Том 1, Выпуск 2
Стр. 3–11 (2023)

УДК 517.983, 517.986
MSC 46L10, 46L51

К теории τ-измеримых операторов, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана. II

А.М. Бикчентаев

Аннотация. Пусть алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ операторов действует в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, τ – точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$. Пусть $S(\mathcal{M},\tau)$ – *-алгебра всех τ-измеримых операторов и $X, Y \in S(\mathcal{M},\tau)$. Тогда (i) если $|Y| \leq |X|$, то $\ker(X) \subset \ker(Y)$; (ii) если X обратим слева с $X_l^{-1} \in \mathcal{M}$, то $\operatorname{ran}(X^*) = \mathcal{H}$. Получено следующее обобщение теоремы Путнама (1951), см. также задачу 188 в книге Халмош П. Гильбертово пространство в задачах. Мир, М., 1970: положительный самокоммутатор $A^*A - AA^*$ ($A \in S(\mathcal{M},\tau)$) не может иметь обратного в $\mathcal{M}$. Пусть I – единица алгебры $\mathcal{M}$ и $\tau(I) = +\infty$, $A, B \in S(\mathcal{M},\tau)$ и $A = A^3$. Тогда коммутатор $[A, B]$ не может иметь вид $\lambda I + K$, где $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и оператор $K \in S(\mathcal{M},\tau)$ τ-компактен.

Ключевые слова: гильбертово пространство, линейный оператор, алгебра фон Неймана, нормальный след, измеримый оператор, обратимость, коммутатор.

Введение

Пусть алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ операторов действует в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, τ – точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$. Пусть $S(\mathcal{M},\tau)$ – *-алгебра всех τ-измеримых операторов. Данная работа продолжает исследования свойств τ-измеримых операторов, начатые в [1]. Перечислим полученные результаты. Пусть операторы $X, Y \in S(\mathcal{M},\tau)$. Тогда

(i) если $|Y| \leq |X|$, то $\ker(X) \subset \ker(Y)$;

(ii) если X обратим слева с $X_l^{-1} \in \mathcal{M}$, то $\operatorname{ran}(X^*) = \mathcal{H}$ (теорема 2).

В теореме 4 получено следующее обобщение теоремы Путнама [2] (см. также [3, задача 188]): Положительный самокоммутатор $A^*A - AA^*$ ($A \in S(\mathcal{M},\tau)$) не может иметь обратного в $\mathcal{M}$. Доказательство теоремы 4 является новым и для *-алгебры $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ всех ограниченных линейных операторов в $\mathcal{H}$, снабженной каноническим следом $\tau = \operatorname{tr}$. Пусть I – единица алгебры $\mathcal{M}$ и $\tau(I) = +\infty$, $A, B \in S(\mathcal{M},\tau)$ и $A = A^3$. Тогда коммутатор $[A, B]$ не может иметь вид $\lambda I + K$, где $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и оператор $K \in S(\mathcal{M},\tau)$ является

Благодарности. Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2022-882).

τ-компактным (теорема 5). Наконец, приведено новое прямое доказательство следствия 3.10 из [1].

1. Обозначения и определения

Пусть $\mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$ – решетка проекторов ($P = P^2 = P^*$) в $\mathcal{M}$, $P^{\perp} = I - P$ для $P \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$, $\mathcal{M}^+$ – конус положительных элементов из $\mathcal{M}$ и $\|\cdot\|$ – C^*-норма на $\mathcal{M}$. Отображение $\varphi : \mathcal{M}^+ \to [0, +\infty]$ называется *следом*, если $\varphi(X+Y) = \varphi(X) + \varphi(Y)$, $\varphi(\lambda X) = \lambda\varphi(X)$ для всех $X, Y \in \mathcal{M}^+$, $\lambda \geq 0$ (при этом $0 \cdot (+\infty) \equiv 0$) и $\varphi(Z^*Z) = \varphi(ZZ^*)$ для всех $Z \in \mathcal{M}$. След φ называется (см. [4, гл. V, §2])

- *точным*, если $\varphi(X) > 0$ для всех $X \in \mathcal{M}^+$, $X \neq 0$;
- *нормальным*, если $X_i \nearrow X$ $(X_i, X \in \mathcal{M}^+) \Rightarrow \varphi(X) = \sup \varphi(X_i)$;
- *полуконечным*, если $\varphi(X) = \sup\{\varphi(Y) : \ Y \in \mathcal{M}^+, \ Y \leq X, \ \varphi(Y) < +\infty\}$ для каждого $X \in \mathcal{M}^+$.

