1) $\delta * f = f$;

2) $\delta(x-a) * f(x) = f(x-a)$;

3) $\delta^{(m)} * f = f^{(m)}$;

4) $\delta^{(m)}(x-a) * f(x) = f^{(m)}(x-a)$.

6.7. Вычислить в $\mathcal{D}'$ (параметр $a > 0$):

1) $\theta(x) * \theta(x)$;

2) $\theta(x) * \theta(x)\, x^2$;

3) $e^{-ax^2} * xe^{-ax^2}$;

4) $\theta(x)\, x^2 * \theta(x) \sin x$;

5) $e^x \delta(t) * \dfrac{\theta(t)}{2a\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}$;

6) $\theta(x)\, \delta(t) * \dfrac{\theta(t)}{2\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}}$;

7) $\theta(at - |x|) * [\theta(t) \cdot \delta(x)]$;

8) $\theta(at - |x|) * [\theta(x) \cdot \delta(t)]$.

6.2. Фундаментальные решения линейных дифференциальных операторов

Обобщенным решением в области $G \subset \mathbb{R}^n$ линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$\hat{L}(\partial)\, u \equiv \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha\, \partial^\alpha u = f(x)\,, \qquad (6.24)$$

где $f \in \mathcal{D}'$ — заданная ОФ (свободный член), называется всякая ОФ u, удовлетворяющая этому уравнению в обобщенном смысле:

$$(\hat{L}(\partial)\, u\,, \varphi\,) = (f, \varphi) \quad , \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(G)\ . \tag{6.25}$$

Фундаментальным решением оператора $\hat{L}(\partial)$ называется любая ОФ $\mathcal{E}$, удовлетворяющая уравнению

$$\hat{L}(\partial)\, \mathcal{E} = \delta(x)\ . \tag{6.26}$$

Фундаментальное решение $\mathcal{E}$ определено с точностью до произвольного решения однородного уравнения.

Для уравнения (6.24) справедлива следующая
Основная теорема. Пусть f такова, что свертка $\mathcal{E} * f$ существует в $\mathcal{D}'$. Тогда

$$u = \mathcal{E} * f \tag{6.27}$$

является решением уравнения (6.24), и это решение единственно в классе тех ОФ u, для которых существует свертка $u * \mathcal{E}$.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что для дифференциального оператора

$$\hat{L} = \frac{d^m}{dt^m} + a_1 \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} + \ldots + a_m \tag{6.28}$$

фундаментальное решение из $\mathcal{D}'_+$ можно взять в виде $\mathcal{E}(t) = \theta(t)\, Z(t)$, где функция $Z(t)$ является решением задачи Коши:

$$\begin{cases} \hat{L}\, Z(t) = 0\,, \\ Z(0) = Z'(0) = \ldots = Z^{(m-2)}(0) = 0\ , \quad Z^{(m-1)}(0) = 1\ . \end{cases} \tag{6.29}$$

6.8. Найти фундаментальные решения в $\mathcal{D}'_+$ следующих операторов:

1) $\dfrac{d}{dt} \pm a\,;$ 2) $\dfrac{d^2}{dt^2} + a^2\,;$

3) $\dfrac{d^2}{dt^2} - a^2\,;$ 4) $\dfrac{d^2}{dt^2} + 4\dfrac{d}{dt}\,;$

5) $\dfrac{d^2}{dt^2} - 4\dfrac{d}{dt} + 1\,;$ 6) $\dfrac{d^2}{dt^2} + 3\dfrac{d}{dt} + 2\,.$

6.9. Доказать, что для оператора Лапласа $\Delta = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ фундаментальными решениями являются функции:

1) в $\mathbb{R}^2$: $\mathcal{E}(\vec{r}) = \dfrac{1}{2\pi} \ln r$;

2) в $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{E}(\vec{r}) = -\dfrac{1}{4\pi r}$.

6.10. Пусть ρ – финитная абсолютно интегрируемая функция в $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, носитель которой содержится в области G. Показать, что

1) в $\mathbb{R}^3$ *объемный потенциал* $V_3 = \dfrac{1}{r} * \rho = \displaystyle\int_G \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\, d\vec{r}\,'$ удовлетворяет уравнению Пуассона:

$$\Delta V_3 = -4\pi\rho \; ;$$

2) в $\mathbb{R}^2$ *потенциал площади* $V_2 = \ln\dfrac{1}{r} * \rho = \displaystyle\int_G \rho(\vec{r}\,') \ln\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\, d\vec{r}\,'$ удовлетворяет уравнению Пуассона:

$$\Delta V_2 = -2\pi\rho \; .$$

6.11. Доказать, что для оператора Гельмгольца $\hat{L} = \Delta + k^2$ фундаментальными решениями являются функции:

1) в $\mathbb{R}^1$: $\mathcal{E}(x) = -\dfrac{i}{2k}\, e^{ik|x|}$, $\quad \bar{\mathcal{E}}(x) = \dfrac{i}{2k}\, e^{-ik|x|}$;

2) в $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{E}(\vec{r}) = -\dfrac{1}{4\pi r}\, e^{ikr}$, $\quad \bar{\mathcal{E}}(\vec{r}) = -\dfrac{1}{4\pi r}\, e^{-ikr}$.

