

ISSN 2311–8563

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Самарский государственный университет»

# **Эвристические алгоритмы и распределённые вычисления**

**(Heuristic Algorithms and Distributed Computing)**

Научный журнал

**Том 1, выпуск 1**

**2014**

Периодический всероссийский электронный научный журнал.

Основан в 2014 г. Выходит 6 раз в год.

Учредитель журнала – Самарский государственный университет.

Главный редактор – д-р физ.-мат. наук, профессор Б. Ф. Мельников.

Издательство «Самарский университет». 443011, г. Самара, ул. Академика Павлова, 1. Тел. (846) 334-54-23.

e-mail: [university-press@samsu.ru](mailto:university-press@samsu.ru)

Адрес редакции: 445027, г. Тольятти, ул. Юбилейная, 31-Г.  
Тел. (848) 250-52-33. e-mail: [earv@samsu.ru](mailto:earv@samsu.ru)

В первый выпуск журнала включены следующие разделы: «Математическое моделирование», «Алгоритмы и эвристики», «Прикладная дискретная математика и теория автоматов», «Параллельные и распределённые вычисления». Материал всех статей прямо или косвенно связан с тематикой журнала (т.е. с распределённой реализацией алгоритмов и с эвристиками). Мы предполагаем сохранить все эти разделы и в следующих выпусках журнала.

© ФГБОУ ВПО СамГУ, 2014.

© Авторы, 2014.

© Оформление – издательство «Самарский университет», 2014.

---

---

### Редакционная коллегия

<b>Юрай ГРОМКОВИЧ</b> (Jurgaj HROMKOVIČ), почётный редактор	Швейцария, Цюрих, Технический университет (Eidgenössische Technische Hochschule), профессор
<b>Борис Феликсович</b> <b>МЕЛЬНИКОВ</b> , главный редактор	Самарский государственный университет, доктор физ.-мат. наук, профессор
<b>Александр Фёдорович</b> <b>КРУТОВ</b> , зам. главного редактора	Самарский государственный университет, доктор физ.-мат. наук, профессор
<b>Сергей Яковлевич</b> <b>НОВИКОВ</b>	Самарский государственный университет, доктор физ.-мат. наук, профессор
<b>Серго Шотович</b> <b>РЕХВИАШВИЛИ</b>	Кабардино-Балкарский государственный университет им.Х.М.Бербекова, доктор физ.-мат. наук
<b>Юрий Геннадьевич</b> <b>СМИРНОВ</b>	Пензенский государственный университет, доктор физ.-мат. наук, профессор
<b>Андрей Владимирович</b> <b>СОКОЛОВ</b>	Карельский научный центр РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор
<b>Юрий Викторович</b> <b>ТЮТЮНОВ</b>	Южный федеральный университет, доктор физ.-мат. наук, профессор
<b>Антал Миклош ИВАНИ</b> (Antal Miklós IVÁNYI)	Венгрия, Будапешт, Университет им. Л.Этвёша (Eötvös Loránd Tudományegyetem), профессор
<b>Йорг КЕЛЛЕР</b> (Jörg KELLER)	Германия, Хаген, Заочный университет (Fernuniversität in Hagen), профессор
<b>Алессандра КЕРУБИНИ</b> (Alessandra CHERUBINI)	Италия, Милан, Политехнический университет (Politecnico di Milano), профессор
<b>Владимир Николаевич</b> <b>РУДНИЦКИЙ</b>	Украина, Черкассы, Технологический университет, доктор физ.-мат. наук, профессор
<b>ШИ-ДЖИН ХОРНГ</b> (Shi-Jinn Horng, 洪西進)	Китайская республика (Тайвань), Тайбэй, Национальный научно-технологический университет (國立臺灣科技大學), профессор
<b>Сергей Борисович</b> <b>МАКАРКИН</b> , ответственный секретарь	Самарский государственный университет

---

---

## СОДЕРЖАНИЕ

### Математическое моделирование

- А. С. Андреев, О. А. Перегудова, К. В. Пахомов. *Моделирование управляемого движения трехколёсного робота с двумя степенями свободы* 6–15
- О. И. Горбанёва, Г. А. Угольницкий. *Теоретико-игровые модели распределения ресурсов при управлении качеством речной воды в условиях коррупции. Часть I* 16–24
- Ю. С. Нагорнов, А. В. Кац. *О методе молекулярной динамики с параметрическим температурно-зависимым потенциалом* 25–39
- А. В. Соколов, А. В. Драц. *Моделирование некоторых методов представления  $n$  FIFO-очереди в памяти одного уровня* 40–52

### Алгоритмы и эвристики

- Д. В. Иванов. *Численный алгоритм оценивания параметров линейных динамических систем дробного порядка с помехой в выходном сигнале* 53–63
- Ш. Т. Ишмухаметов, Б. Г. Мубараков. *Об одном классе строго псевдопростых чисел* 64–73

### Прикладная дискретная математика и теория автоматов

- Б. Ф. Мельников. *О звёздной высоте регулярного языка. Часть I: Основные определения* 74–87

### Параллельные и распределённые вычисления

- И. И. Газизов, А. В. Юлдашев. *Разработка параллельного линейного решателя для задачи гидродинамического моделирования нефтегазовых месторождений* 88–96

- Сведения об авторах 97

---

---

## CONTENT

### Mathematical Modeling

- A. S. Andreev, O. A. Peregudova, K. V. Pahomov. *Modeling of controlled motion of three-wheeled robot with two degrees of freedom* 6–15
- O. I. Gorbaneva, G. A. Ougolnitsky. *Resource allocation game-theoretical models of river water quality control with corruption. Part I* 16–24
- Yu. S. Nagornov, A. V. Kats. *About molecular dynamics method with parametrically temperature-dependent potential* 25–39
- A. V. Sokolov, A. V. Drac. *Simulation of some methods of representation of  $n$  FIFO-queues in the single-level memory* 40–52

### Algorithms and Heuristic

- D. V. Ivanov. *Numerical algorithms of parameter estimation of linear dynamic systems fractional order with noise in the output signal* 53–63
- S. T. Ishmukhametov, B. G. Mubarakov. *On a class of strong pseudoprime integers* 64–73

### Applied Discrete Mathematics and Automata Theory

- B. F. Melnikov. *On the star-height of a regular language. Part I: The main definitions* 74–87

### Parallel and Distributed Computing

- I. I. Gazizov, A. V. Yuldashev. *Development of parallel linear solver for hydrodynamic modeling of oil and gas fields* 88–96

- About the authors 99

УДК 531.36 : 62-503.51

**МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРАВЛЯЕМОГО ДВИЖЕНИЯ  
ТРЕХКОЛЁСНОГО РОБОТА С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ <sup>1</sup>**

А. С. Андреев

О. А. Перегудова

К. В. Пахомов

*Ульяновский государственный университет*email: AndreevAS  
@ulsu.ruemail: peregudovaoa  
@gmail.comemail: pahomovkv  
@yandex.ru

**Аннотация.** В работе на примере построения стабилизирующего управления движением мобильного трехколёсного робота с двумя степенями свободы обосновывается методика решения задачи о стабилизации нелинейных нестационарных систем с кусочно-постоянным управлением на основе дискретизации системы и применения метода бэкстеппинга. Данный метод основан на представлении всей системы в виде каскадного соединения подсистем и синтезе нелинейного закона управления на основе построения функций Ляпунова для каждой подсистемы. Эффективность построенного закона управления состоит в том, что, во-первых, он применим для широкого класса программных движений, во-вторых, легко реализуется программно, в-третьих, позволяет определять для каждого конкретного случая наиболее подходящий набор параметров управления. Новизна данной методики состоит в применении функций Ляпунова вида векторных норм и разностных уравнений сравнения, эффективных в построении законов дискретных управлений рассматриваемых систем, обеспечивающих более высокую скорость сходимости, расширение области притяжения решений, упрощение структуры управления по сравнению с известными результатами. Рассмотрена электромеханическая модель мобильного робота, движущегося по горизонтальной поверхности без проскальзывания, с двумя ведущими задними колесами, управляемыми при помощи двух независимых электроприводов постоянного тока, и передним роляльным колесом. К задаче синтеза кусочно-постоянного управления непрерывной системы применен подход, основанный на дискретизации системы с использованием аппроксимации Эйлера и построении стабилизирующих дискретных законов управления дискретной моделью. На основе рекуррентной процедуры метода бэкстеппинга, состоящей в переходе от задачи синтеза управления для кинематической модели робота, найден кусочно-постоянный закон управления, обеспечивающий практическую стабилизацию заданного нестационарного движения робота. Представлены результаты численного моделирования, подтверждающие эффективность предложенного закона управления.

**Ключевые слова и фразы:** стабилизация; мобильный колёсный ро-

<sup>1</sup> Работа поддержана грантом РФФИ № 12-01-33082.

---

---

бот; функция Ляпунова; метод бэкстеппинга.

## 1 ВВЕДЕНИЕ

Задачи управления движением мобильных колёсных роботов [1] представляют в настоящее время значительный теоретический и прикладной интерес. Современные типы мобильных колёсных роботов применяются в самых разных областях человеческой деятельности: создание и использование новейших транспортных средств, в том числе планетоходов, борьба с терроризмом и разминирование опасных территорий, пожаротушение и т.д. Такие механические системы характеризуются наличием кинематических неинтегрируемых (неголономных) связей. Хорошо известно, что неголономные системы, даже обладающие свойством управляемости, в отличие от голономных, нельзя стабилизировать при помощи статической непрерывной обратной связи. Это обстоятельство делает задачу построения управления такими системами достаточно сложной, а также стимулирует проведение исследований по построению зависящих от времени непрерывных и разрывных управлений. Разработка алгоритмов управления этими системами базируется на последних достижениях механики, информатики и теории управления. При этом важную роль приобретает исследование теоретических задач механики и управления неголономными механическими системами, включая: методы исследования устойчивости систем, моделируемых различными типами дифференциальных и разностных уравнений; разработка методики решения задач о стабилизации движений неголономных механических систем; решение конкретных задач о стабилизации программных движений колёсных систем различной конструкции.

К настоящему моменту разработаны различные стратегии построения управления неголономными системами: на основе методов диффеоморфизма; скользящих режимов и т.д. Интересным представляется подход к построению нелинейного управления неголономной механической системой, основанный на применении процедуры метода бэкстеппинга [2,3,4], когда вначале рассматривается кинематическая модель системы, и с помощью построения функции Ляпунова находятся законы для скоростей, обеспечивающие стабилизацию заданного движения, а затем строится управление для всей системы, включающей в себя и динамическую модель, и с помощью композитной функции Ляпунова даётся обоснование найденных законов для решения задачи стабилизации. Недостатком такого подхода к синтезу управления является, как правило, сложная нелинейная структура построенного закона, что приводит к задаче упрощения этой структуры

путём применения новых типов функций Ляпунова.

Во многих практических задачах закон управления, реализуемый конкретными исполнительными механизмами, не может быть адекватно описан при помощи непрерывных моделей, так как наличие цифровых устройств в системах управления механическими объектами приводит к тому, что информация между частями системы управления передаётся в дискретные моменты времени и в дискретном виде, а исполнительные органы реализуют управления, принимающие значения из некоторых фиксированных дискретных множеств. Отсюда возникает необходимость исследования дискретных моделей управления.

Целью работы является построение кусочно-постоянного стабилизирующего управления движением мобильного трёхколесного робота с двумя степенями свободы на основе дискретизации системы и применении процедуры метода бэкстеппинга с функцией Ляпунова, позволяющей упростить структуру найденного закона.

## 2 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим модель мобильного трёхколёсного робота с двумя степенями свободы, управляемого с помощью двух электродвигателей (см. рисунок 1).

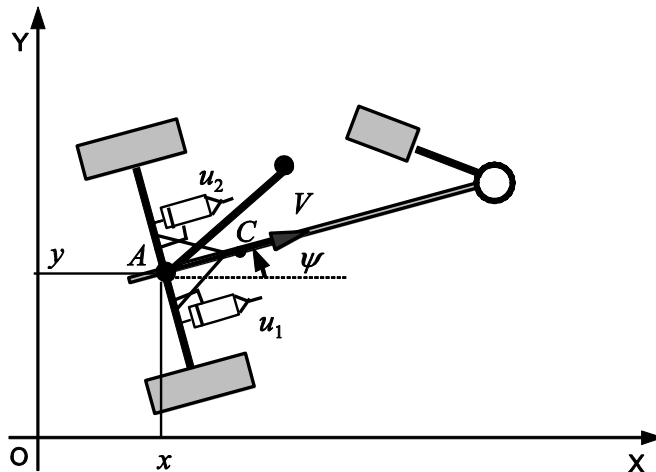


Рисунок 1. Мобильный колёсный робот с двумя степенями свободы

Уравнения динамики такой системы имеют вид

$$\begin{cases} m\dot{v} - m_1 a \omega^2 - \frac{nc}{r}(i_1 + i_2) = 0, & J\dot{\omega} + m_1 a v \omega - \frac{ncl}{r}(i_1 - i_2) = 0, \\ L \frac{di_1}{dt} + Ri_1 + \frac{nc}{r}(v + l\omega) = U_1, & L \frac{di_2}{dt} + Ri_2 + \frac{nc}{r}(v - l\omega) = U_2 \end{cases} \quad (1)$$

где  $v$  – скорость точки  $A$ ;  $\omega$  – угловая скорость платформы;  $i_1$  и  $i_2$  – токи во внешних цепях электродвигателей;  $r$  – радиус задних колёс;



$m_1$  – масса платформы;  $L$  – обобщённая индуктивность цепи электродвигателя;  $c$  – коэффициент электромеханического взаимодействия;  $R$  – омическое сопротивление цепи ротора;  $n$  – передаточное число редуктора;  $a = AC$ ;

$$m = m_1 + 2m_k + 2\frac{J_y}{r^2}, \quad J = J_1 + 2J_{kz} + (m - m_1)l^2 + m_1a^2,$$

$m_k$  – суммарная масса ведущего колеса и ротора электродвигателя,  $J_1$  – момент инерции платформы относительно вертикальной оси, проходящей через центр масс  $C$ ;  $J_{kz}$  – момент инерции ведущего колеса относительно вертикальной оси;  $J_y$  – приведённый момент инерции колеса. Будем считать, что управляющие сигналы  $U_1$  и  $U_2$  являются кусочно-постоянными функциями времени  $U_i(t) = U_i(kT), \quad \forall t \in [kT, (k+1)T), \quad T > 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad i = 1, 2.$

Кинематические уравнения робота имеют вид

$$\dot{x} = v \cos \psi, \quad \dot{y} = v \sin \psi, \quad \dot{\psi} = \omega. \quad (2)$$

Рассмотрим задачу стабилизации нестационарного движения  $p_r(t) = (x_r(t), y_r(t), \psi_r(t))^T$  системы (1),(2) на основе построения кусочно-постоянных законов управления  $U_1$  и  $U_2$ .

### 3 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СТАБИЛИЗАЦИИ

Введём отклонение от заданной траектории по формуле

$$\begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ \psi_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r - x \\ y_r - y \\ \psi_r - \psi \end{bmatrix} \quad (3)$$

Пренебрегая коэффициентом индуктивности  $L$ , можно получить следующие уравнения динамической модели робота:

$$\begin{cases} \dot{x}_e = \omega y_e - v + v_r(t) \cos \psi_e, & \dot{y}_e = -\omega x_e + v_r(t) \sin \psi_e, & \dot{\psi}_e = \omega_r(t) - \omega \\ m\dot{v} - m_1a\omega^2 + \frac{2n^2c^2}{r^2R}v = \frac{nc}{rR}U_3, & J\dot{\omega} + m_1av\omega + \frac{2n^2c^2l^2}{r^2R}\omega = \frac{ncl}{rR}U_4 \end{cases} \quad (4)$$

где  $U_3 = U_1 + U_2$  и  $U_4 = U_1 - U_2$ .

Разностные уравнения в отклонениях для дискретной модели на основе аппроксимации Эйлера примут вид

$$\left\{ \begin{array}{l} x_e[k+1] = x_e[k] + T(\omega[k]y_e[k] - v[k] + v_r[k]\cos\psi_e[k]), \\ y_e[k+1] = y_e[k] + T(-\omega[k]x_e[k] + v_r[k]\sin\psi_e[k]), \\ \psi_e[k+1] = \psi_e[k] + T(\omega_r[k] - \omega[k]) \\ v[k+1] = v[k] + T\left(\frac{m_1 a}{m}\omega^2[k] - \frac{2n^2 c^2}{r^2 Rm}v[k] + \frac{nc}{rRm}U_3[k]\right), \\ \omega[k+1] = \omega[k] + T\left(-\frac{m_1 a}{J}v[k]\omega[k] - \frac{2n^2 c^2 l^2}{r^2 RJ}\omega[k] + \frac{ncl}{rRJ}U_4[k]\right) \end{array} \right. \quad (5)$$

Определим вектор состояния  $(\eta, \xi) \in R^5$  для системы (5) в следующем виде

$$\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)^T, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2)^T,$$

$$\eta_1 = y_e, \quad \eta_2 = x_e - \gamma y_e, \quad (\gamma = \text{const}), \quad \eta_3 = \psi_e, \quad \xi_1 = v, \quad \xi_2 = \omega.$$

Тогда в новых переменных система (5) примет вид, состоящий из двух подсистем

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_1[k+1] = (1 - \gamma T \xi_2[k])\eta_1[k] - T \xi_2[k]\eta_2[k] + T v_r[k]\sin\eta_3[k], \\ \eta_2[k+1] = (\gamma^2 + 1)T \xi_2[k]\eta_1[k] + (1 + \gamma T \xi_2[k])\eta_2[k] - T \xi_1[k] + \\ + T v_r[k](\cos\eta_3[k] - \gamma \sin\eta_3[k]), \\ \eta_3[k+1] = \eta_3[k] + T(\omega_r[k] - \xi_2[k]), \\ \xi_1[k+1] = \xi_1[k] + T\left(\frac{m_1 a}{m}\xi_2^2[k] - \frac{2n^2 c^2}{r^2 Rm}\xi_1[k] + \frac{nc}{rRm}U_3[k]\right), \\ \xi_2[k+1] = \xi_2[k] + T\left(-\frac{m_1 a}{J}\xi_1[k]\xi_2[k] - \frac{2n^2 c^2 l^2}{r^2 RJ}\xi_2[k] + \frac{ncl}{rRJ}U_4[k]\right) \end{array} \right. \quad (6)$$

Система (6) представлена в виде каскадного соединения двух подсистем с векторами состояния  $\eta$  и  $\xi$ , соответственно. При этом входным сигналом для первой подсистемы служит вектор состояния второй подсистемы. Для построения стабилизирующих управлений  $U_3$  и  $U_4$  для системы (6) используем рекурсивную процедуру метода бэкстеппинга [2], которая в применении к данной задаче означает, что сначала найдём закон  $\xi[k] = \varphi(kT, \eta[k])$  с гладкой функцией  $\varphi: R \times R^3 \rightarrow R^2$ , который обеспечивает стабилизацию нулевого положения  $\eta = 0$  первой подсистемы (6), и соответствующую функцию Ляпунова. Затем, построив композитную функцию Ляпунова для всей системы (6), найдём требуемое управление. Положим

$$\begin{aligned}
 \varphi_1[k, \eta[k]] &= v_r[k] + 2\gamma(\omega_r[k] + \mu\eta_3[k])\eta_2[k] + \\
 &+ (1 + \gamma^2)(\omega_r[k] + \mu\eta_3[k])\eta_1[k], \\
 \varphi_2[k, \eta[k]] &= \omega_r[k] + \mu\eta_3[k]
 \end{aligned} \tag{7}$$

где функция  $\omega_r[k]$  и постоянные  $\gamma, \mu$  удовлетворяют соотношениям

$$0 < \omega_{r, \min} \leq \omega_r[k] \leq \omega_{r, \max}, \quad 0 < \mu < \frac{2}{T}, \quad 0 < \gamma < \frac{2}{T\omega_{r, \max}} \tag{8}$$

При управлении

$$\xi_1[k] = \varphi_1(kT, \eta[k]), \quad \xi_2[k] = \varphi_2(kT, \eta[k])$$

кинематическая часть системы (6) примет следующий вид

$$\begin{cases}
 \eta_1[k+1] = (1 - \gamma T(\omega_r[k] + \mu\eta_3[k]))\eta_1[k] - \\
 - T(\omega_r[k] + \mu\eta_3[k])\eta_2[k] + Tv_r[k]\sin\eta_3[k], \\
 \eta_2[k+1] = (1 - \gamma T(\omega_r[k] + \mu\eta_3[k]))\eta_2[k] + \\
 + Tv_r[k](\cos\eta_3[k] - \gamma\sin\eta_3[k] - 1), \\
 \eta_3[k+1] = (1 - \mu T)\eta_3[k]
 \end{cases} \tag{9}$$

Для доказательства равномерной асимптотической устойчивости нулевого решения  $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = 0$  системы (9) возьмём функцию Ляпунова  $V = V(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$  в виде

$$V = \max(|\eta_1|, \varepsilon_1 |\eta_2|, \varepsilon_2 |\eta_3|), \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2 = \text{const} > 0$$

Будем иметь следующую оценку  $V[k+1] \leq \|C(k, \eta[k])\| V[k]$ , где матрица  $C(k, \eta[k])$  имеет вид

$$\begin{pmatrix}
 1 - \gamma T(\omega_r[k] + \mu\eta_3[k]) & -\frac{T}{\varepsilon_1}(\omega_r[k] + \mu\eta_3[k]) & \frac{T}{\varepsilon_2}v_r[k] \int_0^1 \cos(s\eta_3[k]) ds \\
 0 & 1 - \gamma T(\omega_r[k] + \mu\eta_3[k]) & -\frac{T}{\varepsilon_2}v_r[k] \int_0^1 (\sin(s\eta_3[k]) + \gamma \cos(s\eta_3[k])) ds \\
 0 & 0 & 1 - \mu T
 \end{pmatrix}$$

Обозначим

$$\varepsilon_3 = \max \left( \begin{aligned}
 &\frac{T}{\varepsilon_1}(\omega_{r, \max} + \mu\delta_3) + \frac{T}{\varepsilon_2}v_{r, \max} \max_{|\eta_3| < \delta_3} \left| \int_0^1 \cos(s\eta_3) ds \right|, \\
 &\frac{T}{\varepsilon_2}v_{r, \max} \max_{|\eta_3| < \delta_3} \left| \int_0^1 (\sin(s\eta_3) + \gamma \cos(s\eta_3)) ds \right|
 \end{aligned} \right)$$

Тогда при условии  $|\eta_3| < \delta_3$  получим следующую оценку для нормы матрицы  $C(k, \eta[k])$

$$\|C(k, \eta[k])\| < \max(|1 - \gamma T \omega_r[k]| + \gamma T \mu |1 - \mu T|^k \delta_3 + \varepsilon_3, |1 - \mu T|)$$

Выбирая постоянные  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = const > 0$  достаточно большими, при условиях (8) получим, что найдётся такое число  $0 < \varepsilon_0 < 1$ , что имеет место оценка

$$V[k+1] < (\varepsilon_0 + \gamma T \mu |1 - \mu T|^k \delta_3) V[k], \quad \forall k \geq 0$$

Учитывая условие для постоянной  $\mu$  из (8), получим, что уравнение сравнения

$$u[k+1] = (\varepsilon_0 + \gamma T \mu |1 - \mu T|^k \delta_3) u[k]$$

будет равномерно асимптотически устойчиво.

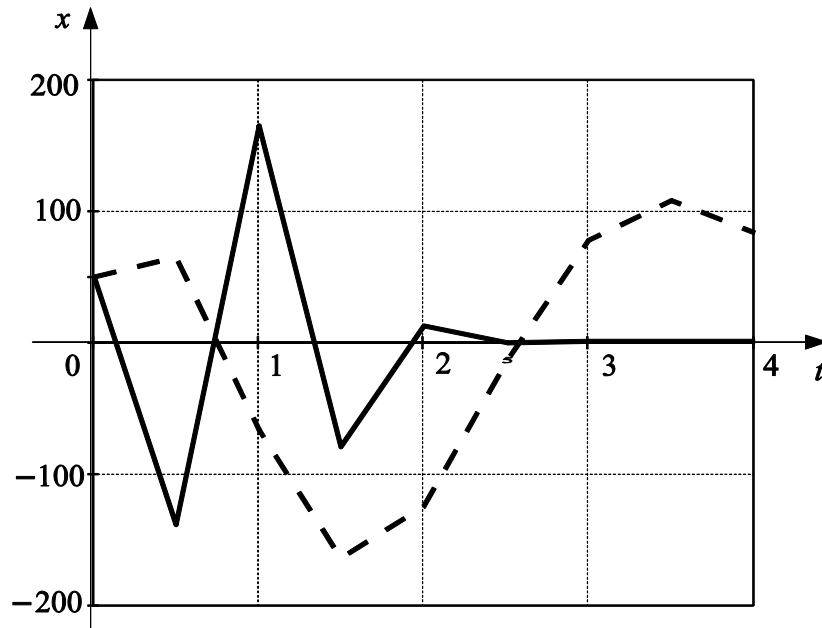
Тем самым установлено, что закон  $\xi[k] = \varphi(kT, \eta[k])$  обеспечивает стабилизацию до равномерной асимптотической устойчивости нулевого положения  $\eta = 0$  первой подсистемы (6).

В работе [5] с использованием метода бэкстеппинга для кинематической части системы (5) было построено управление вида

$$v[k, \eta[k]] = v_r[k] + \gamma x_e[k] + T \frac{(\gamma^2 + \omega_r^2[k] - \varepsilon \gamma) x_e[k] - (2\gamma \omega_r[k] - \varepsilon \omega_r^3[k]) y_e[k]}{2(1 - \gamma T) + \varepsilon \omega_r^2[k] T}, \quad (10)$$

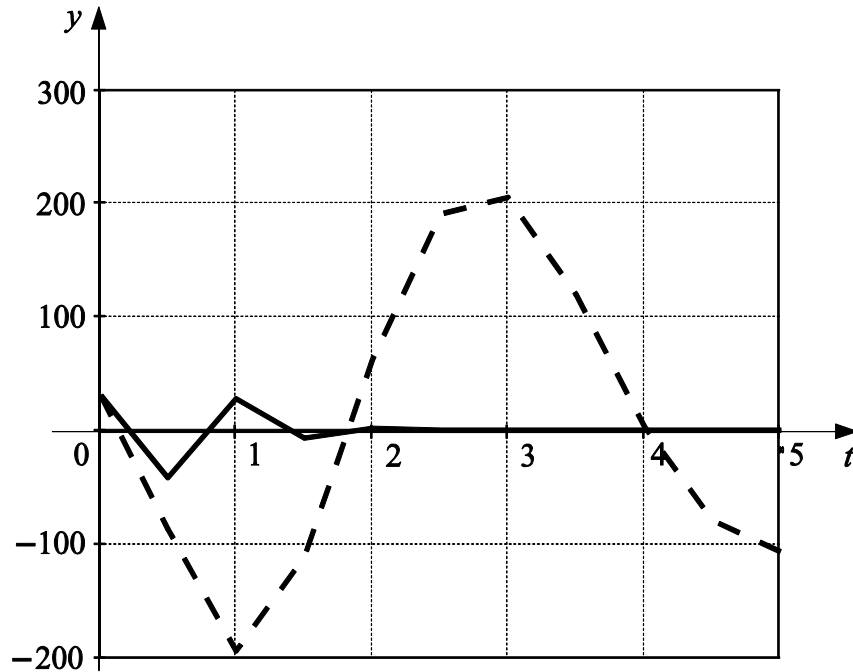
$$\omega[k, \eta[k]] = \omega_r[k] + \mu \psi_e[k]$$

которое решает задачу о стабилизации до равномерной асимптотической устойчивости нулевого решения  $x_e = y_e = \psi_e = 0$  первой подсистемы (5).



**Рисунок 2.** Результаты моделирования при управлениях (7) и (10) и значениях  $x_0 = 50$ ,  $T = 0.5$  с,  $\mu = 1$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\delta_1 = 50$ ,  $\delta_2 = 20$ ,  $\delta_3 = 2.5$ ,  $N = 9$

На рисунках 2 и 3 представлены результаты моделирования кинематической части системы (6) при управлениях (7) и (10) при  $0 \leq k \leq N$ . На рисунках 2 и 3 сплошной линией показан процесс, полученный при управлении (7), а пунктирной – при управлении (10). Как видно, управление (7) обеспечивают более высокую скорость сходимости по сравнению с (10).



