КОСМОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ С НЕМИНИМАЛЬНОЙ КИНЕТИЧЕСКОЙ СВЯЗЬЮ

Р.А. Абзалов[1], *С.В. Сушков*[2]

[1]*Институт физики, Казанский (Приволжский) федеральный университет*,
[2]*Институт физики, Казанский (Приволжский) федеральный университет*

[1]E-mail: , [2]E-mail:

В работе исследована космологическая модель с неминимальной кинетической связью скалярного поля с кривизной, а также идеальной двухкомпонентной жидкостью и космологической постоянной. Показано, что рассматриваемая модель хорошо описывает основные эпохи эволюции Вселенной, включая первичную инфляцию, радиационно-доминированную стадию, материально-доминированную стадию, и стадию современного ускоренного расширения (вторичную инфляцию).

ЭФФЕКТ САМОДЕЙСТВИЯ В ДЛИННОЙ ГОРЛОВИНЕ

Е.В. Асадуллина[1], *А.А. Попов*[2]

[1]*Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань*, [2]*Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань*

[1]E-mail: asadulinaelena@gmail.com, [2]E-mail: apopov@ksu.ru

Аннотация. *В работе исследуется сила самодействия на статический заряд, являющийся источником массивного неминимально связанного с кривизной скалярного поля, в области пространства-времени, называемой длинной горловиной.*

1 Введение

Изучение силы самодействия имеет длинную историю. Оригинальные исследования сосредотачивались на самоускорении электрически заряженных точечных частиц в плоском пространстве-времени [1]. Позже ДеВитт, Брем и Хоббс [2] изучили влияние силы самодействия на заряд в искривленном пространстве-времени. В отличие от случая с плоским пространством-временем эта сила может быть не нулевой даже для статических зарядов в искривленном пространстве.

Было проанализировано некоторое количество статических конфигураций, в том числе самовоздействие в пространстве-времени черной дыры Шварцшильда [3, 4], черной дыры Керра [5], черной дыры Керра-Ньюмана [4] и в статическом симметричном поле Бранса-Дикке [6]. Аналитические приближения силы самодействия были получены для скалярного заряда, покоящегося в осесимметричном пространстве-времени [7]. Сила самодействия может быть не нулевой для статической частицы в плоском пространстве-времени топологических дефектов [8].

В искривленном пространстве-времени с нетривиальной топологической структурой исследования этого типа имеют дополнительные интересные особенности [9, 10].

Эффект самовоздействия связан с нелокальной структурой безмассового поля, источником которого является заряженная частица. Например, сила самодействия скалярного заряда это [11]

$$\begin{aligned} f_\mu &= q^2 \left[\frac{1}{3} \left(\dot{a}_\mu - a^2 u_\mu \right) + \frac{1}{6} \left(R^\nu_\mu u_\nu + R_{\nu\gamma} u^\nu u^\gamma u_\mu \right) \right. \\ &\qquad \left. + \frac{1}{12} \left(6\xi - 1 \right) R\, u_\mu + \lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\tau-\epsilon} \nabla_\mu G_{ret} \left(x, x' \right) d\tau' \right] \end{aligned} \tag{1}$$

где u_μ - это 4-скорость заряда, a_μ - это 4-ускорение, $\dot{a}_\mu = \partial a_\mu / \partial \tau$ - это производная 4-ускорения по собственному времени τ заряда, $G_{ret}(x, x')$ - это запаздывающая скалярная функция Грина и ξ константа связи скалярного поля с кривизной.

Существуют такие ситуации, в которых эффект самодействия определяется локальной геометрией искривленного пространства-времени. Например, такая ситуация имеет место для статического заряда в горловине кротовой норы, если длина этой горловины гораздо больше, чем ее радиус. В качестве примера таких кротовых нор можно рассматривать пространство-время с метрикой

$$ds^2 = -dt^2 + d\rho^2 + \left(r_0 + \rho \tanh \frac{\rho}{\rho_0}\right)^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right) \tag{2}$$

или

$$ds^2 = -dt^2 + d\rho^2 + \left(r_0 + \rho \coth \frac{\rho}{\rho_0} - \rho_0\right)^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right), \tag{3}$$

где $r_0,\ \rho_0$ - константы (r_0 - радиус горловины, ρ_0 - параметр, который описывает длину горловины) и

$$\frac{r_0}{\rho_0} \ll 1. \tag{4}$$

Эффект самодействия в области $\rho \lesssim \rho_0$ не зависит от геометрии пространства-времени за пределами этой области, и мы будем называть эту область длинной горловиной (точное определение длинной горловины см. ниже).

