ПРЕДСТАВЛЕНИЯ БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ О ПРОЦЕССЕ РЕШЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Фалилеева Марина Викторовна, к.п.н.
Казанский (Приволжский) федеральный университет
mmwwff@yandex.ru
Чошанов Мурат Аширович, Ph.D., профессор
Техасский университет Эль-Пасо
mouratt@utep.edu

Аннотация: В статье рассмотрено понятие «решение математической задачи». В соответствии с выявленными характеристиками и структурой понятия проведен эксперимент по изучению представлений студентов о решении математической задачи. В эксперименте приняли участие студенты педагогического отделения 2 курса, обучающиеся по направлению «Математика, информатика и информационные технологии».

Ключевые слова: решение математической задачи, этапы решения математической задачи, репродуктивный уровень усвоения, продуктивный уровень усвоения.

Abstract: The article deals with the concept of "solving mathematical problems." In accordance with the identified characteristics and the structure of the concept, we conducted an experiment to study pre-service teachers' understanding and perception of the problem solving process. Participants were drawn from the pedagogical department and consisted of 2nd year students studying Mathematics, Computer Science and Information Technology.

Keywords: mathematical problem solving, process of problem solving, reproductive level, productive level.

Сформировать у учащихся умение решать математические задачи – это ключевая задача учителя на уроке математики. Данная проблема активно обсуждалась в 20-м веке, она не потеряла своей актуальности и в новом 21-м веке. Более того, технологии информационного века в чем-то усложнили ее решение. Если в 20 веке только сам учащийся, рядом находящиеся педагоги, книги и одноклассники могли помочь учащемуся в решении задач, то сейчас существует информационная доступность к решениям задач посредством интернета («решебники», поиск решений задач в интернете, обращение к более широкому кругу специалистов, учащихся и др.). Пользуясь новыми техническими средствами в нахождении готовых решений математических задач, учащиеся и студенты могут не надеяться на свои силы в решении математических задач, что значительно снижает уровень самостоятельной учебной деятельности. В свою очередь, понижение ответственности, самостоятельности, волевых проявлений учащихся при решении математических задач не возместишь даже значительным повышением качества урока. Это показывает и ежегодное снижение качества результатов единого государственного экзамена в России. Данная проблема стала настолько актуальной, что Правительством РФ 24 декабря 2013 года была утверждена Концепция развития математического образования в Российской Федерации [4].

Прежде чем ответить на вопрос, как научить учащихся и студентов решать математические задачи, обратимся к понятию «решение математической задачи». Так, Д. Пойа определяет решение: 1) в чисто математическом смысле (любой объект, удовлетворяющий условию «задачи на нахождение»), 2) как «процесс решения задачи», 3) «работа, проведенная при решении задачи» (в случае, если задача вызывает затруднение), 4) «результат работы, проделанной при решении задачи». При этом отмечает, что «может случиться, что в одном предложении приходится говорить о значении, удовлетворяющем условии задачи, о работе, проделанной при получении его, и о результате этой работы» [5, С. 197]. Фридман Л. и Турецкий Е. определяют «решение задачи» в трех аспектах. Они отличают *процесс решения задачи* и входящий в него этап – *решение задачи*, каждый из которых имеет сущность и структуру. Решение задачи – это «нахождение последовательности общих положений математики (определений, аксиом, теорем, правил, законов, формул), применяя которые к условиям задачи или к их следствиям (промежуточным результатам решения), получаем то, что требуется в задаче, - ее ответ» [7, С. 25]. Выделяется «*решение задачи*» как ответ, удовлетворяющийусловиям задачи [7, С.37]. Известно, что в математике говорят «найдено одно решение», «нет решения», «найдено два решения» и т.п. Такая неопределенность может создавать в математической деятельности обучаемого подмену различных трактовок понятия «решение математической задачи» друг другом. Например, часто задание «решить задачу» учащиеся воспринимают как задание «найти ответ», — что сужает обучающую функцию задачи и может ее полноценное решение свести к угадыванию ответа или его нахождению иными средствами (в интернете, в «решебнике», решение задачи другим человеком).