**Рисунок 3.** Результаты моделирования при управлениях (7) и (10) и значениях  $y_0 = 20$ ,  $T = 0.5$  с,  $\mu = 1$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\delta_1 = 50$ ,  $\delta_2 = 20$ ,  $\delta_3 = 2.5$ ,  $N = 11$

Используя композитную функцию Ляпунова

$$V_c = \max\{V(\eta_1, \eta_2, \eta_3), |\xi_1 - \varphi_1[k, \eta]| / \alpha, |\xi_2 - \varphi_2[k, \eta]| / \alpha\}, \quad \alpha = \text{const} > 0$$

можно показать, что управление вида

$$\begin{aligned}
 U_3 = & \frac{rRm}{nc} \left( \frac{2n^2c^2}{r^2Rm} \xi_1[k] - \frac{m_1a}{m} \xi_2^2[k] - a_1(\xi_1[k] - \varphi_1[k, \eta[k]]) + \right. \\
 & \left. + \frac{\varphi_1[k+1, \eta[k+1]] - \varphi_1[k, \eta[k]]}{T} \right), \\
 U_4 = & \frac{rRJ}{ncl} \left( \frac{m_1a}{J} \xi_1[k] \xi_2[k] + \frac{2n^2c^2l^2}{r^2RJ} \xi_2[k] - a_1(\xi_2[k] - \varphi_2[k, \eta[k]]) + \right. \\
 & \left. + \frac{\varphi_2[k+1, \eta[k+1]] - \varphi_2[k, \eta[k]]}{T} \right), \quad (0 < a_1 < \frac{2}{T})
 \end{aligned} \tag{11}$$

обеспечивает равномерную асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (6). Действительно, сделаем замену переменных

$$z_1 = \xi_1 - \varphi_1[k, \eta], \quad z_2 = \xi_2 - \varphi_2[k, \eta]$$

Тогда система (6) при управлении (11) может быть записана в виде

$$\begin{cases} \eta_1[k+1] = (1 - \gamma T \varphi_2[k]) \eta_1[k] - T \varphi_2[k] \eta_2[k] + T v_r[k] \sin \eta_3[k] - \\ - \gamma T z_2[k] \eta_1[k] - T z_2[k] \eta_2[k], \\ \eta_2[k+1] = (\gamma^2 + 1) T \varphi_2[k] \eta_1[k] + (1 + \gamma T \varphi_2[k]) \eta_2[k] - T \varphi_1[k] + \\ + T v_r[k] (\cos \eta_3[k] - \gamma \sin \eta_3[k]) + (\gamma^2 + 1) T z_2[k] \eta_1[k] + \gamma T z_2[k] \eta_2[k] - T z_1[k], \\ \eta_3[k+1] = (1 - \mu T) \eta_3[k] - T z_2[k], \\ z_1[k+1] = (1 - a_1 T) z_1[k], \quad z_2[k+1] = (1 - a_1 T) z_2[k] \end{cases}$$

Для композитной функции Ляпунова вдоль решения этой системы с начальным условием  $V_c[0] < \delta = const > 0$  получим

$$\begin{aligned} V_c[k+1] &< \max\{\varepsilon_0 + \gamma T \mu |1 - \mu T|^k \delta / \varepsilon_2 + \\ &+ \alpha T \max[\delta(\gamma + 1 / \varepsilon_1), \delta(\gamma^2 + \gamma / \varepsilon_1 + 1) + 1], |1 - a_1 T|\} V_c[k], \quad \forall k \geq 0 \end{aligned}$$

Тогда при условии

$$\varepsilon_0 + \alpha T \max[\delta(\gamma + 1 / \varepsilon_1), \delta(\gamma^2 + \gamma / \varepsilon_1 + 1) + 1] < 1$$

получим, что уравнение сравнения

$$\begin{aligned} u[k+1] &= \max\{\varepsilon_0 + \gamma T \mu |1 - \mu T|^k \delta + \\ &+ \alpha T \max[\delta(\gamma + 1 / \varepsilon_1), \delta(\gamma^2 + \gamma / \varepsilon_1 + 1) + 1], |1 - a_1 T|\} u[k] \end{aligned}$$

будет равномерно асимптотически устойчиво. Отсюда получаем равномерную асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (6).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ю. Г. Мартыненко. Управление движением мобильных колёсных роботов // Фундаментальная и прикладная математика. – Том 11, Вып. 8, 2005. – С.29-80.
2. P. V. Kokotovic. The joy of feedback: Nonlinear and adaptive // IEEE Control Systems Magazine. – Vol. 12, 1992. – P.7-17.
3. P. V. Kokotovic, M. Arcak. Constructive nonlinear control: a historical perspective // Automatica. – Vol. 37, 2001. – P.637-662.
4. Х. К. Халил. Нелинейные системы. – М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009. – 832 с.
5. D. Netic, A. R. Teel. Stabilization of sampled-data nonlinear systems via backstepping on their Euler approximate model // Automatica. – Vol. 42, 2006. – P.1801-1808.

## MODELING OF CONTROLLED MOTION

### OF THREE-WHEELED ROBOT WITH TWO DEGREES OF FREEDOM

A. S. Andreev

O. A. Peregudova

K. V. Pahomov

*Ulyanovsk State University*

email: AndreevAS  
@ulsu.ru

email: peregudovaoa  
@gmail.com

email: pahomovkv  
@yandex.ru

**Abstract.** In the paper on the example of construction of a stabilizing motion control of three-wheeled mobile robot with two degrees of freedom is justified technique for solving the problem of stabilization of nonlinear time-varying systems with piecewise constant control on the basis of a sampling system and application of backstepping method. This method is based on the representation of the entire system as a cascade connection of subsystems and synthesis of nonlinear control law on the basis of constructing of Lyapunov functions for each subsystem. Efficient construction of the control law is that, firstly, it is applicable for a wide class of program motions, secondly, is easily implemented in software, thirdly, allows to determine for each case the most appropriate set of control parameters. The novelty of this technique is the use of Lyapunov functions of the form of vector norms and difference comparison equations, effective in constructing of laws of discrete controls for considered systems with higher speed of convergence, the expansion of the domain of attraction of solutions, simplifying the control structure in comparison with known results. We consider electromechanical model of a mobile robot moving on a horizontal surface without slipping, with two rear wheels are controlled by two independent DC electric, and front roal wheel. On the problem of synthesis of a piecewise constant control of a continuous system there is used an approach based on sampling systems with use of Euler approximation and construction of stabilizing discrete control laws for discrete model. On the basis of the recurrent procedure of backstepping method consisting in the transition from the control synthesis problem for the kinematic model to the problem of constructing controlling signals for dynamic model of the robot found a piecewise constant control law that practically stabilizes the set of unsteady motion of the robot. There are present the results of numerical simulations, confirming the effectiveness of the proposed control law.

**Keywords and phrases:** stabilization; wheeled mobile robot; Lyapunov function; method of backstepping.

#### REFERENCES

1. Yu. G. Martynenko. Motion control of mobile wheeled robots // *Journal of Mathematical Sciences*. – Vol. 147, No. 2, 2007. – P. 6569-6606.
2. P. V. Kokotovic. The joy of feedback: Nonlinear and adaptive // *IEEE Control Systems Magazine*. – Vol. 12, 1992. – P.7-17.
3. P. V. Kokotovic, M. Arcak. Constructive nonlinear control: a historical perspective // *Automatica*. – Vol. 37, 2001. – P.637-662.
4. H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. 3rd ed. – Upper Saddle River, N. J.: Prentice Hall, 2002. – 750 p.
5. D. Netic, A. R. Teel. Stabilization of sampled-data nonlinear systems via backstepping on their Euler approximate model // *Automatica*. – Vol. 42, 2006. – P.1801-1808.

УДК 519.83

## ТЕОРЕТИКО-ИГРОВЫЕ МОДЕЛИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ ПРИ УПРАВЛЕНИИ КАЧЕСТВОМ РЕЧНОЙ ВОДЫ В УСЛОВИЯХ КОРРУПЦИИ. ЧАСТЬ I<sup>1</sup>

О. И. Горбанёва

Г. А. Угольницкий

*Южный федеральный университет*

email: gorbaneva@mail.ru

email: ougoln@mail.ru

**Аннотация.** Рассматривается задача распределения ресурсов в иерархических системах управления качеством водных ресурсов. Эта задача разбивается на две подзадачи: задача распределения ресурсов в иерархической системе и задача управления качеством речной воды. Обе полученные задачи решаются нахождением равновесия по Штакельбергу. При решении задачи распределения ресурсов учитывается наличие двух механизмов коррупции: связанные с величиной распределения ресурсов и с величиной контроля над использованием ресурсов, причём в качестве функций зависимости данных величин от взятки брались линейные. В каждом случае рассматривались как «жёсткая», так и «мягкая» коррупция. Введение фактора коррупции заключается в том, что Ведомый отдаёт некоторую долю полученного ресурса в качестве взятки Ведущему. Целью взятки для Ведомого является получение различных льгот от Ведущего. Задача рассматривалась также при помощи аппарата кооперативных игр. Найдены доходы и кооперативные эффекты всех коалиций, вычислены векторы Шепли и пропорционального распределения. Задача управления качеством речной воды решается с учётом трёх случаев. В первом случае количество загрязняющих веществ, сброшенных Ведомым в сточные воды, меньше первого порогового значения. В этом случае есть только задача Ведомого, Экологический Центр не участвует в игре. Во втором случае количество загрязняющих веществ, сброшенных Ведомым в сточные воды, больше первого, но меньше второго пороговых значений. В этом случае Экологический Центр назначает штраф Ведомому за каждую единицу сброшенного вещества выше первого порогового значения. В третьем случае количество сброшенных Ведомым загрязняющих веществ выше второго порогового значения. В этом случае Экологический Центр дополнительно к предыдущему штрафу назначает штраф за превышение второго порогового значения.

**Ключевые слова и фразы:** задача распределения ресурсов; управление качеством водных ресурсов; попустительство; вымогательство; иерархическая система управления.

---

<sup>1</sup> Работа поддержана грантом РФФИ № 12-01-00017.



Субъекты экономической деятельности представляют собой сложные многоуровневые образования, состоящие из следующих структурных составляющих:

- Центра, прерогативой которого является определение общих стратегических целей;
- объектов, организационно подчинённых Центру, имеющих собственные цели и довольно большую свободу в выборе своего будущего состояния;
- и объектов, не подчиняющихся Центру организационно, а связанных с ним неформально в процессе производственной, хозяйственной, финансовой или информационной деятельности (потребители продукции данного предприятия, сервисные организации и т.д.).

Нормальной деятельности экономических систем препятствует коррупция [4]. Это сложное явление тесно связано с множеством экономических, политических, социально-психологических и других трудно формализуемых процессов, протекающих в обществе, и требует учёта при моделировании.

В данной статье задача распределения ресурсов в иерархических системах управления решается нахождением равновесия по Штакельбергу при наличии двух механизмов коррупции: связанных с величиной распределения ресурсов и с величиной контроля над использованием ресурсов, причём в качестве функций зависимости данных величин от взятки брались линейные. В каждом случае рассматривались как «жёсткая», так и «мягкая» коррупция. Введение фактора коррупции заключается в том, что Ведомый отдаёт некоторую долю полученного ресурса в качестве взятки Ведущему. Целью взятки для Ведомого является получение различных льгот от Ведущего.

Задача рассматривалась также при помощи аппарата кооперативных игр. Найдены доходы и кооперативные эффекты всех коалиций, вычислены векторы Шепли и пропорционального распределения [1].

Рассмотрим иерархически управляемую систему (рис. 1), включающую в себя следующие элементы:

- два источника воздействия верхнего уровня:
  - Экономический Центр;
  - Экологический Центр;
- $N$  источников нижнего уровня – подразделения экономического Центра, которые мы назовем Подчинёнными;
- управляемая система – водный объект.

Центры воздействуют на Подчинённых, а Подчинённые на Речную систему. Экономический Центр на реку не воздействует, а Эко-

логический Центр может воздействовать только в том случае, если Подчинённые очистили сточные воды недостаточно для того, чтобы состояние экологической системы осталось в допустимых пределах.

Рассмотрим цели и возможности каждого участника системы.

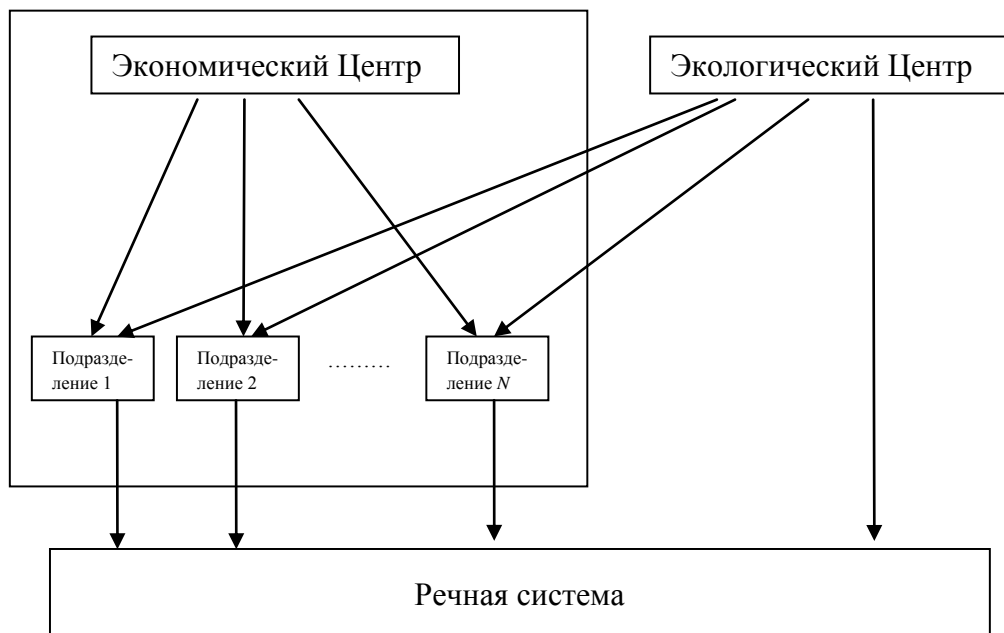


Рисунок 1. Схема иерархической управляемой системы

1) Экономическому Центру следует распределить ресурсы между Подчинёнными таким образом, чтобы в процессе производства Подчинённых получить максимальную прибыль, т.е., чтобы была максимальной величина  $\sum_{i=1}^n g_i(u_i r_i)$ , где  $g_i(u_i r_i)$  – выигрыш системы от деятельности  $i$ -го Подчинённого,  $r_i$  – доля ресурса, выделяемая  $i$ -му Подчинённому Центром (от  $R$ ),  $u_i$  – доля выделенного ресурса, используемая  $i$ -м Подчинённым для решения общесистемных задач.

Учитываются следующие факторы:

а) Центр может задать Подчинённому минимальную долю ресурсов  $q_i$ , меньше которой он не может потратить на цели всей системы

$$0 \leq q_i \leq 1,$$

т.е.  $q_i$  — нижняя граница значений  $u_i$ , контролируемая Центром (от  $r_i$ );

б) Центр также может иметь свою частную несистемную цель, выражаемую производственной функцией  $H(x)$ , для достижения которой он направляет все ресурсы, которые остались у Центра после распределения Подчинённым – т.е. в количестве  $\left(1 - \sum_{i=1}^n r_i\right)$ . Таким обра-

зом, Центр также стремится максимизировать величину  $H\left(1 - \sum_{i=1}^n r_i\right)$ .

в) В случае, если Подчинённый предлагает Центру взятку  $b_i$ , то она может повлиять или на величину распределённых ему ресурсов  $r_i = r_i(b_i)$  или на величину контроля над использованием ресурсов  $q_i = q_i(b_i)$ . Прибыль от получения взятки Центром также нужно учесть в целевой функции Центра.

Итак, целевая функция Центра состоит из трёх слагаемых: доход от производства всех Подчинённых, доход от нецелевого использования ресурсов, доход от взятки:

$$J_0 = H\left(1 - \sum_{i=1}^n r_i(b_i)\right) + \sum_{i=1}^n g_i(u_i r_i) + \sum_{i=1}^n b_i r_i(b_i) \rightarrow \max.$$

Количество ресурсов, выделенных Центром Подчинённому, будем измерять долей от всех имеющихся у Центра ресурсов:

$$0 \leq r_i(b_i) \leq 1$$

Так как у Центра имеется ограниченное количество ресурсов, которое примем за 1, то он может выдать Подчинённым ресурсов не больше количества, имеющихся у него, т.е.

$$\sum_{i=1}^n r_i(b_i) \leq 1$$

Итак, задача Экономического Центра состоит из целевой функции (1) при ограничениях (2) – (4):

$$J_0 = H\left(1 - \sum_{i=1}^n r_i(b_i)\right) + \sum_{i=1}^n g_i(u_i r_i) + \sum_{i=1}^n b_i r_i(b_i) \rightarrow \max \quad (1)$$

$$0 \leq q_i(b_i) \leq 1 \quad (2)$$

$$0 \leq r_i(b_i) \leq 1 \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n r_i(b_i) \leq 1 \quad (4)$$

От выбора Центра зависят: величины распределения ресурсов Подчинённым  $r_i$  и величины контроля над использованием ресурсов  $q_i$ .

2) Для обеспечения экологического равновесия объекта Экологический Центр назначает Подчинённому следующие виды штрафов:

А) штрафы за загрязнения, превышающие допустимые пределы, но не превышающие критические пределы  $K_{ch}$ ,

Б) штрафы за загрязнения, превышающие критические пределы  $K_{ca}$ .

Существуют максимальные пределы штрафов  $K_{chmax}$ ,  $K_{camax}$ , выше которых Экологический Центр не может назначить размеры штрафов,

т.е.

$$\begin{aligned} 0 \leq K_{ch} &\leq K_{ch\max} \\ 0 \leq K_{ca} &\leq K_{ca\max} \end{aligned}$$

В случае, если объём сброса загрязняющих веществ Подчинённо не превышает допустимый уровень, то Подчинённый штраф за превышение норм сбросов не платит.

В случае, если объём сброса загрязняющих веществ Подчинённо после очистки превышает допустимый уровень  $\tilde{w}_1$ , но не превышает критический уровень  $\tilde{w}_2$ , Центр назначает Подчинённому штраф  $K_{ch}$  за единицу сброса загрязняющих веществ сверх допустимой нормы в  $\tilde{w}_1$  единиц, т.е. Подчинённый платит штраф за  $(w_i(1-p_i) - \tilde{w}_1)$  единиц загрязняющих веществ, где  $s_i$  – функция штрафа Подчинённо за загрязнение воды, назначаемая за пределами рассматриваемой экологической системы, например, государством;  $w_i$  – объём сброса загрязняющих веществ до очистки Подчинённым;  $p_i$  – уровень очистки Подчинённым сточных вод;  $w_i(1-p_i)$  – объём сброса загрязняющих веществ после очистки Подчинённым.

Сточные воды, недоочищенные Подчинёнными, очищает сам Экологический Центр. Функция затрат Центра на очистку речных вод –  $c_a(y)$ , где  $y$  – объём загрязняющих веществ всех Подчинённых после очистки, т.е.

$$y = \sum_{i=1}^n w_i(1-p_i)$$

Итак, в целевую функцию Центра входят средства, полученные в качестве штрафов от Подчинённых, минус средства, потраченные на очистку воды:

$$G_0 = -c_a(y) + \sum_{j=1}^n K_{ch} s_j (w_j(1-p_j) - \tilde{w}_1) \rightarrow \max_{K_{ch}}$$

Итак, задача экологического Центра состоит из целевой функции

$$G_0 = -c_a(y) + \sum_{j=1}^n K_{ch} s_j (w_j(1-p_j) - \tilde{w}_1) \rightarrow \max_{K_{ch}} \quad (5A)$$

при ограничении

$$0 \leq K_{ch} \leq K_{ch\max} \quad (6)$$

В случае, если объём сброса загрязняющих веществ Подчинённо после очистки превышает критический уровень  $\tilde{w}_2$ , Центр назначает Подчинённому штраф  $K_{ch}$  за единицу сброса загрязняющих веществ сверх допустимой нормы  $\tilde{w}_1$ , и штраф  $K_{ca}$  за единицу сброса загрязняющих веществ сверх критической нормы  $\tilde{w}_2$ . Т.е. Подчинённый платит первый вид штрафа за  $(\tilde{w}_2 - \tilde{w}_1)$  единиц загрязняющих ве-

ществ, а второй вид штрафа за  $(w_i(1-p_i) - \tilde{w}_2)$  единиц загрязняющих веществ.

Объём загрязняющих веществ после очистки Подчинёнными в размере  $y = \sum_{i=1}^n w_i(1-p_i)$  очищается Экологическим Центром с функцией затрат  $c_a(y)$ .

Т.е. в целевую функцию Центра входят средства, полученные в качестве штрафов от Подчинённых, минус средства, потраченные на очистку воды:

$$G_0 = -c_a(y) + \sum_{j=1}^n K_{ch}s_j(\tilde{w}_2 - \tilde{w}_1) + \sum_{j=1}^n K_{ca}s_j(w_j(1-p_j) - \tilde{w}_2) \rightarrow \max_{K_{ch}, K_{ca}} \quad (5Б)$$

при ограничениях

$$0 \leq K_{ch} \leq K_{chmax} \quad (6)$$

$$0 \leq K_{ca} \leq K_{camax}. \quad (7)$$

**3)** Подчинённый использует ресурсы, выделенные ему Центром, для производства в общесистемных целях, доход от которого выражается производственной функцией  $g_i(x)$ . Не исключено, что у Подчинённого кроме общесистемных экономических целей имеются и свои частные цели, доход от реализации которых выражается в виде производственной функции  $h_i(x)$ . Для получения как можно большего количества ресурсов Подчинённый может предложить Экономическому Центру взятку в размере определённой доли  $b_i$  от того количества ресурсов  $r_i$ , которое ему выделит Центр. Из количества ресурсов  $r_i$ , полученных от Центра, часть средств в размере  $u_i r_i$  Подчинённый тратит на общие цели, часть на взятку (в количестве  $b_i r_i$ ), а оставшиеся – на свои частные цели (в размере  $r_i - u_i r_i - b_i r_i = (1 - b_i - u_i) r_i$ ), откуда следует, что

$$b_i + u_i \leq 1.$$

Подчинённый не может потратить на общие цели ресурсов, меньше определённой доли  $q_i$ , указываемой Центром, т.е.  $q_i(b_i) \leq u_i \leq 1$ .

Так как взятка – доля от ресурсов, выделенных Центром Подчинённому, то  $0 \leq b_i \leq 1$ .

Но при производстве продукции Подчинённый загрязняет реку сточными водами, за что платит штраф, назначаемый государством в размере  $s_i$  за единицу сброшенных веществ. Если объём сбросов сточных вод больше допустимого или критического уровней, Подчинённый либо выплачивает дополнительные штрафы, назначаемые Экологическим Центром за превышение лимитов сброса загрязняющих ве-

ществ, либо очищает свои сточные воды с выбранным им уровнем очистки  $p_i$ , измеряемом в доле или процентах от объёма сброшенных веществ  $w_i$ , и функцией затрат  $c_p(p_i)$ . Уровень очистки  $p_i$  может иметь следующие пределы:

$$0 \leq p_i \leq 1 - \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  – минимальная доля веществ в сточных водах, то есть на все 100% сточные воды очистить нельзя, можно только на определённый уровень  $\varepsilon$  приблизиться к 100%, который определяется техническими средствами и аппаратурой, применяемыми для очистки вод Подчинённым.

Если после очистки сточных вод количество загрязняющих веществ всё-таки превышает допустимый или критический предел, то Подчинённый платит соответствующий штраф.

Таким образом, в целевую функцию Подчинённого входит доход от деятельности в общих и в своих частных целях за вычетом средств, выплачиваемых государству или Экологическому Центру в качестве штрафов и потраченных на очистку сточных вод.

В случае, если объём сброса загрязняющих веществ после очистки меньше допустимого уровня, т.е.  $0 \leq w_i(1 - p_i) \leq \tilde{w}_1$ , целевая функция Подчинённого имеет вид

$$y_i^{(0)} = h_i((1 - b_i - u_i)r_i) + g_i(u_i r_i) - w_i C_p(p_i) - s_i w_i(1 - p_i) \rightarrow \max_{u_i, b_i, p_i} \quad (8A)$$

В случае, если объём сброса загрязняющих веществ после очистки больше допустимого уровня, но меньше критического, т.е.  $\tilde{w}_1 \leq w_i(1 - p_i) \leq \tilde{w}_2$ , то целевая функция Подчинённого имеет вид

$$y_i^{(1)} = h_i((1 - b_i - u_i)r_i) + g_i(u_i r_i) - w_i C_p(p_i) - s_i \tilde{w}_1 - K_{ch} s_i (w_i(1 - p_i) - \tilde{w}_1) \rightarrow \max_{u_i, b_i, p_i} \quad (8B)$$

В случае, если объём сброса загрязняющих веществ после очистки больше критического уровня, т.е.  $w_i(1 - p_i) \geq \tilde{w}_2$ , то целевая функция Подчинённого имеет вид

$$y_i^{(2)} = h_i((1 - b_i - u_i)r_i) + g_i(u_i r_i) - w_i C_p(p_i) - s_i \tilde{w}_1 - K_{ch} s_i (\tilde{w}_2 - \tilde{w}_1) - K_{ca} s_i (w_i(1 - p_i) - \tilde{w}_2) \rightarrow \max_{u_i, b_i, p_i} \quad (8B)$$

то есть в задачу Подчинённого включается целевая функция (8A), (8B) или (8B) при ограничениях

$$q_i(b_i) \leq u_i \leq 1 \quad (9)$$

$$0 \leq b_i \leq 1 \quad (10)$$

$$b_i + u_i \leq 1 \quad (11)$$

$$0 \leq p_i \leq 1 - \varepsilon, \quad (12)$$

От выбора Подчинённого зависят следующие величины:  $u_i$  – доля выделенного ресурса, используемая  $i$ -м Подчинённым для решения общесистемных задач;  $b_i$  – доля выделенного ресурса, возвращаемая  $i$ -м Подчинённым Центру в качестве взятки (от  $r_i$ ) и  $p_i$  – уровень очистки сброшенных в реку сточных вод.

4) Речная система является пассивным объектом, не имеет целевых функций и управляемых величин.

Итак, соотношения (1)–(12) составляют модель распределения ресурсов в древовидных системах управления качеством водных объектов, которая является иерархической игрой  $n+2$  лиц: Экономического Центра, Экологического Центра и  $n$  Подчинённых.

Заметим, что два Центра: Экологический и Экономический – не зависят от действий друг друга, т.е. стратегии каждого из них никак не влияют ни на значение целевой функции, ни на ограничения другого.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. О. И. Горбанева. Кооперативно-игровое моделирование распределения ресурсов // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. Приложение. – Т. 2, 2006. – С. 10-16.
2. О. И. Горбанева. Моделирование распределения ресурсов как игры в нормальной форме // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. Приложение – Т. 2, 2006. – С. 16-22.
3. А. Ф. Кононенко. Теоретико-игровой анализ двухуровневой иерархической системы управления // Вычисл. матем. и матем. Физ. – Т. 5, 1974. – С.1161-1170.
4. А. Ф. Кононенко. Теория игр и иерархические структуры // Планирование и управление экономическими целенаправленными системами. – 1974. – С. 63-72.
5. Дж. Нейман, О. Моргенштерн. Теория игр и экономическое поведение. – М.: Наука, 1970. – 625 с.
6. Г. А. Угольницкий. Теоретико-игровые принципы оптимальности иерархического управления устойчивым развитием // Известия РАН. Теория и системы управления. – Т. 4 (2005). – С. 72-78.
7. G. Ougolnitsky. Sustainable Management. – N. Y.: Nova Science Publ., 2011. – 288 p.

---

---

**RESOURCE ALLOCATION GAME-THEORETICAL MODELS  
OF RIVER WATER QUALITY CONTROL WITH CORRUPTION. PART I**

O. I. Gorbaneva

G. A. Ougolnitsky

*Southern Federal University*

email: gorbaneva@mail.ru

email: ougoln@mail.ru

**Abstract.** A resource allocation problem in hierarchical water quality control systems is considered. This problem is decomposed in two subproblems: a resource allocation problem in the hierarchical system and a river water quality control problem. Both problems are solved by finding the Stackelberg equilibrium. When the resource allocation problem is solved, the presence of two corruption mechanisms is taken into account: those assigned with resource allocation value and with resource use check value. In each case “hard” and “soft” corruption is considered. Introduction of corruption factor means that Agent gives some resource share as a bribe to Principal. The aim of giving bribe for Agent is to get any benefits from Principal. The problem is also considered by means of cooperative game theory. For all coalitions the payoffs and cooperative effects, Shapley and proportional values are found. The river water control problem is solved in three cases. In the first case the quantity of pollutant dropped into wastewater by Agent is less than the first threshold. In this case there is the only Agent's task, and Ecological Center doesn't take part in the game. In the second case the pollutant quantity dropped into wastewater by Agent is greater than the first threshold but less than the second threshold. In this case Ecological Center charges a penalty for every dropped pollutant unit which is over the first threshold. In the third case the pollutant quantity dropped into wastewater by Agent is greater than the second threshold. In this case Ecological Center charges a penalty for every dropped pollutant unit which is over the first threshold and charges another penalty for every dropped pollutant unit which is over the second threshold.

**Keywords and phrases:** resource allocation problem; water resource quality control; connivance; extortion; hierarchical control system.

**REFERENCES**

1. O. I. Gorbaneva. Kooperativno-igrovoe modelirovanie raspredeleniya resursov // *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Severo-Kavkazskiy region. Estestvennye nauki. Prilozhenie.* – T. 2, 2006. – S. 10-16.
2. O. I. Gorbaneva. Modelirovanie raspredeleniya resursov kak igry v normal'noy forme // *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Severo-Kavkazskiy region. Estestvennye nauki. Prilozhenie* – T. 2, 2006. – S. 16-22.
3. A. F. Kononenko. Teoretiko-igrovoy analiz dvukhurovnevoy ierarkhicheskoy sistemy upravleniya // *Vychisl. matem. i matem. Fiz.* – T. 5, 1974. – S. 1161-1170.
4. A. F. Kononenko. Teoriya igr i ierarkhicheskie struktury // *Planirovanie i upravlenie ekonomicheskimi celenapravlennymi sistemami.* – 1974. – S. 63-72.
5. J. von Neumann, O. Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior.* – Princeton University Press, 1944. – 625 p.
6. G. A. Ougolnitsky. Teoretiko-igrovyye principy optimal'nosti ierarkhicheskogo upravleniya ustoychivym razvitiem // *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya.* – T. 4 (2005). – S. 72-78.
7. G Ougolnitsky. *Sustainable Management.* – N. Y.: Nova Science Publ., 2011. – 288 p.



УДК 519.688

## О МЕТОДЕ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ДИНАМИКИ С ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ ТЕМПЕРАТУРНО-ЗАВИСИМЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ<sup>1</sup>

Ю. С. Нагорнов

А. В. Кац

*Тольяттинский государственный университет*

email: nagornovys@yandex.ru

email: elfsage@mail.ru

**Аннотация.** В работе предлагается новый подход к выбору межатомных сил взаимодействия при моделировании свойств конденсированных сред методом молекулярной динамики, заключающийся в выборе парных потенциалов в виде медленно меняющихся функций температуры. Метод классической молекулярной динамики основан на уравнениях классической механики, численные методы *ab initio* основаны на уравнениях квантовой механики. Квантовая молекулярная динамика совмещает уравнения классической механики для атомов и квантовой механики для электронов. Предложенный метод молекулярной динамики с температурно-зависимым потенциалом основан на квазиклассическом приближении и представляет собой измененный метод классической молекулярной динамики. Квантово-механическое обоснование предложенного метода производится на основе теоремы Эренфеста и квантового уравнения Ньютона. Для подтверждения эффективности метода молекулярной динамики с температурно-зависимым потенциалом проводились расчеты термодинамических параметров стехиометрического диоксида урана. Диоксид урана был выбран как модельный материал с высокой температурой плавления (3120 К), что позволило продемонстрировать преимущества квазиклассического подхода по сравнению с классической механикой.