Оператор в $\mathcal{H}$ (не обязательно ограниченный или плотно определенный) называется *присоединенным к алгебре фон Неймана* $\mathcal{M}$, если он перестановочен с любым унитарным оператором из коммутанта $\mathcal{M}'$ алгебры $\mathcal{M}$. Далее всюду τ – точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$. Замкнутый оператор X, присоединенный к $\mathcal{M}$, имеющий всюду плотную в $\mathcal{H}$ область определения $\mathcal{D}(X)$, называется *τ-измеримым*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой $P \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$, что $P\mathcal{H} \subset \mathcal{D}(X)$ и $\tau(P^{\perp}) < \varepsilon$. Множество $S(\mathcal{M}, \tau)$ всех τ-измеримых операторов является *-алгеброй относительно перехода к сопряженному оператору, умножению на скаляр и операций сильного сложения и умножения, получаемых замыканием обычных операций [5, гл. IX]. Для семейства $\mathcal{L} \subset S(\mathcal{M}, \tau)$ обозначим через $\mathcal{L}^+$ и $\mathcal{L}^{\mathrm{h}}$ его положительную и эрмитову части соответственно. Частичный порядок в $S(\mathcal{M}, \tau)^{\mathrm{h}}$, порожденный собственным конусом $S(\mathcal{M}, \tau)^+$, будем обозначать через $\leq$. Если $X \in S(\mathcal{M}, \tau)$ и $X = U|X|$ – полярное разложение X, то $U \in \mathcal{M}$ и $|X| = \sqrt{X^*X} \in S(\mathcal{M}, \tau)^+$. Через $\mu(t; X)$ обозначим *функцию сингулярных значений* оператора $X \in S(\mathcal{M}, \tau)$, т. е. невозрастающую непрерывную справа функцию $\mu(\cdot; X) \colon (0, \infty) \to [0, \infty)$, заданную формулой

$$\mu(t; X) = \inf\{\|XP\| : \ \ P \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}} \ \text{ и } \ \tau(P^{\perp}) \leq t\}, \quad t > 0.$$

Лемма 1 ([6]). *Пусть $X, Y \in S(\mathcal{M}, \tau)$. Тогда*

(i) $\mu(t; X) = \mu(t; |X|) = \mu(t; X^*)$ *для всех* $t > 0$;

(ii) $\mu(t; \lambda X) = |\lambda|\mu(t; X)$ *для всех* $\lambda \in \mathbb{C}$ *и* $t > 0$;

(iii) *если* $|X| \leq |Y|$, *то* $\mu(t; X) \leq \mu(t; Y)$ *для всех* $t > 0$;

(iv) $\mu(t; |X|^{\alpha}) = \mu(t; X)^{\alpha}$ *для всех* $\alpha > 0$ *и* $t > 0$;

(v) $X \in \mathcal{M} \Leftrightarrow \sup\limits_{t>0} \mu(t; X) < +\infty$; *и при этом* $\lim\limits_{t \to +0} \mu(t; X) = \sup\limits_{t>0} \mu(t; X) = \|X\|$.

Пусть $S_0(\mathcal{M}, \tau) = \{A \in S(\mathcal{M}, \tau) : \ \lim\limits_{t \to +\infty} \mu(t; A) = 0\}$ – *-идеал τ-компактных операторов в $S(\mathcal{M}, \tau)$. Оператор $A \in S(\mathcal{M}, \tau)$ называется *гипонормальным*, если $A^*A \geq AA^*$;

когипонормальным, если A^* гипонормален. Оператор $X \in S(\mathcal{M},\tau)$ называется *коммутатором*, если $X = [A,B] = AB - BA$ для некоторых $A, B \in S(\mathcal{M},\tau)$. *Самокоммутатор* оператора $A \in S(\mathcal{M},\tau)$ есть оператор $[A^*, A] = A^*A - AA^*$.

