Известия вузов. Математика
2009, №2, с. 65–75

http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@ksu.ru

С.Н. ТРОНИН, Л.Т. АБДУЛМЯНОВА

ОПЕРАДА КОНЕЧНЫХ ПОМЕЧЕННЫХ ТУРНИРОВ

Аннотация. Изучается операда конечных помеченных турниров. Описана структура подопе-рад этой операды, порожденных простыми турнирами. Показано, что подоперада, порожден-ная турниром с двумя вершинами (операда конечных линейно упорядоченных множеств), изоморфна операде симметрических групп, а подоперада, порожденная простым турниром с более чем двумя вершинами, изоморфна фактороперадe свободной операды по некоторой конгруэнции. Получен явный вид этой конгруэнции.

Ключевые слова: операда, турнир.

УДК: 519.175 : 512.565

Abstract. The operad of finite labelled tournaments is investigated. A structure of suboperads of this operad is described. We show that suboperad generated by tournament with two nodes (i. e., operad of finite labelled ordered sets) is isomorphic to the operad of symmetric groups, and suboperads generated by simple tournaments with more that two nodes is isomorphic to a quotient operad of free operad by a congruence. The explicit form of this congruence is obtained.

Keywords: operad, tournament.

В работе [1] описаны два способа определения операды на различных классах конечных помеченных графов, как неориентированных, так и ориентированных. У этих операд имеет-ся довольно много интересных примеров подоперад. В данной работе начато исследование одной из подоперад операды конечных ориентированных графов (орграфов) — операды турниров. Турниры (или круговые турниры) — это известный класс ориентированных гра-фов, изучение которого интенсивно продолжается (напр., [2]). Однако с операдной точки зрения турниры до сих пор не рассматривались. Между тем в теории турниров уже давно применяется конструкция, аналогичная операдной композиции графов из [1] (напр., [3] и [2]).

Данная работа состоит из двух разделов. В первом разделе напоминаются определения некоторых уже известных операд, в частности, операды Dir конечных ориентированных по-меченных графов, и некоторых ее подоперад. Доказывается, в частности, что подоперaду образуют турниры. Подоперадой операды турниров является операда *LOS* линейно упо-рядоченных конечных помеченных множеств. Основной результат раздела 1 — построение изоморфизма между операдой LOS и операдой Σ симметрических групп (явное описание которой можно найти в [4]). Во втором разделе изучаются подоперады операды турни-ров, порожденные произвольными простыми турнирами с не менее чем тремя вершинами.

Поступила 22.11.2006, окончательный вариант 02.07.2007

Основной результат раздела 2 заключается в том, что каждая такая подоперада изоморфна фактороператде свободной операды с базисом из одного элемента по явно описываемой конгруэнции, которая определяется группой автоморфизмов данного простого турнира. В частности, если эта группа тривиальна, то операда, порожденная данным простым турниром, является свободной. Заметим, что операду LOS также можно расматривать как подоперадy операды турниров, порожденную простым турниром с двумя вершинами, и, таким образом, получено описание подоперад, порожденных всеми простыми турнирами.

Поскольку любой турнир можно представить в виде операдной композиции простых турниров (с точностью до перенумерации вершин), то естественно возникает следующий вопрос: верно ли, что операда всех турниров есть категорное копроизведение (в категории симметрических операд) операды LOS и всех подоперад, порожденных простыми турнирами с числом вершин не менее трех? Положительный ответ на этот вопрос означал бы, что у семейства всех турниров имеется достаточно прозрачное (с алгебраической точки зрения) описание.

В работе будут использоваться сведения по теории операд, которые можно найти в [5], [6], [1], [7] (см. также библиографию в этих работах). Обозначения в основном соответствуют работе [5]. Теорема 3 и частный случай теоремы 4 данной работы были анонсированы в [8].

1. Операда турниров

Напомним аксиомы, которым должна удовлетворять любая операда $R=\{R(n) \mid n \geq 1\}$ [5]. Для любых натуральных чисел $m, n_1, \dots, n_m$ должна быть определена операция композиции:

$$R(m) \times R(n_1) \times \cdots \times R(n_m) \longrightarrow R(n_1 + \cdots + n_m), \quad (x, y_1, \dots, y_m) \mapsto x y_1 \dots y_m.$$

Операции композиции удовлетворяют следующим свойствам.

1) (Ассоциативность). $x(y_1\overline{z}_1)\dots(y_m\overline{z}_m) = (xy_1\dots y_m)\overline{z}_1\dots\overline{z}_m$ для любых $x \in R(m)$, $y_i \in R(n_i)$, $1 \leq i \leq m$, $\overline{z}_i = z_{i\,1}\dots z_{i\,n_i}$, $z_{i\,j} \in R(k_{i\,j})$, $1 \leq j \leq n_i$.

2) Существует элемент $\varepsilon \in R(1)$ (единица операды) такой, что $\varepsilon x = x = x\varepsilon\dots\varepsilon$ для любого $x \in R(m)$, $m \geq 1$.

Далее, для каждого $n \geq 1$ должно быть определено левое действие группы подстановок n-й степени Σ_n на $R(n)$. Эти действия удовлетворяют следующим свойствам.

3) Если $\sigma_i \in \Sigma_{n_i}$, $1 \leq i \leq m$, $x \in R(m)$, $y_i \in R(n_i)$, то имеет место тождество

$$x(\sigma_1 y_1)\dots(\sigma_m y_m) = (\sigma_1 \sqcup \cdots \sqcup \sigma_m)(xy_1\dots y_m).$$

4) Если $\sigma \in \Sigma_m$, $\alpha = (n_1, \dots, n_m)$, $x \in R(m)$, $y_i \in R(n_i)$, $1 \leq i \leq m$, то имеет место тождество

$$(\sigma x)y_1\dots y_m = (\sigma^*\alpha)(xy_{\sigma(1)}\dots y_{\sigma(m)}).$$

Объяснения всех встречающихся здесь обозначений можно найти в [5].

Напомним конструкции нескольких операд, которые будут использоваться в дальнейшем. Пусть $K = \{0, 1\}$, $M(n)$ есть множество всех квадратных $n \times n$-матриц с элементами из K, на главной диагонали каждой из которых расположены нули. На семействе $M = \{M(n) \mid n \geq 1\}$ можно определить структуру операды [1]. Явный вид композиции в этой операде таков. Пусть $A \in M(n)$, $B_1 \in M(k_1), \dots, B_n \in M(k_n)$. Тогда

$$AB_1\dots B_n = \begin{pmatrix} B_1 & \overline{a}_{1,2} & \dots & \overline{a}_{1,n} \\ \overline{a}_{2,1} & B_2 & \dots & \overline{a}_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a}_{n,1} & \overline{a}_{n,2} & \dots & B_n \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Здесь $AB_1 \dots B_n$ — блочная $n \times n$-матрица, i,j-й блок которой есть матрица размером $k_i \times k_j$. Диагональные блоки — квадратные матрицы B_i, $1 \le i \le n$. Если $i \ne j$ и $a_{i,j}$ — i,j-й элемент матрицы A, то $\overline{a}_{i,j}$ обозначает матрицу размером $k_i \times k_j$, целиком заполненную одним и тем же элементом $a_{i,j}$.