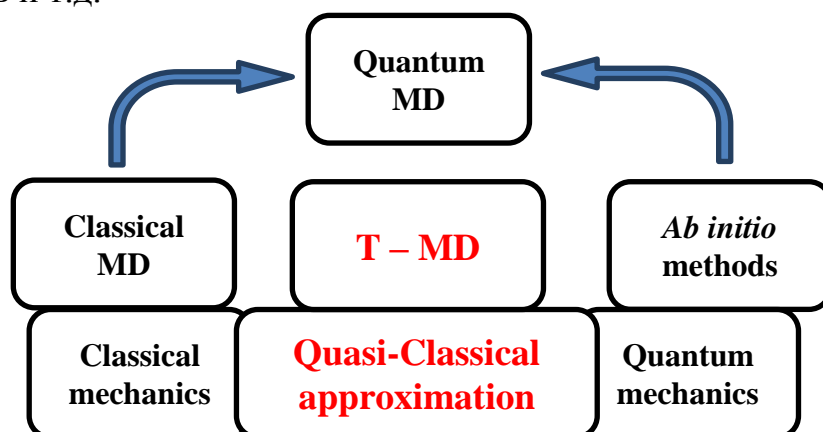
Сравнение результатов при использовании температурно-зависимого потенциала Борна-Майера с расчётами других авторов показывает небольшой выигрыш в точности при невысоких температурах (до 1100К). Однако особый интерес представляет более широкий температурный диапазон (до 3120 К), в котором преимущества расчётов в рамках предложенного подхода становятся особенно заметны. В работе были проведены расчёты постоянной решётки, энтальпии, теплоёмкостей при постоянном объёме и давлении, а также отношение теплоёмкостей. Совпадение расчётов с экспериментальными данными для всех рассмотренных температур составляет не более 0.5% – в то время как потенциалы без учёта температурных изменений в кристалле дают расхождение с экспериментальными данными от 2%, увеличивающееся с ростом температуры до 90%.

**Ключевые слова и фразы:** молекулярная динамика; температурно-зависимый потенциал; диоксид урана.

<sup>1</sup> Работа поддержана грантом РФФИ № 11-01-00311-а.

## 1 ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время метод молекулярной динамики (МД) широко применяется для моделирования термодинамических свойств и неравновесных процессов в кристаллах. Молекулярная динамика использует уравнения механики Ньютона и противоречит квантовому характеру взаимодействия атомов, который основывается на вероятностном подходе (рис.1). Классический метод МД не может учитывать изменения в электронной подсистеме кристалла и, соответственно, их влияние на теплоперенос, энергию связи атомов, энергию кристалла, теплоёмкость и т.д.



**Рисунок 1.** Численные методы моделирования атомарных процессов и их взаимосвязь с физическими теориями и приближениями.

Методы квантовой химии или методы *ab initio* основаны на уравнениях квантовой механики (рис.1), что позволяет в тех или иных приближениях проводить расчёт электронных состояний атомов кристалла. При этом конфигурация атомов задаётся как неизменная величина, определяя условия моделирования. Соответственно классический метод МД использует классическую статистику состояний атомов для расчёта термодинамических величин, таких как давление, температура, энергия, спектр колебаний атомов и т.д. Методы *ab initio* используют квантовую статистику состояний атомов и электронов, что позволяет исследовать квантовые эффекты в кристаллах, особенно это интересно для получения спектров излучения в кристалле, спектров пропускания и т.д.

Квантовая молекулярная динамика использует оба приближения: классическую механику или МД для расчёта движения атомов, а методы *ab initio* – для расчёта состояний электронов для каждой конфигурации атомов, получая таким образом потенциальную энергию взаимодействия атомов. Здесь одновременно используется как квантовая статистика для расчёта энергий состояний электронов, так и классиче-

ская статистика для измерения термодинамических величин кристалла. Существенным недостатком методов *ab initio* и квантовой МД является необходимость использовать высокие вычислительные мощности – на 3-4 порядка больше, чем для классической МД при одинаковом времени моделирования.

В настоящей работе ставится следующая задача: сохранив преимущество классической МД в скорости расчёта, постараться учесть некоторые квантовые эффекты. С этой целью используется квазиклассическое приближение, на основе которого построен метод классической МД с применением температурно-зависимого потенциала (Т-МД, рис.1). Квазиклассическое приближение получается при переходе из квантовой в классическую механику, поэтому для построения температурно-зависимого метода будем использовать теоремы Эренфеста и квантовое уравнение Ньютона.

Идея применения температурной зависимости в потенциале взаимодействия родилась недавно и описана в работах [1,2], посвящённых анализу силы взаимодействия атомов при рассмотрении эффекта Казимира-Полдера и возбуждении электронной подсистемы кристалла при облучении. Так, при рассмотрении эффекта Казимира в рамках четвёртого порядка теории возмущения авторы статьи [1] проводят усреднение энергии взаимодействия по состояниям поля с весовыми коэффициентами, зависящими от температуры. В результате получается линейная температурная зависимость потенциала межатомного взаимодействия.

В работе [2] используется метод квантовой МД, основанный на потенциале Финниса-Синклера и модели погружённого атома. При этом для параметризации потенциала в рамках теории функционала электронной плотности её значение вычисляется в виде разложения:

$$\rho(r) = 2 \sum_i f_i |\psi_i(r)|^2, \quad (1)$$

где  $f_i$  представляют собой числа заполнения состояния  $i$ , подчиняющиеся статистике Ферми-Дирака, а  $\psi_i(r)$  – волновую функцию электрона в состоянии  $i$ . Таким образом, электронная плотность, применяемая в полуэмпирическом потенциале Финниса-Синклера, зависит от температуры и приводит к появлению экспоненциальной зависимости сил межатомного взаимодействия от температуры электронной подсистемы. Необходимо отметить, что МД расчёта с применением температурно-зависимого потенциала сделано не было, авторы работы [2] ограничились только процедурой параметризации, что не позволяет оценить предлагаемый подход при сравнении расчётов с экспериментальными данными.

В развитие этой идеи в работе [3] был предложен новый метод, названный молекулярно-статическим инжинирингом. Авторы используют температурную зависимость потенциала в рамках молекулярно-статического моделирования. С этой целью потенциал Леннарда-Джонса записывается в виде функции с параметром решетки кристалла, линейно изменяющегося с температурой:

$$\varphi_T = \varepsilon_T \left[ \left( \frac{R_T^{12}}{r} \right) - 2 \left( \frac{R_T^6}{r} \right) \right], \quad (2)$$

где  $\varepsilon_T$  – параметр, также зависящий от температуры,  $R_T$  – параметр решетки при конечной температуре. Полученная зависимость межатомного потенциала от температуры применяется в методе молекулярной статики, в котором не используются уравнения Ньютона, а для получения расчетных данных находятся энергии кристалла при различных положениях атомов решетки. В частности, таким методом находится состояние с минимальной энергией системы, упругие константы и термомеханические напряжения.

Необходимо отметить, что статическое моделирование обладает значительными ограничениями, в нем не представляется возможным моделирование различных динамических эффектов, таких как радиационные повреждения и каскады, фононный спектр колебаний и многое другое. Поэтому особый интерес представляет использование температурной зависимости межатомного потенциала при МД моделировании, что до сих пор сделано не было.

## 2 ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА

Поскольку температурная зависимость потенциала межатомного взаимодействия обосновывалась для каждого частного случая отдельно [1-4], возникает необходимость обобщения. Для этого определим потенциальную энергию атома в кристалле при различных температурах и оценим влияние изменения этой энергии на решение уравнения Ньютона в методе МД. В рамках аппарата квантовой механики в соответствии с теоремами Эренфеста механические величины заменяются соответствующими операторами импульса, силы и координаты [5]. Следствием теорем Эренфеста для среднего по ансамблю состояния механических величин в одномерном случае является квантовое уравнение Ньютона:

$$\mu \cdot \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial t^2} = - \frac{\partial \overline{U(x)}}{\partial x}, \quad (3)$$

где  $\mu$  – масса волнового пакета атома,  $\overline{U(x)}$  – усреднённая потенциальная энергия атома в кристалле,  $\bar{x}$  – центр тяжести волнового пакета

та в кристалле.

При этом атом представляется в виде волнового пакета, т.е. его волновая функция  $\Psi$  отлична от нуля заметным образом лишь в очень малой пространственной области  $\Delta x$ . Если бы среднее значение координаты изменялось согласно классическому уравнению Ньютона и форма пакета не менялась бы, то движение атома или волнового пакета  $|\Psi|^2$  можно было бы рассматривать как движение материальной точки, подчиняющейся классической механике, на основе которой построен метод МД. Описание движения атома в рамках квантовой механики не позволяет этого сделать по двум причинам. Во-первых, волновой пакет расплывается, во-вторых, чтобы движение центра тяжести пакета  $\bar{x}$  совпадало с движением материальной точки в поле  $U(x)$ , необходимо выполнение условия:

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} = \frac{\partial U(\bar{x})}{\partial \bar{x}} \quad (4)$$

Последнее равенство в общем случае не имеет места и выполняется только при определённых условиях, которые также ограничивают метод молекулярной динамики. По определению среднее значение

силы можно определить через оператор  $-\frac{\partial \hat{U}}{\partial x}$  [5]:

$$-\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} = -\int \psi^* \cdot \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \psi \cdot dx \quad (5)$$

Положим, что атом за время наблюдения находится вблизи среднего положения и отклоняется на небольшую величину  $\xi$ , т.е.  $x = \bar{x} + \xi$ , тогда

$$-\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} = -\int \psi^*(\bar{x} + \xi) \cdot \frac{\partial U(\bar{x} + \xi)}{\partial \bar{x}} \cdot \psi(\bar{x} + \xi) \cdot d\xi \quad (6)$$

В кристалле выполняется условие, при котором функция  $U(x)$  является достаточно медленно меняющейся функцией переменной  $x$  в области, где  $|\psi|^2$  заметным образом отлична от нуля. Тогда  $\frac{\partial U(\bar{x} + \xi)}{\partial \bar{x}}$  можно разложить в ряд по степеням  $\xi$ . Производя это разложение, получим:

$$-\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} = -\frac{\partial U(\bar{x})}{\partial \bar{x}} \int \psi^* \psi d\xi - \frac{\partial^2 U(\bar{x})}{\partial \bar{x}^2} \int \psi^* \xi \psi d\xi - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 U(\bar{x})}{\partial \bar{x}^3} \int \psi^* \xi^2 \psi d\xi - \dots \quad (7)$$

Учитывая условие нормировки, а также определения среднего и дисперсии, получаем:

$$\begin{aligned} \int \psi^* \cdot \psi \cdot d\xi &= 1, \\ \int \psi^* \cdot \xi \cdot \psi \cdot d\xi &= \int \psi^* \cdot (\bar{x} - x) \cdot \psi \cdot dx = 0, \\ \int \psi^* \cdot \xi^2 \cdot \psi \cdot d\xi &= \int \psi^* \cdot (\bar{x} - x)^2 \cdot \psi \cdot dx = \overline{\Delta x^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

В результате квантовое уравнение Ньютона можно записать так:

$$\mu \cdot \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial t^2} = -\frac{\partial U(x)}{\partial x} = -\frac{\partial U(\bar{x})}{\partial \bar{x}} - \frac{1}{2!} \cdot \frac{\partial^3 U(\bar{x})}{\partial \bar{x}^3} \cdot \overline{\Delta x^2} - \dots \quad (9)$$

Таким образом, чтобы квазиклассическое приближение имело место и молекулярно-динамические расчеты давали корректный результат, необходимо выполнение условия:

$$\frac{\partial U(\bar{x})}{\partial \bar{x}} \gg \frac{1}{2!} \frac{\partial^3 U(\bar{x})}{\partial \bar{x}^3} \cdot \overline{\Delta x^2} \quad (10)$$

Для того, чтобы состояние частицы совпадало с классическим, необходимо также выполнение условия совпадения кинетической энергии с классическим аналогом. Для этого неопределённость в кинетической энергии должна быть много меньше её среднего значения. С учётом соотношения Гейзенберга это условие можно записать в следующем виде:

$$\frac{\overline{p^2}}{2\mu} \gg \frac{\overline{\Delta p^2}}{2\mu} \geq \frac{\hbar^2}{8\mu \overline{\Delta x^2}} \quad (11)$$

Таким образом, квазиклассическое приближение и метод молекулярной динамики будут работать при выполнении условий (10) и (11). Одновременное выполнение обоих этих неравенств происходит при больших кинетических энергиях атомов и плавно меняющихся полях. Видно, что с ростом температуры будет расти кинетическая энергия, и неравенство (11) не будет нарушаться, в отличие от условия (10).

Чтобы посмотреть, как с ростом температуры будет меняться дисперсия и выполняться неравенство (10), необходимо привлечь аппарат квантовой статистики. С этой целью для каждого атома кристаллической решётки рассмотрим смешанный ансамбль:

$$\begin{vmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 & \dots & \psi_\alpha \\ P_1 & P_2 & P_3 & \dots & P_\alpha \end{vmatrix}, \quad (12)$$

где  $\psi_\alpha$  – состояние атома с энергией  $E_\alpha$ ,  $P_\alpha$  – вероятность нахождения атома в состоянии  $\psi_\alpha$ . Тогда вероятность нахождения  $n_s$  различных независимых частиц в интервале состояний S дается выражением [6]:

$$P(n_s) = P(n_1, n_2, n_3, \dots, n_s, \dots) = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot \dots \cdot P_s \cdot \dots = N! \prod_{s=1}^{\infty} \frac{g_s^{n_s}}{n_s!}, \quad (13)$$

где  $n_s$  – число частиц в интервале  $S$ ,  $g_s$  – число одночастичных состояний в интервале  $S$ . При этом должны выполняться условия нормировки:

$$\sum_{s=1}^{\infty} n_s = N = const \text{ – число частиц в системе;} \quad (14)$$

$$\sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon_s \cdot n_s = E = const \text{ – энергия системы;} \quad (15)$$

В соответствии со статистикой Максвелла-Больцмана число атомов с энергией  $\varepsilon_s$  и вероятность равны:

$$n_s = \frac{g_s}{e^{\alpha + \frac{\varepsilon_s}{kT}}} = g_s \cdot e^{-\alpha} \cdot e^{-\frac{\varepsilon_s}{kT}}; \quad (16)$$

$$P_s = \frac{n_s}{N} = \frac{g_s \cdot e^{-\alpha} \cdot e^{-\frac{\varepsilon_s}{kT}}}{N}. \quad (17)$$

Таким образом, в случае смешанного ансамбля атомов среднее величины  $f$  можно получить, вычисляя интеграл:

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \int \psi^* \cdot \hat{f} \cdot \psi \cdot dV = \sum_s P_s \int \psi_s^* \cdot \hat{f} \cdot \psi_s \cdot dV = \\ &= \frac{e^{-\alpha}}{N} \sum_s g_s \cdot e^{-\frac{\varepsilon_s}{kT}} \int \psi_s^* \cdot \hat{f} \cdot \psi_s \cdot dV \end{aligned} \quad (18)$$

Следовательно, среднее значение дисперсии для смешанного ансамбля можно записать в виде [6]:

$$\overline{\Delta x^2} = \overline{(x - \bar{x})^2} = \frac{1}{e^{\alpha} \cdot N} \sum_s g_s \cdot e^{-\frac{\varepsilon_s}{kT}} \int \psi_s^* \cdot (x - \bar{x})^2 \cdot \psi_s \cdot dx, \quad (19)$$

где  $\psi_s = \psi_s(x, t)$  – волновая функция атома в состоянии  $S$ ,  $N$  – количество атомов в ансамбле,  $e^{\alpha}$  – нормировочный коэффициент,  $g_s$  – число одночастичных состояний в интервале состояний  $S$ ,  $\varepsilon_s$  – энергия атома в состоянии  $S$ . Видно, что дисперсия смешанного ансамбля будет существенно зависеть от температуры. Именно поэтому условие (10) с ростом температуры будет выполняться менее строго, что приводит к существенной разнице численных расчётов методом молекулярной динамики и экспериментальных данных. Однако температурную зависимость дисперсии можно учесть, введя эффективный потенциал  $U_{eff}(x, T)$ , зависящий от температуры как от параметра так, чтобы для каждой температуры  $T$  выполнялось квантовое уравнение Ньютона:

$$\mu \cdot \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial t^2} = - \frac{\partial U_{eff}(\bar{x}, T)}{\partial \bar{x}},$$

$$\text{где} \quad \frac{\partial U_{eff}(\bar{x}, T)}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial U(\bar{x})}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{\partial^2 U(\bar{x})}{\partial \bar{x}^2} \cdot \frac{1}{e^{\alpha} \cdot N} \sum_s \overline{\Delta x_s^2} \cdot g_s \cdot e^{-\frac{\epsilon_s}{kT}} + \dots \quad (20)$$

С учётом неравенства (10) на вид потенциала  $U_{eff}(x, T)$  накладываются те же ограничения, что и на  $U(x)$ , а также то, что изменение потенциала с температурой должно быть много меньше исходных абсолютных значений. С учётом выражений (10), (11) и (20) в первом приближении потенциал  $U_{eff}(x, T)$  можно взять в виде функции с линейными коэффициентами от температуры, как это было сделано в работе [3], так чтобы температурные изменения имели второй порядок малости по отношению к  $U(\bar{x})$ .

### 3 ВЫБОР ПОТЕНЦИАЛА

Итак, форму необходимого потенциала можно записать в виде:

$$U_{eff}(r, T) = U(r) + \delta U(r, T), \quad \text{где } |U(r)| \gg |\delta U(r, T)| \quad (21)$$

Поскольку эффективность метода температурно-зависимого потенциала можно оценить только при расчётах в широком диапазоне температур, в качестве тестового материала был выбран диоксид урана, имеющий температуру плавления 3150 К. Он представляет собой ионный кристалл с кубической решёткой типа флюорита.

Для математического описания моделируемого кристалла различными авторами, занимающимися разработкой потенциалов для диоксида урана, были предложены две модели [7,10]. Первая – модель жёстких ионов, описывающая атомы как точечные заряды, взаимодействующие между собой посредством Кулоновских сил, а также короткодействующего потенциала. Вторая модель – оболочечная [7,10], представляющая атомы в виде ядра и внешней заряженной оболочки, представляющей валентные электроны, связанные между собой упругим взаимодействием. При этом электростатическое взаимодействие осуществляется между всеми ядрами и оболочками, в то время как короткодействующие силы связывают только оболочки. В обеих описанных моделях потенциал представляется в виде двух слагаемых – кулоновского и некулоновского.

В настоящей работе выбор потенциала не является принципиальным, и возможность добавления температурной зависимости не зависит от его формы. Выбор конкретного вида потенциала подчиняется другим критериям, таким как условия моделирования, вычислительные возможности, а также субъективные предпочтения исследователей. В нашем случае была выбрана наиболее простая модель жёстких ионов и потенциал в форме Борна-Майера:



$$U_{eff}(r_{ij}, T) = \frac{z_i(T)z_j(T)e^2}{r_{ij}} + f(T)(b_i + b_j) \exp\left(\frac{a_i + a_j - r_{ij}}{b_i + b_j}\right) - \frac{c_i c_j}{r_{ij}^6} \quad (22)$$

Поскольку подобный расчёт для  $UO_2$  проводится впервые, число параметров, зависящих от температуры, было ограничено двумя – дробный заряд  $z(T)$  и параметр  $f(T)$ . В дальнейшем число параметров, зависящих от температуры, может быть увеличено. Учитывая выражения (10) и (11), коэффициенты можно записать в виде:

$$\begin{cases} z_i(T) = z_{0i}(1 - \xi'T), & \text{при } \xi'T \ll 1 \\ f_i(T) = f_{0i}(1 - \xi''T), & \text{при } \xi''T \ll 1 \end{cases}, \text{ при } T < 3120K$$

На примере кулоновской части потенциала  $U_{eff}(r_{ij}, T)$  покажем, что выбранная форма соответствует выражению (10):

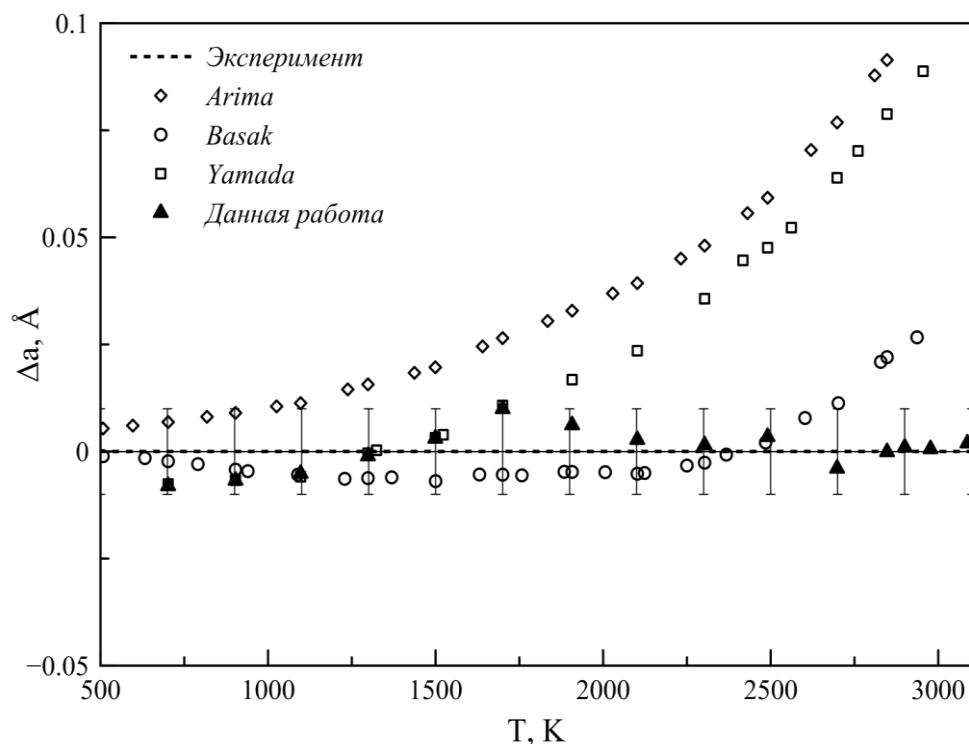
$$\begin{aligned} U_{eff}(r_{ij}, T) &= \frac{z_i(T)z_j(T)e^2}{r_{ij}} + \dots = \frac{z_{0i}(1 - \xi'T)z_{0j}(1 - \xi'T)e^2}{r_{ij}} + \dots \\ &= \frac{z_{0i}z_{0j}(1 - 2\xi'T + \xi'^2T^2)e^2}{r_{ij}} + \dots \\ &= \frac{z_{0i}z_{0j}e^2}{r_{ij}} + \frac{z_{0i}z_{0j}(-2\xi'T + \xi'^2T^2)e^2}{r_{ij}} + \dots \\ &= U(r_{ij}) + \delta U(r_{ij}, T) \end{aligned}$$

Моделирование проводилось с использованием программного комплекса DL\_POLY[7], при этом граничные условия были периодическими. Транслируемая ячейка была выбрана в виде кубического кристалла со структурой флюорита и содержала 768 ионов или  $4 \times 4 \times 4$  элементарных ячеек. Для всех расчётов шаг интегрирования был выбран 4фс, радиус обрезания потенциала был равен  $10\text{\AA}$ . В зависимости от задачи расчёты велись либо в микроканоническом ансамбле  $NVE$ , либо в каноническом ансамбле  $NPT$ . Потенциал межатомного взаимодействия был выбран в форме (22), при этом значения независимых от температуры параметров потенциала были взяты из работы [9]. Зависимости дробного заряда кислорода и параметра  $f$  от температуры имеют вид:

$$\begin{cases} z(T) = z_0 \left[ 1 + \alpha \frac{T - T_0}{T_0} \right], & \text{где } \alpha = \begin{cases} 9,61 \cdot 10^{-3}, T < T_0 \\ -2,93 \cdot 10^{-2}, T > T_0 \end{cases}, z_0 = 1,193, T_0 = 2666K \\ f(T) = f_0 \left[ 1 + \beta \frac{T - T'_0}{T'_0} \right], & \text{где } \beta = \begin{cases} 9,3 \cdot 10^{-2}, T < T'_0 \\ -2,6 \cdot 10^{-1}, T > T'_0 \end{cases}, f_0 = 0,354, T'_0 = 2627K \end{cases} \quad (23)$$

#### 4 РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТА

Предложенная в настоящей работе методика позволяет рассчитать параметр решётки и энтальпию диоксида урана с достаточной точностью во всём температурном интервале (рис. 2,3). Для оценки погрешностей графики перестроены как разность между экспериментальными значениями и значениями, полученными расчётным путём при помощи различных потенциалов. Необходимо отметить, что эти зависимости, рассчитанные из наиболее применяемых на сегодняшний день потенциалов, таких как Basak [12], Morelon [13], Yamada [14], Поташников [15], Arima [16], Lewis [17], существенно отличаются от экспериментальных в диапазоне температур 1500-3150 К. Поскольку основные расчеты велись для температурного интервала 600-1100 К, этими отклонениями до сих пор пренебрегали.

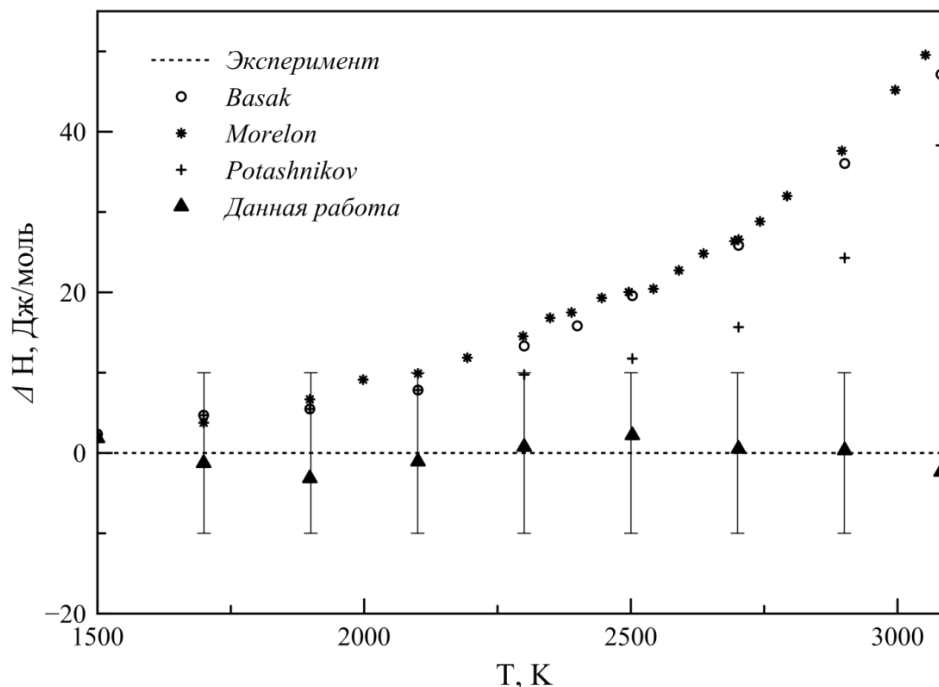


**Рисунок 2.** Сравнение экспериментальных данных температурной зависимости параметра решётки  $UO_2$  с данными расчета настоящей работы и с использованием различных потенциалов [12-14,16,17].

Графики перестроены как разность между экспериментальным значением и значением расчёта. Погрешность указана для экспериментальных данных.

Интересно, что параметр решётки, рассчитанный с использованием потенциалов Basak и Morelon, совпадает с экспериментальными данными достаточно хорошо (рис.2), но при этом функция энтальпии расходится с ростом температуры (рис.3). Напротив, значения, полу-

ченные с использованием потенциала Yamada, дают существенную погрешность при расчёте параметра решётки, но при подборе модуля упругости приводят к наиболее точному результату.



**Рисунок 3.** Сравнение экспериментальных данных температурной зависимости энтальпии с данными расчёта настоящей работы и с использованием различных потенциалов [12,13,15].

Графики перестроены как разность между экспериментальным значением и значением расчёта. Погрешность указана для экспериментальных данных.

Отличие численных и экспериментальных значений вынуждает искать новые подходы, в результате чего происходит необоснованное увеличение количества параметров в потенциале [7,10]. Сегодня только форм потенциалов для диоксида урана известно более 6 [7], что, соответственно, приводит к различиям полученных на их основе численных результатов и экспериментальных данных. Предложенный в настоящей работе подход даёт хорошее согласие с экспериментальными значениями во всём диапазоне температур, при этом погрешность расчётов не превышает 0,5% (рис.3).

Погрешность расчётов с применением наиболее точных на сегодняшний день потенциалов варьируется от 2 до 17% в зависимости от температуры в диапазоне 1500-3000 К. Необходимо отметить, что полученное хорошее согласие двух экспериментальных зависимостей с расчётами на основе предложенного потенциала обосновано тем фактом, что в подборе участвовали два параметра  $f(T)$  и  $z_i$ . Совпадение расчётной температурной зависимости энтальпии с эксперименталь-

---

---

ными данными позволяет предположить, что будет получено хорошее согласие также и при расчётах теплоёмкостей.

## 5 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Согласно предложенному методу, в молекулярно-динамических расчётах свойств твердых тел потенциал, вне зависимости от его формы, выбирается в виде плавно меняющейся функции температуры. В работе произведено обоснование данного подхода с использованием строгих расчётов на основании теоремы Эренфеста в соответствии с законами квантовой механики. Для проверки состоятельности подхода было проведено моделирование свойств стехиометрического диоксида урана. Сравнение результатов при использовании температурно-зависимого потенциала Борна-Майера с расчётами других авторов показывает очень небольшой выигрыш в точности при невысоких температурах до 1100 К.

