ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ НА ПРИРОДЕ

И.С. Григорьева,
??? (Казань)
e-mail: ???

При Казанском федеральном университете уже более 40 лет действует «Квант» – летняя физико-математическая школа для одаренных детей. Последние 2 года она базируется в спортивном студенческом лагере на заповедном озере Яльчик (Республика Марий Эл).

Соседство с этим прекрасным озером навело меня на мысль применить геометрические знания в их буквальном значении: для измерений на поверхности Земли. В частности, попытаться измерить ширину озера вблизи лагеря, благо она в этом месте небольшая. Методическая роль такого исследования очевидна. Урок оживляется, от абстрактных задач переходим к прикладным и конкретным. Кроме того, на этих занятиях ребята почувствовали себя «в шкуре» исследователя, прошли этапы разработки пусть простой, но осмысленной проблемы.

Задача осложнялась по нескольким причинам. Во-первых, у нас не было никаких специальных инструментов, разве что тетради в клеточку да завалявшаяся в домике веревка. Во-вторых, озеро весьма глубокое, так что измерить его как твердую поверхность (например, шагами) не удастся. Более того, школьникам было запрещено заплывать за буйки и, в частности, переплывать озеро. Так что противоположный берег был им тоже недоступен.

Рис. 1

В этой ситуации я решила посвятить несколько занятий разработке математического аппарата для измерений, с последующей их практической реализацией. Кроме собственно геометрических вопросов нас интересовала также возможная точность результата.

Постановка задачи

Задача измерения недоступных (не полностью доступных) объектов, конечно, не нова. Обычно для ее решения используется идея подобия.

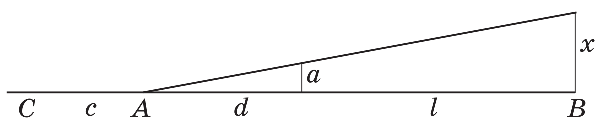


Рис. 2

Пусть $l = AB$ – искомое расстояние.

Точка A находится прямо на берегу озера. Выберем на противоположном берегу некий объект размера x и измерим его видимый размер a, скажем, на расстоянии вытянутой руки d. Имеем пропорцию $\frac{d}{a}=\frac{l}{x}$. Из этого равенства получаем, что $l=\frac{dx}{a}$. Однако проблема в том, что противоположный берег нам недоступен, так что измерить величину x мы не можем. Возникла идея повторить измерение с другого расстояния. Отойдем от первоначальной точки A назад на расстояние c. Видимый размер объекта уменьшится и будет равен, скажем, b. Соотношение между этими величинами принимает вид $\frac{d}{b}=\frac{l+c}{x}$ (расстояние d мы не меняем). Итак, мы получили систему двух уравнений для двух неизвестных, x и l. Исключим из нее ненужную нам величину x, имеем $xd = al = b(l + c)$, откуда

$$l=\frac{b}{a-b}c.$$

Как мы видим, из окончательной формулы исчезла также величина d, важно только, чтобы она была одна и та же в обоих измерениях. Заметим, что окончательный результат зависит только от отношения между a и b. Если $a = kb$, то $l=\frac{1}{k-1}c$. В частности, при $k = 2$ получаем совсем простую формулу $l = c$. Значит, можно просто отойти от озера на такое расстояние, что видимый размер объекта уменьшится вдвое, это расстояние и будет равно его ширине. Однако топография местности не всегда позволяет это, так что исследуем подробнее полученную формулу.

Не стоит забывать, что все реальные измерения содержат в себе погрешность, которая отражается и на окончательном результате. Вспомним некоторые положения теории приближенных вычислений.

1. Пусть величины a и b заданы с некоторыми погрешностями Δa, Δb соответственно. Тогда погрешность суммы и разности этих величин будет равна $\Delta a + \Delta b$.

2. Пусть величины a и b заданы с относительными погрешностями δa, δb соответственно. Тогда относительная погрешность произведения и частного этих величин будет примерно равна $\delta a + \delta b$ (если эти погрешности малы).

Найдем относительную погрешность искомой величины l. Имеем $\delta(l) \approx \delta(b) + \delta(a - b) + \delta(c)$. Раскроем второе слагаемое: $\delta(a-b)=\frac{\Delta(a)+\Delta(b)}{a-b}$.

Величины a и b аналогичны и измеряются одним и тем же инструментом. Будем считать, что абсолютная погрешность такого измерения равна Δ. Тогда

$$\delta(l)\approx\frac{\Delta}{b}+\frac{2\Delta}{a-b}+\delta(c)=\Delta\frac{a+b}{b(a-b)}+\delta(c)=$$
$$=\frac{\Delta}{a}\cdot\frac{(k+1)k}{(k-1)}+\delta(c),$$

где по-прежнему $a = kb$. Мы выражаем погрешность именно через a, так как эта величина от нас не зависит (точнее, зависит только от размера x). Величина же b (и, соответственно, k) определяется также тем, насколько далеко мы отходим от берега для второго измерения.