Если $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ – *-алгебра всех ограниченных линейных операторов в $\mathcal{H}$ и $\tau = \mathrm{tr}$ – канонический след, то $S(\mathcal{M},\tau)$ совпадает с $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $S_0(\mathcal{M},\tau)$ совпадает с *-идеалом компактных (=вполне непрерывных) операторов в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ и

$$\mu(t;X) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(X)\chi_{[n-1,n)}(t), \quad t > 0,$$

где $\{s_n(X)\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность s-чисел оператора X; χ_A – индикатор множества $A \subset \mathbb{R}$.

Если $\mathcal{M}$ абелева (т. е. коммутативна), то $\mathcal{M} \simeq L^{\infty}(\Omega,\Sigma,\mu)$ и $\tau(f) = \int\limits_{\Omega} f\,\mathrm{d}\mu$, где (Ω,Σ,μ) – локализуемое пространство с мерой, *-алгебра $S(\mathcal{M},\tau)$ совпадает с алгеброй всех измеримых комплексных функций f на (Ω,Σ,μ), которые ограничены всюду, кроме множества конечной меры. Функция $\mu(t;f)$ совпадает с невозрастающей перестановкой функции $|f|$; свойства перестановок см. в [7].

2. Основные результаты

Теорема 2. *Пусть операторы* $X, Y \in S(\mathcal{M},\tau)$. *Тогда*

(i) *если* $|Y| \le |X|$, *то* $\ker(X) \subset \ker(Y)$;

(ii) *если* X *обратим слева с* $X_l^{-1} \in \mathcal{M}$, *то* $\mathrm{ran}(X^*) = \mathcal{H}$.

Доказательство. (i) Поскольку $\ker(Z) = \ker(|Z|)$ для всех $Z \in S(\mathcal{M},\tau)$, можем считать, что $0 \le Y \le X$. Тогда найдется оператор $A \in \mathcal{M}$ с $\|A\| \le 1$ такой, что $Y^{1/2} = AX^{1/2}$ [8, предложение на с. 261]. Следовательно,

$$\ker(X^{1/2}) \subset \ker(Y^{1/2}). \tag{1}$$

Заметим, что $X = X^{1/2} \cdot X^{1/2}$ и

$$\ker(X^{1/2}) \subset \ker(X),$$

$\mathcal{D}(X) \subset \mathcal{D}(X^{1/2})$. Если $\xi \in \mathcal{D}(X)$ и $X\xi = 0$, то $\langle X\xi, \xi\rangle = \|X^{1/2}\xi\|^2 = 0$ и

$$\ker(X^{1/2}) \subset \ker(X).$$

Поэтому $\ker(X^{1/2}) = \ker(X)$ и утверждение следует из (1).

(ii) Покажем, что для любого вектора $\xi \in \mathcal{H}$ найдется вектор $\eta \in \mathcal{H}$ такой, что $X^*\eta = \xi$. Для произвольного вектора $\zeta \in \mathcal{D}(X)$ найдется вектор $h \in \mathrm{ran}(X)$ такой, что

$X\zeta = h$ и $\zeta = X_l^{-1}h$. Линейный функционал $\varphi(h) = \langle \xi, \zeta\rangle = \langle \xi, X_l^{-1}h\rangle$ является ограниченным на $\operatorname{ran}(X)$, поскольку

$$|\varphi(h)| \leq \|\xi\|\,\|X_l^{-1}h\| \leq \|X_l^{-1}\|\,\|\xi\|\,\|h\|.$$

Проверим, что линеал $\operatorname{ran}(X)$ замкнут в $\mathcal{H}$. Пусть последовательность $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(X)$ такая, что $\{X\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ является $\|\cdot\|$-последовательностью Коши в $\operatorname{ran}(X)$. Тогда $X\psi_n \to f \in \mathcal{H}$ при $n \to \infty$. Так как $X_l^{-1}(X\psi_n) = \psi_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$, $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ является $\|\cdot\|$-последовательностью Коши. Существует вектор $\psi \in \mathcal{H}$ такой, что $\psi_n \to \psi$ при $n \to \infty$. Следовательно, $\psi_n \to \psi$ и $X\psi_n \to f$ при $n \to \infty$. Поскольку график $\Gamma(X) = \{(g, Xg) :\ g \in \mathcal{D}(X)\}$ является $\|\cdot\|$-замкнутым в $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$, имеем $f \in \mathcal{D}(X)$ и $f = X\psi$. По теореме Рисса о представлении линейных функционалов найдется единственный вектор $\eta \in \mathcal{H}$ такой, что $\varphi(h) = \langle \eta, h\rangle$, т. е. $\langle \xi, \zeta\rangle = \langle \eta, X\zeta\rangle$ для всех $\zeta \in \mathcal{D}(X)$. Таким образом, $\eta \in \mathcal{D}(X^*)$ и $X^*\eta = \xi$. Этим завершается доказательство теоремы. □