6.12. Доказать, что для оператора теплопроводности $\hat{L} = \dfrac{\partial}{\partial t} - a^2\Delta$ фундаментальными решениями являются функции

$$\mathcal{E}(t, \vec{r}) = \frac{\theta(t)}{(4\pi a^2 t)^{\frac{n}{2}}}\, e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}} \; , \quad n = 1, 2, 3.$$

6.13. Доказать, что для волнового оператора $\Box_a = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta$ фундаментальными решениями являются функции:

1) в $\mathbb{R}^1$: $\mathcal{E}(t, x) = \dfrac{1}{2a}\, \theta(at - |x|)$;

2) в $\mathbb{R}^2$: $\mathcal{E}(t,\vec{r}) = \dfrac{\theta(at-r)}{2\pi a\sqrt{a^2t^2-r^2}}$;

3) в $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{E}(t,\vec{r}) = \dfrac{\theta(t)}{4\pi a^2 t}\,\delta_{S_{at}} = \dfrac{\theta(t)}{2\pi a}\,\delta(a^2t^2-r^2)$,

где $S_{at} = \{\vec{r} : r = at\}$.

6.3. Решение задачи Коши методом свертки

Рассмотрим на примере ОДУ, как можно свести задачу Коши к уравнению (6.24) для ОФ из $\mathcal{D}'_+$ и найти решение с помощью свертки с фундаментальным решением по формуле (6.27).

Пример. Найдем решение следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} u'(t) + a\,u(t) = f(t)\,, \\ u(0) = u_0\,, \end{cases} \tag{6.30}$$

где $u(t) \in C^1(t>0) \cap C(t \geqslant 0)$ и $f(t) \in C(t>0)$. Продолжим $u(t)$ и $f(t)$ нулем при $t<0$:

$$\tilde{u}(t) = \theta(t)\,u(t)\ , \quad \tilde{f}(t) = \theta(t)\,f(t)\ . \tag{6.31}$$

Рассматривая $\tilde{u}$ как ОФ, найдем уравнение, которому она удовлетворяет. Умножая дифференциальное уравнение в (6.30) на $\theta(t)$, получим

$$\theta(t)\,u'(t) + a\,\tilde{u}(t) = \tilde{f}(t)\ . \tag{6.32}$$

Чтобы выразить первое слагаемое через $\tilde{u}$, продифференцируем (6.31):

$$\tilde{u}'(t) = \delta(t)\ [u]_0 + \theta(t)\,u'(t) = u_0\delta(t) + \theta(t)\,u'(t)\ . \tag{6.33}$$

Здесь использовано начальное условие из (6.30). Таким образом, уравнение для $\tilde{u}$ имеет вид

$$\tilde{u}'(t) + a\,\tilde{u}(t) = \tilde{f}(t) + u_0\delta(t)\ . \tag{6.34}$$

Начальные условия исходной задачи Коши в этом уравнении входят в обобщенное внешнее воздействие $F = \tilde{f}(t) + u_0\delta(t)$, $F \in \mathcal{D}'_+$.

Фундаментальное решение оператора $\dfrac{d}{dt} + a$ (см. задачу **6.8.** 1)

$$\mathcal{E}(t) = \theta(t)\,e^{-at}$$

принадлежит $\mathcal{D}'_+$; согласно второму достаточному условию существования свертки свертка $\mathcal{E} * F$ существует. По формуле (6.27) находим решение уравнения (6.34):

$$\begin{aligned}\tilde{u}(t) = \mathcal{E} * F = \theta(t)\, e^{-at} * \Big(\tilde{f}(t) + u_0\delta(t)\Big) = \\ = \theta(t)\Big(u_0\, e^{-at} + \int_0^t f(\tau) e^{-a(t-\tau)} d\tau\Big).\end{aligned} \tag{6.35}$$

Отсюда, учитывая (6.31), получим решение исходной задачи:

$$u(t) = u_0\, e^{-at} + \int_0^t f(\tau)\, e^{-a(t-\tau)}\, d\tau\,. \tag{6.36}$$

Как и следовало ожидать, оно совпадает с классическим решением, но этот способ обобщается на УМФ.

Если решение $u(t,x)$ классической задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} u_t = a^2\Delta u + f(t,x)\,, \\ u\big|_{t=0} = u_0(x) \end{cases} \tag{6.37}$$

и заданную функцию $f(t,x)$ продолжить нулем при $t < 0$:

$$\tilde{u}(t,x) = \theta(t)\, u(t,x)\ , \quad \tilde{f}(t,x) = \theta(t)\, f(t,x)\ , \tag{6.38}$$

то можно доказать, что новая функция $\tilde{u}(t,x)$ будет удовлетворять в $\mathbb{R}^{n+1}$ в обобщенном смысле уравнению

$$\tilde{u}_t = a^2\Delta\tilde{u} + \tilde{f}(t,x) + u_0(x)\cdot\delta(t)\ . \tag{6.39}$$

Задачу об отыскании решений этого уравнения, обращающихся в нуль при $t < 0$, называют *обобщенной задачей Коши для уравнения теплопроводности.*

Аналогично, в случае классической задачи Коши для волнового уравнения

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta u + f(t,x)\,, \\ u\big|_{t=0} = u_0(x)\,, \\ u_t\big|_{t=0} = u_1(x) \end{cases} \tag{6.40}$$

можно получить уравнение

$$\tilde{u}_{tt} = a^2\Delta\tilde{u} + \tilde{f}(t,x) + u_0(x)\cdot\delta'(t) + u_1(x)\cdot\delta(t)\ . \tag{6.41}$$

Задачу об отыскании решений этого уравнения, обращающихся в нуль при $t < 0$, называют *обобщенной задачей Коши для волнового уравнения.*

Решения уравнений (6.39) и (6.41) можно найти с помощью свертки фундаментального решения соответствующего оператора и свободного члена в уравнении. Фундаментальные решения оператора теплопроводности и волнового оператора приведены в задачах **6.12.** и **6.13.** При этом получаются известные формулы для решений задачи Коши для уравнения теплопроводности и волнового уравнения.