Если в группе есть ученики старших классов, можно дать им задание минимизировать погрешность за счет подбора k. Например, с помощью производной или неравенства для средних. Наименьшая погрешность получается, если $k=1+\sqrt{2}\approx 2,4$. Она примерно равна $5,8\frac{\Delta}{a}+\delta(c)=5,8\delta(a)+\delta(c)$. При этом

$c = l\sqrt{2}$, что может оказаться слишком большим для практических нужд.

Если взять $k = 1{,}5$, получим, что $\delta(l) \approx 7{,}5\delta(a) + \delta(c)$, что отличается от минимального значения не принципиально. Коэффициент при $\delta(a)$ по порядку величины равен 10, если не брать k близким к 1, то есть b близким к a. Последнее ограничение следует из того, что разность $a - b$ стоит в знаменателе.

Ясно также, что величину a надо выбирать побольше, чтобы относительная погрешность ее измерения была меньше.

Проделав все эти выкладки в общем виде, мы перешли к конкретным оценкам. Будем считать, что $\Delta = 1$ мм, тогда относительная погрешность «малых» измерений имеет порядок $\frac{10\text{мм}}{a}$, так что a надо выбирать не менее нескольких сантиметров. Скажем, при $a = 5$ см относительная погрешность будет не менее $\frac{5{,}8\,\text{мм}}{5\text{ см}}$, то есть как минимум 12% (для $k = 2{,}4$), а на самом деле составит процентов 15–20. Кроме того, к этой величине добавится еще и погрешность измерения величины c. Впрочем, это слагаемое гораздо меньше (порядка 2–3%, в крайнем случае, 5%).

Оценим также размер исследуемого объекта. Имеем $x \approx \frac{la}{d}$. Длина руки d равна примерно 0,7 м, ширину озера мы оценили на глаз метров в 50–100, скажем, примерно 70 м. Получаем, что $x \approx \frac{70\,\text{м} \cdot a}{0{,}7\,\text{м}} = 100a$. То есть, чтобы a составляло несколько сантиметров, объект должен иметь размер в несколько метров. Подойдет дом, но не ствол дерева и даже не скамейка.

Второй подготовительный этап состоял в создании «инструментов» для измерения нужных расстояний. Мы видим, что они у нас весьма различны. Если видимые размеры измеряются в сантиметрах, то величина c – это метры или десятки метров. Кроме того, для контрольных измерений нам может понадобиться измерить величину d (десятки сантиметров).

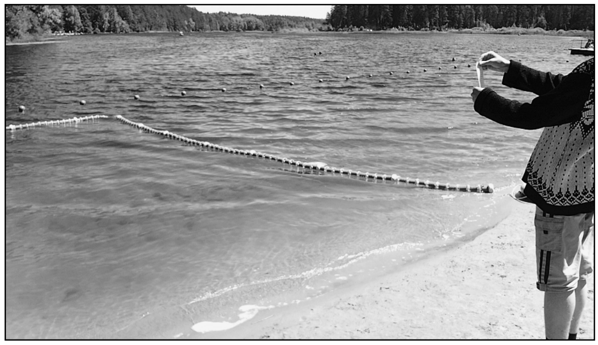
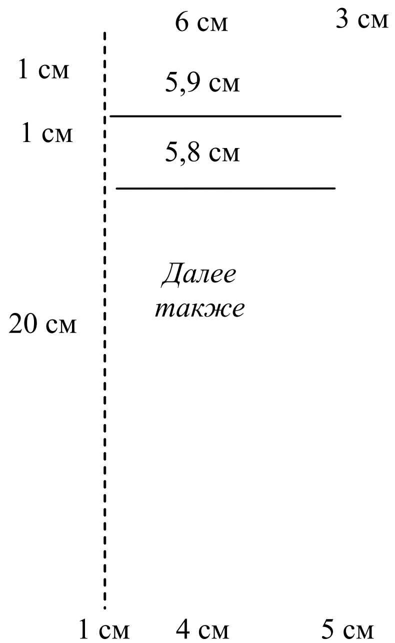


Рис. 3. Измерительные инструменты из подручных средств

Мы нашли веревку (для сушки белья) длиной несколько метров и решили разметить ее. Использовались два измерителя: тетрадный лист в клеточку (две клетки = 1 см) и человеческое тело (расстояние от конца руки до противоположного плеча примерно равно 1 м). Они показали хорошее совпадение между собой. Мы отметили на одном конце веревки деления через каждые 10 см, до отметки 1 м, а далее отмечали только целые метры (их оказалось ровно 5). Удачным оказалось то, что веревка практически не тянется. Когда мы проделывали опыт в первом сезоне, веревка была эластичной, что создавало большие неудобства, сильно увеличивая погрешность $\delta(c)$.