Следствие 3. *Если оператор $X \in S(\mathcal{M}, \tau)$ гипонормален, то* $\ker(X) \subseteq \ker(X^*)$.

Доказательство. Пусть $A \in S(\mathcal{M}, \tau)^+$, числа $0 < \alpha < \beta$ и вектор $\xi \in \mathcal{H}$. Из соотношений

$$\begin{aligned} A^{\alpha}\xi = 0 \quad &\Rightarrow \quad A^{\beta}\xi = A^{\beta-\alpha}(A^{\alpha}\xi) = 0; \\ A\xi = 0 \quad &\Rightarrow \quad 0 =< A\xi, \xi >=< A^{1/2}\xi, A^{1/2}\xi >= \|A^{1/2}\xi\|^2 \end{aligned}$$

следует $\ker(A^q) = \ker(A)$ для всех $q > 0$. Поэтому

$$\ker(X) = \ker(|X|) = \ker(|X|^2) \subseteq \ker(|X^*|^2) = \ker(|X^*|) = \ker(X^*).$$

□

Если когипонормальный оператор $X \in S(\mathcal{M}, \tau)$ имеет левый обратный в *-алгебре $S(\mathcal{M}, \tau)$, то X обратим в $S(\mathcal{M}, \tau)$ [9, следствие 11]. Более того, если $X_l^{-1} \in \mathcal{M}$, то X обратим в $\mathcal{M}$, т. е. существует оператор $X^{-1} \in \mathcal{M}$, см. доказательство теоремы 2 в [9].

Следующее утверждение обобщает классическую теорему Путнама для ограниченного гипонормального оператора [2] (см. также [3, задача 188]) на случай τ-измеримого неограниченного гипонормального оператора.

Теорема 4. *Положительный самокоммутатор $A^*A - AA^*$ $(A \in S(\mathcal{M}, \tau))$ не может иметь обратного в $\mathcal{M}$.*

Доказательство. Если $\tau(I) < +\infty$, то каждый гипонормальный (или когипонормальный) оператор $A \in S(\mathcal{M}, \tau)$ является нормальным, т. е. $A^*A - AA^* = 0$, см. [10, следствие 2.6]. Осталось рассмотреть случай $\tau(I) = +\infty$. Пусть, напротив, $A \in S(\mathcal{M}, \tau)$ обладает обратным в $\mathcal{M}$. Тогда $A^*A - AA^* \geq \varepsilon I$ для некоторого числа $\varepsilon > 0$. Для каждого числа

$t > 0$ имеем

$$\mu(t; AA^*) = \mu(t; |A^*|^2) = \mu(t; |A^*|)^2 = \mu(t; |A|)^2 = \mu(t; |A|^2) = \mu(t; A^*A) \geq \\ \geq \mu(t; AA^* + \varepsilon I) \geq \mu(t; AA^*)$$

в силу пп. (iv) и (iii) леммы 1. Следовательно,

$$\mu(t; AA^* + \varepsilon I) = \mu(t; AA^*) \text{ для всех } t > 0.$$

С другой стороны, поскольку $AA^* \neq 0$ и $\varepsilon I \geq \lim\limits_{t \to +\infty} \mu(t; \varepsilon I) \cdot I = \varepsilon I$, в силу [11, предложение 2.2] найдется такое число $s > 0$, что

$$\mu(s; AA^*) < \mu(s; AA^* + \varepsilon I).$$

Получили противоречие. □

Если $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\tau = \mathrm{tr}$, пространство $\mathcal{H}$ сепарабельно и $\dim \mathcal{H} = +\infty$, то оператор $X \in \mathcal{M}$ является коммутатором $\Leftrightarrow$ X не представляется в виде суммы $\lambda I + K$, где $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и оператор $K \in \mathcal{M}$ вполне непрерывен [12, теорема 3], [3, следствие из задачи 182].