В общем виде решение задачи Коши (6.37) для уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}^n$ выражается *формулой Пуассона*

$$u(t,x)=\frac{1}{\left(2a\sqrt{\pi t}\,\right)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}u_0(\xi)\,e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2t}}d\xi+\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{f(\tau,\xi)}{\left[\,2a\sqrt{\pi(t-\tau)}\,\right]^n}\,e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi d\tau. \tag{6.42}$$

В общем виде решение задачи Коши (6.40) для волнового уравнения выражается:

1) при $n=1$ *формулой Даламбера*:

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \frac{1}{2}\left[u_0(x+at)+u_0(x-at)\right]+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}u_1(\xi)\,d\xi\,+ \\ &\quad +\frac{1}{2a}\int\limits_0^t\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\tau,\xi)\,d\xi d\tau\ ; \end{aligned} \tag{6.43}$$

2) при $n=2$ *формулой Пуассона*:

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{|\xi-x|<at}\frac{u_0(\xi)\,d\xi}{\sqrt{a^2t^2-|\xi-x|^2}}+\frac{1}{2\pi a}\int\limits_{|\xi-x|<at}\frac{u_1(\xi)\,d\xi}{\sqrt{a^2t^2-|\xi-x|^2}}\,+ \\ &\quad +\frac{1}{2\pi a}\int\limits_0^t\int\limits_{|\xi-x|<a(t-\tau)}\frac{f(\tau,\xi)\,d\xi d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-|\xi-x|^2}}\ ; \end{aligned} \tag{6.44}$$

3) при $n=3$ *формулой Кирхгофа*:

$$u(t,x) = \frac{1}{4\pi a^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\int\limits_{|\xi-x|=at} u_0(\xi)\,dS\right) + \frac{1}{4\pi a^2 t}\int\limits_{|\xi-x|=at} u_1(\xi)\,dS + \\ + \frac{1}{4\pi a^2}\int\limits_{|\xi-x|<at}\frac{1}{|\xi-x|}\,f\!\left(t-\frac{|\xi-x|}{a},\xi\right)d\xi\,. \tag{6.45}$$

В следующих задачах требуется свести задачи Коши (6.37) и (6.40) к уравнениям (6.39) и (6.41) соответственно, вычислить свертки соответствующих фундаментальных решений и свободного члена в уравнениях и записать решение исходной задачи.

6.14. Решить методом свертки следующие задачи Коши для уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}$:

1) $\begin{cases} u_t = a^2u_{xx} + e^{-t}\,, \\ u|_{t=0} = 1\,; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} u_t = a^2u_{xx} + x\,, \\ u|_{t=0} = x\,; \end{cases}$

3) $\begin{cases} u_t = u_{xx} + e^{-t}\cos x\,, \\ u|_{t=0} = \cos x\,; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} u_t = u_{xx} + x\cos x\,, \\ u|_{t=0} = x\cos x\,; \end{cases}$

в $\mathbb{R}^2$:

5) $\begin{cases} u_t = a^2\Delta u + e^{-t}\,, \\ u|_{t=0} = 1\,; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} u_t = \Delta u + \cos t\,, \\ u|_{t=0} = xy\,e^{-x^2-y^2}\,; \end{cases}$

в $\mathbb{R}^3$:

7) $\begin{cases} u_t = 3\Delta u + e^{-t}\,, \\ u|_{t=0} = \sin(x-y-z)\,; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} u_t = \Delta u + xy\cos z\,, \\ u|_{t=0} = \left(x^2+y^2\right)\cos z\,; \end{cases}$

6.15. Решить методом свертки следующие задачи Коши для волнового уравнения в $\mathbb{R}$:

1) $\begin{cases} u_{tt} = a^2u_{xx} + x + t\,, \\ u|_{t=0} = e^x\,, \\ u_t|_{t=0} = 0\,; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} u_{tt} = a^2u_{xx} + t\ln t\,, \\ u|_{t=0} = 3^x\,, \\ u_t|_{t=0} = 0\,; \end{cases}$

3) $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + x^2 + t^2\,, \\ u|_{t=0} = x^m\,,\ m = 1, 2, \ldots, \\ u_t|_{t=0} = 0\,; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + x^2\,, \\ u|_{t=0} = \cos x\,, \\ u_t|_{t=0} = \cos x\,; \end{cases}$

5) $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \cos(x+t)\,, \\ u|_{t=0} = 0\,, \\ u_t|_{t=0} = 2^x\,; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \sin t\,, \\ u|_{t=0} = 0\,, \\ u_t|_{t=0} = \left(1 + x^2\right)^{-1}\,; \end{cases}$

в $\mathbb{R}^2$:

7) $\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u + 1\,, \\ u|_{t=0} = 1\,, \\ u_t|_{t=0} = 1\,; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u + e^{-t} r^2\,, \\ u|_{t=0} = 1 + r^2\,, \\ u_t|_{t=0} = 0\,; \end{cases}$