Кроме того, если $\sigma \in \Sigma_n$ и $A \in M(n)$, то левое действие Σ_n на $M(n)$ определяется так: σA есть матрица, i,j-й элемент которой равен $a_{\sigma^{-1}(i),\sigma^{-1}(j)}$.

Рассмотрим семейство $\mathrm{Dir} = \{\mathrm{Dir}(n) \mid n \ge 1\}$, где $\mathrm{Dir}(n)$ есть подмножество $M(n)$, состоящее из всех матриц $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ таких, что $a_{i,i} = 0$, и если $a_{i,j} = 1$, то $a_{j,i} = 0$ для всех i и $j \ne i$. В [1] показано, что Dir есть подоперада операды M, и элементы $\mathrm{Dir}(n)$ можно отождествить с простыми ориентированными помеченными графами (орграфами) с n вершинами. Помеченность графа в данном случае означает, что каждая вершина снабжена меткой (номером), и метки принимают значения $1, \dots, n$. При этом два помеченных графа считаются равными (т. е. одним и тем же элементом $\mathrm{Dir}(n)$) тогда и только тогда, когда множества их вершин совпадают (т. е. это одно и то же множество $\{1, \dots, n\}$), и между этими графами существует изоморфизм, тождественный на вершинах. Отождествление Dir с семейством всех помеченных орграфов осуществляется следующим образом. Ориентированному графу Γ, вершины которого снабжены метками $1, \dots, n$, сопоставляется его матрица смежности $A(\Gamma)$, i,j-й элемент которой равен единице, если в графе Γ существует дуга (стрелка) из вершины i в вершину j. Если такой дуги нет, то элемент равен нулю. Очевидно, что таким образом устанавливается взаимно однозначное соответствие между графами с указанными свойствами и множеством $\mathrm{Dir}(n)$. Напомним ([1]), как описывается композиция (1) в терминах графов. Пусть Γ_0 — ориентированный граф с вершинами $1, \dots, m$, и пусть для каждого i, $1 \le i \le m$, дан ориентированный граф Γ_i с вершинами $1, \dots, n_i$. Тогда $\Gamma = \Gamma_0\Gamma_1 \dots \Gamma_m$ есть ориентированный граф с вершинами $1, \dots, n = n_1 + \dots + n_m$, причем вершина $n_1 + \dots + n_{i-1} + j$, $1 \le j \le n_i$, соответствует вершине j графа Γ_i, и если в Γ_i вершина i соединена дугой с вершиной k, то в Γ вершина $n_1 + \dots + n_{i-1} + j$ соединена дугой с $n_1 + \dots + n_{i-1} + k$. Таким образом, для всех i в Γ имеются подграфы с вершинами $n_1 + \dots + n_{i-1} + 1, \dots, n_1 + \dots + n_{i-1} + n_i$, изоморфные Γ_i, которые часто бывает удобно отождествлять с Γ_i. Кроме того, если в Γ_0 имеется дуга, направленная из вершины i в вершину t, то в Γ определены дуги, выходящие из всех вершин подграфа Γ_i и входящие в каждую вершину подграфа Γ_t.

Круговые турниры (далее — просто турниры) по определению являются ориентированными простыми графами, обладающими тем свойством, что в них для любых двух различных вершин i, j всегда существует либо дуга, направленная из i в j, либо дуга из j в i. Некоторую информацию о турнирах можно найти в большинстве учебников по теории графов (напр., [10], [11]). Обозначим через $\mathrm{Tour}(n)$ множество всех помеченных турниров с n вершинами. Если $\Gamma \in \mathrm{Tour}(n)$ и $A = A(\Gamma)$, то для любых $i \ne j$ верно ровно одно из двух: либо $a_{i,j} = 1, a_{j,i} = 0$, либо $a_{j,i} = 1, a_{i,j} = 0$. Будем называть такие матрицы матрицами турниров. Положим $\mathrm{Tour} = \{\mathrm{Tour}(n) \mid n \ge 1\}$.

Теорема 1. Tour *есть подоперада операды* Dir.

Доказательство. Необходимо убедиться, что если $A, B_1, \dots, B_n$ — матрицы турниров, то $AB_1 \dots B_n$ — также матрица турнира, и если $A \in \mathrm{Tour}(n)$, $\sigma \in \Sigma_n$, то $\sigma A \in \mathrm{Tour}(n)$. Это делается непосредственной проверкой, исходя из приведенных выше определений. □

Напомним ([1]), что операда G простых неориентированных конечных помеченных графов определяется как подоперада операды M, n-е компоненты которой состоят из симметрических $n \times n$-матриц из нулей и единиц с нулями на главной диагонали. Эти матрицы соответствуют матрицам смежности графов указанного типа. В ([9], с. 16) описано взаимно однозначное соответствие между компонентами $\mathrm{Tour}(n)$ и $G(n)$ операд Tour и G, при котором турниру T с вершинами $1, \ldots, n$ сопоставляется неориентированный граф $\gamma_n T$ с теми же вершинами, такой, что вершины i и j в нем смежны в том и только в том случае, если при $i < j$ в турнире T имеется дуга (i, j), т. е. стрелка вида $i \to j$.

Теорема 2. *Семейство биекций* $\gamma = \{\gamma_n : \mathrm{Tour}(n) \to G(n) \mid n \geq 1\}$ *является изоморфизмом несимметрических операд (т. е. изоморфизмом, не обязательно сохраняющим действия симметрических групп).*