Теорема 5. *Пусть $\tau(I) = +\infty$, операторы $A, B \in S(\mathcal{M}, \tau)$ и $A = A^3$. Тогда коммутатор $[A, B]$ не может иметь вид $\lambda I + K$, где $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и оператор $K \in S_0(\mathcal{M}, \tau)$.*

Доказательство. Предположим, что

$$AB - BA = \lambda I + K \tag{2}$$

с некоторыми $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $K \in S_0(\mathcal{M}, \tau)$. Тогда $A, B \notin S_0(\mathcal{M}, \tau)$. Умножив обе части равенства (2) справа на оператор A, получим

$$ABA = \lambda A + BA^2 + KA. \tag{3}$$

Умножив обе части равенства (2) слева на оператор A, получим

$$ABA = -\lambda A + A^2B - AK. \tag{4}$$

Вычитая почленно (4) из (3), имеем

$$2\lambda A = A^2B - BA^2 - KA - AK. \tag{5}$$

Пусть $A = P - Q$ – представление трипотента A [13, предложение 1] с $P = P^2$, $Q = Q^2$ из $S(\mathcal{M}, \tau)$ и $PQ = QP = 0$. Тогда $A^2 = P + Q$ является идемпотентом и (5) перепишется в виде

$$2\lambda(P - Q) = (P + Q)B - B(P + Q) - K(P - Q) - (P - Q)K. \tag{6}$$

Умножив обе части равенства (6) слева и справа на идемпотент P, получим $2\lambda P = -2PKP \in S_0(\mathcal{M}, \tau)$, т. е. $P \in S_0(\mathcal{M}, \tau)$. Умножив обе части равенства (6) слева и справа на идемпотент Q, получим $-2\lambda Q = 2QKQ \in S_0(\mathcal{M}, \tau)$, т. е. $Q \in S_0(\mathcal{M}, \tau)$. Следовательно, $A = P - Q \in S_0(\mathcal{M}, \tau)$. Получили противоречие. $\square$

Напомним следствие 3.10 из [1]: Пусть оператор $A \in S(\mathcal{M}, \tau)$ и $A = A^2$. Если A гипонормален или когипонормален, то A нормален, тем самым $A \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$. Приведем здесь прямое доказательство этого утверждения. Заметим, что если $A \in S(\mathcal{M}, \tau)$, то $A = A^2$ тогда и только тогда, когда $A = |A^*|\,|A|$, см. [1, теорема 3.3]. Для гипонормального оператора A имеем

$$\begin{aligned}|A|^2 = A^*A = |A|\,|A^*| \cdot |A^*|\,|A| = |A| \cdot AA^* \cdot |A| \le |A| \cdot A^*A \cdot |A| = \\ = |A| \cdot |A|^2 \cdot |A| = |A|^4\end{aligned}$$

и $|A|^2 \le |A|^4$. Поэтому $|A| \le |A|^2$ и для всех чисел $t > 0$ имеем

$$\mu(t; A) = \mu(t; |A|) \le \mu(t; |A|^2) = \mu(t; |A|)^2 = \mu(t; A)^2$$

в силу пп. (i) и (iv) леммы 1. Следовательно, $\mu(t; A) \in \{0\} \bigcup [1, +\infty)$ для всех $t > 0$. С другой стороны,

$$\begin{aligned}|A^*|^2 = AA^* = |A^*|\,|A| \cdot |A|\,|A^*| = |A^*| \cdot A^*A \cdot |A^*| \ge |A^*| \cdot AA^* \cdot |A^*| = \\ = |A^*| \cdot |A^*|^2 \cdot |A^*| = |A^*|^4\end{aligned}$$

и $|A^*|^2 \ge |A^*|^4$. Поэтому $|A^*| \ge |A^*|^2$ и для всех чисел $t > 0$ имеем

$$\mu(t; A) = \mu(t; A^*) = \mu(t; |A^*|) \ge \mu(t; |A^*|^2) = \mu(t; |A^*|)^2 = \mu(t; A^*)^2 = \mu(t; A)^2$$

в силу пп. (i) и (iv) леммы 1. Следовательно, $\mu(t; A) \in [0, 1]$ для всех $t > 0$.