Однако особый интерес представляет более широкий температурный диапазон (до 3120 К), в котором преимущества расчётов в рамках предложенного подхода становятся особенно заметны. Погрешность расчётов для всех рассмотренных температур составляет не более 0.5% – в то время как другие потенциалы дают расхождение с экспериментальными данными от 2%, увеличивающееся с ростом температуры. Таким образом, применение предложенного метода при моделировании свойств диоксида урана позволяет существенно повысить точность, что особенно актуально для расчётов в высокотемпературной области, где при использовании метода классической молекулярной динамики наблюдается существенное отклонение.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. H. Wennerstrom, J. Daicic, B. W. Ninham. Temperature dependence of atom-atom interactions // *Physical Review A*. – Vol. 60, 1999. – P.2581-2584.
2. S. Khakshouri, D. Alfe, D. M. Duffy. Development of an electron-temperature-dependent interatomic potential for molecular dynamics simulation of tungsten under electronic excitation // *Physical Review B*. Vol. 78, 2008. – P.224304:1-11.
3. A. K. Subramanian, C. T. Sun. Engineering molecular mechanics: an efficient static high temperature molecular simulation technique // *Nanotechnology*. Vol. 19, 2008. – P.285706:1-5.
4. V. S. Guthikonda, R. S. Elliott. An Effective Interaction Potential Model for the Shape Memory Alloy AuCd // *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. Vol. 21(4), 2009. – P.269-295.

5. Д. И. Блохинцев. Основы квантовой механики. – М.: Наука, 1976. – 664 с.
6. А. Ярив. Введение в теорию и приложения квантовой механики. – М.: Мир, 1986. – 360 с.
7. K. Govers, S. Lemehov, M. Hou, M. Verwerft. Comparison of interatomic potentials for UO<sub>2</sub>. Part I: Static calculations // J. Nuclear Materials. Vol. 366, 2007. – P.161–177.
8. Х. Гулд, Я. Табочник. Компьютерное моделирование в физике. Ч.1. – М.: Мир, 1990. – 349 с.
9. S. Yamasaki, T. Arima, K. Idemitsu and others. Evaluation of Thermal Conductivity Hyperstoichiometric UO<sub>2+x</sub> by Molecular Dynamics Simulation // International Journal of Thermophysics. Vol. 28, No.2, 2007. – P.661-673.
10. K. Govers, S. Lemehov, M. Hou, M. Verwerft. Comparison of interatomic potentials for UO<sub>2</sub>. Part II: Molecular dynamics simulations // J. Nuclear Materials. Vol. 376, 2008. – P. 66-77.
11. А. М. Молодец, В. Е. Фортон. Фазовые переходы диоксида урана при высоких температурах и давлении // Письма в ЖЭТФ. Т. 80, № 3, 2004. – С.196-199.
12. C. B. Basak, A. K. Sengupta, H. S. Kamath. Classical molecular dynamics simulation of UO<sub>2</sub> to predict thermophysical properties // J. Alloys and Comp. Vol. 360, 2003. – P.210-216.
13. N.-D. Morelon, D. Ghaleb. A new empirical potential for simulating the formation of defects and their mobility in uranium dioxide // Phil. Mag. Vol. 83, 2003. – P.1533–1550.
14. K. Yamada, K. Kurosaki, M. Uno, S. Yamanaka. Evaluation of thermal properties of uranium dioxide by molecular dynamics // J. Alloys and Comp. Vol. 307, 2000. – P.10-15.
15. С. И. Поташников, А. С. Боярченко, К. А. Некрасов, А. Я. Курячкин. Молекулярно-динамическое восстановление межчастичных потенциалов в диоксиде урана по тепловому расширению // Альтернативная энергетика и экология. №8 (52), 2007. – С.43-52.
16. T. Arima, S. Yamasaki, Y. Inagaki, K. Idemitsu. Evaluation of thermal properties of UO<sub>2</sub> and PuO<sub>2</sub> by equilibrium molecular dynamics simulations from 300 to 2000 K // J. Alloys and Compounds. Vol. 400, No. 1-2, 2005. – P.43-50.
17. G. V. Lewis, C. R. A. Catlow. Potential models for ionic oxides // J. Phys. C: Sol. St. Phys. Vol. 18, No. 6, 1985. – P.1149-1162.

---

---

**ABOUT MOLECULAR DYNAMICS METHOD  
WITH PARAMETRICALLY TEMPERATURE-DEPENDENT POTENTIAL**

Yu. S. Nagornov

A. V. Kats

*Togliatti State University*

email: nagornovys@yandex.ru

email: elfsage@mail.ru

**Abstract.** The article examines a new approach to the choice of interatomic interaction forces in the simulation of condensed media by the method of molecular dynamics, based on selection of the pair potential in the form of slightly varying function of temperature. Method of classical molecular dynamics is based on the equations of classical mechanics, numerical methods of ab initio are based on the equations of quantum mechanics. Quantum molecular dynamics holds equations of the classical mechanics for atoms and quantum mechanics for electrons. The proposed method of molecular dynamics with temperature-dependent potential is based on the quasi-classical approximation, and is a modified method of classical molecular dynamics. Quantum-mechanical accom-identification of the proposed method is based on Ehrenfest theorem and quantum equations of Newton. To confirm the efficiency of the method of molecular dynamics with temperature-dependent potential the calculations of thermodynamic parameters of stoichiometric uranium dioxide are carried out. Uranium dioxide was chosen as a model material with high melting temperature (3120K) that allowed demonstrating the advantages of quasi-classical approach in comparison with classical mechanics.

Comparison of results with the use of temperature-dependent potential Born-Mayer with the calculations of other authors shows big gains in accuracy at low temperatures to 1100K. However, of special interest over a wide temperature range (up to 3120K), in which the benefits of calculations in the framework of the proposed approach becomes especially noticeable. In the work the calculations of the lattice constant, enthalpy, heat capacity at constant volume and pressure, as well as the ratio of heat capacities was carried out. The coincidence of calculations with the experimental data for all the considered temperature is not more than 0.5% while the potentials excluding temperature changes in the crystal gives a divergence with the experimental data from 2%, increasing with temperature up to 90%.

**Keywords and phrases:** molecular dynamics; temperature-dependent potential; uranium dioxide.

#### REFERENCES

1. H. Wennerstrom, J. Daicic, B. W. Ninham. Temperature dependence of atom-atom interactions // *Physical Review A*. – Vol. 60, 1999. – P.2581-2584.
2. S. Khakshouri, D. Alfe, D. M. Duffy. Development of an electron-temperature-dependent interatomic potential for molecular dynamics simulation of tungsten under electronic excitation // *Physical Review B*. Vol. 78, 2008. – P.224304:1-11.
3. A. K. Subramaniyan, C. T. Sun. Engineering molecular mechanics: an efficient static high temperature molecular simulation technique // *Nanotechnology*. Vol. 19, 2008. – P.285706:1-5.
4. V. S. Guthikonda, R. S. Elliott. An Effective Interaction Potential Model for the Shape Memory Alloy AuCd // *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. Vol. 21(4), 2009. – P.269-295.
5. D. I. Blokhincev. *Osnovy kvantovoy mekhaniki*. – M.: Nauka, 1976. – 664 s.

6. A. Yariv. *Vvedenie v teoriyu i prilozheniya kvantovoy mekhaniki*. – M.: Mir, 1986. – 360 s.
7. K. Govers, S. Lemehov, M. Hou, M. Verwerft. Comparison of interatomic potentials for UO<sub>2</sub>. Part I: Static calculations // *J. Nuclear Materials*. Vol. 366, 2007. – P.161–177.
8. H.Gould, J.Tobochnik, W.Christian. *Introduction to Computer Simulation Methods: Applications to Physical Systems*, 3rd ed. – Addison-Wesley (2006). – 720 p.
9. S. Yamasaki, T. Arima, K. Idemitsu and others. Evaluation of Thermal Conductivity Hyperstoichiometric UO<sub>2+x</sub> by Molecular Dynamics Simulation // *International Journal of Thermophysics*. Vol. 28, No.2, 2007. – P.661-673.
10. K. Govers, S. Lemehov, M. Hou, M. Verwerft. Comparison of interatomic potentials for UO<sub>2</sub>. Part II: Molecular dynamics simulations // *J. Nuclear Materials*. Vol. 376, 2008. – P. 66-77.
11. A. M. Molodec, V. E. Fortov. Fazovye perekhody dioksida urana pri vysokikh temperaturakh i davlenii // *Pis'ma v ZhETF*. T. 80, № 3, 2004. – C.196-199.
12. C. B. Basak, A. K. Sengupta, H. S. Kamath. Classical molecular dynamics simulation of UO<sub>2</sub> to predict thermophysical properties // *J. Alloys and Comp.* Vol. 360, 2003. – P.210-216.
13. N.-D. Morelon, D. Ghaleb. A new empirical potential for simulating the formation of defects and their mobility in uranium dioxide // *Phil. Mag.* Vol. 83, 2003. – P.1533–1550.
14. K. Yamada, K. Kurosaki, M. Uno, S. Yamanaka. Evaluation of thermal properties of uranium dioxide by molecular dynamics // *J. Alloys and Comp.* Vol. 307, 2000. – P.10-15.
15. S. I. Potashnikov, A. S. Boyarchenkov, K. A. Nekrasov, A. Ya. Kupryazhkin. Molekulyarno-dinamicheskoe vosstanovlenie mezhchastichnykh potencialov v dioksidge urana po teplovomu rasshireniyu // *Al'ternativnaya energetika i ekologiya*. №8 (52), 2007. – C.43-52.
16. T. Arima, S. Yamasaki, Y. Inagaki, K. Idemitsu. Evaluation of thermal properties of UO<sub>2</sub> and PuO<sub>2</sub> by equilibrium molecular dynamics simulations from 300 to 2000 K // *J. Alloys and Compounds*. Vol. 400, No. 1-2, 2005. – P.43-50.
17. G. V. Lewis, C. R. A. Catlow. Potential models for ionic oxides // *J. Phys. C: Sol. St. Phys.* Vol. 18, No. 6, 1985. – P.1149-1162.

УДК 004.422.63

## МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ МЕТОДОВ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ n FIFO-ОЧЕРЕДЕЙ В ПАМЯТИ ОДНОГО УРОВНЯ<sup>1</sup>

А. В. Соколов

А. В. Драц

*Институт прикладных математических исследований*

*Карельского научного центра РАН,*

*Петрозаводский государственный университет*

email: avs@krc.karelia.ru

email: adeon88@mail.ru

**Аннотация.** Во многих приложениях требуется работа с несколькими FIFO-очередями, расположенными в общем пространстве памяти. Для этого применяют различные программные или аппаратные решения. В данной работе предлагаются математические модели для последовательного циклического и связанного способов представления n FIFO-очередей в общей памяти. В обоих способах представления для каждой очереди нужны два указателя на начало и конец, но для первого способа элементы равных длин располагаются циклически в последовательных адресах выделенного очереди участка памяти, а во втором каждая очередь представлена в виде односвязного списка элементов, и переполнение памяти наступает тогда, когда список свободных элементов пуст и требуется включить элемент в какую-либо очередь. В этих способах представления операции включения и исключения элементов выполняются за время  $O(1)$ . В последовательном способе мы имеем потери, в случае когда одна очередь переполнилась, а в других остаётся свободное место. В связанном способе потерь нет до тех пор, пока не исчерпана вся свободная память в выделенном для очередей участке памяти, но требуется дополнительная память на связи в каждом элементе списка.

В статье решается задача нахождения оптимального разделения памяти между очередями в случае последовательного циклического представления очередей и задача анализа метода представления очередей в виде связанных списков. В качестве математических моделей предложены случайные блуждания по целочисленным решёткам в различных областях  $n$ -мерного пространства. В качестве критерия оптимальности рассматривается минимальная средняя доля времени, которое системы проводит в состояниях «сброса хвоста». Это эквивалентно минимизации средней доли потерянных элементов. Эту величину разумно минимизировать, когда переполнение очереди является не аварийной, а стандартной ситуацией. В некоторых приложениях при переполнении

---

<sup>1</sup> Работа поддержана грантом РФФИ № 12-01-00253-а и Программой стратегического развития Петрозаводского государственного университета в рамках реализации комплекса мероприятий по развитию научно-исследовательской деятельности.



очереди работа программы заканчивается, и тогда в качестве критерия оптимальности надо рассматривать максимальное среднее время до переполнения памяти. То есть если очередь занимает всю предоставленную ей память, то все последующие элементы, поступающие в неё, отбрасываются до тех пор, пока не появится свободная память (т.е. до тех пор, пока не произойдёт исключение элемента из очереди). Эта схема работы применяется, например, в работе сетевых маршрутизаторов в том случае, когда по мере увеличения трафика очередь на исходящем интерфейсе маршрутизатора заполняется пакетами. Такое поведение маршрутизатора называется «сбросом хвоста». Потери пакетов приводят к нежелательному результату, поэтому число таких ситуаций необходимо свести к минимуму. Для решения задач используется аппарат регулярных цепей Маркова.

**Ключевые слова и фразы:** FIFO-очереди; случайные блуждания; цепи Маркова; оптимальные динамические структуры данных.

## 1 ВВЕДЕНИЕ

Во многих приложениях требуется работа с несколькими FIFO-очередями, расположенными в общем пространстве памяти. Для этого применяют различные программные или аппаратные решения [1–3]. В настоящей работе предлагаются математические модели для последовательного циклического и связанного способов представления очередей [1]. В обоих способах представления для каждой очереди нужны два указателя на начало и конец, но для первого способа элементы равных длин располагаются циклически в последовательных адресах выделенного очереди участка памяти, а во втором каждая очередь представлена в виде односвязного списка элементов, и переполнение памяти наступает тогда, когда список свободных элементов пуст и требуется включить элемент в какую-либо очередь. В обоих способах операции включения и исключения выполняются за время  $O(1)$ . В качестве критерия оптимальности рассматривается минимальная доля потерянных элементов при бесконечном времени работы очередей. Эту величину разумно минимизировать, когда переполнение очереди является не аварийной, а стандартной ситуацией (здесь мы подчёркиваем, что в некоторых приложениях при переполнении очереди работа программы заканчивается, и тогда в качестве критерия оптимальности надо рассматривать максимальное среднее время до переполнения памяти). То есть если очередь занимает всю предоставленную ей память, то все последующие элементы, поступающие в неё, отбрасываются до тех пор, пока не появится свободная память (т. е. до тех пор, пока не произойдёт исключение элемента из очереди). Такая схема работы применяется, например, в работе сетевых маршрутизаторов [3] в том случае, когда по мере увеличения трафика очередь на исходя-

щем интерфейсе маршрутизатора заполняется пакетами. Такое поведение маршрутизатора называется «сбросом хвоста». Потери пакетов приводят к нежелательному результату, поэтому число таких ситуаций необходимо свести к минимуму.

Мы в этой работе строим математические модели в виде случайных блужданий по целочисленной решётке. Первоначально такие модели в виде случайного блуждания в треугольнике [4–7] были построены для решения задачи анализа процесса работы с двумя стеками, растущими навстречу друг другу, поставленной в [1]. В этих моделях предполагается, что на каждом шаге дискретного времени с заданными вероятностями происходят некоторые операции с очередями. Время выполнения операций – это не случайная величина, а константа, поэтому фиксированным является и шаг времени. В [8] был рассмотрен случай последовательного представления очереди для  $n=2$ , в [9] была предложена модель, описывающая последовательное представление очередей для  $n=3$ . В [10–12] рассмотрены модели работы с  $n$  очередями для разных способов представления очередей и критериев оптимальности.

В данной статье рассмотрены последовательный и связанный способы представления FIFO-очередей для случая произвольного  $n$ . Необходимо определить, как распределить память между очередями в последовательном способе организации, и какой из способов организации очередей является оптимальным.

Будем придерживаться следующих обозначений:

- $m$  – размер памяти;
- $n$  – количество очередей в быстрой памяти;
- $p_i$  – вероятность включения элемента в  $i$ -ю очередь;
- $q_i$  – вероятность извлечения элемента из  $i$ -й очереди;
- $r$  – вероятность того, что не произойдёт операции включения или извлечения;
- $k_i$  – размер памяти, выделенной для очереди с номером  $i$  при последовательном представлении;
- $x_i$  – текущая длина очереди с номером  $i$ ;
- $l$  – отношение размера узла к размеру указателя (для связанного представления);
- $P^*$  – доля времени, которую проводит очередь в состоянии «сброса хвоста».

## 2 ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОЧЕРЕДЕЙ

### 2.1. Общие положения

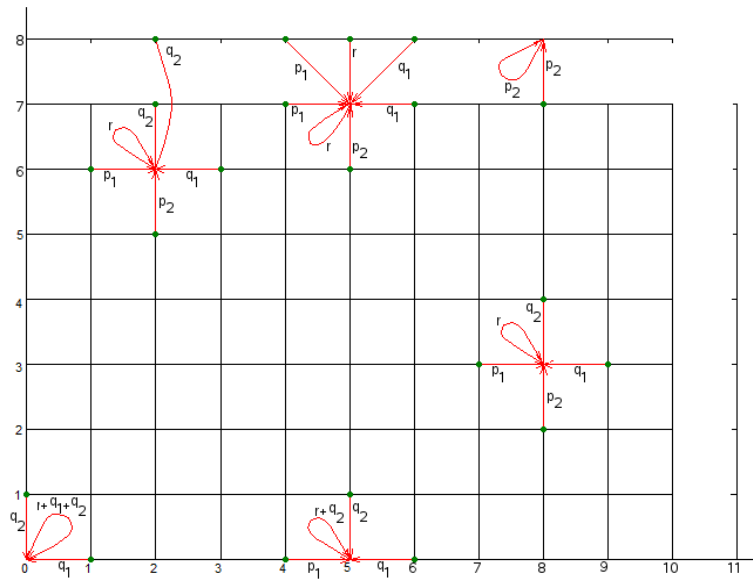
Рассмотрим  $n$  FIFO-очередей, расположенных в быстрой памяти раз-

мера  $m$ . Для последовательного представления каждой очереди необходимо выделить  $k_i$  единиц памяти, где  $k_1 + \dots + k_n = m$ . Если очередь занимает всю предоставленную ей память, то все последующие элементы, поступившие в неё, отбрасываются до тех пор, пока не появится свободная память.

В качестве математической модели рассмотрим случайное блуждание по целочисленному  $n$ -мерному параллелепипеду, ограниченному гиперплоскостями  $x_i = 0, x_i = k_i, 1 \leq i \leq n$ . Количество состояний равно  $\prod_{i=1}^n (k_i + 1)$ .  $(x_1, \dots, x_n)$  – состояние системы  $x_1 = k_1 + 1, \dots, x_n = k_n + 1$  – состояния «сброса хвоста».

Переход системы из состояния  $(x_1, \dots, x_n)$  в состояние  $(x'_1, \dots, x'_n)$  происходит в соответствии со следующими правилами:

$$\begin{aligned}
 (\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) \xrightarrow{p_i} & \begin{cases} (\dots, x_i + 1, \dots, x_j, \dots) & 0 \leq x_i \leq k_i, x_j \leq k_j \\ (\dots, x_i + 1, \dots, x_j - 1, \dots) & 0 \leq x_i \leq k_i, x_j = k_j + 1 \\ (\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) & x_i = k_i + 1, x_j \leq k_j \\ (\dots, x_i, \dots, x_j - 1, \dots) & x_i = k_i + 1, x_j = k_j + 1 \end{cases} \\
 (\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) \xrightarrow{q_i} & \begin{cases} (\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) & x_i = 0, x_j \leq k_j \\ (\dots, x_i, \dots, x_j - 1, \dots) & x_i = 0, x_j = k_j + 1 \\ (\dots, x_i - 1, \dots, x_j, \dots) & 1 \leq x_i \leq k_i, x_j \leq k_j \\ (\dots, x_i - 1, \dots, x_j - 1, \dots) & 1 \leq x_i \leq k_i, x_j = k_j + 1 \\ (\dots, x_i - 2, \dots, x_j, \dots) & x_i = k_i + 1, x_j \leq k_j \\ (\dots, x_i - 2, \dots, x_j - 1, \dots) & x_i = k_i + 1, x_j = k_j + 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$



**Рисунок 1.** Переходы между состояниями в случае последовательного представления очередей

$$(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) \xrightarrow{r} \begin{cases} (\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) & 0 \leq x_i \leq k_i, x_j \leq k_j \\ (\dots, x_i, \dots, x_j - 1, \dots) & 0 \leq x_i \leq k_i, x_j = k_j + 1 \\ (\dots, x_i - 1, \dots, x_j, \dots) & x_i = k_i + 1, x_j \leq k_j \\ (\dots, x_i - 1, \dots, x_j - 1, \dots) & x_i = k_i + 1, x_j = k_j + 1 \end{cases}$$

**Теорема 1.** Пусть  $(k_1, \dots, k_n)$  – фиксированное разбиение памяти между очередями, у очередей с номерами  $1 \leq i \leq s$  справедливо  $p_i \neq q_i$ , а для очередей с номерами  $s+1 \leq i \leq n$  справедливо  $p_i = q_i$ . Тогда доля времени, которую система проводит в состоянии «сброса хвоста», равна

$$P_c = \sum_{i=1}^n \frac{q_i - p_i}{\left(\frac{q_i}{p_i}\right)^{k_i+1} - 1} + \sum_{i=s+1}^n \frac{p_i}{k_i + 1}$$

Доказательства теорем приведены в работах [10,11].

## 2.2. Оптимальное разбиение памяти.

### Случай равных вероятностей

**Теорема 2.** Пусть у всех очередей равны вероятности включения и исключения элементов  $p_i=q_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ). Тогда:

$$P_c^* \geq \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{k_i+1} = \frac{(\sum_{i=1}^n \sqrt{p_i})^2}{m+n}, \text{ где } k_i^* = \frac{(m+n)\sqrt{p_i}}{\sum_{l=1}^n p_l} - 1$$

$$(k_1^*, \dots, k_n^*) = \operatorname{argmin}_{k_1 + \dots + k_n = m} \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{k_i+1}$$

При этом  $|k_i^* - \bar{k}_i| < 1$ , где  $(\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n)$  – оптимальное разбиение памяти ( $k_i^* \in R, \bar{k}_i \in \{N \cup 0\}$ ).

Чтобы найти оптимальное разбиение памяти, можно округлить числа  $k_i^*$  вниз, а оставшуюся часть памяти (размером меньше  $n$  единиц) распределить между очередями по методу, описанному в следующем разделе.

## 2.3. Оптимальное разбиение памяти. Общий случай

Введём обозначение:

$$Z_m = \min_{k_1 + \dots + k_n = m} \left( \sum_{i=1}^n p_i^*(k_i) \right)$$

где  $Z_m$  – доля времени, которое процесс проводит в состоянии «сброса хвоста» при оптимальном разбиении памяти размера  $m$  между очередями,  $p_i^*(k_i)$  – доля времени, в течение которого происходит потеря элементов только для  $i$ -й очереди при размере памяти  $k_i$ .

Рассмотрим рекуррентную формулу

$$Z_m = Z_{m-1} - \max_{1 \leq i \leq n} (p_i^*(k_i) - p_i^*(k_i + 1))$$

Начальное значение  $Z_0$  равно:

$$Z_0 = \sum_{i=1}^n \frac{q_i - p_i}{\left(\frac{q_i}{p_i}\right)^{0+1} - 1} = \sum_{i=1}^n p_i$$

То есть при отсутствии памяти любая попытка включения элемента в одну из очередей будет приводить к его потере.

Был реализован эффективный алгоритм решения задачи на основе предложенной модели динамического программирования, который за время  $O(mn)$  вычисляет оптимальное разбиение памяти и долю времени, проведённого в состояниях «сброса хвоста». Также была построена математическая модель этого процесса в виде случайного блуждания по целочисленному  $n$ -мерному параллелепипеду с вершиной в начале координат, рёбрами, параллельными осям координат, и известными длинами рёбер. Гиперплоскости соответствуют состояниям «сброса хвоста». Была предложена нумерация состояний, и на её основе разработан алгоритм генерации соответствующей цепи Маркова и решения задачи с использованием результатов теории регулярных цепей Маркова [13]. Этот метод решения задачи будет подробно изложен в следующем разделе на примере анализа связанного представления очередей. Метод динамического программирования в данном случае приводит к более эффективному алгоритму.

### 3 СВЯЗАННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОЧЕРЕДЕЙ

При связанном представлении каждая очередь хранится в виде связанного списка. Часть памяти тратится на указатели,  $l$  – отношение размера указателя к размеру информационной части.  $M = m(1 - 1/l)$  – размер памяти, который тратится на размещение информационных частей, он же равен общему количеству элементов, которые можно разместить в памяти. Например, если элемент списка объявлен как

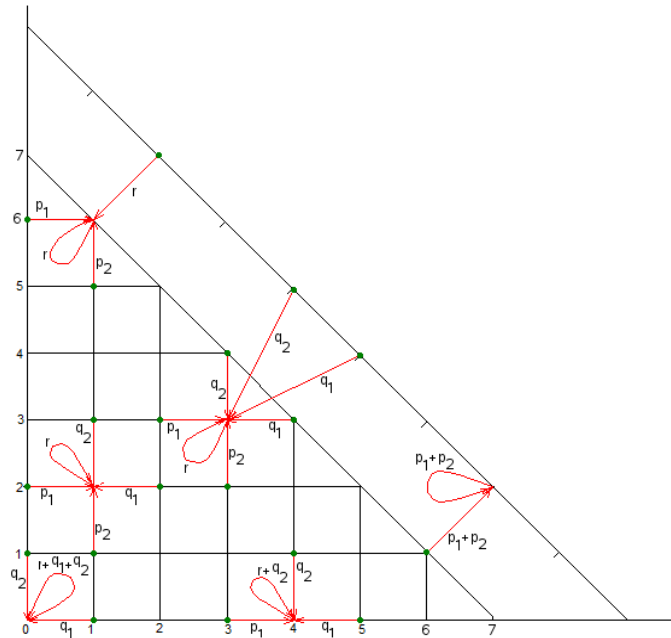
```
struct node{DataT info; node * link;};
```

то  $\text{sizeof}(\text{info}) = 4 * \text{sizeof}(\text{link})$ ;  $\text{sizeof}(\text{info}) = 4$  (байта), и размер памяти равен 40 байт, то  $m=10$ ,  $l=1/4$  и  $M=m/(1+l)=8$ . (Единица памяти равна 4 байта.)

В качестве математической модели рассмотрим блуждание по целочисленной  $n$ -мерной пирамиде с рёбрами  $0 \leq x_1 \leq M$ ,  $0 \leq x_2 \leq M, \dots$ ,  $0 \leq x_n \leq M$  и основанием  $x_1+x_2+\dots+x_n=M$ . Для каждого состояния  $(x_1, \dots, x_n)$  на плоскости  $x_1+x_2+\dots+x_n=M$ , т.е. когда вся память уже занята, введём состояние, соответствующее «сбросу хвоста». В это состояние можно попасть в случае попытки включить элемент в любую из

очереди, когда вся память занята. Переход процесса из состояния  $(x_1, \dots, x_n)$  определяется по следующим правилам:

$$\begin{aligned}
 (\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) &\xrightarrow{p_i} \begin{cases} (\dots, x_i + 1, \dots, x_j, \dots) & 0 \leq x_1 + \dots + x_n \leq M \\ (\dots, \bar{x}_i, \dots, \bar{x}_j, \dots) & x_1 + \dots + x_n = M \end{cases} \\
 (\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) &\xrightarrow{q_i} \begin{cases} (\dots, x_i - 1, \dots, x_j, \dots) & x_i > 0 \\ (\dots, \bar{x}_i, \dots, \bar{x}_j, \dots) & x_i = 0 \end{cases} \\
 (\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) &\xrightarrow{r} (\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) \xrightarrow{p_i} (\dots, \bar{x}_i, \dots, \bar{x}_j, \dots) \\
 (\dots, \bar{x}_i, \dots, \bar{x}_j, \dots) &\xrightarrow{q_i} \begin{cases} (\dots, x_i - 1, \dots, x_j, \dots) & x_i > 0 \\ (\dots, \bar{x}_i, \dots, \bar{x}_j, \dots) & x_i = 0 \end{cases} \xrightarrow{r} (\dots, x_i, \dots, x_j, \dots)
 \end{aligned}$$



**Рисунок 2.** Переходы между состояниями в случае связанного представления очередей

Обозначим  $y_i = p_i/q_i$ .

**Теорема 3.** Доля времени, которую система проводит в состоянии «сброса хвоста» при связанном представлении при условиях  $y_i \neq 1$  и  $y_i \neq y_j$ , при  $i \neq j$  равна

$$P_l = (p_1 + \dots + p_n) \frac{\sum_{i=1}^n \frac{y_i^{M+n-1}}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (y_i - y_j)}}{\sum_{i=1}^n \frac{y_i^{M+n}}{(y_i - 1) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (y_i - y_j)} + \frac{1}{\prod_{j=1}^n (1 - y_j)}}$$

Далее рассмотрим общий случай. Пусть есть:

$k_0$  очередей с вероятностями  $\frac{p_{i_0}}{q_{i_0}} = \dots = \frac{p_{i_{k_0}}}{q_{i_{k_0}}} = x_0 = 1$ ,

$k_1$  очередей с вероятностями  $\frac{p_{i_1}}{q_{i_1}} = \dots = \frac{p_{i_{k_1}}}{q_{i_{k_1}}} = x_1$

...

$k_s$  очередей с вероятностями  $\frac{p_{i_s}}{q_{i_s}} = \dots = \frac{p_{i_{k_s}}}{q_{i_{k_s}}} = x_s$

$k_0 + \dots + k_s = n$ .

**Теорема 4.** Доля времени, которую система проводит в состоянии «сброса хвоста» при связанном представлении равна

$$P_l = \frac{(p_1 + \dots + p_n)}{k_0} \frac{\frac{\partial^{n-s-1}}{\partial^{k_0-1} y_0 \partial^{k_1-1} y_1 \dots \partial^{k_s-1} y_s} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{y_i^{M+n-1}}{\prod_{j=1, j \neq i}^n (y_i - y_j)} \right\}}{\frac{\partial^{n-s}}{\partial^{k_0} y_0 \partial^{k_1-1} y_1 \dots \partial^{k_s-1} y_s} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{y_i^{M+n}}{\prod_{j=1, j \neq i}^n (y_i - y_j)} \right\}}$$

#### 4 СРАВНЕНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО И СВЯЗАННОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

В этом разделе приводятся результаты сравнения последовательного и связанного представлений. Результаты справедливы в предельной форме, когда  $m \rightarrow \infty$ , но, как показывают результаты тестов, они имеют место в допредельной форме, когда размер памяти довольно мал (около 10-20 единиц). Для вычислений использовалась система векторной алгебры Maxima [14]. Рассмотрим несколько случаев зависимостей между вероятностными характеристиками.

1.  $p_1 > q_1$  и  $p_1/q_1 > p_i/q_i, 2 \leq i \leq n$ .