Дальнейший анализ научных и методических материалов показал, что основополагающим трудом для многих российских методистов при работе с математическими задачами является труд Д.Пойа [5], который предлагает использовать при решении задач таблицу «Как искать решение?». Пойа рекомендует использовать данную таблицу в обучении решению задач совместно с учителем, далее учащимся пользоваться ей самостоятельно. В таблице выделено четыре основных этапа:

1) Понять предложенную задачу.
2) Найти путь от неизвестного к данным, если нужно, рассмотрев промежуточные задачи («анализ»).
3) Реализовать найденную идею решения («синтез»).
4) Решение проверить и оценить критически [5, С.204].

На какие структурные элементы математической задачи и их свойства на 1-ом этапе обращает внимание Д. Пойа: содержание задачи, условие, заключение, определенность неизвестного условием задачи (избыточность, недостаточность данных), переформулировка, взаимосвязь с другими задачами (простыми, с известным решением, типовой).

Какие способы действий, приемы работы с математической задачей предлагает на этапе анализа: сформулировать отношения между известными данными и искомым; преобразование искомого или его замена на неизвестную, связанную с данными; решение части задачи (подзадачи); решение задачи при исключении отдельных данных; рассмотреть частные случаи; провести аналогию.

На этапе синтеза Пойа приводит слова Р. Декарта и Б. Паскаля, описывающие две рекомендации. Первая – обосновано строить каждый шаг решения, вторая – заменить термины их определениями.

На этапе проверки и оценки Пойа предлагает проверить правдоподобность результата, осуществить проверку, поискать другие способы решения (альтернативные или более рациональные), обратить внимание на интересные факты «сопутствующие» найденному решению.

Пойа выделил некоторые условия для организации процесса обучения учащихся решению математических задач. Например, учитель должен пробудить интерес учащихся к задачам и обеспечить широкие возможности для подражания и приобретения опыта [5, С. 15].

Фридман Л. и Турецкий Е. определяют цель обучения решению задач — «надо научиться такому подходу к задаче, при котором задача выступает как объект тщательного изучения, а ее решение – как объект конструирования и изобретения» [7, С. 5], и выделяют структуру процесса решения задачи. По примеру Пойа, Фридман и Турецкий предлагают использовать ее при решении любой задачи:

1) анализ задачи, в который включены расчленение задачи на отдельные условия и требования (заключение), выделение объектов и их характеристик в условиях;

2) схематическая запись задачи, в частности, использование чертежей для схематической записи задачи;

3) поиск способа (плана) решения задачи (распознавание вида задач, сведение задачи к ранее решенным);

4) осуществление (изложение) решения;

5) проверка решения задачи;

6) исследование задачи;

7) формулирование ответа задачи;

8) анализ решения, в частности, установление иных способов решения задачи, возможного обобщения задачи, выводов из решения задачи.

По сравнению с таблицей Д. Пойа предлагаемые этапы процесса решения математической задачи больше акцентированы на научно-исследовательский характер работы с задачей. Хорошо показано выделение объектов и их характеристик в условии и заключении задачи, что позволяет учителю или учащемуся с большим пониманием проводить анализ задачи. Отмечается, что при фактическом решении выделенные этапы иногда тесно переплетаются друг с другом, могут меняться друг с другом [7, С. 35]. В этом случае существуют процессы, сопровождающие все этапы решения задачи. Например, опираясь на характеристику С.Л. Рубинштейна о решении задачи человеком как о процессе переформулирования, в котором непрерывно производится анализ условий и требований задачи через синтетический акт их соотнесения [7, С. 67], Фридман и Турецкий представляют процесс моделирования в процессах решения задач [7, С. 69].