Таким образом, $\mu(t; A) \in \{0, 1\}$ для всех $t > 0$ и в силу п. (v) леммы 1 получаем $\|A\| \le 1$. Следовательно, либо $A = 0$, либо $\|A\| = 1$. Поэтому $A \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$.

Для когипонормального оператора $A = A^2$ заметим, что оператор $A^* = (A^*)^2$ гипонормален.

Список литературы

[1] А. М. Бикчентаев, *К теории τ-измеримых операторов, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана*, Матем. заметки **98** (3), 337–348 (2015).
DOI: https://doi.org/10.4213/mzm10638

[2] C. R. Putnam, *On commutators of bounded matrices*, Amer. J. Math. **73** (1), 127–131 (1951).
DOI: https://doi.org/10.2307/2033033

[3] П. Халмош, *Гильбертово пространство в задачах*, Мир, М., 1970.

[4] M. Takesaki, *Theory of operator algebras.* I. Encyclopaedia Math. Sci. 124. Operator Algebras and Non-commutative Geometry, 5. Springer-Verlag, Berlin, 2002.
URL: https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4612-6188-9

[5] M. Takesaki, *Theory of operator algebras.* II. Encyclopaedia Math. Sci. 125. Operator Algebras and Non-commutative Geometry, 6. Springer-Verlag, Berlin, 2003.
URL: https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-10451-4

[6] T. Fack, H. Kosaki, *Generalized s-numbers of τ-measurable operators*, Pacific J. Math. **123** (2), 269–300 (1986).
URL: https://projecteuclid.org/journals/pacific-journal-of-mathematics/volume-123/issue-2/Generalized-s-numbers-of-tau-measurable-operators/pjm/1102701004.full

[7] С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов, *Интерполяция линейных операторов*, Наука, М., 1978.

[8] F. J. Yeadon, *Convergence of measurable operators*, Proc. Cambridge Phil. Soc. **74** (2), 257–268 (1973).
DOI: https://doi.org/10.1017/S0305004100048052

[9] А. М. Бикчентаев, *Существенно обратимые измеримые операторы, присоединенные к полуконечной алгебре фон Неймана, и коммутаторы*, Сиб. матем. журн. **63** (2), 272–282 (2022).
DOI: https://doi.org/10.33048/smzh.2022.63.203

[10] А. М. Бикчентаев, *О нормальных τ-измеримых операторах, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана*, Матем. заметки **96** (3), 350–360 (2014).
DOI: https://doi.org/10.4213/mzm10311

[11] V. I. Chilin, A. V. Krygin, Ph. A. Sukochev, *Extreme points of convex fully symmetric sets of measurable operators*, Integral Equat. Operator Theory **15** (2), 186–226 (1992).
DOI: https://doi.org/10.1007/BF01204237

[12] A. Brown, C. Pearcy, *Structure of commutators of operators*, Ann. Math. **82** (1), 112–127 (1965).
DOI: https://doi.org/10.2307/1970564

[13] A. M. Bikchentaev, R. S. Yakushev, *Representation of tripotents and representations via tripotents*, Linear Algebra Appl. **435** (9), 2156–2165 (2011).
DOI: https://doi.org/10.1016/j.laa.2011.04.003

Айрат Мидхатович Бикчентаев
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Научно-образовательный математический центр ПФО,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,
e-mail: Airat.Bikchentaev@kpfu.ru

Volume 1, Issue 2
pp. 3–11 (2023)

UDC 517.983, 517.986
MSC 46L10, 46L51

Concerning the theory of τ-measurable operators affiliated to a semifinite von Neumann algebra. II