в $\mathbb{R}^3$:

9) $\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u + r^2\,, \\ u|_{t=0} = 0\,, \\ u_t|_{t=0} = r^2\,; \end{cases}$ 10) $\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u + 1\,, \\ u|_{t=0} = \left(1 + r^2\right)^{-1}\,, \\ u_t|_{t=0} = 0\,. \end{cases}$

Ответы и указания к главе 6

6.1. *Указание.* В задачах 1—4 может быть использована лемма на с. 128. *Ответы.* 1) $\delta(x)$; 2) $\pi\delta(x)$; 3) $\sqrt{\pi}\,\delta(x)$; 4) $\pi\delta(x)$;

5) *Решение.* Фиксируем произвольную функцию $\varphi(x) \in \mathcal{D}$, и пусть $\operatorname{spt}\varphi \subset (-R, R)$. Тогда

$$\begin{aligned}(f_\varepsilon, \varphi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(x)\,\varphi(x)\,dx = \int_{-R}^{R} f_\varepsilon(x)\,\varphi(x)\,dx = \\ &= \varphi(0)\int_{-R}^{R} f_\varepsilon(x)\,dx + \int_{-R}^{R} f_\varepsilon(x)\,[\varphi(x)-\varphi(0)]\,dx\,.\end{aligned}$$

В первом слагаемом предельный переход при $\varepsilon \to 0$ приводит к интегралу Дирихле

$$\int\limits_{-R}^{R} f_\varepsilon(x)\,dx = \int\limits_{-R}^{R} \frac{1}{x}\,\sin\frac{x}{\varepsilon}\,dx = \int\limits_{-R/\varepsilon}^{R/\varepsilon} \frac{\sin t}{t}\,dt \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \pi\,.$$

Учитывая, что $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, по теореме Лагранжа можно записать

$$\varphi(x) - \varphi(0) = x\,\varphi'(\alpha\,x)\,, \quad 0 < \alpha < 1\,.$$

Обозначая $\psi(x) = \varphi'(\alpha\,x)$, получим

$$\int\limits_{-R}^{R} f_\varepsilon(x)\,[\varphi(x)-\varphi(0)]\,dx = \int\limits_{-R}^{R} f_\varepsilon(x)\,x\,\varphi'(\alpha\,x)\,dx = \int\limits_{-R}^{R} \sin\frac{x}{\varepsilon}\,\psi(x)\,dx\,.$$

Проинтегрируем по частям и найдем предел при $\varepsilon \to 0$:

$$\int\limits_{-R}^{R} \sin\frac{x}{\varepsilon}\,\psi(x)\,dx = -\varepsilon\cos\frac{x}{\varepsilon}\,\psi(x)\Big|_{-R}^{R} + \varepsilon\int\limits_{-R}^{R} \cos\frac{x}{\varepsilon}\,\psi'(x)\,dx \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0\,,$$

поскольку

$$\varepsilon\left|\,\cos\frac{x}{\varepsilon}\,\psi(x)\Big|_{-R}^{R}\,\right| \leqslant \varepsilon\,|\psi(R)-\psi(-R)| \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0\,,$$

$$\varepsilon\left|\,\int\limits_{-R}^{R} \cos\frac{x}{\varepsilon}\,\psi'(x)\,dx\right| \leqslant \varepsilon\left|\,\int\limits_{-R}^{R} \psi'(x)\,dx\,\right| = \varepsilon\,|\psi(R)-\psi(-R)| \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0\,.$$

Окончательно:

$$(f_\varepsilon, \varphi) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \pi\varphi(0) \quad \Rightarrow \quad f_\varepsilon(x) \to \pi\delta(x) \quad \text{в } \mathcal{D}', \ \ \varepsilon \to 0\,.$$

6) *Решение.* Фиксируем произвольную функцию $\varphi(x) \in \mathcal{D}$. Для определенности рассмотрим знак «+». При $\varepsilon > 0$ имеем

$$\left(\frac{1}{x+i\varepsilon}\,, \varphi(x)\right) = \left(\frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\,, \varphi(x)\right) = \left(\frac{x}{x^2+\varepsilon^2}\,, \varphi(x)\right) - i\left(\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\,, \varphi(x)\right).$$

Второе слагаемое, согласно результатам задачи 6.1.2, при $\varepsilon \to 0$ имеет вид

$$-i\left(\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\,, \varphi(x)\right) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} -i\pi\varphi(0)\,.$$

В первом слагаемом при $\varepsilon = 0$ возникает выражение $\dfrac{1}{x}$. Функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$ не является локально интегрируемой (не интегрируема на интервале, содержащем $x = 0$), следовательно, регулярной ОФ $\dfrac{1}{x}$ нет. Для исследования первого слагаемого преобразуем функционал, полагая, что $\operatorname{spt}\varphi \in (-R, R)$ и $\varepsilon > 0$, запишем

$$\left(\frac{x}{x^2+\varepsilon^2}\,, \varphi(x)\right) = \int_{-R}^{R} \frac{x}{x^2+\varepsilon^2}\,\varphi(x)\,dx =$$
$$= \varphi(0)\int_{-R}^{R} \frac{x}{x^2+\varepsilon^2}\,dx + \int_{-R}^{R} \frac{x}{x^2+\varepsilon^2}\,[\varphi(x)-\varphi(0)]\,dx\,.$$