Самые простые задачи требуют реализации не всех, но нескольких этапов. Например, чтобы использовать подходящий метод решения при решении квадратного уравнения, на этапе анализа достаточно определить вид данного уравнения. Таким образом, показаны простейшие структуры процесса решения типовых (стандартных) задач, которые оформляются в виде правил, алгоритмов. Стандартные задачи отличаются от нестандартных тем, что уже существуют правила, пользуясь которыми можно найти последовательность шагов для решения задачи данного вида [7, С. 38]. Для нестандартных задач в курсе математики не представлено «общих правил и положений, определяющих точную программу их решения» [7, С. 45]. Пойа определяет типовую задачу, как задачу, решаемую «или путем подстановки частных данных в ранее решенную задачу общего вида, или по образцу часто встречающегося примера, повторяя шаг за шагом решение, лишенное всякой оригинальности» [5, С. 197-198], и свою таблицу предназначает для задач, вызывающих затруднение в решении. Следует отметить, что большая часть российских методистов придерживались такого подхода Пойа, т.е. создавали свои рекомендации для решения нестандартных математических задач, но каждый пытался определить эти задачи по-своему. «Нестандартная задача – это задача, решение которой для данного ученика не является известной цепью известных действий» [3, С. 26], и, «следует подчеркнуть, что, овладев общими методами и приемами, часто приводящими к решению задач, мы вовсе не превращаем эти задачи в стандартные, так как метод в корне отличен от алгоритмов, которым решаются стандартные задачи» [3, С. 27]. Колягин Ю.М. обращает внимание на интуицию учащихся при решении нестандартных задач, характеризующуюся свернутостью к обобщению [3, С. 28], тщательное и грамотное выполнение чертежей, рисунков и схем в соответствии с условием задачи [3, С. 32].

Российские методисты Колягин Ю.М., Саранцев Г.И., Виноградова Л.В., Подходова Н.С., Стефанова Н.Л. и др. рекомендуют в своих учебно-методических пособиях будущим учителям математики четыре этапа по Пойа. Опираясь на Д. Пойа, Ю.М. Колягина, Л.М. Фридмана и Е. Турецкого, профессор Иванова Т.В. предлагает вырабатывать умение решать задачи через последовательное и целенаправленное формирование у учащихся следующих умений:

1) Анализировать условие задачи: выделять данные, требования, соотносить данные с требованиями;
2) Устанавливать круг теоретических положений, которые ассоциируются у школьников с каждым элементом условия и требования.
3) Выводить следствия и подводить под понятие, преобразовывать теоретические положения (аксиомы, определения понятий, формулировки теорем) в способы деятельности, в эвристические приемы, создавать и пользоваться эвристиками.
4) Владеть способами решения исходных стандартных, опорных, обучающих и т.д. задач, к которым сводится решение неалгоритмических задач.
5) Составлять новые задачи, осуществлять варьирование задачи на основе: изменения условия задачи; изменения требования задачи; замены данной задачи ей эквивалентной; формулировки обратной задачи; обобщения и конкретизации; использования результата решения известных задач.
6) Владеть методами математической деятельности: общими эвристическими и дедуктивными; специфическими, характерными для конкретной учебной темы; анализом и синтезом.
7) Решать задачи разными методами [2].

Шестакова Л.Г. так же опираясь на Пойа, обращает внимание на различные приемы, повышающие, по ее мнению, эффективность процесса решения задач. Например, на пути осуществления анализа (от условия к заключению, от заключения к условию, движение от условия и заключения в точку встречи) и для каждого случая предлагает блок-схемы для осуществления поиска решения [9, С. 14].

Мы считаем, что решение задачи и работа с ней зависит от уровня ее усвоения [2, С. 54]. Задачи репродуктивного («ученического» и типового) и продуктивного (нетипового и творческого) уровней усвоения имеют различные подходы в процессе решения, поскольку они отличаются наличием неопределенности в различных элементах своей структуры. В задачах ученического уровня заданы цель, ситуация и действия по ее решению, а от учащегося требуется дать заключение о соответствии всех трех компонентов; в типовых задачах заданы цель и ситуация, а от учащегося требуется применить ранее усвоенные действия по ее решению [1, С. 55]. В задачах продуктивного уровня усвоения либо цель, либо ситуация неопределенны, а действия по решению задачи неизвестны. При этом уровень усвоения – это как объективный, так и субъективный показатель, поскольку опирается на опыт учебно-познавательной деятельности. Учащиеся и студенты большей частью решали математические задачи репродуктивного уровня, поэтому пытаются, исходя из такого опыта, решать задачи продуктивного уровня усвоения. Такой подход приводит к неудаче в решении математических задач продуктивного уровня усвоения.