На протяжении всей работы мы используем единицы $c = G = 1$.

2 Общие принципы

Рассмотрим уравнение для скалярного безмассового поля с источником

$$\phi^{;\mu}_{;\mu} - (\xi R + m^2)\phi = -J = -4\pi q \int \delta^{(4)}(x - x_0(\tau)) \frac{d\tau}{\sqrt{-g^{(4)}}}, \tag{5}$$

где ξ - константа связи скалярного поля массы m с кривизной R, $g^{(4)}$ - детерминант метрики $g_{\mu\nu}$, q - скалярный заряд и τ - его собственное время. Мировая линия заряда определяется функциями $\tilde{x}^\mu(\tau)$.

Метрика статического пространства-времени может быть представлена в виде:

$$ds^2 = g_{tt}(x^i)dt^2 + g_{jk}(x^i)dx^j dx^k, \tag{6}$$

где $i, j, k = 1, 2, 3$. Это означает, что можно написать уравнение поля следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-g_{tt}}\sqrt{g^{(3)}}} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\sqrt{-g_{tt}}\sqrt{g^{(3)}} g^{jk} \frac{\partial \phi(x^i; \tilde{x}^i)}{\partial x^k}\right) - (\xi R(x) + m^2)\phi(x^i; \tilde{x}^i) \\ = -\frac{4\pi q \delta^{(3)}(x^i, \tilde{x}^i)}{\sqrt{g^{(3)}}}, \end{aligned} \tag{7}$$

где $g^{(3)} = \det g_{ij}$ и мы примем во внимание, что $d\tau/dt = \sqrt{g_{tt}}$ для покоящейся (статической) частицы. Процедура оценки силы самодействия требует перенормировки скалярного потенциала $\phi(x; \tilde{x})$, который расходится в пределе $x \to \tilde{x}$ (см., например, [13, 14]).

Эта перенормировка может быть достигнута путем вычитания из $\phi(x; \tilde{x})$ контрчлена ДеВитта-Швингера $\phi_{DS}(x; \tilde{x})$ и затем устремляя $x \to \tilde{x}$ [15]:

$$\phi_{ren}(x) = \lim_{\tilde{x} \to x} \left[\phi(x; \tilde{x}) - \phi_{DS}(x; \tilde{x})\right], \tag{8}$$

где

$$\phi_{\mathrm{DS}}(x^i; \tilde{x}^i) = q\left(\frac{1}{\sqrt{2\sigma}} + \frac{\partial g_{tt}(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\sigma^i}{4 g_{tt}(\tilde{x})\sqrt{2\sigma}} - m\right), \tag{9}$$

σ - половина квадрата расстояния между точками x и $\tilde{x}$ вдоль кратчайшей геодезической, соединяющей их.

$$\sigma = \frac{g_{ij}(\tilde{x})}{2} \sigma^i \sigma^j \tag{10}$$

- это половина квадрата расстояния между точками $\tilde{x}^i$ и x^i вдоль кратчайшей геодезической, соединяющей их, и (см., например, [16, 17])

$$\begin{aligned} \sigma^i \quad = \quad & -\left(x^i - \tilde{x}^i\right) - \frac{1}{2}\Gamma^i_{jk}\left(x^j - \tilde{x}^j\right)\left(x^k - \tilde{x}^k\right) \\ & -\frac{1}{6}\left(\Gamma^i_{jm}\Gamma^m_{kl} + \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial \tilde{x}^l}\right)\left(x^j - \tilde{x}^j\right)\left(x^k - \tilde{x}^k\right)\left(x^l - \tilde{x}^l\right) + O\left((x - \tilde{x})^4\right), \end{aligned} \tag{11}$$

символы Кристоффеля Γ^i_{jk} вычисляюься в точке $\tilde{x}$.