Первый интеграл равен нулю (нечетная функция интегрируется в симметричных пределах). Поскольку $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема, то по теореме Лагранжа можно записать $\varphi(x) - \varphi(0) = x\,\varphi'(\alpha\,x)$, $0 < \alpha < 1$, и в силу этого второй интеграл не содержит особенности при $\varepsilon \to 0$. Вычисляя предел и используя (6.15), получим

$$\int\limits_{-R}^{R} \frac{x}{x^2+\varepsilon^2}\,[\varphi(x)-\varphi(0)]\,dx \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \int\limits_{-R}^{R} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx = \left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi(x)\right)\,.$$

В итоге

$$\frac{1}{x+i\varepsilon} \;\to\; \mathcal{P}\frac{1}{x} - i\pi\delta(x) \quad \text{в } \mathcal{D}', \ \ \varepsilon \to 0\,.$$

Знак «$-$» соответствует комплексно сопряженному выражению. Эти выражения, называемые *формулами Сохоцкого*, часто записывают в следующем виде:

$$\frac{1}{x \pm i\,0} = \mathcal{P}\frac{1}{x} \mp i\pi\delta(x)\,.$$

6.2. 1) 0; 2) $\delta(x)$; 3) 1; 4) x^{n-1}.

6.3. 1) $\varphi(0)$; 2) $\varphi(-1)$; 3) $\dfrac{1}{2}\,\varphi\Big(-\dfrac{5}{3}\Big)$; 4) $\dfrac{1}{8}\,\varphi\Big(\dfrac{1}{2}\Big)$; 5) $\dfrac{1}{|a|}\,\varphi(0)$; 6) $a(0)\,\varphi(0)$.

6.4. 1) $\delta(x)$; 2) $\delta(x-x_0)$; 3) $\operatorname{sign} x$; 4) $2\delta(x)$; 5) $\theta(x)\cos x$; 6) $\delta(x)-\theta(x)\sin x$; 7) $\delta(x+a)-\delta(x-a)$; 8) $2\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^k\,\delta(x-k\pi)$; 9) $4\delta(x)-3\operatorname{sign} x\sin x-|x|\cos x$; 10) $2\delta'(x)-3\operatorname{sign} x\cos x+|x|\sin x$; 11) $-m\,\delta^{(m-1)}(x)$; 12) 0.

6.7. 1) *Решение.* По определению свертки локально интегрируемых функций

$$\theta*\theta = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\theta(y)\,\theta(x-y)\,dy = \theta(x)\int\limits_{0}^{x}dy = \theta(x)\,x\,.$$

2) $\theta(x)\,\dfrac{x^3}{3}$; 3) $\sqrt{\dfrac{\pi}{8a}}\,xe^{-ax^2/2}$; 4) $\theta(x)\left(x^2-4\sin^2\dfrac{x}{2}\right)$; 5) $\theta(t)\,e^{x+a^2t}$; 6) $\theta(t)\displaystyle\int_{-\infty}^{x/(2\sqrt{t})}e^{-z^2/2}dz$; 7) $\theta(at-|x|)\left(t-\frac{|x|}{a}\right)$; 8) $\theta(t)\,[\theta(x+at)\,(x+at)-\theta(x-at)\,(x-at)]$.

6.8. 1) $\theta(t)\,e^{\mp at}$; 2) $\theta(t)\,\dfrac{\sin at}{a}$; 3) $\theta(t)\,\dfrac{\operatorname{sh} at}{a}$; 4) $\theta(t)\,\dfrac{1-e^{-4t}}{4}$; 5) $\theta(t)\,t\,e^{t}$; 6) $\theta(t)\left(e^{-t}-e^{-2t}\right)$.

6.9. 1) *Решение.* Убедимся, что при $\vec{r}\neq 0$ функция $\ln r=\ln\sqrt{x^2+y^2}$

удовлетворяет двумерному уравнению Лапласа

$$\frac{\partial}{\partial x}\ln\sqrt{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}\ , \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\sqrt{x^2+y^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\ ,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\ln\sqrt{x^2+y^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \quad\Rightarrow\quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\ln\sqrt{x^2+y^2}=0. \tag{6.46}$$

В точке $\vec{r}=0$ функция $\ln r$ имеет особенность, и приведенные выше формулы не имеют смысла. Однако, несмотря на особенность в $\vec{r}=0$, функция $\ln r$ локально интегрируема, и ей соответствует регулярная ОФ. Пусть $\varphi(\vec{r})\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ и $\operatorname{spt}\varphi\subset U_R=\left\{(x,y):\ x^2+y^2<R^2\right\}$, тогда

$$(\ln r,\varphi)=\int\limits_{U_R}\ln r\,\varphi(\vec{r})\,d\vec{r}\overset{\text{def}}{=}\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\varepsilon<r<R}\ln r\,\varphi(\vec{r})\,d\vec{r}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_\varepsilon^{R}\ln r\,\varphi(r,\phi)\,rdrd\phi.$$

Здесь интегрирование ведется по кольцу с внутренним радиусом ε и внешним радиусом R, и затем внутренний радиус устремляется к нулю. Рассмотрим функционал $(\Delta\ln r,\varphi)$. В области, не содержащей точку $\vec{r}=0$, этот функционал равен нулю в силу (6.46). Однако в любой окрестности точки $\vec{r}=0$ результат будет иным:

$$(\Delta\ln r,\varphi)=(\ln r,\Delta\varphi)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\varepsilon<r<R}\ln r\,\Delta\varphi(\vec{r})\,d\vec{r}\ .$$