Последовательное представление:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{q_i - p_i}{\left(\frac{q_i}{p_i}\right)^{k_i+1} - 1} = \begin{cases} p_i - q_i & p_i > q_i \\ 0 & p_i < q_i \end{cases}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{p_i}{k_i+1} = 0$$

Связанное представление:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P_l^* = (p_1 + \dots + p_n) \frac{y_i+1}{y_i} = (p_1 + \dots + p_n) \left(1 - \frac{q_1}{p_1}\right).$$

$p_i \left(1 - \frac{q_1}{p_1}\right) > 0, 2 \leq i \leq n$ , поскольку  $p_1 > q_1$ .

$$p_i \left(1 - \frac{q_1}{p_1}\right) = p_i - p_i \frac{q_1}{p_1} > p_i - q_i.$$

Следовательно,  $p_i \left(1 - \frac{q_1}{p_1}\right) > \max(p_i - q_i, 0)$ .

Просуммируем последнее неравенство по  $i$  от 2 до  $n$  и прибавим  $p_1 - q_1$ :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P_c^* = \sum_{i=1}^n \max(p_i - q_i, 0) \leq (p_1 + \dots + p_n) \left(1 - \frac{q_1}{p_1}\right) = \lim_{m \rightarrow \infty} P_l^*,$$

т.е.  $P_c^* \leq P_l^*$  даже при небольших размерах памяти.

$$2. \quad p_i = q_i = \frac{1}{2n}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

$$P_c^* \leq \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{k_i+1} = \sum_{i=1}^n \frac{\frac{1}{2n}}{\frac{m}{n}+1} = \frac{1}{2} \frac{n}{m+n}, \quad P_l^* = \frac{n}{m+n}.$$

Следовательно,  $P_c^* \leq P_l^*$ .

$$3. \quad p_i < q_i, \quad i=1, \dots, n \text{ и } p_1/q_1 > p_i/q_i, \quad 2 \leq i \leq n.$$

Как следует из вычисления оптимального разбиения памяти между очередями, все очереди будут проводить примерно одну и ту же долю времени в состоянии «сброса хвоста», т.е.

$$\frac{q_i - p_i}{\left(\frac{q_i}{p_i}\right)^{k_i+1}} \approx \frac{q_j - p_j}{\left(\frac{q_j}{p_j}\right)^{k_j+1}} \quad i \neq j.$$

Используя равенство  $k_1 + \dots + k_n = m$ , можно найти примерное значение величин  $k_1, \dots, k_n$ :

$$P_c^* = \frac{1}{\exp\left(\frac{m-n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\log\left(\frac{q_1}{p_1}\right)}} - \log(n)\right)} = O\left(\exp\left(-\frac{m}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\log\left(\frac{q_1}{p_1}\right)}}\right)\right)$$

Поведение функции  $P_l(M)$  будет определяться величиной  $\sum_{i=1}^n \frac{y_i^{M+n-1}}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (y_i - y_j)}$ . Поскольку знаменатель  $\frac{y_i^{M+n}}{(y_i-1) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (y_i - y_j)} \rightarrow 0$ , и величина  $\frac{1}{\prod_{j=1}^n (1-y_j)}$  является константой, то

$$P_c^* = O\left(\left(\frac{p_1}{q_1}\right)^M\right) = O\left(\exp\left(-m\left(1 - \frac{1}{l}\right)\log\left(\frac{q_1}{p_1}\right)\right)\right).$$



В случае, если вероятности включения элементов в структуры данных меньше, чем вероятности исключения, доля времени, которую система проводит в состоянии «сброса хвоста», экспоненциально стремится к 0 для обоих представлений. Предпочтительнее использовать то представление, у которого показатель экспоненты меньше.

<i>r</i>	0.2	0	0	0	0
<i>p</i> <sub>1</sub>	0.1	0.44	0.5	0.08	0.15
<i>p</i> <sub>2</sub>	0.1	0.02	0.07	0.05	0.08
<i>p</i> <sub>3</sub>	0.1	0.02	0.07	0.05	0.05
<i>p</i> <sub>4</sub>	0.1	0.02	0.07	0.05	0.02
<i>q</i> <sub>1</sub>	0.1	0.44	0.08	0.5	0.35
<i>q</i> <sub>2</sub>	0.1	0.02	0.07	0.07	0.2
<i>q</i> <sub>3</sub>	0.1	0.02	0.07	0.07	0.1
<i>q</i> <sub>4</sub>	0.1	0.02	0.07	0.07	0.05
<i>P</i> <sub>1</sub>	0.08	0.1	0.462	0.042	0.0049
<i>P</i> <sub>2</sub>	0.08	0.06	0.459	0.039	0.0061
<i>l</i> <sub>1</sub>	0.1333	0.1667	0.5964	0.08	0.0067
<i>l</i> <sub>2</sub>	0.1143	0.1429	0.5964	0.0677	0.0022
<i>l</i> <sub>4</sub>	0.1	0.125	0.5964	0.0589	0.00068
<i>l</i> <sub>8</sub>	0.089	0.1111	0.5964	0.0517	0.0000198

Таблица 1.  $M=16, n=4$ .

В таблице 1 приведено несколько численных результатов. В строке  $P_1$  указана доля времени, проведённого в состояниях «сброса хвоста», когда память разделена поровну между очередями (поскольку на практике вероятности включения и исключения, которые считались известными, не всегда могут быть вычислены), в строке  $P_2$  указана минимальная доля времени, проведённого в состояниях «сброса хвоста», когда память разделена оптимально. В строке  $l_1$  указана доля времени, проведённого в состояниях «сброса хвоста» для связанного представления – когда на связи тратится 1/2 часть памяти (размер информационной части равен размеру указателя); в строке  $l_2$  – когда на связи тратится 1/3 часть памяти (размер указателя равен 1/2 размера информационной части); в строке  $l_4$  – когда на связи тратится 1/5 часть памяти (размер указателя равен 1/4 информационной части); в строке  $l_8$  – когда на связи тратится 1/9 часть памяти (размер указателя равен 1/8 информационной части).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Д. Кнут. Искусство программирования для ЭВМ. Т. 1. М.: Виль-

- ямс, 2001. – 712 с.
2. Р. Седжвик. Фундаментальные алгоритмы на C++. К.: Издательство «Диасофт», 2001. – 687 с.
  3. В. Боллапрагада, К. Мэрфи, У. Расс. Структура операционной системы Cisco IOS. М.: Вильямс, 2002. – 197 с.
  4. А. В. Соколов. О распределении памяти для двух стеков // Автоматизация эксперимента и обработки данных. 1980. – С.65-71.
  5. P. Flajolet. The evolution of two stacks in bounded space and random walks in a triangle // Lec. Notes Computer Sci. Vol. 223, 1986. – P.325-340.
  6. G. Louchard, R. Schott, M. Tolley, P. Zimmermann. // Comput. Appl. Math. №53, 1994. P.243-274.
  7. Е. А. Аксенова, А. В. Соколов. Оптимальное управление двумя параллельными стеками // Дискретная математика. №1, 2007. – С.67-75.
  8. А. В. Соколов, А. В. Тарасюк. Об оптимальном управлении циклическими FIFO-очередями // Системы управления и информационные технологии. №3, 2005. – С.29-33.
  9. Е. А. Аксенова. Оптимальное управление FIFO-очередями на бесконечном времени // Межвуз. сб. «Стохастическая оптимизация в информатике». Изд-во С.-Петербургского университета. №2, 2006. С.71-76.
  10. Е. А. Аксенова, А. В. Драц, А. В. Соколов. Оптимальное управление n FIFO-очередями на бесконечном времени // Информационно-управляющие системы. №6, 2009. – С. 401-415.
  11. A. V. Sokolov, A. V. Drac. The optimal implementation of n FIFO-queues in single-level memory // Proceedings of AMICT 2010-2011 Advances in Methods of Information and Communication Technology, Helsinki. 2012. – P.51-65.
  12. A. V. Sokolov, A. V. Drac. The linked list representation of n LIFO-stacks and/or FIFO-queues in the single-level memory // Information Processing Letters. Elsevier Science Publishing Company Inc. Vol. 13, №19-21, 2013. P.832-835.
  13. Дж. Кемени, Дж. Снелл. Конечные цепи Маркова. М.: Наука, 1960. – 272 с.
  14. Maxima, a Computer Algebra System. [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://maxima.sourceforge.net/>

**SIMULATION OF SOME METHODS OF REPRESENTATION  
OF  $n$  FIFO-QUEUES IN THE SINGLE-LEVEL MEMORY**

A. V. Sokolov

A. V. Drac

*Karelian research center of the Russian Academy of Sciences,  
Petrozavodsk State University*

email: avs@krc.karelia.ru

email: adeon88@mail.ru

**Abstract.** In many applications there is a problem of representation of multiple FIFO-queues in the single-level memory. In this article we research methods of  $n$  FIFO-queues allocation in the shared memory. There are two fundamentally different ways of organizing work with queues – consecutive and linked list representation. For sequential cyclic queues each of them should be allocated in its own part of memory. In this case we will have losses of memory when any queue overflow and other data structures don't overflow. In linked representation the data structure is stored as a list. In this case any number of elements of the lists can coexist in the memory area until the free memory is exhausted. But on the other hand, this approach requires an additional link field for each element. The problem of optimal memory partition between queues in the case of consecutive circular implementation and the problem of the analysis of linked list implementation are investigated. As mathematical models we proposed random walks on the integer lattice in some regions of  $n$ -dimensional space. As the optimality criterion we considered the minimal average part of time which the system is situated in the state of “reset tail”. It is reasonable to minimize this value in order to minimize the part of lost elements. This value is reasonably minimized when the overflow queue is the standard situation. This scheme is applied, for example, in the network routers. Such behavior of the router called “reset tail”. Packet loss leads to undesirable results, so the number of such situations need to be minimized. To solve this problem we used apparatus of regular Markov chains.

**Keywords and phrases:** FIFO-queues; random walks; Markov chains; optimal dynamic data structures.

**REFERENCES**

1. D. E. Knuth. The Art of Computer Programming. Vol. 1. Addison-Wesley, Reading, MA, 2001.
2. R. Sedgwick. Algorithms in C++. Third Edition. Parts 1-4. Addison Wesley Longman, 1999.
3. V. Bollapragada, C. Murphy, R. White. Inside Cisco IOS. Software Architecture. Cisco Press, 2000.
4. A. Sokolov. About storage allocation for implementing two stacks. In: Automation of experiment and data processing. Petrozavodsk. 1980. P. 65-71 (in Russian).
5. P. Flajolet. The evolution of two stacks in bounded space and random walks in a triangle. // Lec. Notes Computer Sci. 1986. Vol. 223. P.325-340.
6. G. Louchard, R. Schott, M. Tolley, P. Zimmermann. Random walks, heat equation and distributed Algorithms. J. Comput. Appl. Math. 1994. Vol. 53. P. 243-274.
7. E. A. Aksenova, A. V. Sokolov. The optimal Management of two Parallel Stacks in Two-Level Memory // Discrete Mathematics and Applications. 2007. Vol. 17,

- 
- 
- No. 1., P. 47-56.
8. A. V. Sokolov, A. V. Tarasuk, The optimal control of cyclic FIFO-queues. Control Systems and Information Technologies, Vol, 3, No. 20, P. 29-33 (in Russian).
  9. E. A. Aksenova. The optimal control of FIFO-queues for infinite time. Stochastic Optimization in Informatics, 2006. Vol. 2, P. 71-76 (in Russian).
  10. E. A. Aksenova, A.V. Drac, A.V. Sokolov. The optimal control of n FIFO-queues for infinite time. Information and Control Systems. Vol. 6, P. 46-54. 2009 (in Russian).
  11. A. V. Sokolov, A.V. Drac. The optimal implementation of n FIFO-queues in single-level memory. Proceedings of AMICT 2010-2011 Advances in Methods of Information and Communication Technology, Helsinki-2012, P. 51-65. Electronic resource. Access mode: <https://helda.helsinki.fi/handle/10138/41066>
  12. A. V. Sokolov, A. V. Drac. The linked list representation of n LIFO-stacks and/or FIFO-queues in the single-level memory. Information Processing Letters. Elsevier Science Publishing Company Inc, 2013, Vol. 13, Iss. 19-21, P. 832-835.
  13. J. G. Kemeny, J. L. Snell. Finite Markov Chains. Van Nostrand, Princeton, New Jersey, 1960.
  14. Maxima, a Computer Algebra System. Electronic resource. Access mode: <http://maxima.sourceforge.net/>

УДК 519.254

## ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ПОМЕХОЙ В ВЫХОДНОМ СИГНАЛЕ

Д. В. Иванов

*Самарский государственный университет путей сообщения*

email: dvi85@list.ru

**Аннотация.** Хорошо известно, что метод наименьших квадратов даёт смещённые оценки параметров для динамических систем с помехами наблюдения в выходных сигналах. В настоящее время активно развиваются методы нелинейного оценивания параметров динамических систем. Разработаны критерии оценивания параметров на основе минимизации нелинейных функции и доказана сильная состоятельность получаемых оценок параметров для линейных динамических систем дробного порядка с различными моделями шума. Проблема отыскания глобального экстремума нелинейной функции сопряжена с известными трудностями. В работе предложен численный алгоритм, позволяющий решить задачу оценивания параметров динамической системы дробного порядка с помехой в выходном сигнале, не применяя прямых методов отыскания глобального экстремума нелинейной функции, а только решая системы линейных уравнений.

На основании доказанной теоремы предлагается численный алгоритм, который позволяет:

- 1) ответить на вопрос, существует ли единственная оценка параметров;
- 2) определить начальное приближение, гарантирующее сходимость итерационного процесса к единственной оценке;
- 3) вычислить с любой наперёд заданной точностью оценку.

Предложенный алгоритм был реализован в среде Matlab, было проведено сравнение с методом наименьших квадратов. Результаты моделирования подтвердили высокую точность оценок параметров, получаемую с помощью предложенного алгоритма.

Дальнейшие направления исследований могут быть связаны с обобщением предложенных алгоритмов на многомерные и многосвязные системы. А также – обобщением результатов структурно-параметрических методов идентификации на случай линейных динамических систем дробного порядка.

**Ключевые слова и фразы:** метод наименьших квадратов; помеха в выходном сигнале; состоятельные оценки; разность дробного порядка.

### 1 ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время активно развиваются методы нелинейного оцени-

вания параметров динамических систем [1,2]. Разработаны критерии оценивания параметров на основе минимизации нелинейной функции и доказана сильная состоятельность получаемых оценок параметров авторегрессии нецелого порядка с помехой в выходном сигнале [3], динамической системы с помехой в выходном сигнале [4,5], динамической системы нецелого порядка с ошибками в переменных [6], линейных ARX-систем дробного порядка с помехой наблюдения в выходном сигнале [7].

В данной статье предложен численный алгоритм, позволяющий решить задачу оценивания параметров динамической системы дробного порядка с помехой в выходном сигнале [4,5], не применяя прямых методов отыскания глобального экстремума нелинейной функции, а только решая системы линейных уравнений.

## 2 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим линейную динамическую систему дробного порядка, описываемую следующими стохастическими уравнениями с дискретным временем  $i = \dots - 1, 0, 1, \dots$ :

$$z_i = \sum_{m=1}^r b_0^{(m)} \Delta^{\alpha_m} z_{i-1} + \sum_{m=1}^{r_1} a_0^{(m)} \Delta^{\beta_m} x_i, \quad y_i = z_i + \xi_i, \quad (1)$$

где  $0 < \alpha_1 \dots < \alpha_r$ ,  $0 < \beta_1 \dots < \beta_{r_1}$ ,  $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt$ ,

$$\Delta^{\alpha_m} z_i = \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{\alpha_m}{j} z_{i-j}, \quad \Delta^{\beta_m} x_i = \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{\beta_m}{j} x_{i-j},$$

$$\binom{\alpha_m}{j} = \frac{\Gamma(\alpha_m + 1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha_m - j + 1)}, \quad \binom{\beta_m}{j} = \frac{\Gamma(\beta_m + 1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta_m - j + 1)},$$

$z_i, y_i$  – ненаблюдаемая и наблюдаемая выходные переменные;

$x_i$  – наблюдаемая входная переменная;

$\xi_i$  – помеха наблюдения в выходном сигнале;

Предположим, что выполняются следующие условия:

1. Множество  $\tilde{B}$ , которому априорно принадлежат истинные значения параметров устойчивой динамической системы, является компактом.

2. Случайный процесс  $\{\xi_i\}$  является мартингал-разностью и удовлетворяют следующим условиям:  $E(\xi_{i+1} / F_{\xi}^{(i)}) = 0$  п.н.,

$E\left(\left(\xi_{i+1}\right)^2 / F_{\xi}^{(i)}\right) < \infty$  п.н.  $E\left(\left(\xi_i\right)^4\right) < \infty$ ,  $E\left(\left(\xi_i\right)^2\right) < \infty$ , где  $F_{\xi}^{(i)}$  –  $\sigma$ -алгебры, индуцированные семействами непрерывных случайных величин  $\{\xi(t), t \in T_i\}$ ,  $T_i = \{t; t \leq i, t \in Z_c - \text{множество целых чисел}\}$ .

3. Входной сигнал  $x_i$  является случайным процессом с  $E(x_i) = 0$ ,  $E(x_i^2) = \sigma_x^2 < \infty$  и истинные значения параметров  $b_0, a_0$  удовлетворяют

$$\text{условию } \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \begin{pmatrix} \left(\varphi_z^{(i)}\right)^T \\ \vdots \\ \left(\varphi_x^{(i)}\right)^T \end{pmatrix} \right)^T \begin{pmatrix} \left(\varphi_z^{(i)}\right)^T \\ \vdots \\ \left(\varphi_x^{(i)}\right)^T \end{pmatrix} =$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \begin{pmatrix} H_{zz} & \vdots & H_{zx} \\ \left(H_{zx}\right)^T & \vdots & H_{xx} \end{pmatrix} = H \text{ п.н.,}$$

$$\varphi_z^{(i)} = \left( \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{\alpha_1}{j} z_{i-j-1}, \dots, \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{\alpha_r}{j} z_{i-j-1} \right)^T,$$

$$\varphi_x^{(i)} = \left( \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{\beta_1}{j} x_{i-j}, \dots, \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{\beta_{r_1}}{j} x_{i-j} \right)^T,$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi_z^{(i)} \left(\varphi_z^{(i)}\right)^T = H_{zz}, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi_z^{(i)} \left(\varphi_x^{(i)}\right)^T = H_{zx},$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi_x^{(i)} \left(\varphi_x^{(i)}\right)^T = H_{xx}.$$

причём  $H$  существует, ограничена и положительно определена.

4.  $\{x_i\}$  статистически не зависит от  $\{\xi_i\}$ .

Требуется определять оценки неизвестных коэффициентов динамической системы, описываемой уравнением (1) по наблюдаемым последовательностям  $y_i, x_i$  при известных порядках  $r, r_1, \alpha_m, \beta_m$ .

### 3 КРИТЕРИЙ ДЛЯ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ

Определим оценку  $\hat{\theta}(N)$  неизвестных параметров  $\theta$  из условия минимума суммы взвешенных квадратов обобщённых ошибок:

$$\min_{\theta \in \mathbb{B}} \sum_{i=1}^N \frac{\left(y_i - \varphi_i^T \theta\right)^2}{\sigma_{\xi}^2 + b^T H_{\xi} b} = \min_{\theta \in \mathbb{B}} \frac{U_N(b, a)}{\omega(b)}. \quad (2)$$

где  $\varphi_i = \left( \begin{pmatrix} \left(\varphi_y^{(i)}\right)^T \\ \vdots \\ \left(\varphi_x^{(i)}\right)^T \end{pmatrix} \right)^T,$

$$\begin{aligned} \varphi_y^{(i)} &= \left( \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{\alpha_1}{j} y_{i-j-1}, \dots, \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{\alpha_r}{j} y_{i-j-1} \right)^T, \\ \theta_0 &= (b_0^T \ \vdots \ a_0^T)^T, \quad b_0 = (b_0^{(1)}, \dots, b_0^{(r)})^T, \quad a_0 = (a_0^{(1)}, \dots, a_0^{(r_1)})^T, \\ \overline{\sigma}_\xi^2 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N \xi_i^2, \\ H_\xi &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} E \left[ \sum_{i=1}^N \varphi_\xi^{(i)} (\varphi_\xi^{(i)})^T \right] = \begin{pmatrix} h_\xi^{(11)} & h_\xi^{(21)} & \dots & h_\xi^{(r1)} \\ h_\xi^{(21)} & h_\xi^{(22)} & \dots & h_\xi^{(r1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_\xi^{(1r)} & h_\xi^{(2r)} & \dots & h_\xi^{(rr)} \end{pmatrix}, \\ h_\xi^{(mm)} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} E \left( \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{\alpha_m}{j} \xi_{i-j-1} \cdot \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{\alpha_n}{j} \xi_{i-j-1} \right) = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=j}^{N-1} \binom{\alpha_m}{j} \binom{\alpha_k}{j} \sigma_\xi^2 (i-j-1), \quad m = \overline{1, r}. \end{aligned}$$

*Теорема 1 [4]. Пусть некоторый случайный процесс  $\{y_i, i = \dots -1, 0, 1, \dots\}$  описывается уравнением (1) с начальными нулевыми условиями и выполняются предположения 1-4. Тогда оценка  $\hat{\theta}(N)$ , определяемая выражением (2) с вероятностью 1 при  $N \rightarrow \infty$ , существует, единственна и является сильно состоятельной оценкой, т.е.*

$$\hat{\theta}(N) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{П.Н.}} \theta_0.$$

#### 4 ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ

В общем случае вычисление оценок является задачей минимизации отношения двух квадратичных форм (2) и применение прямых методов (градиентного, метода Ньютона и т.д.) для определения глобального минимума сопряжено с известными трудностями [8].

Для получения конструктивного метода вычисления оценок из критерия (2) рассмотрим функции

$$\begin{aligned} V_N(b, a, \hat{\lambda}) &= U_N(b, a) - \hat{\lambda} \omega(b), \quad \hat{\lambda} \in R^1, \\ V_N(\hat{\lambda}) &= \min_{\theta \in \tilde{B} \subset R^{r+1}} V_N(b, a, \hat{\lambda}). \end{aligned}$$

Тогда



$$V_N(\lambda) = Y^T Y - \lambda \bar{\sigma}_\xi^2 - \left( \frac{\Phi_y^T Y}{\Phi_y^T Y} \right)^T \left( \begin{array}{c|c} \Phi_y^T \Phi_y - \lambda H_\xi(N) & \Phi_y^T \Phi_x \\ \hline \Phi_x^T \Phi_y & \Phi_x^T \Phi_x \end{array} \right)^{-1} \left( \frac{\Phi_y^T Y}{\Phi_y^T Y} \right),$$

$$V_N(b, a, \hat{\lambda}) = Y^T Y - \sigma_\xi^2 \hat{\lambda} +$$

$$+ \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}^T \left( \begin{array}{c|c} \Phi_y^T \Phi_y - \lambda H_\xi(N) & \Phi_y^T \Phi_x \\ \hline \Phi_x^T \Phi_y & \Phi_x^T \Phi_x \end{array} \right) \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} - 2 \left( \frac{\Phi_y^T Y}{\Phi_x^T Y} \right)^T \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$$

Дифференцируя  $V_N(b, a, \hat{\lambda})$  по  $b, a$  и приравнявая производные к нулю, получаем:

$$\left( \begin{array}{c|c} \Phi_y^T \Phi_y - \lambda H_\xi(N) & \Phi_y^T \Phi_x \\ \hline \Phi_x^T \Phi_y & \Phi_x^T \Phi_x \end{array} \right) \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_y^T Y \\ \Phi_x^T Y \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Тогда из (3) находим

$$\begin{pmatrix} \hat{b}(N, \hat{\lambda}) \\ \hat{a}(N, \hat{\lambda}) \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|c} \Phi_y^T \Phi_y - \hat{\lambda} H_\xi(N) & \Phi_y^T \Phi_x \\ \hline \Phi_x^T \Phi_y & \Phi_x^T \Phi_x \end{array} \right)^{-1} \begin{pmatrix} \Phi_y^T Y \\ \Phi_x^T Y \end{pmatrix}$$

и, следовательно,

$$V_N(\lambda) = Y^T Y - \lambda \bar{\sigma}_\xi^2 - \left( \frac{\Phi_y^T Y}{\Phi_y^T Y} \right)^T \left( \begin{array}{c|c} \Phi_y^T \Phi_y - \lambda H_\xi(N) & \Phi_y^T \Phi_x \\ \hline \Phi_x^T \Phi_y & \Phi_x^T \Phi_x \end{array} \right)^{-1} \left( \frac{\Phi_y^T Y}{\Phi_y^T Y} \right).$$

*Лемма.* Для функции  $V_N(\hat{\lambda})$ , связанной с критерием (2), справедливы следующие утверждения.

1. Все корни уравнения

$$V_N(\hat{\lambda}) = 0 \quad (4)$$

(если они существуют) неотрицательны;

2. Уравнение (4) на полуотрезке  $[0, \lambda_{\min}(N))$  имеет не более одного корня  $\hat{\lambda}_1(N)$ , если  $\det(\Phi_x^T \Phi_x) \neq 0$ , где  $\lambda_{\min}(N)$  – минимальное собственное число регулярного пучка форм, то есть наименьший корень уравнения

$$\det \left( \Phi_y^T \Phi_y - \Phi_y^T \Phi_x (\Phi_x^T \Phi_x)^{-1} (\Phi_x^T \Phi_y)^T - \lambda H_\xi(N) \right) = 0. \quad (5)$$

3. Невырожденность матрицы  $\Phi_x^T \Phi_x$  и существование корня на полуотрезке  $[0, \lambda_{\min}(N))$  является необходимым и достаточным условием существования единственного решения задачи (4).

*Доказательство леммы.* Функция  $V_N(\lambda)$  на  $[0, \lambda_{\min}(N))$  непрерывна, к

тому же  $\lambda_{\min}(N) \geq 0$  как собственное число положительно полуопределённой матрицы.

Далее,

$$\dot{V}_N(\lambda) = -\left(\bar{\sigma}_\xi^2 + b^T(\lambda)H_\xi b(\lambda)\right) \leq -1.$$

Тогда на интервале  $(-\infty, \lambda_{\min}(N))$   $V_N(\lambda)$  имеет не более одного корня, если он существует,  $V_N(0) \geq 0$  и, следовательно,

$$V_N(\lambda) \geq 0 \forall \lambda \in (-\infty, 0) \quad (\text{матрица } I_N - \begin{pmatrix} \Phi_y^T \\ \Phi_x^T \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \Phi_y^T \Phi_y & \Phi_x^T \Phi_y \\ \Phi_y^T \Phi_x & \Phi_x^T \Phi_x \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Phi_y^T \\ \Phi_x^T \end{pmatrix})$$

идемпотентная).

Отсюда вытекает справедливость утверждений 1, 2 и достаточность 3. Необходимость 3 вытекает из экстремальных свойств регулярного пучка форм [9].

Из теоремы 1 и леммы непосредственно следует:

*Теорема 2.* Пусть выполняются все условия теоремы 1, тогда с вероятностью 1 при  $N \rightarrow \infty$  существует корень  $\hat{\lambda}(N) \in [0, \lambda_{\min}(N)]$  и единственная оценка (5), которая является одновременно решением задачи (2) и  $\hat{\theta}(N) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \theta_0$  п.н.

Доказательство теоремы 2 следует из теоремы 1 и леммы 3.

На основании теоремы предлагается численный метод, который позволяет:

- 1) ответить на вопрос существует ли единственная оценка  $\hat{\theta}(N)$ ;
- 2) определить начальное приближение, гарантирующее сходимость итерационного процесса к единственной оценке  $\hat{\theta}(N)$ ;
- 3) вычислить с любой наперед заданной точностью оценку  $\hat{\theta}(N)$ .

Пусть последовательность  $\{\hat{\lambda}'(i)\}$  определяется следующим алгоритмом:

Шаг 0.  $\hat{\lambda}'(0) = 0$ .

Шаг 1.  $\hat{\lambda}'(i) = \frac{(\lambda_{\min} + \hat{\lambda}'(i-1))}{2}$ ,  $\lambda_{\min}$  определяется из (5).

Шаг 2. Вычислить  $\hat{b}(N, \hat{\lambda}'(i))$ ,  $\hat{a}(N, \hat{\lambda}'(i))$  из системы уравнений

$$\begin{pmatrix} \hat{b}(N, \hat{\lambda}) \\ \hat{a}(N, \hat{\lambda}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_y^T \Phi_y - \hat{\lambda} H_\xi(N) & \Phi_y^T \Phi_x \\ \Phi_x^T \Phi_y & \Phi_x^T \Phi_x \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Phi_y^T Y \\ \Phi_x^T Y \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Шаг 3. Вычислить

$$V_N(\lambda) = Y^T Y - \bar{\sigma}_\xi^2 \lambda - \begin{pmatrix} \Phi_y^T Y \\ \Phi_x^T Y \end{pmatrix}^T \left( \begin{array}{c|c} \Phi_y^T \Phi_y - \lambda H_\xi(N) & \Phi_y^T \Phi_x \\ \hline \Phi_x^T \Phi_y & \Phi_x^T \Phi_x \end{array} \right)^{-1} \begin{pmatrix} \Phi_y^T Y \\ \Phi_x^T Y \end{pmatrix}.$$

Шаг 4. Проверить условие  $V_N(\hat{\lambda}'(i)) \leq 0$ .

Тогда если уравнение  $V_N(\hat{\lambda}'(i)) = 0$  имеет корень  $\hat{\lambda}'_1(N) \in [0, \lambda_{\min}(N))$ , то последовательность  $\hat{\lambda}'(0), \hat{\lambda}'(1), \dots, \hat{\lambda}'(N)$  – конечна, и  $\lambda(0) \in [\hat{\lambda}'_1(N), \lambda_{\min}(N))$ , в противном случае последовательность бесконечна.

Этот алгоритм позволяет определить начальное приближение  $\hat{\lambda}(0)$ , необходимое для дальнейшего применения метода Ньютона, или определить, что корень  $\hat{\lambda}'_1(N)$  не существует.