Придумать и изготовить прибор для измерения видимой величины объекта, конечно, труднее. Я предложила использовать для этого узкую и длинную равнобокую трапецию, наклон сторон которой таков, что ширина изменяется на 1 мм через каждый сантиметр высоты.



Если трапецию расположить «вертикально», можно проставить 20 делений через каждый сантиметр, так что одна трапеция дает разброс в 2 см, например, от 3 см до 5 см или от 4 см до 6 см. На всякий случай можно изготовить сразу несколько трапеций с разметкой, чтобы можно было охватить больший разброс значений (тем более, что величина b меньше, чем a). Можно также расположить трапеции вдоль длинного края развернутого листа, но это, пожалуй, уменьшит точность их изготовления.

Рис. 4

В дальнейшем опыт показал, что человеческий глаз вполне способен различить расстояния с разницей в 1 мм.

Контрольное и основное измерения

После того, как теоретическая часть была разобрана и изготовлены измерительные инструменты, мы вышли «в поле». Для начала провели контрольные измерения доступного предмета, чтобы оценить возможности нашей «измерительной трапеции». В качестве образца выбрали цилиндрическую пожарную бочку яркого красного цвета. Базой для измерений стала ширина бочки. Бумажную полоску располагали вертикально, за счет параллельности краев бочки было хорошо видно, на каком уровне ее изображение пересекается с боковыми сторонами трапеции.

В эксперименте участвовали 6 школьников. Результаты приведены в таблице. Ширина бочки, измеренная нашей размеченной веревкой, составила 58 см. Была поставлена задача найти расстояние до бочки. В основном измерения проводились с одной точки, хотя некоторые ребята выбрали другую. В таблице представлены значения a, b в сантиметрах, c – в метрах. Данные сразу заносились в лист *Excel*, где искомая величина l вычислялась с помощью заранее введенной формулы. Для сравнения в таблице приведены точные значения расстояния l у каждого ученика (в метрах).

Рис. 5

Интересно было сравнить реальную погрешность измерений с ее теоретической оценкой. Погрешность, вычисленная по формуле (без учета $\delta(c)$) была для всех примерно одинакова. В то же время реальные результаты колебались от 2% (что даже слишком хорошо) до 31%.

Можно заметить, что у некоторых ребят результаты сразу получились неплохие. В то же время у Андрея данные были никуда не годные. Получалось даже, что $b > a$! Он старательно повторял опыт, но результат все равно оставался плохим. Это же повторилось и на основном измерении.

Видимо, зрение у разных людей устроено немного по-разному, так что наш метод наблюдений подходит не всем. Кроме того, использование такого специфического измерительного прибора требует определенного навыка.

Кроме того, мы измерили расстояние от полоски бумаги до глаза (оно чуть меньше длины руки) и попытались вычислить ширину предмета, используя значения величиныaи расстояние l (как вычисленное, так и точное). Как видно из таблицы, точное значение расстояния дало у многих даже худший результат, чем вычисленное. Возможно, это связано с особенностями работы зрительного аппарата. Ведь глаз может менять свое фокусное расстояние в зависимости от того, куда направлен взгляд: на близкий предмет или на далекий. Поэтому величина d оказывается не постоянной.

На следующий день мы перешли к основному измерению. Каждый ученик выбирал свой объект на противоположном берегу. Поэтому, как видно из таблицы, видимые размеры a, b сильно отличались. Соответственно, различались и результаты. Кроме того, ребята выбрали, пожалуй, слишком маленькое расстояние c. Это, диктовалось, отчасти, строением берега, но больше тем, что для больших c величина b становилась слишком маленькой (не входила в шкалу). Видимо, нужно было выбирать для измерения более крупные объекты, возможно, использовать вертикальные размеры деревьев.

Ученик	a	b	c	L
Александра	2,3	2,1	5	52,5
Владислав	3,7	3,3	7,6	62,7
Софья	4,5	3,6	9,8	39,2
Андрей	4	3,3	9,8	46,2
Евгений	4,7	4,1	9,8	67,0
Мансур	2,5	2,3	6,3	72,4

Результаты получились, пожалуй, неудовлетворительные, слишком большой разброс значений. При наличии времени, нужно было бы обсудить эту таблицу и повторить измерения с учетом допущенных ошибок. Однако такой возможности не представилось.