Внутри кольца функция $\ln r$ дважды непрерывно дифференцируема, поэтому можно воспользоваться 2-й формулой Грина:

$$\int\limits_G(u\,\Delta v-v\,\Delta u)\,dG=\int\limits_S\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS\ , \tag{6.47}$$

где $u,v\in C^2(G)\cap C^1(\overline{G})$; $\vec{n}$ — внешняя нормаль с $S=\partial G$. Имеем

$$\int\limits_{\varepsilon<r<R}\ln r\,\Delta\varphi(\vec{r})\,d\vec{r}=\int\limits_{\varepsilon<r<R}\varphi(\vec{r})\,\Delta\ln r\,d\vec{r}+\left(\int\limits_{r=\varepsilon}+\int\limits_{r=R}\right)\left(\ln r\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial\ln r}{\partial n}\right)dl.$$

Первый интеграл обращается в ноль, поскольку $\Delta\ln r=0$ внутри кольца. Интеграл по $r=R$ также обращается в ноль из-за финитности функции φ. Рассмотрим оставшиеся интегралы по окружности $r=\varepsilon$ (на ней $\frac{\partial}{\partial n}=-\frac{\partial}{\partial r}$). Для первого из них получим

$$\int\limits_{r=\varepsilon} \ln r \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dl = -\int\limits_0^{2\pi} \ln \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial r}\Big|_{r=\varepsilon} \varepsilon \, d\phi = -\int\limits_0^{2\pi} \frac{\partial \varphi(\varepsilon, \phi)}{\partial r}\, d\phi \cdot \varepsilon \ln \varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Здесь мы воспользовались тем, что функция φ непрерывно дифференцируема и, значит, интеграл по ϕ ограничен при $\varepsilon \to 0$. Для второго интеграла получим

$$-\int\limits_{r=\varepsilon} \varphi \frac{\partial \ln r}{\partial n}\, dl = \int\limits_0^{2\pi} \varphi \frac{1}{\varepsilon} \varepsilon \, d\phi = \int\limits_0^{2\pi} \varphi(\varepsilon, \phi)\, d\phi = 2\pi \, \varphi(\varepsilon, \phi^*) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 2\pi \varphi(\vec{r}{=}0).$$

Здесь для интеграла от $\varphi(\varepsilon, \phi)$ была использована теорема о среднем и учтено, что при $\varepsilon \to 0$ любая точка окружности стремится к точке $\vec{r} = 0$. Таким образом,

$$(\Delta \ln r, \varphi) \;=\; \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\varepsilon < r < R} \ln r \, \Delta \varphi(\vec{r})\, d\vec{r} \;=\; 2\pi \, \varphi(\vec{r}{=}0) \;\Rightarrow\; \Delta \ln r = 2\pi \delta(\vec{r})\ .$$

2) *Указание.* Доказательство в точности повторяет все этапы решения предыдущей задачи с заменой $\ln r$ на $1/r$ и кольцевой области на сферический слой $\varepsilon < r < R$.

6.10. *Указание.* Воспользоваться третьим свойством свертки, выражениями для фундаментального решения оператора Лапласа при $n = 3$ и $n = 2$ и задачей **6.6.** 1.

6.12. *Решение.* Рассмотрим для простоты случай $n = 1$ (рассуждения для случаев $n = 2, 3$ принципиально те же):

$$\mathcal{E}(t, x) = \frac{\theta(t)}{2a\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}\ . \tag{6.48}$$

При $t < 0$ имеем $\mathcal{E}(t, x) = 0$ за счет множителя $\theta(t)$. При $t > 0$ функция $\mathcal{E}(t, x) = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}$ удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \mathcal{E}(t, x) = 0\ . \tag{6.49}$$

Несмотря на корневую по t особенность при $x = 0$ и $t \to +0$, функция $\mathcal{E}(t,x)$ локально интегрируема и ей соответствует регулярная ОФ:

$$(\mathcal{E},\varphi) \;=\; \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(t,x)\,\varphi(t,x)\,dxdt = \int\limits_{0}^{T}\int\limits_{-R}^{R} \mathcal{E}(t,x)\,\varphi(t,x)\,dxdt \;=$$

$$\stackrel{\text{def}}{=}\; \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\varepsilon}^{T}\int\limits_{-R}^{R} \mathcal{E}(t,x)\,\varphi(t,x)\,dxdt\;,$$

где предполагается, как обычно, что $\operatorname{spt}\varphi(t,x) \in (-T,T)\cup(-R,R)$. Рассмотрим действие оператора $\hat{L} = \dfrac{\partial}{\partial t} - a^2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ на ОФ $\mathcal{E}(t,x)$:

$$\begin{aligned}\left(\hat{L}\mathcal{E},\varphi\right) &= \left(\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2\mathcal{E}}{\partial x^2}\,,\varphi\right) = \left(\mathcal{E},-\frac{\partial\varphi}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right) = \\ &= -\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\varepsilon}^{T}\int\limits_{-R}^{R}\mathcal{E}(t,x)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)dxdt\;.\end{aligned}\tag{6.50}$$