Наконец сила самодействия, действующая на статический заряд это

$$f_i(x) = -\frac{q}{2}\nabla_i\phi_{ren}(x). \tag{12}$$

3 ВКБ аппроксимация для силы самодействия

Метрика статического сферически симметричного пространства-времени рассматривается ниже

$$ds^2 = -f(\rho)dt^2 + d\rho^2 + r^2(\rho)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right). \tag{13}$$

В этом пространстве-времени уравнение (7) может быть переписано в виде

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \left(\frac{f'}{2f} + \frac{(r^2)'}{r^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right. &- \left.(\xi R + m^2)\right]\phi(\rho,\theta,\varphi;\tilde\rho,\tilde\theta,\tilde\varphi) \\ &= -\frac{4\pi q\delta(\rho,\tilde\rho)\delta(\theta,\tilde\theta)\delta(\varphi,\tilde\varphi)}{r^2\sin\theta}.\end{aligned} \tag{14}$$

Благодаря сферической симметрии рассматриваемой задачи, мы представляем потенциал в виде

$$\phi(x^\alpha;\tilde{x}^\alpha) = q\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\,P_l(\cos\gamma)g_l(\rho,\tilde\rho), \tag{15}$$

где $\cos\gamma \equiv \cos\theta\cos\tilde\theta + \sin\theta\sin\tilde\theta\cos(\varphi-\tilde\varphi)$ и $g_l(\rho,\tilde\rho)$ удовлетворяют уравнению

$$g_l'' + \left(\frac{f'}{2f} + \frac{(r^2)'}{r^2}\right)g_l' - \left[\frac{l(l+1)}{r^2} + m^2 + \xi R\right]g_l = -\frac{\delta(\rho,\tilde\rho)}{r^2}. \tag{16}$$

В этом выражении и ниже штрихом обозначена производная по ρ. Однородные решения этого уравнения будем обозначать через $p_l(\rho)$ и $q_l(\rho)$. $p_l(\rho)$ — это выбранное решение, которое хорошо ведет себя при $\rho = -\infty$ и расходится при $\rho \to +\infty$. $q_l(\rho)$ — это выбранное решение, которое расходится при $\rho \to -\infty$ и хорошо себя ведет при $\rho = \infty$. Таким образом,

$$\left\{\frac{d}{d\rho^2} + \left(\frac{f'}{2f} + \frac{(r^2)'}{r^2}\right)\frac{d}{d\rho} - \left[\frac{l(l+1)}{r^2} + m^2 + \xi R\right]\right\}\left\{\begin{matrix} p_l(\rho) \\ q_l(\rho)\end{matrix}\right\} = 0, \tag{17}$$

$$\begin{aligned} g_l(\rho,\tilde\rho) = C_l p_l(\rho_<)q_l(\rho_>) &= C_l\Big[\Theta(\tilde\rho-\rho)p_l(\rho)q_l(\tilde\rho) \\ &\qquad -\Theta(\rho-\tilde\rho)p_l(\tilde\rho)q_l(\rho)\Big],\end{aligned} \tag{18}$$

где $\Theta(x)$ - ступенчатая функция Хевисайда, т.е., $\Theta(x) = 1$ при $x > 0$ и $\Theta(x) = 0$ при $x < 0$, C_l - константа нормировки, которая может быть включена в определение p_l и q_l. Нормировка g_l достигается интегрированием (16) один раз по ρ от $\tilde\rho - \delta$ до $\tilde\rho + \delta$ и стремлением $\delta \to 0$. Это приводит к условию на Вронскиан

$$C_l\left(p_l\frac{dq_l}{d\rho} - q_l\frac{dp_l}{d\rho}\right) = -\frac{1}{r^2}. \tag{19}$$

ВКБ-приближение для радиальных мод p_l и q_l получается заменой переменных

$$\begin{aligned} p_l &= \frac{1}{\sqrt{2r^2W}}\exp\left(\int^\rho W d\rho\right), \\ q_l &= \frac{1}{\sqrt{2r^2W}}\exp\left(-\int^\rho W d\rho\right).\end{aligned} \tag{20}$$

Подстановка этих выражений в (19) показывает, что условие на Вронскиан выполняется, если

$$C_l = 1. \tag{21}$$

Подстановка в выражение на моду (17) дает следующее уравнение для W:

$$\begin{aligned} W^2 \quad = \quad & \frac{l(l+1)+m^2r^2+2\xi}{r^2}+\frac{\left(W^2\right)''}{4W^2}-\frac{5\left(W^2\right)'^2}{16W^4}+\frac{\left(r^2\right)''}{2r^2} \\ & -\frac{\left(r^2\right)'^2}{4r^4}+\frac{Wf'}{2f}+\frac{\left(r^2\right)'f'}{4r^2f}+\frac{\left(W^2\right)'f'}{8W^2f} \\ & +\xi\left(-2\frac{\left(r^2\right)''}{r^2}+\frac{\left(r^2\right)'^2}{2r^4}-\frac{\left(r^2\right)'f'}{r^2f}-\frac{f''}{f}+\frac{f'^2}{2f^2}\right). \end{aligned} \tag{22}$$