Отметим, что вышеперечисленные работы российских специалистов в области решения математических задач основаны на анализе литературы, наблюдениях за учащимися, личном жизненном опыте, но в них не приведено экспериментальных данных, показывающих эффективность внедрения идей по обучению решению математических задач.

Первой задачей нашего исследования стало установление взаимосвязи между методологическими представлениями студентов педагогического отделения с уровнем их практических умений по решению задач продуктивного уровня усвоения по классификации В.П. Беспалько. Вторая задача – это понять, соответствуют ли представления студентов, занимающихся математикой, рекомендациям Пойа, Фридмана и др. Эксперимент был проведен со студентами 2 курса, обучающимися по направлению «Математика, информатика и информационные технологии» педагогического отделения Института математики механики Казанского федерального университета. В эксперименте согласились принять участие 19 студентов, которые четыре месяца изучали курс элементарной математики «Уравнения и неравенства с параметром» (преподаватель Фалилеева М.В.). В соответствии с образовательной программой по данному направлению, студенты 2-го курса пока не изучали курс «Методика обучения математики» и не были знакомы с понятиями «математическая задача», «процесс решения математической задачи», «классификация и виды математических задач» и др.

На первом этапе эксперимента мы попросили в течение 20 минут написать небольшое эссе по теме: «Как я рассуждаю, когда решаю математическую задачу?».

На втором этапе (после того, как сочинения были собраны) студентам была предложено в течение 40 минут решить задачу: «При каких значениях параметра a уравнение $ax - 2 = |x - 2|$ имеет одно решение». Отметим, что ранее в учебном курсе были изучены темы и выполнены самостоятельные работы по темам «Линейные уравнения с параметром» (рассматривались уравнения вида $ax - 2x = 4a$, $(a^2 - 5a + 6)x = a^2 - 4$ и др.), «Решение простейших линейных уравнений и неравенств с параметром, содержащих модуль» (рассматривались уравнения вида $|x - 2a| = a - 2$). Предложенная задача не являлась типовой для данного курса, но синтезировала основные идеи, изложенные на данных занятиях и представленные в индивидуальных заданиях студентов.

На третьем этапе было предложено снова написать небольшое эссе на тему: «Как я рассуждал(а) при решении предложенной задачи».

Анализ первого эссе показал, что в целом все этапы в процессе решения математической задачи, указанные студентами, можно разделить на:

1) использование дополнительных источников (обращение к справочникам, учебникам, интернету; обращение в чатах, сообществах помочь в решении задачи);
2) анализ условия (выделение данных и условия; отнесение задачи к определенному разделу математики, теме, виду задач; «выделение математических данных» из «легенды» задачи (моделирование), выявление структуры; переформулирование; внимательное и неоднократное прочтение условия задачи, составление краткой записи; оценка уровня сложности; изображение схемы, графика по условию задачи);
3) решение задачи (рассмотрение всевозможных способов решения; использование ранее изученного теоретического материала; обращение к собственным знаниям и их применение; разбор аналогичных задач; определение метода решения; построение алгоритма решения);
4) нахождение и проверка ответа (выдвижение гипотезы ответа);
5) методические указания общего характера (обязательно нужно решать до конца; «любую задачу можно решить»);
6) описание личного или рекомендуемого психологического состояния при решении задачи (концентрация на задаче; спокойствие; «испытываю сомнение при правильном решении трудной задачи»).

Главное внимание студентов было сосредоточено на 2 и 3 этапах (все студенты тем или иным образом включили в эссе действия, представляющие эти этапы). Если рассматривать каждое эссе отдельно, то можно сделать вывод, что был описан опыт решения типовых математических задач. Поэтому второй этап эксперимента создал некоторые трудности в существующих представлениях студентов о решении математической задачи.

Расчет при подготовке задачи был таким, чтобы она вызвала затруднение у студентов, но при этом у них были все необходимые теоретические сведения и практические умения в решении простейших уравнений с параметром. Решение предложенной задачи требовало от студента умения синтезировать и обобщить в решении одной математической задачи теорию и практические умения по различным изученным темам. Предложенную задачу решали все (составляли совокупности, системы, решали частные случаи, неравенства с модулями и др.), но она же вызвала затруднения у всех студентов. В результате 42% студентов указали в ответе часть верного ответа, около 34% не предоставили ответа, у остальных ответ был неверным.