Проинтегрируем отдельные слагаемые по частям. Для первого слагаемого получим

$$\int\limits_{\varepsilon}^{T}\int\limits_{-R}^{R}\mathcal{E}(t,x)\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t}\,dxdt = \int\limits_{-R}^{R}\Big[\,\mathcal{E}(t,x)\,\varphi(t,x)\Big|_{\varepsilon}^{T} - \int\limits_{\varepsilon}^{T}\frac{\partial\mathcal{E}(t,x)}{\partial t}\,\varphi(t,x)dt\Big]dx =$$

$$= -\int\limits_{-R}^{R}\mathcal{E}(\varepsilon,x)\,\varphi(\varepsilon,x)\,dx - \int\limits_{\varepsilon}^{T}\frac{\partial\mathcal{E}(t,x)}{\partial t}\,\varphi(t,x)\,dtdx\,.$$

Здесь учтено, что $\varphi(T,x) = 0$. Аналогично, интегрируя дважды по частям по x второе слагаемое и учитывая финитность функции φ, получим

$$\int\limits_{\varepsilon}^{T}\int\limits_{-R}^{R}\mathcal{E}(t,x)\frac{\partial^2\varphi(t,x)}{\partial x^2}\,dxdt \;=\; \int\limits_{\varepsilon}^{T}\int\limits_{-R}^{R}\frac{\partial^2\mathcal{E}(t,x)}{\partial x^2}\,\varphi(t,x)\,dxdt\;.$$

Подставляя эти выражения в (6.50), найдем

$$\left(\hat{L}\mathcal{E},\varphi\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-R}^{R}\mathcal{E}(\varepsilon,x)\,\varphi(\varepsilon,x)\,dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\varepsilon}^{T}\int\limits_{-R}^{R}\left(\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2\mathcal{E}}{\partial x^2}\right)\varphi\,dxdt\;.$$

Согласно (6.49) второе слагаемое равно нулю. В первом слагаемом функция

$$\mathcal{E}(\varepsilon, x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi\varepsilon}}\, e^{-\frac{x^2}{4a^2\varepsilon}}$$

образует δ-образную последовательность при $\varepsilon \to 0$ (см. задачу **6.1.** 3). Следовательно,

$$\left(\hat{L}\mathcal{E}, \varphi\right) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{-R}^{R} \mathcal{E}(\varepsilon, x)\, \varphi(\varepsilon, x)\, dx = \varphi(0,0)\,.$$

Таким образом,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \mathcal{E}(t, x) = \delta(t, x) \quad \text{в } \mathcal{D}'\,.$$

6.13. 1) *Решение.* Функция $\mathcal{E}(t, x) = \dfrac{1}{2a}\theta(at - |x|)$ отлична от нуля только внутри угла, ограниченного прямыми $x = -at$ и $x = at$, где $t > 0$ (рис. 6.1).

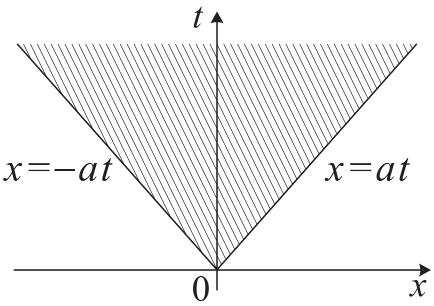


Рис. 6.1

Соответствующая регулярная ОФ имеет вид

$$(\mathcal{E}, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{|x|/a}^{+\infty} \frac{1}{2a}\, \varphi(t, x)\, dt dx = \int\limits_{0}^{+\infty} \int\limits_{-at}^{at} \frac{1}{2a}\, \varphi(t, x)\, dx dt\,.$$

Здесь с учетом финитности φ интегралы по t и x на самом деле собственные. Рассмотрим ОФ $\Box_a \mathcal{E}$, где $\Box_a = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ — одномерный волновой оператор. По определению производной ОФ

$$
\begin{aligned}
(\Box_a \mathcal{E}, \varphi) &= \left(\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x^2}, \varphi \right) = \left(\mathcal{E}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) = \\
&= \frac{1}{2a} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{|x|/a}^{+\infty} \frac{\partial^2 \varphi(t,x)}{\partial t^2}\, dt dx - \frac{a}{2} \int\limits_{0}^{+\infty} \int\limits_{-at}^{at} \frac{\partial^2 \varphi(t,x)}{\partial x^2}\, dx dt\,.
\end{aligned}
\tag{6.51}
$$

Преобразуем первое слагаемое:

$$
\frac{1}{2a} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{|x|/a}^{+\infty} \frac{\partial^2 \varphi(t,x)}{\partial t^2}\, dt dx = \frac{1}{2a} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t} \Big|_{t=|x|/a}^{t=+\infty} dx =
$$

$$
= -\frac{1}{2a} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \varphi(\frac{|x|}{a}, x)}{\partial t}\, dx = -\frac{1}{2a} \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\partial \varphi(-\frac{x}{a}, x)}{\partial t}\, dx - \frac{1}{2a} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\partial \varphi(\frac{x}{a}, x)}{\partial t}\, dx\,.
$$

Сделаем замену переменной $\tau = -\dfrac{x}{a}$ в первом интеграле и $\tau = \dfrac{x}{a}$ во втором интеграле и получим

$$
\frac{1}{2a} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{|x|/a}^{+\infty} \frac{\partial^2 \varphi(t,x)}{\partial t^2}\, dt dx = -\frac{1}{2} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\partial \varphi(\tau, -a\tau)}{\partial t}\, d\tau - \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\partial \varphi(\tau, a\tau)}{\partial t}\, d\tau\,.
$$