Доказательство. Необходимо убедиться, что если $T_0 \in \mathrm{Tour}(m)$, $T_i \in \mathrm{Tour}(n_i)$, $1 \leq i \leq m$, $n = n_1 + \cdots + n_m$, то $\gamma_n(T_0 T_1 \ldots T_m) = (\gamma_m T_0)(\gamma_{n_1} T_1) \ldots (\gamma_{n_m} T_m)$. Речь идет о совпадении двух помеченных графов с одним и тем же множеством вершин, снабженных метками $1, 2, \ldots, n$. Следовательно, надо показать, что смежные вершины одного графа смежны и в другом, и наоборот. Можно считать T_i подтурниром турнира $T_0 T_1 \ldots T_m$ с вершинами $n_1 + \cdots + n_{i-1} + 1, \ldots, n_1 + \cdots + n_{i-1} + n_i$ и граф $\gamma_{n_i} T_i$ — подграфом $(\gamma_m T_0)(\gamma_{n_1} T_1) \ldots (\gamma_{n_m} T_m)$ с такими же вершинами. Если j, k — вершины T_i, $j < k$, и в T_i существует дуга $j \to k$, то дуга $j \to k$ определена и в $T_0 T_1 \ldots T_m$, а значит, j и k смежны в $\gamma_n(T_0 T_1 \ldots T_m)$. С другой стороны, j и k будут смежными в $\gamma_{n_i} T_i$, а следовательно, и в $(\gamma_m T_0)(\gamma_{n_1} T_1) \ldots (\gamma_{n_m} T_m)$. Если в турнире T_0 существует дуга $i \to l$, причем $i < l$, то для каждой вершины j подтурнира T_i турнира $T_0 T_1 \ldots T_m$ и любой вершины k подтурнира T_l определена дуга $j \to k$, причем $i < l$. Это значит, что вершины j и k смежны в $\gamma_n(T_0 T_1 \ldots T_m)$. С другой стороны, i и l будут смежными в $\gamma_m T_0$, и потому в графе $(\gamma_m T_0)(\gamma_{n_1} T_1) \ldots (\gamma_{n_m} T_m)$ любая вершина $\gamma_{n_1} T_i$ должна быть смежной с каждой вершиной $\gamma_{n_l} T_l$. Исходя из определения операдных композиций в Tour и G, легко заметить, что проведенное рассуждение охватывает все возможные ребра рассматриваемых графов, которые, таким образом, совпадают. $\square$

Рассмотрим цикл C длины три, т. е. турнир вида: $1 \to 2 \to 3 \to 1$. Отображение γ_3 переводит его в граф $\gamma_3 C$ с вершинами 1, 2, 3, в котором вершины 1 и 2, а также 2 и 3 являются смежными. В то же время турнир $1 \to 3 \to 2 \to 1$ отображается в граф с вершинами 1, 2, 3, в котором вершины 1 и 3 смежны, а вершина 2 является изолированной. Этот граф нельзя получить из $\gamma_3 C$ перестановкой меток вершин, и это означает, что γ не является гомоморфизмом симметрических операд.

Чтобы убедиться в том, что изоморфизма между Tour и G как симметрическими операдами вообще быть не может, достаточно сравнить количество операдно неразложимых элементов в компонентах $\mathrm{Tour}(n)$ и $G(n)$ для небольших значений n. Уже при $n = 3$ равенство отсутствует.

Рассмотрим семейство $\mathrm{POS} = \{\mathrm{POS}(n) \mid n \geq 1\}$, где $\mathrm{POS}(n)$ есть подмножество $\mathrm{Dir}(n)$, состоящее из всех матриц A, элементы которых удовлетворяют следующему свойству: если $a_{i,j} = 1$ и $a_{j,k} = 1$, то $a_{i,k} = 1$. Отождествляя матрицы с графами, легко заметить, что элементы $\mathrm{POS}(n)$ — это в точности транзитивные ориентированные графы с вершинами $1, \ldots, n$. Матрицы из $\mathrm{POS}(n)$ находятся также во взаимно однозначном соответствии с конечными частично упорядоченными множествами, элементы которых помечены числами $1, \ldots, n$. В самом деле, если $A \in \mathrm{POS}(n)$ и E_n — единичная $n \times n$-матрица, то матрица $E_n + A$ задает на множестве $\{1, \ldots, n\}$ частичный порядок: i меньше или равно j тогда и только тогда, когда i, j-й элемент $E_n + A$ равен единице. Обратно, любой частичный порядок на $\{1, \ldots, n\}$ полностью определяется матрицей B из нулей и единиц, обладающей аналогичным свойством. В этом случае, как легко заметить, $B - E_n \in \mathrm{POS}(n)$.

Лемма 1. *Семейство* $\mathrm{POS} = \{\mathrm{POS}(n) \mid n \geq 1\}$ *является подоперадой операды* Dir.

Доказательство. Достаточно показать, что если $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ — транзитивные графы, то граф $\Gamma = \Gamma_0\Gamma_1 \dots \Gamma_m$ также будет транзитивным. Рассмотрим три вершины a, b, c графа Γ и предположим, что в Γ определены дуги $a \to b$ и $b \to c$. Как и выше, будем при $i \geq 1$ отождествлять Γ_i с подграфом Γ. Если все три вершины a, b, c принадлежат одному и тому же Γ_i, то дуга $a \to c$ существует ввиду транзитивности Γ_i. Если, например, $a, b \in \Gamma_i$, $c \in \Gamma_j$, где $i \neq j$, то, по определению операдной композиции в Dir, в графе Γ_0 должна существовать дуга $i \to j$. Но тогда все вершины Γ_i должны быть соединены дугами со всеми вершинами Γ_j, а значит, существует и дуга $a \to c$. Если же $a \in \Gamma_i$, $b \in \Gamma_j$, $c \in \Gamma_k$, где i, j, k попарно различны, то в Γ_0 существуют дуги $i \to j$ и $j \to k$. Так как граф Γ_0 транзитивен, то существует и дуга $i \to k$, и тогда по определению $\Gamma = \Gamma_0\Gamma_1 \dots \Gamma_m$ каждая вершина Γ_i должна быть соединена дугой с каждой вершиной Γ_k. Случай $a, c \in \Gamma_i$, $b \in \Gamma_j$ невозможен, так как в Γ_0 не может быть одновременно дуг $i \to j$ и $j \to i$. □

Рассмотрим пересечение $\mathrm{POS} \cap \mathrm{Tour}$ подоперад операды Dir. По определению, n-я компонента этой операды есть множество $\mathrm{POS}(n) \cap \mathrm{Tour}(n)$.

Лемма 2. *Элементы* $\mathrm{POS}(n) \cap \mathrm{Tour}(n)$*, рассматриваемые как частично упорядоченные множества, суть в точности все линейно упорядоченные помеченные множества из n элементов.*

Доказательство. Если частично упорядоченное множество (как элемент $\mathrm{POS}(n)$) принадлежит $\mathrm{Tour}(n)$, то любые два его элемента сравнимы. Обратно, если $A \in \mathrm{POS}(n)$ интерпретируется как линейно упорядоченное множество, то в A, интерпретируемом как ориентированный граф, для любых двух различных вершин существует дуга, соединяющая одну из вершин с другой. □

Ввиду этой леммы операду $\mathrm{POS} \cap \mathrm{Tour}$ естественно обозначить через LOS (подразумевая очевидную аббревиатуру). Имеет место следующая диаграмма операд и их гомоморфизмов, в которой все стрелки являются естественными вложениями

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Dir} & \mathrm{Tour} \arrow[l] \\
\mathrm{POS} \arrow[u] & \mathrm{LOS} \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Хорошо известно, что семейство симметрических групп $\Sigma = \{\Sigma(n) = \Sigma_n \mid n \geq 1\}$ образует операду. Детальное описание этой операды (точнее, обширного семейства операд, в которое входит как частный случай и Σ) содержится в работе [4]. Основным результатом раздела 1 является

Теорема 3. *Имеет место изоморфизм операд*: $\mathrm{LOS} \cong \Sigma$.