Это уравнение может быть решено методом итераций, если метрическая функция $r^2(\rho)$ меняется медленно, то есть,

$$\varepsilon_{WKB}=L_\star/L\ll 1, \tag{23}$$

где

$$L_\star(\rho)=\frac{r(\rho)}{\sqrt{2\xi+m^2r^2(\rho)}}, \tag{24}$$

и L - характерный масштаб изменения $r(\rho)$ и $f(\rho)$:

$$\frac{1}{L(\rho)}=\max\left\{\left|\frac{r'}{r}\right|,\ \left|\frac{f'}{f}\right|,\ \left|\frac{r'}{r}\sqrt{|\xi|}\right|,\ \left|\frac{f'}{f}\sqrt{|\xi|}\right|,\ \left|\frac{r''}{r}\right|^{1/2},\ \left|\frac{f''}{f}\right|^{1/2},\ \dots\right\}. \tag{25}$$

Мы будем называть область пространства-времени, где метрические функции $r(\rho)$ и $f(\rho)$, медленно меняются, *длинной горловиной.*

Нулевой порядок ВКБ решения уравнения (22) соответствует пренебрежению членами с производными в этом уравнении

$$W^2=\Omega\cdot\Big(1+O(\varepsilon^2_{WKB})\Big), \tag{26}$$

где

$$\Omega\left(\rho,l+1/2\right)=\frac{l(l+1)+m^2r^2+2\xi}{r^2}=\frac{1}{r(\rho)^2}\left[\left(l+\frac{1}{2}\right)^2+\mu^2\right], \tag{27}$$

и

$$\mu^2=2\xi-\frac{1}{4}+m^2r^2. \tag{28}$$

Ниже предполагается, что

$$\mu^2>0. \tag{29}$$

Подчеркнем, что Ω - это точное решение уравнения (22) в пространстве-времени с метрикой $ds^2=-f_0dt^2+d\rho^2+r_0^2(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2)$, где f_0, r_0 - константы.

Подставляя решение (26) в (20) и (28), и пренебрегая членами второго порядка и выше по отношению к ε_{WKB}, мы можем получить следующее выражение для приближения нулевого порядка ВКБ аппроксимации для $\phi(x^\alpha;\tilde{x}^\alpha)$ при условиях $\theta=\tilde{\theta},\varphi=\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\rho}=\rho+\delta\rho>\rho$

$$\phi(\rho,\theta,\varphi;\tilde{\rho},\theta,\varphi)=\frac{q}{r(\rho)r(\tilde{\rho})}\sum_{l=0}^{\infty}\left(l+\frac{1}{2}\right)\frac{\exp\left(-\int\limits_{\rho}^{\rho+\delta\rho}\sqrt{\Omega\left(\rho',l+\frac{1}{2}\right)}d\rho'\right)}{\sqrt[4]{\Omega\left(\rho,l+\frac{1}{2}\right)\Omega\left(\tilde{\rho},l+\frac{1}{2}\right)}}. \tag{30}$$

Сумма по l может быть вычислена с помощью метода суммирования Плана (см., например, [19])

$$\begin{aligned} \phi(\rho,\theta,\varphi;\tilde{\rho},\theta,\varphi) \quad = \quad & \frac{q}{r(\rho)r(\tilde{\rho})}\lim_{\epsilon\to 0}\left\{\int\limits_{\epsilon}^{\infty}\frac{\exp\left(-\int_{\rho}^{\rho+\delta\rho}\sqrt{\Omega(\rho',x)}d\rho'\right)}{\sqrt[4]{\Omega(\rho,x)\Omega(\tilde{\rho},x)}}xdx\right. \\ & +\int\limits_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon}\frac{\exp\left(-\int_{\rho}^{\rho+\delta\rho}\sqrt{\Omega(\rho',z)}d\rho'\right)}{\sqrt[4]{\Omega(\rho,z)\Omega(\tilde{\rho},z)}\left(1+e^{i2\pi z}\right)}zdz \\ & \left.-\int\limits_{\epsilon}^{\epsilon+i\infty}\frac{\exp\left(-\int_{\rho}^{\rho+\delta\rho}\sqrt{\Omega(\rho',z)}d\rho'\right)}{\sqrt[4]{\Omega(\rho,z)\Omega(\tilde{\rho},z)}\left(1+e^{-i2\pi z}\right)}zdz\right\}. \end{aligned} \tag{31}$$