Преобразуем второе слагаемое:

$$
\begin{aligned}
-\frac{a}{2} \int\limits_{0}^{+\infty} \int\limits_{-at}^{at} \frac{\partial^2 \varphi(t,x)}{\partial x^2}\, dx dt \;&=\; -\frac{a}{2} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x} \Big|_{x=-at}^{x=at} dt = \\
&= -\frac{a}{2} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\partial \varphi(t, at)}{\partial x}\, dt + \frac{a}{2} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\partial \varphi(t, -at)}{\partial x}\, dt = \\
&= -\frac{a}{2} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\partial \varphi(\tau, a\tau)}{\partial x}\, d\tau + \frac{a}{2} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\partial \varphi(\tau, -a\tau)}{\partial x}\, d\tau\,.
\end{aligned}
$$

Подставляя полученные выражения в (6.51) и группируя отдельные слагаемые, запишем

$$
(\Box_a \mathcal{E}, \varphi) \;=\; \frac{1}{2a} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{|x|/a}^{+\infty} \frac{\partial^2 \varphi(t,x)}{\partial t^2}\, dt dx - \frac{a}{2} \int\limits_{0}^{+\infty} \int\limits_{-at}^{at} \frac{\partial^2 \varphi(t,x)}{\partial x^2}\, dx dt \;=
$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{\partial\varphi(\tau,-a\tau)}{\partial t} - a\frac{\partial\varphi(\tau,-a\tau)}{\partial x}\right)d\tau \; -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{\partial\varphi(\tau,a\tau)}{\partial t} + a\frac{\partial\varphi(\tau,a\tau)}{\partial x}\right)d\tau \; =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{d}{d\tau}\varphi(\tau,-a\tau)\,d\tau - \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{d}{d\tau}\varphi(\tau,a\tau)\,d\tau \; =$$

$$= -\frac{1}{2}\,\varphi(\tau,-a\tau)\Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{2}\,\varphi(\tau,a\tau)\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2}\,\varphi(0,0) + \frac{1}{2}\,\varphi(0,0) \; = \; \varphi(0,0).$$

Следовательно,

$$\Box_a\mathcal{E}(t,x) = \delta(t,x) \quad \text{в } \mathcal{D}' \,.$$

6.14.

1) $2 - e^{-t}$; 2) $(t+1)\,x$; 3) $(t+1)\,e^{-t}\cos x$; 4) $x\cos x - 2\,(1-e^{-t})\sin x$;

5) $2 - e^{-t}$; 6) $\sin t + \dfrac{xy}{(1+4t)^3}\exp\left\{-\dfrac{x^2+y^2}{1+4t}\right\}$;

7) $1 - e^{-t} + e^{-9t}\sin(x-y-z)$; 8) $\cos z\left[xy\,(1-e^{-t}) + \left(x^2+y^2+4t\right)e^{-t}\right]$.

6.15.

1) $\dfrac{t^3}{6} + \dfrac{xt^2}{2} + e^x \operatorname{ch} at$; 2) $t^3\left(\dfrac{1}{6}\ln t - \dfrac{5}{36}\right) + 3^x \operatorname{ch} at$;

3) $\dfrac{1}{12}\left(1-a^2\right)t^4 + \dfrac{1}{2}\left[t^2x^2 + (x+at)^m + (x-at)^m\right]$;

4) $\dfrac{t^4}{12} + \dfrac{t^2x^2}{2} + \cos x\,(\sin t + \cos t)$;

5) $\dfrac{1}{2}\left(t\sin(x+t) - \sin x\sin t + \dfrac{2^{x+t}+2^{x-t}}{\ln 2}\right)$;

6) $t - t\sin t + \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{2t}{1+x^2-t^2}$; 7) $\dfrac{t^2}{2} + t + 1$;

8) $\dfrac{2}{3}\,a^2t^3 + \left(4a^2+r^2\right)\left(t-1+e^{-t}\right) + 1 + r^2$;

9) $\dfrac{r^2t^2}{2} + \dfrac{a^2t^4}{4} + r^2t + a^2t^3$; 10) $\dfrac{t^2}{2} + \dfrac{1}{2r}\left(\dfrac{r+at}{1+(r+at)^2} + \dfrac{r-at}{1+(r-at)^2}\right)$.

Список литературы

1. Сборник задач по уравнениям математической физики/ Под ред. В. С. Владимирова. М.: Физматлит, 2001.
2. *Боголюбов А. Н., Кравцов В. В.* Задачи по математической физике. М.: Изд-во МГУ, 1998.
3. *Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н.* Сборник задач по математической физике. М.: Наука, 1972.
4. *Владимиров В. С., Жаринов В. В.* Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2000.
5. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.
6. *Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.* Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высш. шк., 1970.
7. *Полянин А. Д.* Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001.
8. *Полянин А. Д.* Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения. М.: Физматлит, 2003.
9. *Никифоров А. Ф., Уваров В. Б.* Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1984.
10. Справочник по специальным функциям/ Под ред. М. Абрамовица, И. А. Стегун. М.: Наука, 1979.
11. *Шилов Г. Е.* Математический анализ: Спец. курс. М.: Физматлит, 1961.
12. *Садовничий В. А.* Теория операторов. М.: Высш. шк., 1999.
13. *Васильева А. Б., Тихонов Н. А.* Интегральные уравнения. М.: Физматлит, 2002.
14. *Шилов Г. Е.* Математический анализ: Второй спец. курс. М.: Физматлит, 1965.
15. *Варшалович Д. А., Москалев А. Н., Херсонский В. К.* Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975.