Доказательство. Опишем более подробно операцию композиции в LOS. Элемент $\Gamma_0 \in \mathrm{LOS}(m)$ можно представить в виде $i_1 \to i_2 \to \dots \to i_m$, где $\{i_1, \dots, i_m\} = \{1, \dots, m\}$, и подразумевается, что остальные дуги этого графа — последовательности дуг вида $i_k \to i_{k+1} \to \dots \to i_{k+d}$. Рассмотрим для каждого i, $1 \leq i \leq m$, элемент $\Gamma_i \in \mathrm{LOS}(n_i)$. Его также можно представить в виде $j_1 \to \dots \to j_{n_i}$. Из приведенного выше описания $\Gamma_0\Gamma_1 \dots \Gamma_m$ следует, что для элементов операды LOS все сводится к подстановке вместо вершины $i \in \Gamma_0$ выражения $j_1 \to \dots \to j_{n_i}$ с последующей перенумерацией: вместо j_s должна стоять метка $n_1 + \dots + n_{i-1} + j_s$. При этом, если в Γ_0 вершины $i = i_r$ и $i' = i_{r+1}$ располагаются по соседству, т. е. имеется дуга $i \to i'$, и $\Gamma_{i'}$ представляется в виде $j'_1 \to \dots \to j'_{n'_i}$, то в $\Gamma_0\Gamma_1 \dots \Gamma_m$

будет присутствовать фрагмент $j_1 \to \cdots \to j_{n_i} \to j'_1 \to \cdots \to j'_{n'_i}$, причем вершины должны быть перенумерованы так, как было описано выше.

Взаимно однозначное соответствие между множествами $\mathrm{LOS}(m)$ и $\Sigma(m) = \Sigma_m$ таково. Частично упорядоченному множеству Γ, записываемому в виде $i_1 \to i_2 \to \cdots \to i_m$, сопоставляется подстановка $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ i_1 & i_2 & \dots & i_m \end{smallmatrix}\right)$. Результат действия элемента $\tau \in \Sigma_m$ на Γ — частично упорядоченное множество $\tau(i_1) \to \tau(i_2) \to \cdots \to \tau(i_m)$, и это соответствует умножению τ слева на $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ i_1 & i_2 & \dots & i_m \end{smallmatrix}\right)$. Покажем, что если элементу $\Gamma_0 \in \mathrm{LOS}(m)$ соответствует $\sigma \in \Sigma_m$, а элементам $\Gamma_i \in \mathrm{LOS}(n_i)$ для всех i, $1 \le i \le m$, соответствуют подстановки τ_i, то элементу $\Gamma_0\Gamma_1 \dots \Gamma_m$ соответствует подстановка $\sigma\tau_1 \dots \tau_m \in \Sigma_{n_1+\dots+n_m}$.

Для доказательства этого соответствия необходимо напомнить некоторые конструкции из [4]. Так как в данной работе обозначения несколько отличаются от обозначений [4], то соотношения из [4] сразу приводятся с необходимыми изменениями (которые носят формальный характер). Пусть $\alpha = (n_1, \dots, n_m)$. Тогда $\sigma\tau_1 \dots \tau_m = (\sigma^*\alpha)(\tau_{\sigma(1)} \sqcup \dots \sqcup \tau_{\sigma(m)})$. Здесь знак категорного копроизведения $\sqcup$, используемый в [5], соответствует обозначению $\times$ из [4], а справа от знака равенства стоит обычное умножение подстановок. Напомним, как устроены компоненты этого произведения.

Пусть $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n_{\sigma(i)}$. Подстановка $\sigma^*\alpha \in \Sigma_n$, $n = n_1 + \dots + n_m$, отображает символ $n_{\sigma(1)} + \dots + n_{\sigma(i-1)} + j$ в $n_1 + \dots + n_{\sigma(i)-1} + j$. Предполагается, что $n_0 = n_{\sigma(0)} = 0$. Будем рассматривать подстановки из Σ_n как таблицы из двух строк символов, расположенных друг над другом, где верхняя строка имеет вид $1 \dots n$. Пусть b_i — подстрока этой строки следующего вида: $(n_1 + \dots + n_{i-1} + 1) \dots (n_1 + \dots + n_{i-1} + n_i)$, $1 \le i \le m$. Из определения $\sigma^*\alpha$ следует, что верхняя строка этой таблицы — это $b_1 \dots b_m$, а нижняя — $b_{\sigma(1)} \dots b_{\sigma(m)}$. Таким образом, $\sigma^*\alpha$ можно формально получить, подставляя в $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ i_1 & i_2 & \dots & i_m \end{smallmatrix}\right)$ вместо символов i строки b_i. С другой стороны, определим c_i как строку $(n_{\sigma(1)} + \dots + n_{\sigma(i-1)} + 1) \dots (n_{\sigma(1)} + \dots + n_{\sigma(i-1)} + n_{\sigma(i)})$. Длина строки c_i равна $n_{\sigma(i)}$, как и длина строки $b_{\sigma(i)}$, и подстановку $\sigma^*\alpha$ можно записать следующим образом: $\sigma^*\alpha = \left(\begin{smallmatrix} c_1 & \dots & c_m \\ b_{\sigma(1)} & \dots & b_{\sigma(m)} \end{smallmatrix}\right)$.

Рассмотрим теперь подстановку $\tau = \tau_{\sigma(1)} \sqcup \dots \sqcup \tau_{\sigma(m)}$. По определению, $\tau(n_{\sigma(1)} + \dots + n_{\sigma(i-1)} + j) = n_{\sigma(1)} + \dots + n_{\sigma(i-1)} + \tau_{\sigma(i)}(j)$ для всех i, $1 \le i \le m$, и $1 \le j \le n_{\sigma(i)}$. Таким образом, $\tau = \left(\begin{smallmatrix} c_1 \dots c_m \\ c'_1 \dots c'_m \end{smallmatrix}\right)$, где c'_i — строки, которые получаются из строк c_i перестановками символов по правилам, определяемым подстановками $\tau_{\sigma(i)}$. Рассматривая произведение $(\sigma^*\alpha)\tau$, теперь легко убедиться, что оно имеет следующий вид: $\left(\begin{smallmatrix} c_1 & \dots & c_m \\ b'_{\sigma(1)} & \dots & b'_{\sigma(m)} \end{smallmatrix}\right)$. Здесь $b'_{\sigma(i)}$ есть результат перестановки символов строки $b_{\sigma(i)}$ по правилу, определяемому подстановкой $\tau_{\sigma(i)}$. Остается заметить, что это именно та подстановка, которая соответствует графу $\Gamma_0\Gamma_1 \dots \Gamma_m$ при описанном выше соответствии. В самом деле, нижнюю строку $(\sigma^*\alpha)\tau$ можно описать как результат подстановки в нижнюю строку подстановки σ вместо каждого символа i нижней строки подстановки τ_i с последующей перенумерацией, точно такой же, какая происходит при построении $\Gamma_0\Gamma_1 \dots \Gamma_m$. □