A.M. Bikchentaev

Abstract. Let a von Neumann algebra $\mathcal{M}$ of operators act on a Hilbert space $\mathcal{H}$, let τ be a faithful normal semifinite trace on $\mathcal{M}$. Let $S(\mathcal{M},\tau)$ be the *-algebra of all τ-measurable operators. Assume that $X, Y \in S(\mathcal{M},\tau)$. We have (i) if $|Y| \le |X|$ then $\ker(X) \subset \ker(Y)$; (ii) if X is left invertible with $X_l^{-1} \in \mathcal{M}$ then $\mathrm{ran}(X^*) = \mathcal{H}$. The following generalizes of the Putnan theorem (1951), see also Problem 188 in the book (Halmos P. R. A Hilbert space problem book. D. van Nostrand company, inc., London, 1967): A positive selfcommutator $A^*A - AA^*$ $(A \in S(\mathcal{M},\tau))$ cannot have the inverse in $\mathcal{M}$. Let I be the unit of the algebra $\mathcal{M}$ and $\tau(I) = +\infty$, let $A, B \in S(\mathcal{M},\tau)$ and $A = A^3$. Then the commutator $[A, B]$ cannot have a form $\lambda I + K$, where $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ and an operator $K \in S(\mathcal{M},\tau)$ is τ-compact.

Keywords: Hilbert space, linear operator, von Neumann algebra, normal trace, measurable operator, invertibility, commutator.

References

[1] A. M. Bikchentaev, *Concerning the theory of τ-measurable operators affiliated to a semifinite von Neumann algebra*, Math. Notes **98** (3), 382–391 (2015).
DOI: https://doi.org/10.1134/S0001434615090035

[2] C. R. Putnam, *On commutators of bounded matrices*, Amer. J. Math. **73** (1), 127–131 (1951).
DOI: https://doi.org/10.2307/2033033

[3] P. R. Halmos, *A Hilbert Space Problem Book*, Princeton, N.J., 1967.

[4] M. Takesaki, *Theory of operator algebras.* I. Encyclopaedia Math. Sci. 124. Operator Algebras and Non-commutative Geometry, 5. Springer-Verlag, Berlin, 2002.
URL: https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4612-6188-9

[5] M. Takesaki, *Theory of operator algebras.* II. Encyclopaedia Math. Sci. 125. Operator Algebras and Non-commutative Geometry, 6. Springer-Verlag, Berlin, 2003.
URL: https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-10451-4

Acknowledgements. The work is performed under the development program of Volga Region Mathematical Center (agreement no. 075-02-2022-882).

[6] T. Fack, H. Kosaki, *Generalized s-numbers of τ-measurable operators*, Pacific J. Math. **123** (2), 269–300 (1986).
URL: https://projecteuclid.org/journals/pacific-journal-of-mathematics/volume-123/issue-2/Generalized-s-numbers-of-tau-measurable-operators/pjm/1102701004.full

[7] S. G. Krein, Ju. I. Petunin, E. M. Semenov, *Interpolation of Linear Operators*, Translations of Mathematical Monographs **54**, AMS, Providence R.I., 1982.

[8] F. J. Yeadon, *Convergence of measurable operators*, Proc. Cambridge Phil. Soc. **74** (2), 257–268 (1973).
DOI: https://doi.org/10.1017/S0305004100048052

[9] A. M. Bikchentaev, *Essentially invertible measurable invertible operators affiliated to a semifinite von Neumann algebra and commutators*, Siberian Math. J. **63** (2), 224–232 (2022).
DOI: https://doi.org/10.33048/smzh.2022.63.203

[10] A. M. Bikchentaev, *On normal τ-measurable operators affiliated with semifinite von Neumann algebras*, Math. Notes, **96** (3), 332–341 (2014).
DOI: https://doi.org/10.1134/S0001434614090053

[11] V. I. Chilin, A. V. Krygin, Ph. A. Sukochev, *Extreme points of convex fully symmetric sets of measurable operators*, Integral Equat. Operator Theory **15** (2), 186–226 (1992).
DOI: https://doi.org/10.1007/BF01204237

[12] A. Brown, C. Pearcy, *Structure of commutators of operators*, Ann. Math. **82** (1), 112–127 (1965).
DOI: https://doi.org/10.2307/1970564

[13] A. M. Bikchentaev, R. S. Yakushev, *Representation of tripotents and representations via tripotents*, Linear Algebra Appl. **435** (9), 2156–2165 (2011).
DOI: https://doi.org/10.1016/j.laa.2011.04.003

Airat Midkhatovich Bikchentaev
Kazan Federal University,
Volga Region Mathematical Center,
18 Kremlyovskaya str., Kazan 420008, Russia,
e-mail: Airat.Bikchentaev@kpfu.ru