Пусть существуют  $\hat{\lambda}(0) \in [\hat{\lambda}'_1(N), \lambda_{\min}(N))$ , тогда  $\lim_{i \rightarrow \infty} \hat{\lambda}(i) = \hat{\lambda}'_1(N)$ ,  $\lim_{i \rightarrow \infty} \hat{b}(N, \hat{\lambda}'(i)) = \hat{b}(N)$ ,  $\lim_{i \rightarrow \infty} \hat{a}(i, \hat{\lambda}'(i)) = \hat{a}(N)$ , где  $\hat{\lambda}(i)$ ,  $\hat{b}(i, \hat{\lambda}(i))$  и  $\hat{a}(i, \hat{\lambda}(i))$  определяются совместно со следующим алгоритмом:

Шаг 1. Вычислить  $\hat{b}(N, \hat{\lambda}'(i))$ ,  $\hat{a}(N, \hat{\lambda}'(i))$ , из системы уравнений (6);

Шаг 2. Вычислить

$$\hat{\lambda}(i+1) = \left( \bar{\sigma}_\xi^2 + \left[ \hat{b}(N, \hat{\lambda}(i)) \right]^T H_\xi(N) \hat{b}(N, \hat{\lambda}(i)) \right)^{-1} \times \\ \times \left( Y^T Y + \hat{\lambda}(i) \left( \left[ \hat{b}(N, \hat{\lambda}(i)) \right]^T H_\xi(N) \hat{b}(N, \hat{\lambda}(i)) \right) - \begin{pmatrix} \Phi_y^T Y \\ \Phi_x^T Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{b}(N, \hat{\lambda}'(i)) \\ \hat{a}(N, \hat{\lambda}'(i)) \end{pmatrix} \right)$$

Шаг 3. Перейти к шагу 1.

Процесс вычисления заканчивается, если выполняется условие

$$\frac{\|V_N(\hat{\lambda}(i+1)) - V_N(\hat{\lambda}(i))\|}{\|V_N(\hat{\lambda}(i+1))\|} \leq \delta$$

где  $\delta$  – априорно заданная точность оценок.

Это утверждение непосредственно вытекает из метода Ньютона:

$$\hat{\lambda}(i+1) = \hat{\lambda}(i) - \frac{V_N(\hat{\lambda}(i))}{\dot{V}_N(\hat{\lambda}(i))}.$$

## 5 РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Предложенный выше алгоритм был реализован в среде Matlab, и было проведено сравнение с методом наименьших квадратов.

Динамическая система описывается уравнением:

$$z_i = 0.5\Delta^{0.9} z_{i-1} - 0.2\Delta^{1.7} z_{i-1} + \Delta^{0.7} x_i - 0.2\Delta^{1.2} x_i.$$

На вход подавался сигнал:

$$x_i + 0.8 \cdot x_{i-1} + 0.6 \cdot x_{i-2} = \zeta_i + 1.7 \cdot \zeta_{i-1} + 0.5 \cdot \zeta_{i-2},$$

где  $\zeta_i$  – белый шум.

Алгоритмы сравнивались по относительной погрешности параметров:

$$\delta\theta = \frac{\|\hat{\theta} - \theta_0\|}{\|(\theta_0)\|} \cdot 100\%.$$

Количество наблюдений  $N = 1000$ . В таблице 1 приведены средние значения и среднеквадратические отклонения относительных погрешностей, рассчитанные по 50 процедурам оценивания.

$\sigma_\xi / \sigma_z$	$\delta\theta, \%$	$\delta\theta_{LS}, \%$
0.25	3.89±2.10	7.21±3.34
0.5	10.18±6.63	20.71±7.24
0.75	18.77±12.82	36.05±10.05

**Таблица 1.** Средние значения относительных погрешностей оценок параметров и их среднеквадратические отклонения

## 6 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье предложен численный алгоритм оценивания параметров линейной динамической системы дробного с помехой в выходном сигнале. Нахождение оценок параметров с помощью предложенного алгоритма сводится к решению систем линейных уравнений, что позволяет избежать трудностей связанных с применением прямых методов (градиентного и т.д.) для определения глобального минимума.

Дальнейшие направления исследований могут быть связаны с обобщением предложенных алгоритмов на многомерные и много-связные системы. А также с обобщением результатов структурно-параметрических методов идентификации [10] на случай линейных динамических систем дробного порядка.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. О. А. Кацюба. Теория идентификации стохастических динамических систем в условиях неопределенности. – Самара: СамГУПС, 2008. – 119 с.
2. Д. В. Иванов. Рекуррентное оценивание параметров динамиче-

- ских систем. Модели с ошибками в переменных. – Saarbrücken: LAP Lambert Academic Publishing GmbH. 2011. – 136 с.
3. Д. В. Иванов. Идентификация авторегрессии нецелого порядка с помехой в выходном сигнале. // Междисциплинарные исследования в области математического моделирования и информатики. Материалы научно-практической internet-конференции. 18-19 июня 2013 г. / отв. ред. Ю.С. Нагорнов – Ульяновск: SIMJET, 2013. – С. 64-67.
  4. Д. В. Иванов. Идентификация линейных динамических систем нецелого порядка с помехой в выходном сигнале // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – Том 18, №5-2, 2013. – С.2534-2536.
  5. D. V. Ivanov. Identification discrete fractional order linear dynamic systems with output-error // Proceedings International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON'2013). Krasnoyarsk: Siberian Federal University. Russia, Krasnoyarsk, September 12-13, 2013. IEEE Catalog Number: CFP13794-CDR.
  6. D. V. Ivanov. Identification discrete fractional order linear dynamic systems with errors-in-variables // Proceedings of IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2013), Rostov-on-Don, Russia, September 27-30, 2013. P. 374-377.
  7. Д. В. Иванов, О. А. Кацюба. О состоятельности оценок параметров ARX-систем дробного порядка с помехой в выходном сигнале. // Стохастическая оптимизация в информатике. – Том 1, №2, 2013. – С.21-32.
  8. Д. Химмельблау. Прикладное нелинейное программирование. – М.: Мир, 1975. – 534 с.
  9. Ф. Р. Гантмахер. Теория матриц. – М.: Наука, 1966. – 575 с.
  10. В. В. Энгельгардт, О. А. Кацюба. Метод структурно-параметрической идентификации линейных динамических систем с помехами на входе-выходе с использованием генетических алгоритмов // Системы управления и информационные технологии. – Том 50, №4, 2012. – С.35-39.

---

---

**NUMERICAL ALGORITHMS OF PARAMETER ESTIMATION  
OF LINEAR DYNAMIC SYSTEMS FRACTIONAL ORDER  
WITH NOISE IN THE OUTPUT SIGNAL**

D.V. Ivanov

*Samara State University of Railways*

email: dvi85@list.ru

**Abstract.** It is well known that the least-squares method gives biased estimates of the parameters for the dynamic system in a noisy observation of output signals. Currently actively developing nonlinear methods for estimating the parameters of dynamical systems. Criteria have been developed for estimating the parameters based on minimization of nonlinear functions and proved strong consistency of the resulting estimates of parameters for linear dynamical systems of fractional order with different noise models. The problem of finding the global extremum of a nonlinear function is associated with certain difficulties.

In this paper we propose a numerical algorithm that allows to solve the problem of estimating the parameters of a dynamic system of fractional order with interference in the output signal without using direct methods of finding the global extremum of a nonlinear function, and only by solving a system of linear equations.

By the proved theorem, the numerical algorithm allows:

- 1) to answer the question whether there is a single parameter estimation;
- 2) to determine the initial approximation, which guarantees the convergence of the iterative process to a single evaluation;
- 3) calculate with any desired accuracy assessment.

The proposed algorithm was implemented in Matlab and compared with the method of least squares. The results of simulation confirmed the high efficiency of the proposed algorithm.

Further research areas may be associated with generalization of the proposed algorithms to multidimensional and multiply system. Also, generalization of the results of structural and parametric identification methods, in case of linear dynamical systems of fractional order.

**Keywords and phrases:** least squares method; output-error; consistent estimators; the difference of fractional order.

#### REFERENCES

1. O. A. Kacyuba. Teoriya identifikacii stokhasticheskikh dinamicheskikh sistem v usloviyakh neopredelennosti. – Samara: SamGUPS, 2008. – 119 s.
2. D. V. Ivanov. Rekurrentnoe ocenivanie parametrov dinamicheskikh sistem. Modeli s oshibkami v peremennykh. – Saarbrücken: LAP Lambert Academic Publishing GmbH. 2011. – 136 s.
3. D. V. Ivanov. Identifikaciya avtoregressii necelogo poryadka s pomekhoy v vykhodnom signale. // Mezhdisciplinarnye issledovaniya v oblasti matematicheskogo modelirovaniya i informatiki. Materialy nauchno-prakticheskoy internet-konferencii. 18-19 iyunya 2013 g. / otv. red. Yu.C. Nagornov – Ul'yanovsk: SIMJET, 2013. – С. 64-67.
4. D. V. Ivanov. Identifikaciya lineynykh dinamicheskikh sistem necelogo poryadka s pomekhoy v vykhodnom signale // Vestnik Tambovskogo universiteta. Ceriya: Estestvennye i tekhnicheskie nauki. – Tom 18, №5-2, 2013. – С.2534-2536.
5. D. V. Ivanov. Identification discrete fractional order linear dynamic systems with

- output-error // Proceedings International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON'2013). Krasnoyarsk: Siberian Federal University. Russia, Krasnoyarsk, September 12-13, 2013. IEEE Catalog Number: CFP13794-CDR.
6. D. V. Ivanov. Identification discrete fractional order linear dynamic systems with errors-in-variables // Proceedings of IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2013), Rostov-on-Don, Russia, September 27-30, 2013. P. 374-377.
  7. D. V. Ivanov, O. A. Kacyuba. O sostoyatel'nosti ocenok parametrov ARX-sistem drobnogo poryadka s pomekhou v vykhodnom signale. // Stokhasticheskaya optimizatsiya v informatike. – Tom 1, №2, 2013. – S.21-32.
  8. D. Khimmel'blau. Prikladnoe nelineynoe programmirovaniye. – M.: Mir, 1975. – 534 s.
  9. F. R. Gantmakher. Teoriya matric. – M.: Nauka, 1966. – 575 s.
  10. V. V. Engel'gardt, O. A. Kacyuba. Metod strukturno-parametricheskoy identifikatsii lineynykh dinamicheskikh sistem s pomekhami na vkhode-vykhode s ispol'zovaniem geneticheskikh algoritmov // Sistemy upravleniya i informatsionnyye tekhnologii. – Tom 50, №4, 2012. – S.35-39.

УДК 519.7

**ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СТРОГО ПСЕВДОПРОСТЫХ ЧИСЕЛ**

Ш. Т. Ишмухаметов

Б. Г. Мубаракوف

*Казанский (Приволжский) федеральный университет*

email: ishm@nextmail.ru

email: mubbulat@mail.ru

**Аннотация.** Одной из наиболее важных проблем в криптографии и теории чисел является проблема определения по заданному натуральному числу  $n$ , является ли оно простым или составным. Процедура, решающая такую задачу, называется тестом простоты. Известно множество различных тестов простоты, среди которых наиболее распространенным является тест простоты Миллера-Рабина. Этот тест является вероятностным, причем вероятность ошибки уменьшается при росте числа итераций, в ходе каждой из которых выполняется ряд вычислений, называемых раундом, с натуральным числом  $a$ , меньшим тестируемого числа  $n$ , называемым базой.

Составные числа, успешно проходящие тест Миллера-Рабина с какой-нибудь базой или набором баз, называются строго псевдопростыми по этому набору. Пусть  $\psi_k$  – это наименьшее строго псевдопростое число по набору баз, состоящему из первых  $k$  простых чисел. Числа  $\psi_k$  для  $k = 1, 2, 3, \dots$  образуют возрастающую последовательность. Если тестируемое число  $n$  меньше какого-то  $\psi_k$ , то для точного определения, является ли  $n$  простым или составным, достаточно выполнить  $k$  раундов теста Миллера-Рабина с первыми  $k$  простыми числами в качестве баз. Следовательно, вероятностный тест превращается в детерминированный, что повышает его достоверность и сферу использования.

В этой статье мы рассмотрим разные алгоритмы построения строго псевдопростых чисел и оценим их вычислительную сложность. Наши результаты показывают, что существующие на сегодняшний день алгоритмы нахождения строго псевдопростых чисел являются недостаточно эффективными для использования в криптографии.

**Ключевые слова и фразы:** простые числа; тест простоты Миллера-Рабина; строго псевдопростые числа; алгоритм Джаешке.

**1 ВВЕДЕНИЕ**

Проблема определения по заданному натуральному числу  $n$ , является оно простым или составным, имеет важное значение в теории чисел и её приложениях в криптографии. Процедура, решающая такую задачу, называется *тестом простоты*. Среди многочисленных тестов простоты тест Миллера-Рабина МРТП играет особую роль (см. [1,2,3]). Составные числа, успешно проходящие тест Миллера-Рабина, называются строго псевдопростыми. Рассмотрим алгоритм МРТП более подробно.



## 2 АЛГОРИТМ МИЛЛЕРА-РАБИНА

Пусть задано натуральное нечётное число  $n$ , большее трёх. Представим число  $n - 1$  в виде

$$n - 1 = 2^s \cdot u, \quad u - \text{нечётно.} \quad (1)$$

Алгоритм Миллера-Рабина состоит из отдельных итераций, называемых раундами. Каждый раунд либо определяет число  $n$  как составное, либо усиливает вероятность того, что  $n$  является простым числом. Опишем инструкции выполнения одного раунда:

1. Выбираем случайное целое число  $a$  в диапазоне от 2 до  $n-1$ .
2. Вычисляем  $b = a^u \bmod n$ .
3. Проверяем условие

$$b \equiv \pm 1 \bmod n. \quad (2)$$

4. Если (2) выполнено, то число  $n$  вероятно простое (англ. “probably prime”, PRP), переходим к следующему раунду.
5. Иначе вычисляем последовательность

$$b_0, b_1, \dots, b_{s-1}, \quad \text{полагая } b_0 = b, \quad b_{i+1} = b_i^2 \bmod n. \quad (3)$$

Если ни один из членов этой последовательности не равен  $-1$  по модулю  $n$ , то утверждаем, что  $n$  – составное. Иначе подтверждаем, что  $n$  – вероятно простое.

По теореме Рабина [1] вероятность того, что составное число успешно пройдёт один раунд этого теста, не превышает  $1/4$ , поэтому выполнение  $k$  успешных итераций уменьшает вероятность ошибки до  $4^{-k}$ . Отметим, что если  $n$  – составное, то на одной из итераций это будет определено точно. Тест Миллера-Рабина работает достаточно быстро и эффективно.

Главная проблема, связанная с этим тестом, – это определение количества итераций, необходимых для гарантированного определения простоты проверяемого числа. Используя недоказанную гипотезу Римана о распределении простых чисел, можно ограничить это число величиной  $(\log_2 n)^2$ , что, однако, является заведомо завышенной величиной. В этой статье мы займёмся анализом этой проблемы.

## 3 ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

**Определение 1.** (С. Pomerance, C. Selfridge, S. Wagstaff [2]). Пусть  $a > 1$  – произвольное натуральное число. Нечётное составное натуральное число  $n$  называется  $a$ -псевдопростым или  $psp(a)$ , если выполняется формула

$$a^{n-1} \bmod n = 1 \quad (4)$$

Элемент  $a$  называется базой для псевдопростого числа  $n$ .

По малой теореме Ферма любое простое число  $p$  удовлетворяет

соотношению (1). Однако обращение теоремы Ферма не верно: существуют составные числа, удовлетворяющие (4) по любой базе  $a$ . Такие числа называются *числами Кармайкла*. Числа Кармайкла – псевдопростые по любой базе. Одно из замечательных свойств этих чисел состоит в том, что они являются *свободными от квадратов* (square-free), т.е. не делятся ни на какой квадрат целого числа.

**Определение 2.** Пусть  $a > 1$  – произвольное натуральное число. Назовём нечётное составное натуральное число  $n$  строго псевдопростым по базе  $a$  или  $spsp(a)$ , если число  $n$  успешно проходит один раунд теста Миллера-Рабина с базой  $a$ . Иначе говоря, выполняется одно из следующих условий:

$$1) a^u \equiv \pm 1 \pmod n .$$

2)

$$a^{u2^i} \equiv -1 \pmod n \text{ для некоторого } i, 0 \leq i < s, \quad (5)$$

где  $n - 1 = 2^s \cdot u$ .

Обозначим через  $\psi_1$  наименьшее нечётное число, являющееся строго псевдопростым по базе 2. Определим для произвольного натурального числа  $k$  число  $\psi_k$  как наименьшее нечётное число, являющееся строго псевдопростым по множеству баз, состоящих из первых  $k$  простых чисел. Значения первых элементов последовательности  $\psi_k$  приведены ниже:

k	1	2	3	4	5	6-9
$\psi_k$	2047	1373653	25326001	3215031751	2152302898747	3474749660383

**Таблица 1.** Значения последовательности  $\psi_k$  для  $k < 10$ .

Таким образом, чтобы проверить на простоту число, меньшее  $3,4 \cdot 10^{12}$ , достаточно провести тест Миллера-Рабина, используя множество баз, состоящее из первых 6 простых чисел. Это число намного меньше, чем определяется средней вероятностью по теореме Рабина или числом  $(\log_2 n)^2$ , определяемым гипотезой Римана. Поэтому продолжение вычисления членов этой последовательности является важной задачи криптографии.

На сегодняшний день наилучшие результаты принадлежат китайским математикам Джиянгу и Денгу [6]. Они сумели продлить эту последовательность до 11 члена и доказали, что

$$\psi_9 = \psi_{10} = \psi_{11} = 3\ 825\ 123\ 056\ 546\ 413\ 051.$$

В [7] исследуется эффективность составных баз таких, как, например, 6 и 15, и доказывається, что они работают в МРПТ даже более эффективно, чем простые числа.

## Исследование псевдопростых чисел по базе 2

Проанализируем исследование строго псевдопростых чисел, выпол-

ненное в упомянутой выше статье [2]. Они сумели проверить все числа, не превышающие  $25 \cdot 10^9$  (выдающийся результат для 1980 года!), и нашли 4842 строго псевдопростых числа с базой 2. Ими также найдена нижняя граница для функции  $S_a(x)$  числа строго псевдопростых чисел, меньших  $x$ , не являющихся простыми с базой  $a$ :

$$S_a(x) > \ln x / (4a \ln a).$$

Эта оценка доказывает, что число составных  $spsp(a)$  чисел бесконечно много, что является важным теоретическим результатом, однако с практической точки зрения слишком мала, т.к. например, для  $x=25 \cdot 10^9$  эта оценка составляет всего лишь 4,3 и много меньше действительного значения 4842.

Другой важный теоретический результат этой статьи (теорема 2) состоит в том, что существуют  $spsp(2)$ -числа, содержащие произвольно большое число сомножителей. В таблице 2 приведены данные о процентном распределении  $spsp(2)$ -чисел, меньших  $25 \cdot 10^9$ , с различным числом сомножителей (при  $k > 6$  таких чисел нет):

Количество сомножителей	2	3	4	5
Процент $spsp(2)$ -чисел	87	8	4	1

**Таблица 2.** Процент  $spsp(2)$ -чисел с различным числом сомножителей

Существует единственное  $spsp(2)$ -число, меньшее  $25 \cdot 10^9$ , содержащее 6 сомножителей (это же число является и числом Кармайкла):

$$10\ 761\ 055\ 201 = 13 \cdot 29 \cdot 41 \cdot 61 \cdot 101 \cdot 113$$

### Алгоритм Померанса и др. вычисления $spsp$ -чисел

Проанализируем далее алгоритм, использованный авторами анализируемой статьи для поиска  $spsp(2)$ -чисел и оценим его эффективность. Сначала сформулируем определение и два предложения.

**Определение 3.** Пусть  $p$  – простое число, и  $a$  не сравнимо с  $p$ . Обозначим через  $l_a(p)$  наименьшее положительное число  $t$  такое, что  $a^t \equiv 1 \pmod p$ . По теореме Лагранжа  $l_a(p)$  является делителем  $p - 1$ .

**Предложение 1.** Если простое число  $p$  делит  $psp(a)$  число  $n$ , то выполняется формула  $n \equiv 1 \pmod{l_a(p)}$ .

**Предложение 2.** Если простое число  $p^r$  делит  $psp(a)$  число  $n$ , тогда выполняется формула  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^r}$ .

### Описание алгоритма.

Алгоритм состоит из трёх стадий. На первой стадии выполняется решето Эратосфена на интервале, ограниченном некоторым числом  $B$ , и отсеиваются все простые числа.

На второй стадии отсеиваются числа, не удовлетворяющие пред-

ложениям 1 и 2, сформулированным выше, при  $a=2$  и небольших простых  $p$ . Например, поскольку  $l_2(p) = 4$ ,  $psp$ -класс  $15 \pmod{20}$  не может содержать  $psp(2)$ -чисел. Аналогично, второе предложение отсеивает кратные квадратов 9, 25, 49 и т.д. Выполнение этих условий требует столько же или меньшего количества времени и не увеличивает временную сложность и требования к памяти.

На третьей стадии оставшиеся числа подвергается тестированию на выполнение условий (5) непосредственно по определению, и эта часть является самой трудоёмкой.

Оценим *трудоёмкость* этого алгоритма:

Временная сложность решета Эратосфена составляет  $O(n \log n \log \log n)$  при условии размещения всех чисел интервала в массиве и вычёркивания элемента за  $O(1)$  операций. Если использовать более эффективный алгоритм решета Аткина, то сложность алгоритма можно уменьшить до  $O(n / \log \log n)$ , но требования к памяти останутся теми же, т.к. мы должны оставить после просеивания все составные числа. По теореме Чебышева число простых чисел на интервале от 2 до  $B$  приблизительно равно величине  $B / \ln B$ . Поэтому число составных чисел асимптотически равно  $O(B)$ .

Представление каждого из оставшихся чисел в виде (1) занимает  $O(\log B)$  операций. Такую же асимптотическую оценку имеет алгоритм быстрого возведения в степень, поэтому общая оценка проверки условий (5) занимает  $O(\log B)$  шагов. Трудоёмкость всего алгоритма зависит от мощности множества чисел, оставшихся после выполнения первых двух стадий алгоритма, а это число асимптотически равно  $O(B)$ . Поэтому общая сложность алгоритма составляет величину  $O(B \ln B)$ .

**Вывод.** Последняя оценка, очевидно, является экспоненциальной, и выполнение первых двух стадий, влияя положительно на быстродействие алгоритма, не улучшает его общей экспоненциальной оценки. Поэтому для простых чисел, используемых в криптографии (1024 и более бит), такой алгоритм совершенно неприменим.

#### **Исследование строго псевдопростых чисел по нескольким базам**

Очевидно, что проверка чисел по нескольким базам уменьшает число чисел, являющихся строго псевдопростыми.

Алгоритм Померанса и др. вычисления  $spsp$ -чисел по нескольким базам не отличается от описанного выше алгоритма. Основная проверка условий (5) может быть выполнена в параллельном вычислении для нескольких баз, поскольку эти вычисления полностью независимы. Рассмотрим итоги этих вычислений при прежней границе  $B=25 \cdot 10^9$ .

Напомним, что наименьшее *spsp*-число по трём базам равно 25 326 001. Рассмотрим остальные строго псевдопростыми числа, лежащие ниже границы  $25 \cdot 10^9$ . Таких чисел существует 13. Все они перечислены в следующей таблице и имеют некоторую специальную форму:

№	n	Разложение	Форма
1	25 326 001	2251·11251	$(k+1)(5k+1)$
2	161 304 001	7333·21997	$(k+1)(3k+1)$
3	960 946 321	11717·82013	$(k+1)(7k+1)$
4	1157 839 381	24061·48121	$(k+1)(2k+1)$
5	3215 031 751	151·751·28351	$(k+1)(5k+1)(189k+1)$
6	3 697 278 427	30403·121609	$(k+1)(4k+1)$
7	5 764 643 587	37963·151849	$(k+1)(4k+1)$
8	6 770 862 367	41143·164569	$(k+1)(4k+1)$
9	14 386 156 093	397·4357·8317	$(k+1)(11k+1)(21k+1)$
10	15 579 919 981	88261·176521	$(k+1)(2k+1)$
11	18 459 366 157	67993·271729	$(k+1)(4k+1)$
12	19 887 974 881	81421·244261	$(k+1)(3k+1)$
13	21 276 028 621	103141·206281	$(k+1)(2k+1)$

**Таблица 3.** Строго псевдопростые числа по трем базам 2,3,5

Из этой таблицы видно, что строго псевдопростые числа имеют специальную структуру, которая позволяет надеяться на получение быстрого алгоритма генерации строго псевдопростых чисел.

#### 4 АЛГОРИТМ JAESCHKE ВЫЧИСЛЕНИЯ SPSP-ЧИСЕЛ

В статье 1993 года [5] Джаешке расширил последовательность  $\{\psi_k\}$  до 9-го члена (см. табл. 1) и разработал новый, более эффективный алгоритм вычисления *spsp*-чисел по одной и нескольким базам. Рассмотрим этот алгоритм в данном параграфе.

Алгоритм Джаешке основан на идее последовательного перебора пар простых чисел, троек простых чисел, четверок и т.д., произведение которых способно быть *spsp*-числом. Для отсеивания заведомо несовместимых наборов используется несколько предложений, одно из которых мы сформулируем ниже.

Начнём с определения понятия сигнатуры простого числа  $p$  по отношению к набору баз  $a_1, a_2, \dots, a_w$ . Напомним, что для взаимно простых  $a$  и  $p$   $l_a(p)$  обозначает наименьшую степень  $t$  такую, что  $a^t \equiv 1 \pmod{p}$ .

Пусть  $g$  – произвольное натуральное число. Представим его в виде  $g=2^s \cdot u$ . Будем обозначать показатель степени 2 через  $\Delta(g)$ .

**Определение 4.** Сигнатурой простого числа  $p$  по множеству баз  $A = \langle a_1, a_2, \dots, a_w \rangle$ ,  $\text{Н.О.Д.}(a_i, p) = 1$ , называется набор

$$\delta_p(A) = \langle \Delta(l_{a_1}(p), l_{a_2}(p), \dots, l_{a_w}(p)) \rangle.$$

**Предложение 3.** Пусть  $n = p_1 p_2 \dots p_t$ , где все сомножители различны, а  $A = \langle a_1, a_2, \dots, a_w \rangle$  – набор баз, такой, что  $\text{Н.О.Д.}(a_i, p_j) = 1$ . Число  $n$  является  $\text{spsp}(A)$  тогда и только тогда, когда  $n$  является  $\text{psp}(A)$ , и каждое  $p_j$  имеет одну и ту же сигнатуру по отношению ко всем базам набора  $A$ . Иначе говоря,  $\delta_{p_1}(A) = \delta_{p_2}(A) = \dots = \delta_{p_t}(A)$ .

**Пример.** Для  $A = \langle 11, 13, 17 \rangle$  имеем

$$\delta_{1531}(A) = \delta_{2551}(A) = \delta_{3571}(A) = (0, 0, 0),$$

$n - 1 = 2^1 u$ , где  $u = 6\,973\,414\,875$ , и  $1531^u \equiv 2551^u \equiv 3571^u \equiv 1 \pmod{n}$ . Значит,  $n$  является  $\text{spsp}(A)$ .

**Алгоритм Джаешке.**

**Входные данные:** граница вычислений  $B$ , набор баз  $A = \langle a_1, a_2, \dots, a_w \rangle$  и небольшое число  $t \geq 2$ .

**Требуется:** найти всевозможные наборы из  $t$  различных простых чисел  $p_1 < p_2 < \dots < p_t$  такие, что их произведение  $n = p_1 p_2 \dots p_t$  меньше  $B$ , и является  $\text{spsp}(A)$ -числом.

**Случай 1.  $t > 2$ .**

Стадия 1. Перебираем все наборы из  $t - 1$  простого числа  $p_1 < p_2 < \dots < p_{t-1}$ , такие, что  $a_w < p_1$ , сигнатуры всех  $p_i$  одинаковы, и их произведение не превышает  $B/p_{t-1}$ . Такие наборы называются *подходящими*.

Далее (стадия 2) для каждого из подходящих наборов выполняем следующие инструкции:

*Шаг 1.* Выбираем очередную базу  $a$  из набора  $A$ .

*Шаг 2.* Вычисляем  $\eta = \text{Н.О.К.}(l_a(p_1), l_a(p_2), \dots, l_a(p_{t-1}))$ .

*Шаг 3.* Если  $\text{Н.О.Д.}(\eta, p_1 p_2 \dots p_{t-1}) > 1$ , то такой набор игнорируется. Иначе, вычисляем обратный элемент

$$c = (p_1 p_2 \dots p_{t-1})^{-1} \pmod{\eta}$$

*Шаг 4.* Для каждого простого  $p$ ,  $p_{t-1} < p < B/p_1 p_2 \dots p_{t-1}$ , удовлетворяющего условию  $p \equiv c \pmod{\eta}$ , выполняем проверку, является ли произведение  $p_1 p_2 \dots p$   $\text{spsp}(A)$ -элементом.

**Случай 2.  $t = 2$ .**

*Шаг 1.* Для каждого простого  $p < \sqrt{B}$  вычисляем

$$\lambda_p = \text{Н.О.К.}(2, l_{a_1}(p), l_{a_2}(p), \dots, l_{a_w}(p))$$

*Шаг 2.* Вычисляем все произведения  $n = p(1 + k\lambda_p)$  для  $k = 2, 3, \dots$ , таких что  $1 + k\lambda_p$  является простым и  $n < B$ . Каждое

полученное произведение  $n$  проверяется, является ли оно  $spsp(A)$ -числом.

Описание алгоритма – завершено.

### Пример работы алгоритма для $t=2$ , $B=10000$ , $a=2$

Перебираем простые числа  $p < \sqrt{B} = 100$ . Наименьшее значение, на котором алгоритм сработает успешно, равно  $p=23$ . Рассмотрим работу алгоритма на этом элементе.

1. Вычисляем  $l_2(23) = 11$ , и  $\lambda_p = \text{H. O. K.}(2, l_2(23)) = 22$ .
2. Вычисляем  $1 + k\lambda_p$ ,  $k \leq 4$ , и проверяем на простоту:  
 $q_1=1+44=45$  – составное,  $q_2=1+66=67$  – простое,  $q_3=1+88=88$  – простое.
3. Вычисляем  $n_1=23 \cdot 67=1541$ ,  $n_2=23 \cdot 89=2047$ .
4. Проверяем оба кандидата на условия (5) и определяем, что число 2047 является  $spsp(2)$ -числом.