Первый интеграл в этом выражении может быть переписан следующим образом

$$\frac{q}{r(\rho)r(\tilde\rho)}\int\limits_0^\infty \frac{\exp\left(-\int_\rho^{\rho+\delta\rho}\sqrt{\Omega(\rho',x)}d\rho'\right)}{\sqrt[4]{\Omega(\rho,x)\Omega(\tilde\rho,x)}}\,xdx$$
$$= \frac{q}{\sqrt{r(\rho)r(\tilde\rho)}}\int\limits_0^\infty \frac{x\exp\left(-\int_\rho^{\rho+\delta\rho}\sqrt{x^2+\mu(\rho')^2}d\rho'/r(\rho')\right)}{\sqrt[4]{x^2+\mu(\rho)^2}\sqrt[4]{x^2+\mu(\tilde\rho)^2}}\,dx$$
$$= \frac{q}{\sqrt{r(\rho)r(\tilde\rho)}}\int\limits_0^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{x^2+\mu(\rho)^2}\sqrt[4]{x^2+\mu(\tilde\rho)^2}}\cdot\exp\left[-\frac{\sqrt{x^2+\mu(\rho)^2}\delta\rho}{r(\rho)}\right. \tag{32}$$
$$\left.+\frac{r'(\rho)}{2r(\rho)^2}\sqrt{x^2+\mu(\rho)^2}\delta\rho^2-\frac{m^2r(\rho)^2r'(\rho)}{2r(\rho)^2\sqrt{x^2+\mu(\rho)^2}}\delta\rho^2+O\left(\delta\rho^3\right)\right]$$
$$= \frac{q}{\sqrt{r(\rho)r(\tilde\rho)}}\int\limits_0^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+\mu(\rho)^2}}\exp\left[-\frac{\sqrt{x^2+\mu(\rho)^2}\delta\rho}{r(\rho)}\right.$$
$$\left.+\frac{r'(\rho)}{2r(\rho)^2}\sqrt{x^2+\mu(\rho)^2}\delta\rho^2-\frac{m^2r(\rho)^2r'(\rho)}{2r(\rho)^2\sqrt{x^2+\mu(\rho)^2}}\delta\rho^2+O\left(\delta\rho^3\right)\right]$$
$$-\frac{q}{\sqrt{r(\rho)r(\tilde\rho)}}\int\limits_0^\infty \frac{xm^2r(\rho)r'(\rho)\delta\rho}{2(x^2+\mu(\rho)^2)^{3/2}}\cdot\exp\left[-\frac{\sqrt{x^2+\mu(\rho)^2}\delta\rho}{r(\rho)}+O\left(\delta\rho^2\right)\right]dx$$
$$= \frac{q}{\sqrt{r(\rho)r(\tilde\rho)}}\int\limits_0^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+\mu(\rho)^2}}\cdot$$
$$\exp\left[\left(-\frac{\delta\rho}{r(\rho)}+\frac{r'(\rho)}{2r(\rho)^2}\delta\rho^2\right)\sqrt{x^2+\mu(\rho)^2}-\frac{m^2r'(\rho)\delta\rho^2}{2\sqrt{x^2+\mu(\rho)^2}}+O\left(\delta\rho^3\right)\right]$$
$$-\frac{q}{\sqrt{r(\rho)r(\tilde\rho)}}\frac{m^2r(\rho)r'(\rho)\delta\rho}{2\mu(\rho)}$$
$$= \frac{q}{\sqrt{r(\rho)}}\int\limits_0^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+\mu(\rho)^2}}\cdot\exp\left[\left(-\frac{\delta\rho}{r(\rho)}+\frac{r'(\rho)}{2r(\rho)^2}\delta\rho^2\right)\sqrt{x^2+\mu(\rho)^2}\right]\cdot$$
$$\left\{1-\frac{m^2r'(\rho)\delta\rho^2}{2\sqrt{x^2+\mu(\rho)^2}}+O\left(\delta\rho^3\right)\right\}+O\left(\delta\rho^2\right)$$
$$= \frac{q}{\sqrt{r(\rho)}}\frac{\exp\left[-\left(\frac{\delta\rho}{r(\rho)}-\frac{r'(\rho)}{2r(\rho)^2}\delta\rho^2\right)\mu(\rho)\right]}{\frac{\delta\rho}{r(\rho)}-\frac{r'(\rho)}{2r(\rho)^2}\delta\rho^2}$$
$$-\frac{qr'(\rho)m^2\delta\rho^2}{2r(\rho)}\int\limits_0^\infty\frac{x\,dx\exp\left[-\left(\frac{\delta\rho}{r(\rho)}-\frac{r'(\rho)}{2r(\rho)^2}\delta\rho^2\right)\mu(\rho)\right]}{x^2+\mu(\rho)^2}+O\left(\delta\rho\right) \tag{33}$$
$$= \frac{q}{\sqrt{r(\rho)}}\frac{\exp\left[-\left(\frac{\delta\rho}{r(\rho)}-\frac{r'(\rho)}{2r(\rho)^2}\delta\rho^2\right)\mu(\rho)\right]}{\frac{\delta\rho}{r(\rho)}-\frac{r'(\rho)}{2r(\rho)^2}\delta\rho^2} \tag{34}$$

