Известия вузов. Математика
2017, №1, с. 86–91

http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Краткое сообщение

А.М. БИКЧЕНТАЕВ

ДВА КЛАССА τ-ИЗМЕРИМЫХ ОПЕРАТОРОВ, ПРИСОЕДИНЕННЫХ К АЛГЕБРЕ ФОН НЕЙМАНА

Аннотация. Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, τ — точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$. Введены два (замкнутых в топологии сходимости по мере τ) класса $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ τ-измеримых операторов и исследованы их свойства. Класс $\mathcal{P}_1$ содержится в $\mathcal{P}_2$. Если τ-измеримый оператор T гипонормален, то он лежит в $\mathcal{P}_1$; если оператор T из $\mathcal{P}_k$, то UTU^* лежит в $\mathcal{P}_k$ для всех изометрий U из $\mathcal{M}$ и $k = 1, 2$; если оператор T из $\mathcal{P}_1$ обладает ограниченным обратным T^{-1}, то T^{-1} лежит в $\mathcal{P}_1$. Установлены новые неравенства для перестановок операторов из $\mathcal{P}_1$. Если τ-измеримый оператор T гипонормален и T^n τ-компактен для некоторого натурального числа n, то T нормален и τ-компактен. Если $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ и $\tau = \mathrm{tr}$, то класс $\mathcal{P}_1$ совпадает с классом всех паранормальных операторов в $\mathcal{H}$.

Ключевые слова: гильбертово пространство, алгебра фон Неймана, нормальный след, τ-измеримый оператор, перестановка, топология сходимости по мере, τ-компактный оператор, интегрируемый оператор, гипонормальный оператор, квазинормальный оператор, паранормальный оператор, проектор.

УДК: 517.983 : 517.986

Введение. Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, τ — точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$, $\widetilde{\mathcal{M}}$ — $*$-алгебра всех τ-измеримых операторов, число $0 < p < +\infty$ и $L_p(\mathcal{M}, \tau)$ — пространство интегрируемых (относительно τ) со степенью p операторов. В работе введены два (замкнутых в топологии сходимости по мере τ) класса $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ с $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2$ элементов $\widetilde{\mathcal{M}}$ и исследованы их свойства. Показано, что если оператор $T \in \widetilde{\mathcal{M}}$ гипонормален, то $T \in \mathcal{P}_1$; если оператор $T \in \mathcal{P}_1$, то $UTU^* \in \mathcal{P}_1$ для всех изометрий $U \in \mathcal{M}$; если оператор $T \in \mathcal{P}_1$ обладает обратным $T^{-1} \in \mathcal{M}$, то $T^{-1} \in \mathcal{P}_1$. Для $T \in \widetilde{\mathcal{M}}$ имеем $T \in \mathcal{P}_2 \Leftrightarrow T^* \in \mathcal{P}_2$. Если $T \in \widetilde{\mathcal{M}}$ и операторы $U, V \in \mathcal{M}$ являются изометриями, то перестановка $\mu_t(UTV^*) = \mu_t(T)$ для всех $t > 0$; если $T \in \mathcal{P}_2$, то $UTU^* \in \mathcal{P}_2$. Пусть $T \in \widetilde{\mathcal{M}}$ и унитарный оператор $S \in \mathcal{M}^{\mathrm{sa}}$ такие, что $ST = TS$. Тогда $T \in \mathcal{P}_k \Leftrightarrow ST \in \mathcal{P}_k$, $k = 1, 2$.

Если оператор $T \in \mathcal{P}_1$, то $T^2 \in \mathcal{P}_1$ и $\mu_t(T^2) \geq \mu_t(T)^2$ для всех $t > 0$. Если оператор $T \in \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{M}$, то $T^n \in \mathcal{P}_1$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Множество $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{M}$ $\|\cdot\|$-замкнуто в $\mathcal{M}$. Пусть

Поступила 23.05.2016

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и правительства Республики Татарстан (проект № 15-41-02433).