На первом этапе эксперимента студенты достаточно подробно и уверенно делились опытом о том, как они решают задачи. Например, были такие эссе: «При решении математических задач я начинаю исследовать, как этот пример построен. Если у меня не выходит, то обращаюсь к справочникам и учебникам или, в крайнем случае, пишу интернете. Некоторые задачи и примеры на вид кажутся тяжелыми, а на самом деле выходит, так, что их решение очень даже простое, хотя заметить это сразу не получается. Иногда, когда решаю задачи, и, когда из сложного примера очень быстро выходит ответ, то я сижу в сомнении, - правильно ли сделала этот пример? Но для этого, конечно, есть проверки, которыми можно воспользоваться. Но одно могу сказать – нет такой задачи, которую невозможно решить. Просто нужно найти способ к этому примеру и заканчивать дело до конца». После подобных эссе складывается представление, что сейчас, в соответствии с ним, и будет решена предложенная задача. Студентка, написавшая представленное эссе, не справилась с решением задачи даже на половину, хотя она могла пользоваться учебной тетрадью, учебно-методическим пособием, интернетом. Было интересно, как она опишет процесс решения предлагаемой задачи с параметром: «Когда я увидела пример, то начала задумываться, каким же методом он решается. Подумав, я вспомнила, что на занятии мы прорешивали похожий пример. Тогда я начала вспоминать, как он решается. Я начала подставлять числа вместо параметра «*a*», чтобы найти решение. Начала решать по алгоритму, который мы записали на уроке, но не решила этот пример до конца, так как не очень поняла, как он решается, но попыталась». Отсюда можно сделать вывод, что в опыте студентов этапы решения задачи по Пойа, Фридману и др. представлены не полностью, т.е. в виде, необходимом для решения задач репродуктивного уровня усвоения.

Список литературы

1. Беспалько В.П. Слагаемые педагогической технологии [Текст]. – М.: Педагогика, 1989. – 192 с.
2. Иванова Т.А. Технология обучения школьников решению математических задач [Текст]// Задачи в обучении математике: теория, опыт, инновации. Материалы Всероссийской научно-практической конференции, посвященной 115-летию член.-корр. АПН СССР П.А. Ларичева. – Вологда: Русь, 2007.
3. Колягин Ю. М. Задачи в обучении математике [Текст] В 2-х ч. / Ю. М. Колягин. – М.: Просвещение, 1977. –Ч. 2. – 144 с.
4. Концепция развития математического образования в Российской Федерацииот 24 декабря 2013 года [Электронный ресурс]. –Режим доступа: http://минобрнауки.рф/%D0%B4%D0%BE%D0%BA%D1%83%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D1%82%D1%8B/3894
5. Пойа Д. Как решать задачу [Текст]: пособие для учителей / Д. Пойа; пер. В. Г. Звонарева, Д. Н. Белл; ред. Ю.М. Гайдук. – Издание 2-е. – Москва: ГУПИ Министерства просвещения РСФСР, 1961. – 208 с.
6. Попов Н.И., Марасанов А.Н. Использование специальной методики при обучении решению математических задач [Текст] // Вестник МГОУ. Серия: Педагогика. – 2014. - № 1. – С. 86-89.
7. Фридман Л.М. Как научиться решать задачи [Текст]: Пособие для учащихся / Л.М. Фридман, Е.Н. Турецкий. – М.: Просвещение, 1984. – 175 с.
8. Шелехова Л.В. Стратегия обучения решению математических задач [Текст]// Вестник Адыгейского государственного университета. Серия 3: Педагогика и психология. – 2011. - № 2. – С. 171-175.

9. Шестакова Л.Г. Методика обучения школьников работать с математической задачей [Текст]: учебное пособие для студентов / Л.Г. Шестакова; ФГБОУ ВПО «Соликамский государственный педагогический институт». – Соликамск, 2013. – 2013. – 106 с.