и разложен в ряд по $\delta\rho$

$$\int\limits_0^\infty \frac{\exp\left(-\int_\rho^{\rho+\delta\rho}\sqrt{\Omega(\rho',x)}d\rho'\right)}{\sqrt[4]{\Omega(\rho,x)\Omega(\tilde\rho,x)}}\,xdx$$
$$= \frac{q}{r(\rho)}\left[\frac{r(\rho)}{\delta\rho}-\mu(\rho)+\frac{r'(\rho)}{2}+O\left(\delta\rho\right)\right]. \tag{35}$$

Следующие два интеграла в (31) не расходятся при $\delta\rho\to 0$

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left\{\int\limits_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon}\frac{\exp\left(-\int_\rho^{\rho+\delta\rho}\sqrt{\Omega(\rho',z)}d\rho'\right)}{\sqrt[4]{\Omega(\rho,z)\Omega(\tilde\rho,z)}\left(1+e^{i2\pi z}\right)}zdz\right.$$
$$\left.-\int\limits_{\epsilon}^{\epsilon+i\infty}\frac{\exp\left(-\int_\rho^{\rho+\delta\rho}\sqrt{\Omega(\rho',z)}d\rho'\right)}{\sqrt[4]{\Omega(\rho,z)\Omega(\tilde\rho,z)}\left(1+e^{-i2\pi z}\right)}zdz\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&= r(\rho)\lim_{\epsilon\to 0}\left\{\int\limits_{i\epsilon}^{i\epsilon+\infty}\frac{xdx}{\sqrt{\mu^2-x^2}\,(1+e^{2\pi x})}\right.\\
&\left.+\int\limits_{-i\epsilon}^{-i\epsilon+\infty}\frac{xdx}{\sqrt{\mu^2-x^2}\,(1+e^{2\pi x})}+O\left(\delta\rho\right)\right\}\\
&= 2r(\rho)\int_0^{\mu}\frac{xdx}{\sqrt{\mu^2-x^2}\,(1+e^{2\pi x})}+O\left(\delta\rho\right). \qquad (36)
\end{aligned}
$$

Таким образом, нулевой ВКБ порядок приближения ϕ есть

$$
\begin{aligned}
\phi(\rho,\theta,\varphi;\tilde{\rho},\theta,\varphi) &= \frac{q}{\delta\rho}+\frac{q}{r(\rho)}\left(-\mu+2\int_0^{\mu}\frac{xdx}{\sqrt{\mu^2-x^2}\,(1+e^{2\pi x})}\right)\\
&+O\Big(\delta\rho\Big). \qquad (37)
\end{aligned}
$$

Контрчлен ДеВитта-Швингера $\phi_{DS}(x;\tilde{x})$ в пределе $\theta=\tilde{\theta},\varphi=\tilde{\varphi}$ может быть легко вычислен с помощью метрики (13):

$$
\begin{aligned}
&2\sigma=\delta\rho^2+O\left(\delta\rho^4\right),\\
&\phi_{DS}(\rho,\theta,\varphi;\tilde{\rho},\theta,\varphi)=q\left(\frac{1}{\sqrt{2\sigma}}+\frac{\partial g_{tt}(\tilde{x})}{\partial\tilde{x}^i}\frac{\sigma^i}{4g_{tt}(\tilde{x})\sqrt{2\sigma}}-m\right)\\
&=q\left(\frac{1}{\delta\rho}+\frac{f\,'}{4f}-m+O\left(\delta\rho\right)\right). \qquad (38)
\end{aligned}
$$