### Оценка трудоёмкости алгоритма Джаешке

Ограничимся только случаем  $t=2$ , поскольку общий случай увеличивает трудоёмкость метода в константное число раз и не влияет на общую оценку трудоёмкости метода.

Для анализа метода рассмотрим произвольное простое  $p < \sqrt{B}$ . Множитель  $\lambda_p$  является чётным делителем  $p-1$ . Выполним подсчёт, предполагая, что  $\lambda_p = p-1$ . Тогда, второй сомножитель  $q$  имеет вид  $1 + k\lambda_p = 1 + k(p-1) \approx kp$ . Значит, количество возможных вторых сомножителей равно  $B/p^2$ . Количество операций по определению принадлежности  $n = p \cdot q$  классу  $spsp(2)$ -чисел соответствует оценке  $O(\ln B)$ . Поэтому работа алгоритма может быть оценена величиной

$$T(B) \leq C_1 \cdot B \cdot \ln B \cdot \sum_{p < \sqrt{B}} \frac{1}{p^2} \leq C \cdot B \cdot \ln B$$

что соответствует оценке  $O(B \ln B)$ .

Таким образом, общая оценка алгоритма Джаешке сохраняется той же, что и в методе Померанса и др., описанном в предыдущем разделе. Некоторые улучшения алгоритма Джаешке, предложенные самим автором, касаются выбора подходящих  $n$ -ок простых чисел и не влияют на общую оценку сходимости метода. В статье Джиянга и Денга [6] были предложены некоторые улучшения метода, которые также не повлияли на общую оценку. Поэтому можно сказать что, несмотря на значительный период времени со дня постановки, особых сдвигов в решении проблемы построения строго псевдопростых чисел пока нет.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. M. Rabin. Probabilistic algorithm for testing primality // J. Numb. Theory. – 12, No. 1, 1980. – P. 128-138.
2. C. Pomerance, C. Selfridge, S. Wagstaff. The Pseudoprimes to  $25 \cdot 10^9$  // Math. Comput. – 1980. – P. 1003-1026.
3. R. Crandall, C. Pomerance. The prime numbers: a computational perspective. – 2nd Ed., Springer-Verlag, Berlin, 2005. – 604 p.
4. Ш. Т. Ишмухаметов. Методы факторизации натуральных чисел: учебное пособие. – Казань, КФУ, 2011. – 190 с.
5. G. Jaeschke. On Strong Pseudoprimes to Several Bases // Math. Comput. 61. – 1993. – P. 915-926.
6. J. Jiang, Y. Deng. Strong pseudoprimes to the first 9 prime bases // ArXiv:1207.0063v1 [math.NT]. – 2012. – P.1–12.
7. S. Ishmukhametov, B. Mubarakov. On practical aspects of the Miller-Rabin Primality Test // Lobachevskii Journal of Mathematics. – Vol. 34, No. 4, 2013. – P.304–312.



**ON A CLASS OF STRONG PSEUDOPRIME INTEGERS**

S. T. Ishmukhametov

B.G. Mubarakov

*Kazan Federal University*

email: ishm@nextmail.ru

email: mubbulat@mail.ru

**Abstract.** One of the most important problems in cryptography and theory of numbers is the problem of determining is a given integer  $n$  is prime or composite. A procedure solving this problem is called a *primality test*. It is known a number of primality tests and the most popular of them is the Miller-Rabin primality test (MRPT). This test is probabilistic and the error probability depends on a number of iterations called rounds. At each round a natural  $a$  less than a testing number  $n$  is chosen to carry out some computations that should confirms or discard the hypothesis than  $n$  is prime. These  $a$  are called bases for MRPT.

Composite numbers successfully passing the MRPT with some base  $a$  or with a collection of such bases are called strong pseudoprimes at this set of bases.

Let  $\psi_k$  be the least strong pseudoprime integer passing MRPT with first  $k$  primes as bases. Numbers  $\psi_k$  для  $k = 1, 2, 3, \dots$  form an increasing sequence and if some odd  $n$  is less than  $\psi_k$  for some  $k$  then to know exactly if  $n$  is prime, or no is sufficient at  $k$  rounds MRPT with first  $k$  primes as bases. This transforms probabilistic test into deterministic one. But to build the sequence of  $\psi_k$  is hard. At present, we know only first 9  $\psi_k$ .

In the paper we examine different algorithms of finding strong pseudoprimes and estimate their complexity. Our investigation shows than the existing algorithms are not sufficient to extend the sequence of  $\psi_k$  to limits where it can be used in cryptography.

**Keywords and phrases:** prime numbers; Miller-Rabin primality test; strong pseudoprimes; Jaeschke algorithm.

**REFERENCES**

1. M. Rabin. Probabilistic algorithm for testing primality // J. Numb. Theory. – 12, No. 1, 1980. – P. 128-138.
2. C. Pomerance, C. Selfridge, S. Wagstaff. The Pseudoprimes to  $25 \cdot 10^9$  // Math. Comput. – 1980. – P. 1003-1026.
3. R. Crandall, C. Pomerance. The prime numbers: a computational perspective. – 2nd Ed., Springer-Verlag, Berlin, 2005. – 604 p.
4. S. Ishmukhametov. Factorization Methods for natural numbers. Kazan, 2011. – 190 p.
5. G. Jaeschke. On Strong Pseudoprimes to Several Bases // Math. Comput. 61. – 1993. – P. 915-926.
6. J. Jiang, Y. Deng. Strong pseudoprimes to the first 9 prime bases // ArXiv:1207.0063v1 [math.NT]. – 2012. – P.1–12.
7. S. Ishmukhametov, B. Mubarakov. On practical aspects of the Miller-Rabin Primality Test // Lobachevskii Journal of Mathematics. – Vol. 34, No. 4, 2013. – P.304–312.

УДК 519.713

## О ЗВЁЗДНОЙ ВЫСОТЕ РЕГУЛЯРНОГО ЯЗЫКА. ЧАСТЬ I: ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Б. Ф. Мельников

*Самарский государственный университет*

email: [bormel@rambler.ru](mailto:bormel@rambler.ru)

**Аннотация.** Проблема звёздной высоты была поставлена в 1963 г., а решена в 1988 г.; до настоящего времени опубликовано всего 2 решения этой проблемы. Первое из этих решений (принадлежащее К. Хашигучи) в литературе было названо экстремально сложным; второе (принадлежащее Д. Кирстену) существенно проще.

В настоящей статье рассматривается новый подход к данной проблеме; краткое описание этого подхода таково. Мы определяем звёздную высоту некоторого конечного автомата, рассматривая все возможные перестановки его состояний и обычным образом строя регулярные выражения, получаемые по каждой из этих перестановок с помощью теоремы Клини. При этом определяется звёздная высота конечного автомата – как минимум звёздных высот полученных регулярных выражений. Далее мы показываем возможность построить по любому заданному регулярному выражению такого недетерминированного конечного автомата, звёздная высота которого совпадает со звёздной высотой исходного регулярного выражения.

Следовательно, мы можем рассматривать такой гипотетический недетерминированный конечный автомат, который соответствует регулярному выражению, определяющему заданный регулярный язык и имеющему минимально возможную звёздную высоту; пусть это автомат  $K$ . Вместе с этим  $K$  мы будем также рассматривать конкретный порядок  $\tau$  на множестве его состояний, соответствующий регулярному выражению, имеющему минимально возможную звёздную высоту.

Рассматривая состояния автомата  $K$  в порядке  $\tau$ , мы для очередного выбираемого состояния получаем одну из следующих трёх возможностей. Либо для каждого цикла, проходящего через это состояние, существует эквивалентный, не проходящий через него. Либо существует некоторое иное состояние автомата, которое имеет меньшее значение функции порядка  $\tau$  и определяет те же самые

циклы, которые определяет рассматриваемое нами состояние. Либо мы можем добавить к автомату  $K$  некоторые дуги – получая при этом один из предыдущих вариантов.

С помощью конечной последовательности таких операций мы получаем автомат, эквивалентный заданному, – причём такой, у которого мы можем *априори* ограничить сверху число состояний. Таким образом, описываемая последовательность действий доказывает существование недетерминированного конечного автомата, определяющего заданный регулярный язык и имеющему минимально возможную звёздную высоту, с заранее ограниченным числом состояний.

**Ключевые слова и фразы:** недетерминированный конечный автомат; регулярный язык; звёздная высота.

## 1 Введение

В первую очередь определим основную рассматриваемую в статье задачу.

Согласно [1] (и мн.др.), мы определяем *звёздную высоту регулярного выражения* (будем её обозначать  $\mathcal{SH}(r)$  для выражения  $r$ ) по индукции следующим образом:

- $\mathcal{SH}(\emptyset) = \mathcal{SH}(\emptyset^*) = \mathcal{SH}(a) = 0$  для каждой буквы  $a \in \Sigma$ ; <sup>1</sup>
- для двух любых регулярных выражений  $r$  и  $s$  определяем

$$\mathcal{SH}((r + s)) = \mathcal{SH}((r \cdot s)) = \max(\mathcal{SH}(r), \mathcal{SH}(s));$$

- для любого регулярного выражения  $r$  (где  $r \neq \emptyset$ ) определяем  $\mathcal{SH}((r^*)) = \mathcal{SH}(r) + 1$ .

*Звёздная высота регулярного языка*  $L$  определяется как минимально возможная звёздная высота регулярного выражения, определяющего язык  $L$ . А *проблема звёздной высоты* заключается в поиске алгоритма, определяющего звёздную высоту регулярного языка.

<sup>1</sup> Иногда используется другое определение – а именно,  $\mathcal{SH}(\emptyset^*)$  определяется равным 1. Несложно доказать, что такая разница в определениях оказывается важной только для некоторых *конечных* языков: точнее, только для некоторых *конечных* языков два различных определения звёздной высоты регулярного выражения дают различные определения звёздной высоты регулярного *языка*.

Эта проблема была поставлена в 1963 г. в [2], а решена была К. Хашигучи в 1988 г. в [3]; более того, до настоящего времени опубликовано всего 2 решения этой проблемы. (В 2005 г. было опубликовано решение Д. Кирстена, [4].)

В [5] решение К. Хашигучи было названо экстремально сложным (“extremely difficult”). А в [6] были приведены следующие оценки<sup>2</sup>:

Процедура, описанная Хашигучи, ведёт к невероятно долгим вычислениям даже в случае малых примеров. Например, если язык  $L$  допускается некоторым конечным автоматом, имеющим 4 состояния и равную 3 циклическую сложность графа переходов (и менее 10 его элементов), то очень грубая нижняя оценка числа языков, которые необходимо сравнить с заданным  $L$ , есть

$$\left(10^{10^{10}}\right)^{\left(10^{10^{10}}\right)^{\left(10^{10^{10}}\right)}}.$$

Более удачное решение получено в [4] – в ней рассматриваются т.н. distance desert automata. Оба варианта автоматов, необходимых для их определения (т.е. distance automata и desert automata), можно рассматривать как специальные расширения класса недетерминированных конечных автоматов. На основе решения, приведённого в [4], мы можем оценить сложность только для *вспомогательных* алгоритмов, используемых для решения проблемы. А именно, когда задан не только регулярный язык  $L$ , но и некоторое натуральное число  $h$ , мы, согласно [4, Theorem 2.3], получаем сложность некоторых таких алгоритмов для определения, не превосходит ли звёздная высота языка  $L$  числа  $h$ .

На основе последнего можно описать алгоритм, определяющий звёздную высоту языка  $L$  – рассматривая последовательность значений  $h = 1, 2, \dots$ . Итак, чтобы описать *полный* алгоритм на основе of [4], нам необходимо *априори ограничить* значение  $h$ ; это можно сделать следующим образом. Для заданного регулярного языка  $L$  мы можем считать, что мы также знаем *некоторый* соответствующий ему конечный автомат; а циклическая сложность графа переходов любого конечного автомата, число вершин которого заранее известно, – и, следовательно, значение  $h$  – может быть ограничено числом его состояний ([2, 7]).

<sup>2</sup> Перевод цитаты выполнен автором данной статьи.

---

---

В этой статье мы рассматриваем ещё один подход к определению звёздной высоты регулярного языка. Аналогично [4], мы рассматриваем недетерминированные конечные автоматы – однако не рассматриваем их расширений. Мы также будем применять:

- специальную версию теоремы Клини;
- звёздную высоту, определяемую для недетерминированных конечных автоматов;
- и специальный алгоритм для эквивалентного преобразования последних.

Фактически мы сводим проблему звёздной высоты к одной из проблем минимизации недетерминированных конечных автоматов; иными словами, мы рассматриваем её как следствие нескольких утверждений о задающих регулярные языки т.н. базисных конечных автоматах ([8] и др.). Мы надеемся, что наш подход не является «экстремально сложным». Более того, он даёт возможность определить вычислительную сложность *всего* алгоритма определения звёздной высоты регулярного языка – а не только некоторых вспомогательных алгоритмов.

Кратко схема рассматриваемого нами доказательства (которое начато в части I данной статьи и будет продолжено) может быть описана следующим образом. Мы определяем звёздную высоту некоторого *конечного автомата*, рассматривая все возможные перестановки его состояний и обычным образом строя регулярные выражения, получаемые по каждой из этих перестановок с помощью теоремы Клини; звёздная высота конечного автомата при этом определяется как минимум звёздных высот полученных регулярных выражений. Далее мы показываем возможность построить по любому заданному регулярному выражению такого недетерминированного конечного автомата, звёздная высота которого совпадает со звёздной высотой которого исходного регулярного выражения.

Следовательно, мы можем рассматривать такой *гипотетический* недетерминированный конечный автомат, соответствующий – также гипотетическому – регулярному выражению, определяющему заданный регулярный язык  $L$  и имеющему минимально возможную звёздную высоту; будем здесь обозначать этот автомат  $K$ . Вместе с автоматом  $K$  мы будем также рассматривать *конкретный порядок*  $\tau$  на множестве его состояний, соответствующий регулярному выражению, имеющему минимально возможную звёздную высоту.

Для этого автомата  $K$  рассмотрим его функции разметки состояний (некоторые конкретные примеры функций разметки состояний и базисных автоматов были рассмотрены в [9, 10]).<sup>3</sup> Будем также рассматривать все циклы графа переходов эквивалентного базисного автомата. Рассматривая состояния автомата  $K$  в порядке  $\tau$ , мы для очередного выбираемого состояния (пусть  $q_m$ ) получаем одну из следующих трёх возможностей.

- Либо для каждого цикла, проходящего через это состояние, существует эквивалентный, *не* проходящий через  $q_m$ .<sup>4</sup> В дальнейшем мы будем называть данный случай «удаляющим» – поскольку автомат  $K$  с удалённым состоянием  $q_m$  эквивалентен  $K$ .
- Либо существует некоторое состояние  $q$ , которое:
  - имеет меньшее значение функции порядка  $\tau$  (т.е., согласно порядку перебора состояний, уже было нами рассмотрено);
  - принадлежит той же самой сильно связанной компоненте графа переходов автомата  $K$  ([11] и др.);
  - и определяет те же самые циклы, которые определяет состояние  $q_m$ .

В дальнейшем мы будем называть данный случай «объединяющим» – поскольку мы объединяем состояния  $q_m$  и  $q$  аналогично алгоритмам, описанным в [10, Sect. 4].

- Либо мы можем добавить к автомату  $K$  некоторые дуги – получая при этом один из предыдущих вариантов. В дальнейшем мы будем называть данный случай «добавляющим».

Все эти случаи будут подробно рассматриваться далее.

С помощью конечной последовательности таких операций мы получаем автомат, эквивалентный заданному, – причём такой, у которого мы можем *априори* ограничить сверху число состояний. Такая

<sup>3</sup> Значения этих функций являются подмножествами множеств состояний двух канонических конечных автоматов – определяющих языки  $L$  и  $L^R$ .

<sup>4</sup> Далее мы определим понятие «эквивалентный цикл» строго.

последовательность операций доказывает существование недетерминированного конечного автомата, определяющего заданный регулярный язык и имеющему минимально возможную звёздную высоту, с заранее ограниченным числом состояний.

## 2 Обозначения и предварительные сведения

В статье используются обозначения из [10]; повторим только самые важные из них.

Мы будем рассматривать недетерминированный конечный автомат

$$K = (Q, \Sigma, \delta, S, F); \quad (1)$$

также согласно [10], мы будем рассматривать функции переходов конечных автоматов без  $\varepsilon$ -дуг, т.е. будем рассматривать функцию  $\delta$  в виде

$$\delta : Q \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Q).$$

Язык автомата  $K$  будет обозначаться  $\mathcal{L}(K)$ . Такое же обозначение будет использоваться для языка регулярного выражения  $r$ : он будет обозначаться записью  $\mathcal{L}(r)$ .

Канонический автомат для заданного регулярного языка  $L$  будет обозначаться записью  $\tilde{L}$ . Некоторые другие определения и обозначения (бинарного отношения  $\#$ , функций разметки состояний  $\varphi^{in}$  и  $\varphi^{out}$ , базисного конечного автомата) также были приведены в [9, 10].

В настоящей статье базисный автомат для заданного будет обозначаться следующим образом:

$$\mathcal{BA}(L) = (\hat{Q}, \Sigma, \hat{\delta}, \hat{S}, \hat{F}). \quad (2)$$

Для некоторого его состояния  $\hat{q} = \underset{X}{A} \in \hat{Q}$  (где  $A$  – состояние автомата  $\tilde{L}$ , а  $X$  – состояние автомата  $\tilde{L}^R$ ), будем писать  $\alpha(\hat{q}) = A$  и  $\beta(\hat{q}) = X$ . Если для некоторой пары состояний  $q \in Q$  (автомата (1)) и  $\hat{q} = \underset{X}{A} \in \hat{Q}$  выполнены одновременно следующие два условия

$$\varphi_K^{in}(q) \ni \alpha(\hat{q}) \quad \text{и} \quad \varphi_K^{out}(q) \ni \beta(\hat{q}),$$

то мы будем писать  $[q \ni \hat{q}]$ .

Некоторые соответствующие примеры были рассмотрены в [10]; повторим кратко один из них.

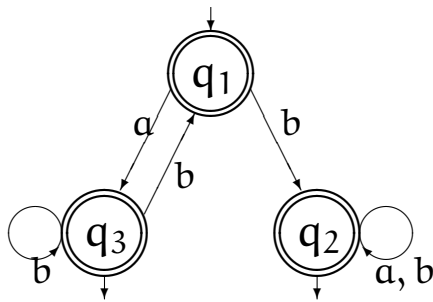


Рис. 1

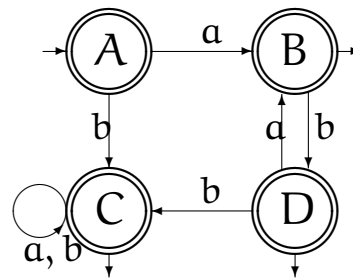


Рис. 2

Автоматы для рассматриваемого нами языка приведены на рис. 1, а также (канонический) на рис. 2. А на рис. 3 и в таб. 1 (см. также [10, Таб. 12]) приведены соответствующий автомат  $\widetilde{L}^R$  и бинарное отношение #:

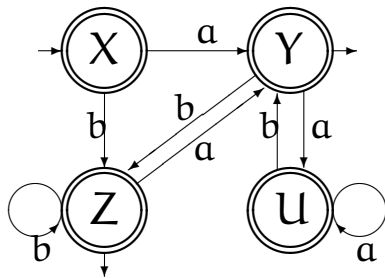


Рис. 3

#	X	Y	Z	U
A	-	#	#	-
B	#	-	#	-
C	#	#	#	#
D	#	#	#	-

Таб. 1

Согласно приведённым в [8, 9] определениям, мы получаем следующий автомат  $\mathcal{BA}(L)$ <sup>5</sup>:

$\mathcal{BA}(L)$	a	b
→ A#Y	B#Z, B#X	C#U
→ A#Z	-	C#Y, C#Z, C#X
← B#X	-	-
B#Z	-	D#Y, D#Z, D#X
D#Y	B#Z, B#X	C#U
← C#X	-	-
C#Y	C#Z, C#X	C#U
C#Z	-	C#Y, C#Z, C#X
C#U	C#Y, C#U	-
← D#X	-	-
D#Z	-	C#Y, C#Z, C#X

Таб. 2

(Для удобства мы записываем  $\overset{A}{X}$  в виде A#X и т.п. Мы также не пишем символы фигурных скобок для обозначения множеств, т.е. будем писать A#X, A#Y вместо  $\{\overset{A}{X}, \overset{A}{Y}\}$ , и т.п.)

<sup>5</sup> Отметим, что этот автомат в [9, 10] приведён не был.



### 3 Пути базисного автомата и соответствующие пути эквивалентного автомата

В этом и следующем<sup>6</sup> разделах мы определим естественное соответствие между циклами *произвольного* автомата (1), определяющего некоторый регулярный язык  $L$ , и циклами эквивалентного ему базисного автомата  $\mathcal{BA}(L)$ .

Для рассматриваемого регулярного языка  $L$  и его базисного автомата  $\mathcal{BA}(L)$  (2), рассмотрим функцию переходов этого автомата  $\hat{\delta}$  как *множество* его дуг

$$\hat{\Delta} = \left\{ \hat{e}_i = (\hat{p}_i, \alpha_i, \hat{r}_i) \mid \hat{p}_i, \hat{r}_i \in \hat{Q}, \alpha_i \in \Sigma, \hat{\delta}(\hat{p}_i, \alpha_i) \ni \hat{r}_i, i \in \{1, \dots, \hat{m}\} \right\}$$

(где  $\hat{m}$  – число дуг автомата (2)). Итак, мы перенумеровали («раскрасили») дуги автомата  $\mathcal{BA}(L)$ .

Для автомата (1) функцию переходов мы тоже рассмотрим как *множество* дуг

$$\Delta = \left\{ e_j = (p_j, \alpha_j, r_j) \mid p_j, r_j \in Q, \alpha_j \in \Sigma, \delta(p_j, \alpha_j) \ni r_j, j \in \{1, \dots, m\} \right\}$$

(где  $m$  – число дуг автомата (1)).

Далее пометим каждую дугу автомата (1) *множеством* возможных (уже использованных) «цветов» – т.е., формально, рассмотрим функцию  $\Omega : \Delta \rightarrow \mathcal{P}(\hat{\Delta})$ , заданную следующим образом. Для дуги  $e_j = (p_j, \alpha_j, r_j)$ , мы полагаем, что  $\Omega(e_j) \ni \hat{e}_i$  (где  $i \in \{1, \dots, \hat{m}\}$ ) тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

$$[p_j \ni \hat{p}_i]; \quad \alpha_j = \alpha_i; \quad [r_j \ni \hat{r}_i].$$

Рассмотрим *множество всех путей* автомата  $\mathcal{BA}(L)$ ; при этом важно отметить, что мы рассматриваем *не только простые* пути. Некоторый путь автомата (2) обозначим  $\hat{v}$  и рассмотрим его как последовательность

$$\hat{v} = (\hat{e}_1^{\hat{v}}, \dots, \hat{e}_{\hat{n}}^{\hat{v}}), \quad (3)$$

где  $\hat{n}$  – число его дуг. Его  $k$ -я дуга – т.е.  $\hat{e}_k^{\hat{v}}$  – при этом будет

$$\hat{e}_k^{\hat{v}} = (\hat{p}_k^{\hat{v}}, \alpha_k^{\hat{v}}, \hat{r}_k^{\hat{v}})$$

<sup>6</sup> В части II данной статьи.

( $k \in \{1, \dots, \hat{n}\}$ ). Очевидно, что  $\hat{p}_{k+1}^{\hat{\nu}} = \hat{r}_k^{\hat{\nu}}$  для любого возможного  $k$ .

Для пути (3) определим множество  $\hat{\nu}$ -соответствующих путей автомата  $K$ . Итак, рассмотрим путь

$$\nu = (e_1^{\nu}, \dots, e_{\hat{n}}^{\nu}) \quad (4)$$

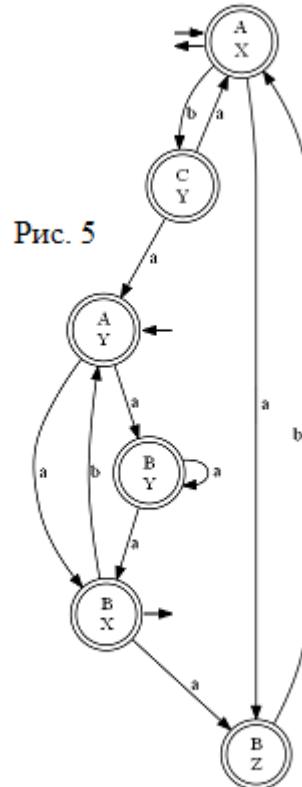
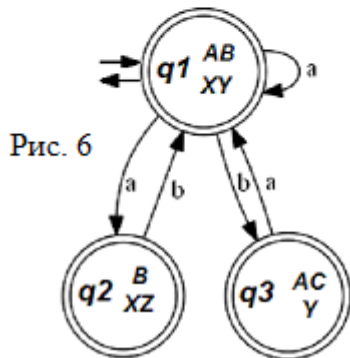
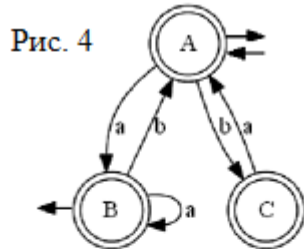
автомата  $K$ ; значение  $\hat{n}$  – то же самое, что и в (3),<sup>7</sup> а его  $k$ -й дугой является

$$e_k^{\nu} = (p_k^{\nu}, a_k^{\nu}, r_k^{\nu})$$

для каждого возможного  $k$ . Будем говорить, что этот путь *соответствует* пути  $\hat{\nu}$ , если для каждого  $k \in \{1, \dots, \hat{n}\}$  выполнено условие

$$\Omega(e_k^{\nu}) \ni \hat{e}_k^{\hat{\nu}}.$$

(Т.е. если каждая дуга *может быть* «покрашена цветом», соответствующим дуге пути  $\hat{\nu}$  с тем же самым номером.) Про каждую такую пару путей мы для каждого  $k \in \{1, \dots, \hat{n}\}$  будем говорить, что состояния  $\hat{p}_k^{\hat{\nu}}$  и  $p_k^{\nu}$  в них являются *соответствующими*.



<sup>7</sup> Напомним, что оба автомата –  $K$  и  $\mathcal{BA}(L)$  – не содержат  $\epsilon$ -дуг.

В качестве примера рассмотрим язык, который определяется регулярным выражением

$$(a + ab + ba)^*, \quad (5)$$

и такие автоматы для этого языка:

- $\tilde{L}$ , рис. 4;<sup>8</sup>
- $\mathcal{BA}(L)$ , рис. 5;
- «обычный» автомат для этого языка – рис. 6, на котором также обозначены значения обеих функций разметки состояний.

Например, рассмотрим следующие две дуги автомата  $\mathcal{BA}(L)$ : «зелёную»

$$\begin{array}{c} A \xrightarrow{a} B \\ Y \xrightarrow{\hat{\delta}} X \end{array}$$

и «синюю»

$$\begin{array}{c} B \xrightarrow{a} B \\ Y \xrightarrow{\hat{\delta}} X \end{array}.$$

Отсюда, согласно рис. 6, следующие дуги автомата  $\mathcal{K}$  (и только они) могут быть «зелёными»:

$$q_1 \xrightarrow{\delta_\pi} q_1, \quad q_1 \xrightarrow{\delta_\pi} q_2 \quad \text{и} \quad q_3 \xrightarrow{\delta_\pi} q_1,$$

а следующие дуги (и только они) могут быть «синими»:

$$q_1 \xrightarrow{\delta_\pi} q_1 \quad \text{и} \quad q_1 \xrightarrow{\delta_\pi} q_2.$$

Отсюда мы получаем, например, что дуга  $q_1 \xrightarrow{\delta_\pi} q_1$  может быть «покрашена» в оба рассмотренных нами «цвета» – в «зелёный» и «синий» (а, возможно, и ещё в какой-нибудь).

Отметим также, что множество простых циклов автомата  $\mathcal{BA}(L)$  включает следующий:

$$\begin{array}{c} A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} A \\ Y \xrightarrow{\hat{\delta}} Y \xrightarrow{\hat{\delta}} X \xrightarrow{\hat{\delta}} Y \end{array}. \quad (6)$$

Мы будем рассматривать этот цикл и в дальнейшем.

<sup>8</sup> В этом примере  $L = L^R$ . Поэтому, заменив на рис. 4 имена состояний  $A, B$  и  $C$  соответственно на  $X, Y$  и  $Z$ , мы получим автомат  $\tilde{L}^R$ .

В рассмотренных нами примерах для каждого состояния  $\overset{A}{X}$  автомата  $\mathcal{BA}(L)$  существовало соответствующее состояние автомата  $K$ , такое что через него проходят циклы, соответствующие всем циклам, проходящим через  $\overset{A}{X}$ . Иными словами, в предыдущем примере выполняется следующее *свойство* автомата.

**Свойство 1** Для каждого состояния  $\overset{A}{X}$  автомата  $\mathcal{BA}(L)$ , существует состояние  $q$  автомата  $K$  (где  $[q \ni \overset{A}{X}]$ ), такое что для каждого цикла  $\nu$ , проходящего через состояние  $\overset{A}{X}$ , существует проходящий через  $q$  цикл автомата  $K$ , соответствующий  $\nu$ .

Следующий пример показывает, что существуют автоматы, для которых свойство 1 не выполняется.<sup>9</sup> Рассмотрим этот пример кратко.

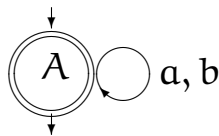


Рис. 7

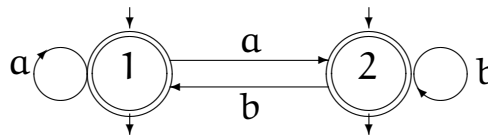


Рис. 8

Мы можем считать в этом примере, что автомат, приведённый на рис. 7, является *одновременно*:

- $\tilde{L}$ ;
- $(\tilde{L}^R)^R$  (при замене  $A$  на  $X$ );
- $\mathcal{BA}(L)$  (при замене  $A$  на  $\overset{A}{X}$ ).