2. Строение подоперады, порожденной произвольным простым турниром

Определение простого турнира (напр., [3]) на операдном языке сводится к тому, что простым является турнир, который нельзя представить в виде нетривиальной операдной композиции $\sigma(\Gamma_0\Gamma_1 \dots \Gamma_m)$. Нетривиальность означает, что $m > 1$ и не все Γ_i при $i \ge 1$ равны одновершинному графу без дуг, который выше был обозначен через E. Разумеется, если используется операдная композиция, то речь должна идти о помеченных турнирах, т. е. о турнирах, множество вершин которых есть $\{1, \ldots, n\}$. Примером простого турнира является турнир C, использовавшийся в разделе 1. Если рассматривать непомеченные турниры, то это единственный простой турнир с тремя вершинами. Простых турниров с четырьмя вершинами не существует. Дальнейшую информацию можно найти в [3] и [2]. Зафиксируем некоторый простой турнир Υ с $m > 2$ вершинами и рассмотрим подопераду операды Tour, порожденную турниром Υ. Обозначим эту подопераду через Tour_Υ. Турниры, принадлежащие Tour_Υ, можно описать следующим образом. Компонента $\mathrm{Tour}_\Upsilon(1)$ состоит из тривиального одновершинного турнира E, компонента $\mathrm{Tour}_\Upsilon(m)$ состоит из всех турниров вида $\sigma\Upsilon$, где $\sigma \in \Sigma_m$. Если уже определены $T_i \in \mathrm{Tour}_\Upsilon(n_i)$, $1 \le i \le m$, то $\mathrm{Tour}_\Upsilon(n_1 + \cdots + n_m)$ содержит все турниры вида $\sigma(\Upsilon T_1 \ldots T_m)$, где $\sigma \in \Sigma_{n_1+\cdots+n_m}$. Других турниров в Tour_Υ не содержится.

В дальнейших рассуждениях будут встречаться выражения вида “турниры T_1 и T_2 равны с точностью до перенумерации вершин”. Это будет означать, что если $V(T_1)$ и $V(T_2)$ — множества вершин в T_1 и T_2 соответственно, то существует биективное отображение из $V(T_1)$ в $V(T_2)$, индуцирующее изоморфизм ориентированных графов T_1 и T_2. Например, если $V(T_1) = V(T_2) = \{1, \ldots, n\}$, то существует подстановка $\sigma \in \Sigma_n$ со свойством $T_2 = \sigma T_1$.

Будет также использоваться следующее обозначение. Если Γ_1 и Γ_2 — некоторые орграфы, то через $\Gamma_1 \to \Gamma_2$ обозначается граф, состоящий из непересекающихся подграфов Γ_1 и Γ_2, причем из каждой вершины Γ_1 проведена единственная дуга (стрелка) в каждую вершину Γ_2.

Лемма 3. *Пусть $\Gamma \in \mathrm{Tour}_\Upsilon(n)$ и $1 < k < m$. Тогда Γ нельзя представить в виде $\tau(\Gamma'_0\Gamma'_1 \ldots \Gamma'_k)$, где $\Gamma'_0 \in \mathrm{Tour}(k)$, Γ'_j при $1 \le j \le k$ — некоторые турниры (не обязательно из Tour_Υ), и $\tau \in \Sigma_n$.*

Доказательство. Проведем индукцию по $n = |V(\Gamma)|$. При $n = m$ должно быть $\Gamma = \sigma\Upsilon$, и утверждение следует из простоты турнира Υ. В общем случае предположим, что с точностью до перенумерации вершин турнир Γ имеет вид $\Gamma_0\Gamma_1 \ldots \Gamma_m$, где $\Gamma_0 = \Upsilon$, все Γ_i принадлежат операде Tour_Υ и для них должно выполняться предположение индукции. Допустим, что $\Gamma = \Gamma'_0\Gamma'_1 \ldots \Gamma'_k$ и $k < m$. Нумерация вершин в дальнейших рассуждениях не играет существенной роли, поэтому можно отождествить все Γ_i и Γ'_j при $i, j \ge 1$ с подграфами турнира Γ. Для всех $i \ge 1$ имеют место равенства

$$\Gamma_i = \bigcup_{j=1}^{k} (\Gamma_i \cap \Gamma'_j). \tag{2}$$

Самой существенной особенностью разложения (2) является то, что для любых двух индексов j, l таких, что $\Gamma_i \cap \Gamma'_j \ne \emptyset$ и $\Gamma_i \cap \Gamma'_l \ne \emptyset$, если в Υ имеется дуга $j \to l$, то в Γ_i содежится подграф $\Gamma_i \cap \Gamma'_j \to \Gamma_i \cap \Gamma'_l$, а если в Υ имеется дуга $l \to j$, то в Γ_i содержится подграф $\Gamma_i \cap \Gamma'_l \to \Gamma_i \cap \Gamma'_j$. Допустим сначала, что для некоторого i, $1 \le i \le m$, такого, что турнир Γ_i нетривиален, хотя бы одно пересечение $\Gamma_i \cap \Gamma'_j$ есть турнир с не менее чем двумя вершинами, причем $\Gamma_i \not\subseteq \Gamma'_j$. Тогда из соотношения (2) следует, что существует нетривиальное операдное разложение вида $\Gamma_i = \Gamma''_0\Gamma''_1 \ldots \Gamma''_l$, где $l \le k < m$, и турниры Γ''_t — это непустые пересечения $\Gamma_i \cap \Gamma'_j$. Разумеется, такое представление рассматривается с точностью до перенумерации вершин. Но тогда по предположению индукции для Γ_i отсюда получается противоречие.

Случай, когда для некоторого i турнир Γ_i нетривиален, но во всех пересечениях $\Gamma_i \cap \Gamma'_j$ имеется не более одной вершины, невозможен, так как в нетривиальном Γ_i не менее m вершин и $m > k$.