Таким образом, $\phi_{ren}(x)$ это

$$
\begin{aligned}
\phi_{ren}(x) &= \lim_{\delta\rho\to 0}\left[\phi(\rho,\theta,\varphi;\tilde{\rho},\theta,\varphi)-\phi_{DS}(\rho,\theta,\varphi;\tilde{\rho},\theta,\varphi)\right]\\
&= qm+\frac{q}{r(\rho)}\left(-\mu+2\int\limits_0^{\mu}\frac{xdx}{(1+e^{2\pi x})\sqrt{\mu^2-x^2}}\right)\\
&\cdot\Big(1+O(\varepsilon^2_{\rm WKB})\Big), \qquad (39)
\end{aligned}
$$

и единственная ненулевая компонента силы самодействия есть

$$
\begin{aligned}
f_\rho(\rho) &= -\frac{q}{2}\frac{\partial\phi_{\rm ren}}{\partial\rho}=-\frac{q^2}{2r^2}\frac{dr}{d\rho}\left[\mu\ -2\int\limits_0^{\mu}\frac{xdx}{(1+e^{2\pi x})\sqrt{\mu^2-x^2}}\right.\\
&\left.-4\pi m^2r^2\int\limits_0^{\mu}\frac{e^{2\pi x}dx}{(1+e^{2\pi x})^2\sqrt{\mu^2-x^2}}\right]\Big(1+O(\varepsilon^2_{\rm WKB})\Big). \qquad (40)
\end{aligned}
$$

При $f=0$ и $m=0$ получаем:

$$
f_\rho(\rho) = \left[-\frac{q^2}{2r^2}\frac{dr}{d\rho}\left(\mu\ -2\int\limits_0^{\mu}\frac{xdx}{(1+e^{2\pi x})\sqrt{\mu^2-x^2}}\right)\right]\Big(1+O(\varepsilon^2_{WKB})\Big), \qquad (41)
$$

что совпадает с выражением для силы самодействия покоящегося скалярного заряда в длинной горловине ультрастатического сферически симметричного пространства-времени [21].

Мы можем численно оценить

$$
F(\mu)=\mu\ -2\int\limits_0^{\mu}\frac{xdx}{(1+e^{2\pi x})\sqrt{\mu^2-x^2}} \qquad (42)
$$

$$
G(\mu)=\int\limits_0^{\mu}\frac{e^{2\pi x}dx}{(1+e^{2\pi x})^2\sqrt{\mu^2-x^2}} \qquad (43)
$$

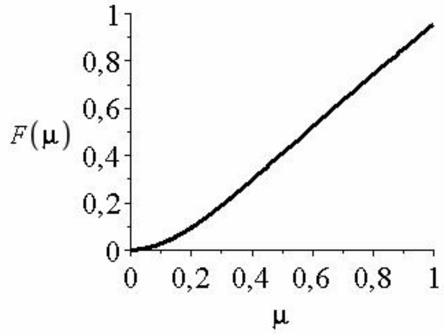

Рис. 1: Кривая представляет собой функцию $F(\mu)$.

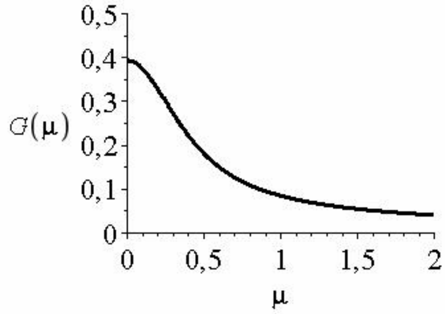

Рис. 2: Кривая представляет собой функцию $G(\mu)$.