По приезде в город я измерила расстояние по карте (использовались Яндекс-карты), получилось расстояние 57–67 м (разброс порожден непараллельностью

Ученик	a	b	c	l	l точн	$\delta(a,b)$	δ реал	d	$x(l)$	$x(l$ точн$)$
Александра	5	3	5	7,5	5,85	13%	22%	63	59,5	46,4
Владислав	4,4	2,5	5	6,58	6	15%	9%	54	53,6	48,9
Софья	4,4	2,4	5	6	5,85	14%	2%	51	51,8	50,5
Андрей	5	3	3,6	5,4	7,1	13%	31%	64	42,2	55,5
Евгений	4,2	2,2	5	5,5	5,85	15%	6%	70	33	35,1
Мансур	4,8	2,7	5	6,43	5,85	13%	9%	62	49,8	45,3

берегов). Как мы видим, половина расчетных результатов меньше истинных.

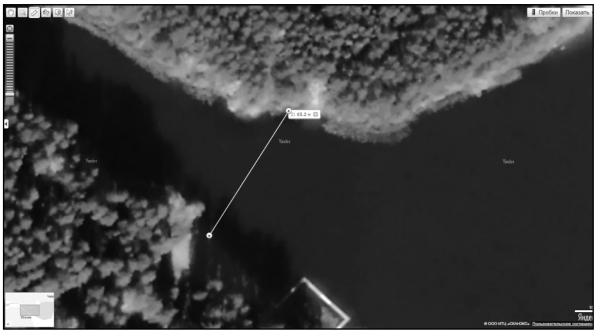


Рис. 6

Возможные направления развития темы

Если есть возможность продолжить занятия с теми же школьниками, можно попытаться осмыслить полученные результаты и найти новые задачи.

В данной статье подробно описано, как можно производить измерения малых расстояний. Однако измерение расстояний в десятки метров – тоже непростая задача. Кроме того, имея одну мерную веревку, трудно эффективно занять всех ребят на практическом занятии (возникнет очередь и простой). В нашем случае каждый ученик выбрал свой мерный инструмент – длину шага. Выяснение этой длины – отдельная задача, требующая применения хотя бы самой простой статистической обработки.

Статистическую обработку можно применить и к другим экспериментам. Например, сравнить измерения, сделанные одним участником в одних и тех же условиях. Разными участниками в одинаковых условиях. Одним участником в разных условиях (с измененными x, c или l). В последнем случае можно сравнивать относительные погрешности.

Конечно, не обязательно использовать сложные понятия статистики. Достаточно вычислить средние значения и отклонения от них (с том числе, стандартное отклонение). Если выборки будут достаточно обширными, они почти наверняка дадут почву для размышлений.

Другое направление – исследовать фокусное расстояние глаза, его изменение, путем вычисления величины d. Конечно, эти вычисления надо делать в условиях контрольного эксперимента, когда остальные величины известны.

Заметим, что в нашем небольшом эксперименте оказалось, что вычисленное d в основном меньше измеренного. Этот эффект проявился на небольших расстояниях наблюдения (5–10 метров). Интересно было бы проверить его и для больших l. В таком варианте проблем с аккомодацией будет больше. Тут видится выход на другие предметы: физику, биологию. Неплохо было бы привлечь соответствующих специалистов.

Рис. 7

Обсуждение сложностей и допущенных ошибок

1. Методические проблемы.

Главной из них, конечно, является слабая мотивация учащихся. Хотя в лагере были собраны способные ребята, они не «прониклись» идеей. Выполняли, как обычное задание, без энтузиазма. Кое-кто предложил такое «решение» – взять специальный фотоаппарат, который указывает расстояние до объекта. Чтобы преодолеть это положение дел, надо специально позаботиться о мотивации. Например, предложить эту тему для доклада на конференции школьников. Или применить проблемный подход: сначала вместе решить простую задачу (скажем, измерение высоты дерева). Задачу же с недоступным объектом поставить, но некоторое время не предлагать решение.

Кроме того, можно обратить внимание на разнобой результатов, что выводит на разговор о погрешностях.

2. Технические проблемы.

Мы использовали для измерения больших расстояний шаги учащихся. Это, с одной стороны, удобно, так как у каждого под рукой собственный, личный измеритель. Однако точность этого инструмента совершенно неудовлетворительна, так как длина шага не постоянна. В частности, она сильно меняется при передвижении по наклонной плоскости (берег озера достаточно крутой). Возможно, ребята интуитивно увеличивали длину шага в такой ситуации.

К техническим проблемам можно отчасти отнести и нехватку времени. За 3 недели пребывания в лагере ребята слушают лекции нескольких преподавателей, и у каждого есть много чем поделиться.

Вывод

Предложенная форма занятий позволяет комплексно использовать некоторые разделы школьной математики для решения практической исследовательской задачи.

Это позволяет оживить урок, преодолеть излишнюю академичность изложения, познакомить учеников с реальными проблемами, встающими перед исследователем. Задачи, решаемые на таком уроке, являются открытыми, то есть не имеют заранее известного ответа, да и метода исследования, что оставляет большой простор для самостоятельного творчества учащихся.