Остается разобрать случай, когда для каждого i существует j такой, что $\Gamma_i \subseteq \Gamma'_j$. Так как $m > k$, то отсюда следует, что по крайней мере один турнир Γ'_j есть объединение более чем одного Γ_i. Это приводит к противоречию с простотой турнира Υ. $\square$

Лемма 4. *Любой турнир из* Tour_Υ *однозначно представляется в виде* $\sigma(\Upsilon\Gamma_1 \ldots \Gamma_m)$*, где* Γ_i *— турниры из* Tour_Υ*. Более конкретно, если* $\Gamma = \Upsilon\Gamma_1 \ldots \Gamma_m = \sigma(\Upsilon\Gamma'_1 \ldots \Gamma'_m)$*, то существует подстановка* $\tau \in \Sigma_m$ *такая, что для всех* $i \geq 1$ *имеют место равенства* $\Gamma_i = \Gamma'_{\tau(i)}$*. Более того, если* $\Upsilon\Gamma_1 \ldots \Gamma_m = \Upsilon\Gamma'_1 \ldots \Gamma'_m$*, то* $\Gamma_i = \Gamma'_i$ *для всех* i.

Доказательство. Вновь используем соотношение (2), полагая в нем $k = m$. Если для какого-либо $i \geq 1$, для которого турнир Γ_i нетривиален и $\Gamma_i \neq \Gamma'_l$ ни для какого l, существует j такой, что $\Gamma_i \cap \Gamma'_j = \emptyset$, то Γ_i можно (с точностью до некоторой перенумерации вершин) представить в виде нетривиальной операдной композиции вида $\Gamma''_0\Gamma''_1 \ldots \Gamma''_s$, где $s < m$. По лемме 3 получаем противоречие.

Пусть для каждой пары неравных i, j имеет место $\Gamma_i \cap \Gamma'_j \neq \emptyset$. Рассмотрим дугу $i \to j$ в турнире Υ. Тогда в Γ существуют подграфы $\Gamma_i \to \Gamma_j$ и $\Gamma'_i \to \Gamma'_j$. Рассматривая подграфы $\Gamma_i \cap \Gamma'_j$ и $\Gamma_j \cap \Gamma'_i$, получим противоречие, так как невозможно, чтобы в турнире Γ одновременно существовали подграфы $\Gamma_i \cap \Gamma'_j \to \Gamma_j \cap \Gamma'_i$ и $\Gamma_j \cap \Gamma'_i \to \Gamma_i \cap \Gamma'_j$.

Таким образом, единственной непротиворечивой возможностью остается случай, когда каждый Γ_i равен некоторому (однозначно определенному) Γ'_j. Искомая подстановка определяется равенством $j = \tau(i)$.

Допустим, что $\Gamma = \Upsilon\Gamma_1 \ldots \Gamma_m = \Upsilon\Gamma'_1 \ldots \Gamma'_m$. Положим $n_i = |V(\Gamma_i)|$, $n'_j = |V(\Gamma'_j)|$. Пусть $\Gamma_1 = \Gamma'_1, \ldots, \Gamma_s = \Gamma'_s$ как подграфы Γ (здесь $s \geq 0$). Вспоминая, каким образом должны быть перенумерованы вершины турниров Γ_i и Γ'_j, когда эти турниры рассматриваются как подтурниры Γ, заключаем, что если, например, $n'_{s+1} \geq n_{s+1}$, то $\Gamma_{s+1} \subset \Gamma'_{s+1}$. Но по доказанному выше должна существовать подстановка τ со свойством $\Gamma_i = \Gamma'_{\tau(i)}$ для всех i. При $i = s+1$ получаем $\Gamma'_{\tau(s+1)} \subseteq \Gamma'_{s+1}$. Однако, если $\tau(s+1) \neq s+1$, то $\Gamma'_{\tau(s+1)}$ и Γ'_{s+1} не могут пересекаться по определению операдной композиции. Отсюда следует $\tau(s+1) = s+1$ и $\Gamma_{s+1} = \Gamma'_{s+1}$. Поскольку это верно для всех $s \geq 0$, заключаем, что τ есть тождественная подстановка, и последнее утверждение леммы доказано. $\square$

Замечание 1. Лемма 4 неверна для простого турнира $1 \to 2$. Обозначая этот турнир через T, будем иметь легко проверяемое равенство: $TTE = TET$.

Следуя определению 4.3 из [6], будем обозначать через FO_Ω свободную Σ-операду с базисом $\Omega = \{\Omega_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$, где $\Omega_n \subset FO_\Omega(n)$ для всех n.

Теорема 4. *Операда* Tour_Υ *изоморфна фактороперадe свободной* Σ*-операды* FO_Ω *с базисом* Ω*, состоящим из одного элемента* $\omega \in FO_\Omega(m)$*, по конгруэнции, порожденной элементами* $(\sigma\omega, \omega) \in FO_\Omega(m) \times FO_\Omega(m)$*, где* σ *принадлежит* $\mathrm{Aut}(\Upsilon)$ *— группе автоморфизмов турнира* Υ.

Доказательство. Рассмотрим сюръективный на всех компонентах гомоморфизм Σ-операд $\pi : FO_\Omega \to \mathrm{Tour}_\Upsilon$, отображающий базисный элемент ω в турнир Υ. Так как $\tau\Upsilon = \Upsilon$ при $\tau \in \mathrm{Aut}(\Upsilon)$, то конгруэнция, порожденная парой $(\tau\omega, \omega)$, содержится в ядре гомоморфизма π. Напомним, что $\mathrm{Ker}(\pi) = \{\mathrm{Ker}(\pi)(n) \mid n \geq 1\}$ (где $\mathrm{Ker}(\pi)(n) = \{(w_1, w_2) \in FO_\Omega(n) \times FO_\Omega(n) \mid \pi_n(w_1) = \pi_n(w_2)\}$) — это подоперада прямого произведения операд $FO_\Omega \times FO_\Omega$.

Для того чтобы установить, что $\mathrm{Ker}(\pi)$ порождается элементами вида $(\tau\omega, \omega)$, докажем вначале следующее утверждение. Если T_i, T'_i — турниры из Tour_Υ, $1 \leq i \leq m$, то равенство $\sigma(\Upsilon T_1 \ldots T_m) = \Upsilon T'_1 \ldots T'_m$ возможно в том и только в том случае, когда $\sigma = (\sigma_1 \sqcup \cdots \sqcup$

$\sigma_m)(p^*\alpha)$, где $p \in \Sigma_m$ принадлежит группе $\mathrm{Aut}(\Upsilon)$, и если $T_i \in \mathrm{Tour}_\Upsilon(n_i)$, то разбиение α (определение см. в [5]) имеет вид $\alpha = (n_{p^{-1}(1)}, \ldots, n_{p^{-1}(m)})$. При этом $\sigma_i \in \Sigma_{n_{p^{-1}(i)}}$. Если эти условия выполнены, то получим

$$\sigma(\Upsilon T_1 \ldots T_m) = (\sigma_1 \sqcup \cdots \sqcup \sigma_m)((p^*\alpha)(\Upsilon T_1 \ldots T_m)) =$$
$$= (\sigma_1 \sqcup \cdots \sqcup \sigma_m)((p\Upsilon)T_{p^{-1}(1)} \ldots T_{p^{-1}(m)}) = \Upsilon(\sigma_1 T_{p^{-1}(1)}) \ldots (\sigma_3 T_{p^{-1}(m)}).$$

По лемме 4 отсюда будет следовать, что $T_i' = \sigma_i T_{p^{-1}(i)}$. Это означает, что соотношение $\sigma(\Upsilon T_1 \ldots T_m) = \Upsilon T_1' \ldots T_m'$ является следствием аксиом операды и соотношений $\tau\Upsilon = \Upsilon$, т. е. ядро гомоморфизма π содержится в конгруэнции, порожденной парой $(\tau\omega, \omega)$.