Отметим, что если использовать r в качестве новой радиальной координаты

$$ds^2 = -f(\rho)dt^2 + \left(\frac{d\rho}{dr}\right)^2 dr^2 + r^2(\rho)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right), \tag{44}$$

выражение (40) может быть записано в виде:

$$\begin{aligned} f_r = f_\rho \frac{d\rho}{dr} = \quad & \left[-\frac{q^2}{2r^2}F(\mu) + 2\pi q^2 m^2 G(\mu)\right] \\ & \cdot \Big(1 + O(\varepsilon^2_{\text{WKB}})\Big)\,. \end{aligned} \tag{45}$$

4 Пример

В качестве примера, рассмотрим пространство-время

$$ds^2 = -dt^2 + d\rho^2 + \left(r_0 + \rho\tanh\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right), \tag{46}$$

где параметр r_0 характеризует радиус горловины кротовой норы, а ρ_0 – её длину. Приближение длинной горловины (23) справедливо в области $r < \rho_0$, если

$$r_0 \ll \rho_0. \tag{47}$$

В этом случае выражение для (40) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{f_\rho}{q^2} \quad = \quad & -\frac{1}{2\left(r_0 + \rho\tanh\dfrac{\rho}{\rho_0}\right)^2}\left(\tanh\frac{\rho}{\rho_0} + \frac{\rho\left(1 - \tanh\left(\dfrac{\rho}{\rho_0}\right)^2\right)}{\rho_0}\right) \cdot \\ & \left[F(\mu) - 4\pi m^2\left(r_0 + \rho\tanh\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2 G(\mu)\right]\Big(1 + O(\varepsilon^2_{\text{WKB}})\Big) \end{aligned} \tag{48}$$

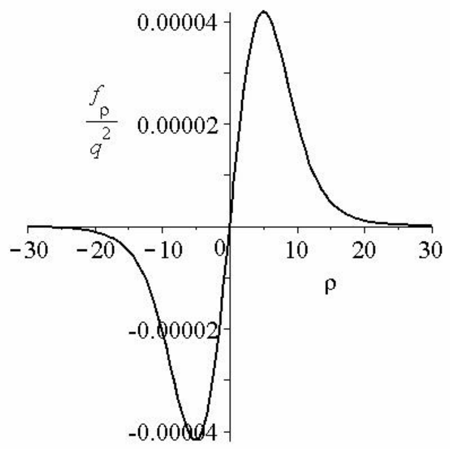

Рис. 3: Кривая представляет собой функцию f_ρ.

5 Заключение

В работе получено приближенное выражение для силы самодействия на статический заряд, являющийся источником массивного неминимально связанного с кривизной скалярного поля, в пространстве-времени, называемом длинной горловиной.

Дан пример вычисления силы самодействия покоящегося скалярного заряда на себя в заданной длинной горловине кротовой норы.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований гранты № 11-02-01162-а и 13-02-00757-а.

Литература

[1] P. Dirac, *Proc. R. Soc. London, Ser. A***167** (1938), p. 148

[2] B. DeWitt and R. Brehme, *Ann. Phys.***9** (1960), p. 220

[3] A. Smith and C. Will, *Phys. Rev. D***22** (1980), p. 1276

[4] D. Lohiya, *J. Phys. A***15** (1982), p. 1815

[5] B. Leaute and B Linet, *J. Phys. A***15** (1982), p. 1821

[6] B. Linet and P. Teyssandier, *Gen. Relativ. Grav.***10** (1979), p. 313

[7] L. Burko and Y. Liu, *Phys. Rev. D***64** (2001), p. 024006

[8] B. Linet, *Phys. Rev. D***33** (1986), p. 1833

[9] N. Khusnutdinov and I. Bakhmatov, *Phys. Rev. D***76** (2007), p. 124015

[10] V. Bezerra and N. Khusnutdinov, *Phys. Rev. D***79** (2009), p. 064012

[11] T. Quinn, *Phys. Rev. D***62** (2000), p. 064029

[12] S. Christensen, *Phys. Rev. D***17** (1978), p. 946

[13] E. Rosenthal, *Phys. Rev. D* **69** 064035 (2004).

[14] E. Rosenthal, *Phys. Rev. D* **70** 124016 (2004).

[15] A. Popov, *Phys. Rev. D* **84** 064009 (2011).

[16] J.L. Synge, *Relativity: the general theory* (North-Holland publishing company, Amsterdam, 1960).

[17] A. Popov, *Grav. & Cosm.* **13**, 119 (2007).

[18] P. Anderson, W. Hiscock and D. Samuel, *Phys. Rev. D***51** (1995), p. 4337

[19] A. Popov, *Phys. Rev. D***64** (2001), p. 104005

[20] D. Garfinkle, G. Horowitz and A. Strominger, *Phys. Rev. D***43** (1991), p. 3140