Этот автомат определяет язык  $\Sigma^*$  (мы можем считать, что  $\Sigma = \{a, b\}$ ). А оба состояния автомата  $K$ , приведённого на рис. 8, имеют одни и те же значения функций  $\varphi_K^{in}$  и  $\varphi_K^{out}$  (т.е.  $\{A\}$  и  $\{B\}$  соответственно), но ни одно из состояний автомата  $K$  не имеет циклов, соответствующим циклам автомата  $\mathcal{BA}(L)$  с пометками  $a$  и  $b$  одновременно.

## Список литературы

1. A. Salomaa. Jewels of Formal Language Theory. – Computer Sci. Press, Potomac, Maryland, 1981.  $\Rightarrow$  75

<sup>9</sup> Но, конечно же,  $K$  содержит *путь*, соответствующий каждому рассматриваемому циклу  $\nu$ .

- 
- 
2. L. Eggan. Transitions graphs and the star height of regular events // *Michigan Math. J.*, 10 (1963) 385–397. ⇒ 76
  3. K. Hashiguchi. Algorithms for determining relative star height and star height // *Inform. Comput.*, 78 (1988) 124–169. ⇒ 76
  4. D. Kirsten. Distance desert automata and the star height problem // *Theoret. Informatics Appl.*, 39 (2005) 455–509. ⇒ 76, 77
  5. D. Perrin. Finite Automata. Handbook of Theoret. Comput. Sci., Vol. A. – Elsevier Sci. Publ., 1990. ⇒ 76
  6. S. Lombardy, J. Sakarovitch. Star Height of Reversible Languages and Universal Automata // *5th Latin American Theoretical Informatics Symposium*, LNCS, Vol. 2286 (2002). ⇒ 76
  7. J. Sakarovitch. Elements of Automata Theory. – Cambridge university press, 2009. ⇒ 76
  8. B. Melnikov, A. Melnikova. Some properties of the basis finite automaton // *The Korean Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 9, No. 1 (2002) 135–150. ⇒ 77, 80
  9. B. Melnikov. Extended nondeterministic finite automata // *Fundamenta Informaticae*, Vol. 104, No. 3 (2010) 255–265. ⇒ 78, 79, 80
  10. B. Melnikov. Once more on the edge-minimization of nondeterministic finite automata and the connected problems // *Fundamenta Informaticae*, Vol. 104, No. 3 (2010) 267–283. ⇒ 78, 79, 80
  11. F. Harary. Graph Theory. – Addison-Wesley, 1969. ⇒ 78

---

---

**ON THE STAR-HEIGHT OF A REGULAR LANGUAGE.  
PART I: THE MAIN DEFINITIONS**

B. F. Melnikov  
*Samara State University*  
email: [bormel@rambler.ru](mailto:bormel@rambler.ru)

**Abstract.** The star height problem was set in 1963 and solved in 1988; up to now, only two solutions were published. The first one (of K. Hashiguchi) was called “extremely difficult” in some next papers; and the second one (of D. Kirsten, 2005) is much simpler.

In this paper we consider a new approach to this problem; the short scheme of the proof is the following one. We define the star height for an automaton, considering all the possible orders of its states and making regular expressions for each order in the usual way. We show, that we can construct corresponding automaton for each regular expression, and therefore we can do this thing for a hypothetical regular expression defining the given regular language and having minimum possible star-height.

Then there is the minimum possible value of star-height for some hypothetical automaton defining the given regular language; let this automaton be  $K$ . We consider not only  $K$ , but also the concrete order  $\tau$  of its states corresponding to the regular expression having minimum possible star-height.

Considering the states of  $K$  in the order  $\tau$ , we obtain for the next state one of the three following things. Either each its loop has equivalent one which does not pass the considered state. Or there exists some other state, which has the smaller value of the order  $\tau$  and defines the same loops. Or we can add some edges to obtain one of previous cases.

Using a finite sequence of such steps, we obtain the automaton, which is equivalent to the given one; moreover, we can a priori limit the number of states of such “minimum” automaton, using the knowledge of the given language only. Thus, this sequence of steps gives the nondeterministic finite automaton having a priori limited number of states, defining the given regular language and having the minimum possible star-height.

**Keywords and phrases:** nondeterministic finite automaton; regular language; the star height problem.

#### REFERENCES

1. A. Salomaa. *Jewels of Formal Language Theory*. – Computer Science Press, Potomac, Maryland, 1981.
2. L. Eggan. Transitions graphs and the star height of regular events // *Michigan Math. J.*, 10 (1963) 385–397.
3. K Hashiguchi. Algorithms for determining relative star height and star height // *Inform. Comput.*, 78 (1988) 124–169.
4. D. Kirsten. Distance desert automata and the star height problem // *Theoret. Informatics Appl.*, 39 (2005) 455–509.

- 
- 
5. D. Perrin. Finite Automata. Handbook of Theoret. Comput. Sci., Vol. A. – Elsevier Sci. Publ., 1990.
  6. S. Lombardy, J. Sakarovitch. Star Height of Reversible Languages and Universal Automata // 5th Latin American Theoretical Informatics Symposium, LNCS, Vol. 2286 (2002).
  7. J. Sakarovitch. Elements of Automata Theory. – Cambridge university press, 2009.
  8. B. Melnikov, A. Melnikova. Some properties of the basis finite automaton // The Korean Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 9, No. 1 (2002) 135–150.
  9. B. Melnikov. Extended nondeterministic finite automata // Fundamenta Informaticae, Vol. 104, No. 3 (2010) 255–265.
  10. B. Melnikov. Once more on the edge-minimization of nondeterministic finite automata and the connected problems // Fundamenta Informaticae, Vol. 104, No. 3 (2010) 267–283.
  11. F. Harary. Graph Theory. – Addison-Wesley, 1969.

УДК 519.688

## РАЗРАБОТКА ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ЛИНЕЙНОГО РЕШАТЕЛЯ ДЛЯ ЗАДАЧИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕФТЕГАЗОВЫХ МЕСТОРОЖДЕНИЙ

И. И. Газизов

А. В. Юлдашев

*Уфимский государственный авиационный технический университет*

email: igpoooh@gmail.com

email: arthur@mail.rb.ru

**Аннотация.** Настоящая работа нацелена на разработку параллельных алгоритмов и программ решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) на современных вычислительных системах с целью сокращения временных затрат при проведении гидродинамического моделирования нефтегазовых месторождений. Создание цифровых моделей нефтегазовых месторождений и их практическое применение является ресурсоёмкой вычислительной задачей, поэтому в практике нефтедобывающих компаний используются высокопроизводительные вычислительные системы, а также специализированные программные комплексы с поддержкой параллельных вычислений. В последнее время широкое распространение получили гибридные системы, в которые наряду с центральными процессорами устанавливаются массивно-параллельные ускорители, в частности графические процессоры NVIDIA, обладающие высокими характеристиками производительности и энергоэффективности. Нами разрабатывается параллельный линейный решатель, предназначенный для решения разрежённых СЛАУ, возникающих при моделировании многофазных фильтрационных потоков углеводородов в пористой среде. Для решения СЛАУ используется предобусловленный итерационный метод бисопряжённых градиентов со стабилизацией с параллельными модификациями неполного LU-разложения  $ILU(0)$  в качестве предобуславливателей. Программа реализована на языке C с использованием технологий OpenMP и CUDA. Ключевые вычислительные операции базируются на функциях библиотек Intel MKL, NVIDIA cuBLAS и cuSPARSE. Эффективность разработанной программы исследована на современной гибридной вычислительной системе (2 x Intel Xeon E5-2680 и 2 x NVIDIA K20X) при решении тестовых СЛАУ, полученных при гидродинамическом моделировании реальных нефтегазовых месторождений. В результате максимальное ускорение при параллельном решении СЛАУ на центральных процессорах составило до 4,8 раз, а использование графических процессоров позволило получить дополнительное ускорение до 2,7 раз.

**Ключевые слова и фразы:** графические процессоры; гидродинамическое моделирование; многоядерные системы; разрежённые матрицы.



## 1 ВВЕДЕНИЕ

Современные технологии планирования, управления и контроля над разработкой нефтегазовых месторождений, направленные на оптимизацию процессов поисков, разведки и добычи, достижения максимального коэффициента извлечения нефти, базируются на использовании цифровых геологических и гидродинамических моделей. Создание таких моделей и их практическое применение является в настоящее время обязательным требованием недропользователей при создании проектной документации и анализе разработки [1].

В связи с этим в производственной практике нефтедобывающих компаний для гидродинамического моделирования нефтегазовых месторождений и решения других ресурсоёмких задач традиционно используются высокопроизводительные вычислительные системы, а также специализированные программные комплексы с поддержкой параллельных вычислений.

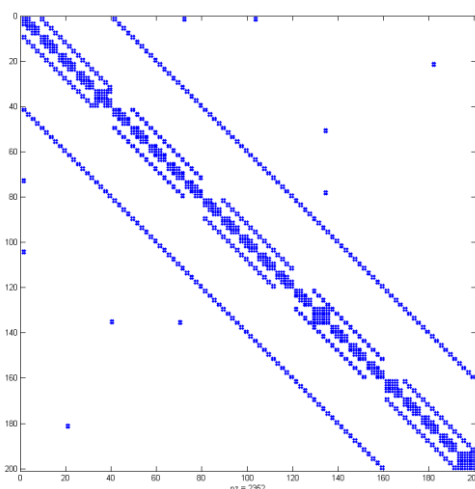
В последнее время наблюдается широкое распространение гибридных вычислительных систем, в которые наряду с центральными процессорами (CPU) привычной архитектуры x86 устанавливаются массивно-параллельные ускорители, обладающие более высокими характеристиками с точки зрения производительности и энергоэффективности. Подтверждением этому служит то, что около 35% суммарной производительности суперкомпьютеров в текущем мировом рейтинге мощнейших вычислительных систем TOP500 складывается из производительности гибридных вычислительных систем, в составе которых имеются графические процессоры (GPU) производства компаний NVIDIA или AMD либо сопроцессоры Intel. Лидирующие позиции в данном направлении занимает компания NVIDIA, выпустившая первый графический процессор, предназначенный не только для визуализации, но и вычислений общего назначения, более 5 лет назад.

## 2 ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СЛАУ И ПРЕДОБУСЛАВЛИВАТЕЛИ

Наша работа нацелена на ускорение решения систем линейных алгебраических уравнений, возникающих при численном моделировании многофазных фильтрационных потоков углеводородов в пористой среде, посредством использования потенциала современных многоядерных вычислительных систем, в том числе гибридных систем, оснащённых GPU NVIDIA.

В связи с тем, что матрицы соответствующих СЛАУ на практике являются сильно разрежёнными (рисунок 1) и плохо обусловленными, для решения принято использовать предобусловленные итерационные

методы подпространства Крылова, например, метод бисопряжённых градиентов со стабилизацией (BiCGStab).



**Рисунок 1.** Иллюстрация портрета матрицы СЛАУ малой размерности

Одним из эффективных предобуславливателей, применяемых в задаче численного моделирования многофазной фильтрации углеводородов, является неполное LU-разложение без заполнения (с нулевым заполнением) – ILU(0) [2], также используются и другие предобуславливатели класса ILU. Более сложный, но в тоже время и более эффективный подход заключается в применении специализированного двухступенчатого предобуславливателя CPR (Constrained Pressure Residual) и его модификаций [3-5]. В рамках CPR выделяется локальный предобуславливатель, в качестве которого часто используется алгебраический многосеточный метод (Algebraic Multigrid Method, AMG) [6], а также глобальный предобуславливатель, например, упомянутый выше ILU(0).

Алгоритмы построения предобуславливателя ILU(0) и решения возникающих в результате неполного LU-разложения систем с разрежёнными нижне- и верхнетреугольными матрицами в классической постановке обладают незначительным ресурсом параллелизма. В связи с этим в нашей работе используются различные параллельные модификации алгоритмов построения ILU(0), специализированные под соответствующие параллельные архитектуры. Для одного или нескольких многоядерных CPU с общей памятью используется блочно-диагональное (Block-Jacobi) предобуславливание на основе ILU(0) [2,7], для одного GPU – алгоритм разделения на уровни (Level Scheduling) [7,8] и комбинация указанных алгоритмов для вычислительной системы с общей памятью и несколькими GPU.

### 3 ОСОБЕННОСТИ ПРОГРАММНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ

Текущим результатом работы является программная реализация предобусловленного метода BiCGStab с различными параллельными модификациями предобуславливателя ILU(0) в качестве специализированного линейного решателя, ориентированного на работу в среде операционной системы Linux как на традиционных многоядерных системах, так и на гибридных вычислительных системах, оснащённых графическими процессорами NVIDIA.

Программа реализована на языке C, причем для распараллеливания в модели общей памяти используется интерфейс OpenMP, а работа на GPU обеспечивается средствами CUDA. Ключевые вычислительные операции – построение предобуславливателя ILU(0), решение систем с разрежёнными ниже- и верхнетреугольными матрицами, умножение матрицы на вектор и различные векторные операции – базируются на функциях математических библиотек Intel Math Kernel Library (MKL), а также cuBLAS и cuSPARSE, входящих в состав NVIDIA CUDA Toolkit, при расчёте на CPU и GPU соответственно.

При работе с матрицами в силу их разрежённости используется популярный формат хранения со сжатием по строкам CSR, который поддерживается в библиотеках MKL и cuSPARSE во всех используемых нами вычислительных операциях. В дальнейшем при расчёте на GPU планируется перейти к блочному формату хранения со сжатием по строкам (BCSR или BSR), как только данный формат будет полноценно поддержан в библиотеке cuSPARSE.

Все векторные и матрично-векторные операции в указанных библиотеках реализованы параллельно. Что касается операций построения предобуславливателя ILU(0), а также решения треугольных систем, в библиотеке MKL они реализованы последовательно. В связи с этим в нашем решателе строится блочно-диагональный предобуславливатель, состоящий из множества блоков, которые могут обрабатываться независимо. Причем число блоков выбирается равным количеству ядер CPU, используемых для параллельного расчёта. Аналогичный подход применяется при расчёте на нескольких GPU.

Также отметим, что в текущей версии решателя учтена характерная для современных многопроцессорных систем с общей памятью неоднородность доступа к памяти (NUMA), что реализуется путем параллельной инициализации обрабатываемых массивов данных. В частности, это позволило в 2 раза повысить максимальное ускорение при параллельном выполнении операции умножения разрежённой матрицы на вектор (относительно показанного ранее в [9]).

#### 4 ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

В данном разделе приведены результаты исследования эффективности разработанного параллельного линейного решателя на современной гибридной вычислительной системе на базе двух центральных процессоров Intel Xeon E5-2680 и двух графических процессоров NVIDIA K20X, работающих в режиме ECC Off. Исследование проведено при решении тестовых СЛАУ с матрицами из таблицы 1, полученными при гидродинамическом моделировании реальных нефтегазовых месторождений. В ходе тестирования использовались следующие параметры: условие остановки итерационного процесса – достижение относительной невязкой величины  $\varepsilon=1e-6$ ; начальное приближение – нулевой вектор; расчёты проводились с двойной точностью.

Матрица	Размерность	Кол-во ненулевых элементов в матрице	Среднее кол-во элементов в строке
1	1 500 000	55 815 624	37,21
2	2 304 102	42 859 314	18,60
3	4 320 921	85 471 137	19,78
4	6 610 263	118 221 633	17,88

Таблица 1. Характеристики тестовых матриц

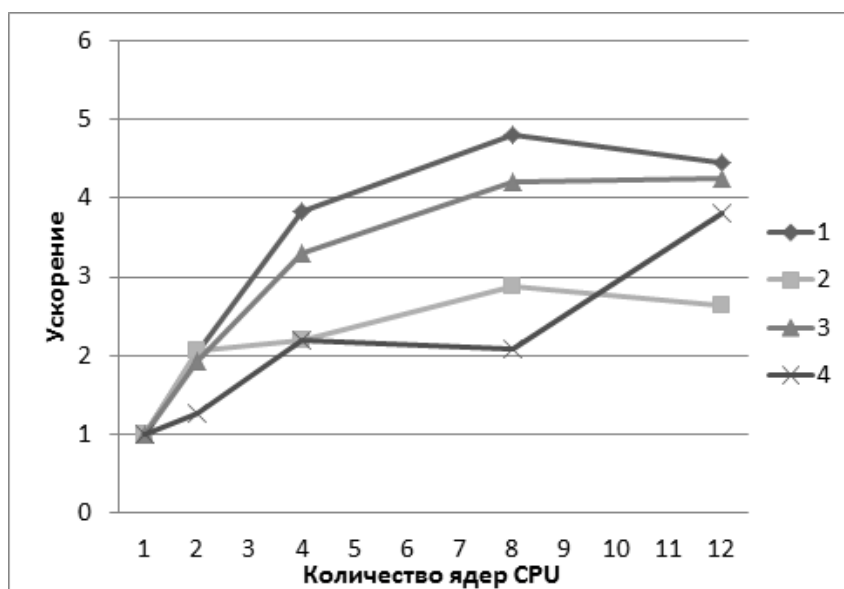


Рисунок 2. Ускорение линейного решателя на CPU

При расчёте на CPU максимальное ускорение решения СЛАУ составило от 2,8 до 4,8 раз в зависимости от матрицы (рисунок 2). Относительно низкое ускорение объясняется увеличением количества итераций (таблица 2), требуемых для сходимости метода, при увеличении числа используемых ядер CPU и соответственно числа блоков в па-

раллельной модификации ILU(0).

Матрица	Количество итераций						
	1 ядро CPU	2 ядра CPU	4 ядра CPU	8 ядер CPU	12 ядер CPU	1 GPU	2 GPU
1	3	3	3	4	5	3	3
2	36	36	57	59	69	36	36
3	74	79	74	80	88	76	79
4	9	15	15	26	15	9	15

Таблица 2. Зависимость числа итераций от параметров запуска на CPU и GPU

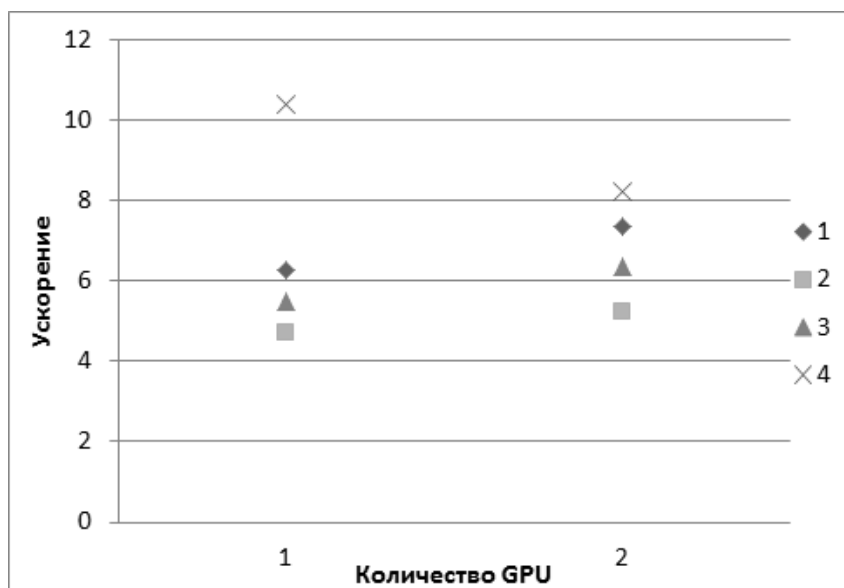


Рисунок 3. Ускорение линейного решателя на GPU относительно времени расчёта на одном ядре CPU

Расчёт с использованием 1-2 GPU позволяет получить ускорение в 5,2-10,4 раза относительно времени расчёта на одном ядре CPU (рисунок 3) или в 1,5-2,7 раз относительно минимального времени расчёта на множестве ядер двух CPU.

#### 4 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основной проблемой при использовании блочного ILU(0) является ухудшение сходимости при увеличении количества блоков, что существенно снижает эффективность распараллеливания. В связи с этим нами ведется реализация метода двухступенчатого предобуславливания на основе ILU(0) и AMG. Предполагается, что использование двухступенчатого предобуславливания повысит как сходимость, так и ускорение параллельных версий.

---

---

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Р. К. Газизов, В. А. Байков и др. Опыт использования высокопроизводительных вычислительных систем в гидродинамическом моделировании залежей нефти и газа (С. 215-221) // Суперкомпьютерные технологии в науке, образовании и промышленности. – М.: Изд-во МГУ, 2009. – 232 с.
2. Y. Saad. Iterative methods for sparse linear systems (2nd ed.). SIAM, Philadelphia, 2003.
3. J. R. Wallis, R. P. Kendall, T. E. Little. Constraint residual acceleration of conjugate residual Method // SPE 13536, 1985.
4. К. Ю. Богачев, И. Г. Горелов. Применение параллельного предобуславливателя CPR к задаче фильтрации вязкой сжимаемой жидкости в пористой среде // Вычислительные методы и программирование. – Т.9, 2008. – С. 184-190.
5. О. С. Борщук. О модификации двухступенчатого метода предобуславливания при численном решении задачи многофазной фильтрации вязкой сжимаемой жидкости в пористой среде // Вестник УГАТУ. – Т.12, № 1, 2009. – С. 146-150.
6. J. Ruge, K. Stüben. Algebraic multigrid. In: Multigrid Methods. S. McCormick (Ed.). SIAM, 1987, 73-130.
7. R. Li, Y. Saad. GPU-accelerated preconditioned iterative linear solvers. Tech. rep., University of Minnesota, 2010.
8. M. Naumov. Parallel Solution of Sparse Triangular Linear Systems in the Preconditioned Iterative Methods on the GPU. Technical Report NVR-2011-001, NVIDIA, 2011.
9. И. И. Газизов, А. В. Юлдашев. Исследование эффективности распараллеливания решения некоторых разреженных СЛАУ на многоядерных процессорах // Научный сервис в сети Интернет: все грани параллелизма: Труды Междун. суперкомп. конф. (Новороссийск, 23-28 сентября 2013г.). – М.: Изд-во МГУ, 2013. – С. 150-157.

---

---

**DEVELOPMENT OF PARALLEL LINEAR SOLVER  
FOR HYDRODYNAMIC MODELING OF OIL AND GAS FIELDS**

I. I. Gazizov

A. V. Yuldashev

*Ufa State Aviation Technical University*

email: igpooh@gmail.com

email: arthur@mail.rb.ru

**Abstract.** The goal of this work is to develop parallel algorithms and programs for solving systems of linear algebraic equations on modern computing systems to reduce the time of hydrodynamic modeling of oil and gas fields. Creation of digital models of oil and gas fields and their practical application is a computationally intensive task, so in practice oil companies use high-performance computing systems as well as specialized software packages which support parallel computing. Recently, hybrid computing systems have become widespread, which consist of central processors and massively parallel accelerators, in particular NVIDIA graphics processors, which have high characteristics in terms of performance and energy efficiency. We are developing a parallel linear solver intended for solving sparse linear systems arising in the modeling of multiphase hydrocarbon filtration flows in porous media. We use the preconditioned biconjugate gradient stabilized method with different parallel modifications of incomplete LU factorization ILU(0) as preconditioners. The program is implemented in C with OpenMP and CUDA. Key computational operations are based on the functions of Intel MKL, NVIDIA cuBLAS and cuSPARSE libraries. Efficiency of the developed program was investigated on the modern hybrid computing system (2 x Intel Xeon E5-2680 and 2 x NVIDIA K20X) in solving some test sparse linear systems obtained from reservoir simulation of real oil and gas fields. As a result, we got the maximum speedup up to 4.8 times when solving the sparse linear systems on central processors in parallel, while the use of graphics processors has given additional speedup up to 2.7 times.

**Keywords and phrases:** graphics processors; hydrodynamic modeling; multi- and manycore systems; sparse matrices.

#### REFERENCES

1. R. K. Gazizov, V. A. Baykov et al. Opyt ispol'zovaniya vysokoproizvoditel'nykh vychislitel'nykh sistem v gidrodinamicheskom modelirovanii zalezhey nefi i gaza (S. 215-221) // Superkomp'yuternye tekhnologii v nauke, obrazovanii i promyshlennosti. – M.: Izd-vo MGU, 2009. – 232 s.
2. Y. Saad. Iterative methods for sparse linear systems (2nd ed.). SIAM, Philadelphia, 2003.
3. J. R. Wallis, R. P. Kendall, T. E. Little. Constraint residual acceleration of conjugate residual Method // SPE 13536, 1985.
4. K. Yu. Bogachev, I. G. Gorelov. Primenenie parallel'nogo predobuslavlivatelya CPR k zadache fil'tracii vyazkoy szhimaemoy zhidkosti v poristoy srede // Vychislitel'nye metody i programmirovaniye. – T. 9, 2008. – P. 184-190.
5. O. S. Borshchuk. O modifikacii dvukhstupenchatogo metoda predobuslavlivaniya pri chislenom reshenii zadachi mnogofaznoy fil'tracii vyazkoy szhimaemoy zhidkosti v poristoy srede // Vestnik UGATU. – T. 12, No. 1, 2009. – P. 146-150.
6. J. Ruge, K. Stüben. Algebraic multigrid. In: Multigrid Methods. S. McCormick (Ed.). SIAM, 1987, 73-130.
7. R. Li, Y. Saad. GPU-accelerated preconditioned iterative linear solvers. Tech. rep., University of Minnesota, 2010.

8. M. Naumov. Parallel Solution of Sparse Triangular Linear Systems in the Preconditioned Iterative Methods on the GPU. Technical Report NVR-2011-001, NVIDIA, 2011.
9. I. I. Gazizov, A. V. Yuldashev. Issledovanie effektivnosti rasparallelivaniya resheniya nekotorykh razrezhyonnykh SLAU na mnogoyadernykh processorakh // Nauchnyy servis v seti Internet: vse grani parallelizma: Trudy Mezhdun. superkomp. konf. (Novorossiysk, 23-28 sentyabrya 2013 g.). – M.: Izd-vo MGU, 2013. – P. 150-157.



---

---

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Александр Сергеевич АНДРЕЕВ – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой Информационной безопасности и теории управления Ульяновского государственного университета.

Ильяс Ильшатович ГАЗИЗОВ – студент общенаучного факультета Уфимского государственного авиационного технического университета.

Ольга Ивановна ГОРБАНЁВА – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры Прикладной математики и программирования Южного федерального университета (г. Ростов-на-Дону).

Андрей Владимирович ДРАЦ – младший научный сотрудник Института прикладных математических исследований Карельского научного центра Российской академии наук, аспирант (г. Петрозаводск).

Дмитрий Владимирович ИВАНОВ – кандидат физико-математических наук, докторант кафедры Мехатроники в автоматизированных производствах Самарского государственного университета путей сообщения.

Шамиль Талгатович ИШМУХАМЕТОВ – доктор физико-математических наук, профессор кафедры Системного анализа и информационных технологий Казанского (Приволжского) федерального университета.

Андрей Валерьевич КАЦ – аспирант кафедры Прикладной математики и информатики Тольяттинского государственного университета.

Борис Феликсович МЕЛЬНИКОВ – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой Прикладной математики и информатики Тольяттинского филиала Самарского государственного университета.

Булат Газинурович МУБАРАКОВ – аспирант кафедры Системного анализа и информационных технологий Казанского (Приволжского) федерального университета.

Юрий Сергеевич НАГОРНОВ – кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник Научно-образовательного центра Тольяттинского государственного университета.

Константин Валерьевич ПАХОМОВ – младший научный сотрудник Управления научных исследований Ульяновского государственного университета.

Ольга Алексеевна ПЕРЕГУДОВА – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры Информационной безопасности и теории управления Ульяновского государственного университета.

Андрей Владимирович СОКОЛОВ – доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института прикладных математических исследований Карельского научного центра Российской академии наук, профессор кафедры Информатики и математического обеспечения Петрозаводского государственного университета.

Геннадий Анатольевич УГОЛЬНИЦКИЙ – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой Прикладной математики и программирования Южного федерального университета (г. Ростов-на-Дону).

Артур Владимирович ЮЛДАШЕВ – старший преподаватель кафедры Высокопроизводительных вычислительных технологий и систем Уфимского государственного авиационного технического университета.

---

---

## ABOUT THE AUTHORS

Alexander S. ANDREEV – doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of Department “Information Security and Control Theory”, Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia).

Andrew V. DRAC – post-graduate student, junior researcher of Institute of Applied Mathematical Research of Karelian Research Centre of Russian Academy of Sciences (Petrozavodsk, Russia).

Ilyas I. GAZIZOV – undergraduate student, Faculty of General Science, Ufa State Aviation Technical University (Ufa, Russia).

Olga I. GORBANEVA – candidate of physical and mathematical sciences, senior lecturer of Department “Applied Mathematics and Programming”, South Federal University (Rostov-on-Don, Russia).

Shamil T. ISHMUKHAMEDOV – doctor of physical and mathematical sciences, professor of Department “System Analysis and Information Technologies”, Kazan Federal University (Kazan, Russia).

Dmitriy V. IVANOV – candidate of physical and mathematical sciences, doctoral student of Department “Mechatronics in automated factories”, Samara State University of Railways (Samara, Russia).

Andrey V. KATS – post-graduate student of Department “Applied Mathematics and Informatics”, Togliatti State University (Togliatti, Russia).

Boris F. MELNIKOV – doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of Department “Applied Mathematics and Informatics”, Togliatti branch of Samara State University (Togliatti, Russia).

Bulat G. MUBARAKOV – post-graduate student of Department “System Analysis and Information Technologies”, Kazan Federal University (Kazan, Russia).

Yuri S. NAGORNOV – candidate of physical and mathematical sciences, senior researcher of Scientific Educational Center, Togliatti State University (Togliatti, Russia).

Guennady A. OUGOLNITSKY – doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of Department “Applied Mathematics and Programming”, South Federal University (Rostov-on-Don, Russia).

Konstantin V. PAHOMOV – junior researcher of Department of Scientific Research, Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia).

Olga A. PEREGUDOVA – doctor of physical and mathematical sciences, associated professor of Department “Information Security and Control Theory”, Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia).

Andrey V. SOKOLOV – doctor of physical and mathematical sciences, professor, leading researcher of Institute of Applied Mathematical Research of Karelian Research Centre of Russian Academy of Sciences, professor of Department “Computer science”, Petrozavodsk State University (Petrozavodsk, Russia).

Artur V. YULDASHEV – senior lecturer, High-Performance Computing Department, Ufa State Aviation Technical University (Ufa, Russia).