Итак, докажем, что если выполнено равенство $\sigma(\Upsilon T_1 \ldots T_m) = \Upsilon T_1' \ldots T_m'$, то имеет место сформулированное выше утверждение.

Предварительно напомним ([5]), как устроена подстановка $\sigma^*\alpha$, где $\sigma \in \Sigma_m$, $\alpha = (n_1, ..., n_m)$. Если $a \leq b$ — натуральные числа, то через $[a, b]$ обозначается множество $\{a, a+1, \ldots, b\}$, называемое далее отрезком. Ограничение $\sigma^*\alpha$ на каждый отрезок $[n_{\sigma(i)} + \cdots + n_{\sigma(i-1)} + 1, \ldots, n_{\sigma(i)} + \cdots + n_{\sigma(i-1)} + n_{\sigma(i)}]$ есть неубывающая биекция на отрезок $[n_1 + \cdots + n_{\sigma(i)-1} + 1, \ldots, n_1 + \cdots + n_{\sigma(i)-1} + n_{\sigma(i)}]$. Здесь $1 \leq i \leq m$, и предполагается, что $n_0 = 0$, $\sigma(0) = 0$. Более конкретно, если $1 \leq k \leq n_{\sigma(i)}$, то $\sigma^*\alpha$ отображает $n_{\sigma(1)} + \ldots + n_{\sigma(i-1)} + k$ в $n_1 + \cdots + n_{\sigma(i)-1} + k$ для всех $1 \leq i \leq m$.

Последняя аксиома, определяющая операду, в случае ориентированных графов работает следующим образом. Рассмотрим граф $(\sigma\Gamma_0)\Gamma_1\Gamma_2 \ldots \Gamma_m = (\sigma^*\alpha)(\Gamma_0\Gamma_{\sigma(1)}\Gamma_{\sigma(2)} \ldots \Gamma_{\sigma(m)})$, где $\sigma \in \Sigma_m$, $\alpha = (n_1, \ldots, n_m)$, n_i — количество вершин в графе Γ_i, m — количество вершин в графе Γ_0 и $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$ — произвольные ориентированные графы. Пусть i, j — вершины орграфа Γ_0, $1 \leq i, j \leq m$. Если из вершины с номером i в вершину с номером j в орграфе Γ_0 ведет дуга, то из вершины с номером $\sigma(i)$ в вершину с номером $\sigma(j)$ в орграфе $\sigma\Gamma_0$ также будет вести дуга. Тогда в орграфе $(\sigma\Gamma_0)\Gamma_1\Gamma_2 \ldots \Gamma_m$ будем иметь подграф вида $\Gamma_{\sigma(i)} \to \Gamma_{\sigma(j)}$. Как подграф орграфа $(\sigma\Gamma_0)\Gamma_1\Gamma_2 \ldots \Gamma_m$, граф $\Gamma_{\sigma(i)}$ имеет вершины с номерами (метками) $n_1 + \cdots + n_{\sigma(i)-1} + k$, $1 \leq k \leq n_{\sigma(i)}$. С другой стороны, согласно определению операдной композиции, если рассматривать $\Gamma_{\sigma(i)} \subseteq \Gamma_0\Gamma_{\sigma(1)}\Gamma_{\sigma(2)} \ldots \Gamma_{\sigma(m)}$, то вершины этого подграфа будут иметь следующие метки: $n_{\sigma(i)} + \cdots + n_{\sigma(i-1)} + 1, \ldots, n_{\sigma(i)} + \cdots + n_{\sigma(i-1)} + n_{\sigma(i)}$. Подстановка $\sigma^*\alpha$ действует так, что $\Gamma_{\sigma(i)}$ как подграф $\Gamma_0\Gamma_{\sigma(1)}\Gamma_{\sigma(2)} \ldots \Gamma_{\sigma(m)}$ взаимно однозначно отображается на подграф $\Gamma_{\sigma(i)} \subseteq (\sigma\Gamma_0)\Gamma_1\Gamma_2 \ldots \Gamma_m$.

Теперь рассмотрим равенство $\sigma(\Upsilon T_1 \ldots T_m) = \Upsilon T_1' \ldots T_m'$. Обозначим этот турнир через Γ. Можно считать, что подстановка σ не является единичной. Через n_i обозначим количество вершин в T_i, а через n_i' — количество вершин в T_i', $1 \leq i \leq m$. Будем считать, что T_i' — подграф турнира Γ с вершинами $n_1' + \cdots + n_{i-1}' + 1, \ldots, n_1' + \cdots + n_i'$, где $1 \leq i \leq m$ и $n_0' = 0$, а T_i — подграф $\Upsilon T_1 \ldots T_m$ с вершинами $n_1 + \cdots + n_{i-1} + 1, \ldots, n_1 + \cdots + n_i$, где $1 \leq i \leq m$ и $n_0 = 0$. Через T_i^σ обозначим подграф с вершинами $\sigma(n_1 + \cdots + n_{i-1} + 1), \ldots, \sigma(n_1 + \cdots + n_{i-1} + n_i)$, где вершина $\sigma(a)$ соединена с вершиной $\sigma(b)$ дугой в том и только в том случае, если вершина a соединена дугой с b.

Из леммы 4 следует, что существует подстановка $\tau \in \Sigma_m$ такая, что $T_{\tau(i)}^\sigma = T_i'$, $1 \leq i \leq m$. Таким образом, по определению операдной композиции ориентированных графов, дуга $i \to j$ присутствует в турнире Υ тогда и только тогда, когда в турнире Γ присутствует подграф $T_i' \to T_j'$, или же в том и только в том случае, если в Γ имеется подграф $T_i^\sigma \to T_j^\sigma$. Если $\tau \notin \mathrm{Aut}(\Upsilon)$, то в Υ найдется дуга $i \to j$ такая, что дуги $\tau(i) \to \tau(j)$ в Υ уже не будет. В этом случае, однако, в Γ должен присутствовать подграф $T_i' \to T_j'$. Но так как $T_i' = T_{\tau(i)}^\sigma$ и $T_j' = T_{\tau(j)}^\sigma$, то в Γ присутствует подграф $T_{\tau(i)}^\sigma \to T_{\tau(j)}^\sigma$. Отсюда следует, что в турнире Υ должна присутствовать дуга $\tau(i) \to \tau(j)$. Полученное противоречие показывает, что подстановка τ принадлежит группе автоморфизмов турнира Υ.

Из $T^{\sigma}_{\tau(i)} = T'_i$, $1 \le i \le m$, следует, что для каждого i существует подстановка $\sigma_i \in \Sigma_{n_{\tau(i)}} = \Sigma_{n'_i}$, для которой $\sigma_i T_{\tau(i)} = T'_i$.

Положим $p = \tau^{-1}$ и $\alpha = (n_{\tau(1)}, \ldots, n_{\tau(m)})$. Тогда

$$(p\Upsilon)T_{\tau(1)} \ldots T_{\tau(m)} = \Upsilon T_{\tau(1)} \ldots T_{\tau(m)} = (p^*\alpha)(\Upsilon T_1 \ldots T_m).$$

Следовательно,

$$(\sigma_1 \sqcup \cdots \sqcup \sigma_m)(p^*\alpha)(\Upsilon T_1 \ldots T_m) = (\sigma_1 \sqcup \cdots \sqcup \sigma_m)\Upsilon T_{\tau(1)} \ldots T_{\tau(m)} =$$
$$= \Upsilon(\sigma_1 T_{\tau(1)}) \ldots (\sigma_m T_{\tau(m)}) = \Upsilon T'_1 \ldots T'_m.$$

Итак, подстановки σ и $\xi = (\sigma_1 \sqcup \cdots \sqcup \sigma_m)(p^*\alpha)$ действуют на турнире $\Upsilon T_1 \ldots T_m$ одинаковым образом. По определению этого действия, биективные отображения σ и ξ должны принимать одни и те же значения на метках всех вершин данного турнира. Следовательно, $\sigma = (\sigma_1 \sqcup \cdots \sqcup \sigma_m)(p^*\alpha)$.

Прежде чем завершить доказательство, отметим простое комбинаторное тождество

$$(\sigma_1 \sqcup \cdots \sqcup \sigma_m)(p^*\alpha) = (p^*\alpha)(\sigma_{p(1)} \sqcup \cdots \sqcup \sigma_{p(m)}).$$

Из него следует, что произвольный элемент конгруэнции $\mathrm{Ker}(\pi)$ (с точностью до умножения на подстановку) имеет вид

$$((p\omega)\omega'_{p(1)} \ldots \omega'_{p(m)}, \omega\omega'_1 \ldots \omega'_m),$$

где $p \in \mathrm{Aut}(\Upsilon)$ и $\omega'_i \in \mathrm{Tour}_{\Upsilon}(n'_i)$ для всех i. Осталось рассмотреть равенство

$$((p\omega)\omega'_{p(1)} \ldots \omega'_{p(m)}, \omega\omega'_1 \ldots \omega'_m) = (p\omega, \omega)(\omega'_1, \omega'_1) \ldots (\omega'_m, \omega'_m).$$

Каждый "множитель" в правой части принадлежит конгруэнции $\mathrm{Ker}(\pi)$, причем элементы (ω'_i, ω'_i) содержатся в любой конгруэнции по определению. Следовательно, конгруэнция $\mathrm{Ker}(\pi)$ порождается элементами $(p\omega, \omega)$, где $p \in \mathrm{Aut}(\Upsilon)$. □

Замечание 2. Теорема 4 неверна для простого турнира $1 \to 2$. В замечании 1 уже отмечено, что для такого турнира неверна лемма 4, а следовательно, и основанное на ней доказательство теоремы 4. С другой стороны, группа автоморфизмов турнира $1 \to 2$ тривиальна. Если бы утверждение теоремы 4 выполнялось для этого турнира, то порожденная им операда LOS должна быть свободной. Но, как показано в теореме 3, эта операда не является свободной. Таким образом, результаты данного раздела справедливы лишь для простых турниров с не менее чем тремя вершинами.

Авторы выражают благодарность рецензенту за полезные замечания и предложения.

Литература

[1] Тронин С.Н., Семенова А.В. *Операды конечных помеченных графов* // Изв. вузов. Математика. – 2004. – № 4. – С. 50–60.

[2] Boudabbous Y., Dammak J., Ille P. *Indecomposability and duality of tournaments* // Discr. Math. – 2000. – V. 223. – № 1. – P. 55–82.

[3] Мун Дж. В. *Вложение турниров в простые турниры* // Теория графов. Покрытия, укладки, турниры. – М.: Мир, 1974. – С. 169 – 174.

[4] Тронин С.Н., Гареева Л.Д. *О некоторых операдах, связанных с операдой симметрических групп.* I // Изв. вузов. Математика. – 2004. – № 9. – С. 61–72.

[5] Тронин С.Н. *Абстрактные клоны и операды* // Сиб. матем. журн. – 2002. – Т. 43. – № 4. – С. 924–936.

[6] Тронин С.Н. *Операды и многообразия алгебр, определяемые полилинейными тождествами* // Сиб. матем. журн. – 2006. – Т. 47. – № 3. – С. 670–694.
[7] Семенова А.В. *Алгебры над операдой конечных помеченных графов* // Изв. вузов. Математика. – 2006. – № 6. – С. 65–73.
[8] Абдулмянова Л.Т. *О строении операды турниров* // Лобачевские чтения-2006. Материалы 5-й молодежной научной школы-конференции (Казань, 28 ноября – 2 декабря 2006 года). Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 34. – Казань: Изд-во Казанского матем. об-ва, 2006. – С. 3–4.
[9] Харари Ф., Палмер Э. *Перечисление графов.* – М.: Мир, 1977. – 324 с.
[10] Харари Ф. *Теория графов.* – М.: Мир, 1973. – 304 с.
[11] Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. *Лекции по теории графов.* – М.: Наука, 1990. – 384 с.

С.Н. Тронин

доцент, кафедра алгебры и математической логики,
Казанский государственный университет,
420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 18,

`e-mail:` serge.tronin@ksu.ru

Л.Т. Абдулмянова

студентка, кафедра алгебры и математической логики,
Казанский государственный университет,
420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 18

`e-mail:` lilabd@rambler.ru

S.N. Tronin

Associate Professor, Chair of Algebra and Mathematical Logics,
Kazan State University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

`e-mail:` serge.tronin@ksu.ru

L.T. Abdulmyanova

Student, Chair of Algebra and Mathematical Logics,
Kazan State University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia

`e-mail:` lilabd@rambler.ru