Известия вузов. Математика
2015, №2, с. 70–75

http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Б.А. КАЦ, С.Р. МИРОНОВА, А.Ю. ПОГОДИНА

ЗАДАЧА О СКАЧКЕ НА КОНТУРЕ С ПРЕДЕЛЬНЫМ КОНТИНУУМОМ

Аннотация. В работе получено условие разрешимости краевой задачи о восстановлении голоморфной функции по заданному ее скачку на контуре с предельным континуумом. Примером такого контура может служить график функции $y = \sin \frac{\pi}{x}$, $0 < x \leq 1$, предельным континуумом которого служит отрезок $[-i, i]$ мнимой оси.

Ключевые слова: контур с предельным континуумом, аналитическая функция, краевая задача о скачке.

УДК: 517.544

1. Введение Задача о скачке — это одна из классических краевых задач для аналитических функций (например, [1]–[3]). Для разомкнутых кривых эта задача ставится так. Пусть Γ — простая ориентированная жорданова дуга на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с началом в точке a_1 и концом в точке a_2. Требуется найти аналитическую в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ функцию $\Phi(z)$ такую, что

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = f(t), \quad t \in \Gamma \setminus \{a_1, a_2\},$$

где $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ — предельные значения $\Phi(z)$ при приближении z к точке $t \in \Gamma \setminus \{a_1, a_2\}$ слева и справа от Γ соответственно, f — заданная на $\Gamma \setminus \{a_1, a_2\}$ функция, $\Phi(\infty) = 0$, а вблизи концов a_1, a_2 искомая функция Φ удовлетворяет каким-либо ограничениям на ее рост (обычно она предполагается ограниченной или интегрируемой в окрестностях этих точек). В упомянутых выше монографиях [1]–[3] эта задача решена для кусочно-гладких дуг Γ. Рядом авторов исследовалась эта задача для негладких спрямляемых кривых (библиография в [4], [5]). Затем [6], [7] она была решена для неспрямляемых жордановых дуг. Однако метод, предложенный в работах [4]–[7], существенно опирается на предположение о том, что дуга Γ жорданова. Как сейчас увидим, задача о скачке сохраняет смысл и для контуров, которые не являются жордановыми кривыми. Метод из работ [4]–[7] не может быть здесь применен, однако на эти контуры можно распространить метод, предложенный авторами в работах [8], [9]. Это и делается в данной работе.

Теперь опишем класс контуров, с которыми будем иметь дело. Жорданова дуга определяется как образ отрезка при непрерывном взаимно однозначном отображении. Отображение $\phi(x) := x + i \sin \frac{\pi}{x}$ полуинтервала $I = (0, 1]$ является взаимно однозначным, но оно не может быть непрерывно продолжено в точку 0, так что его образ Γ_0 — график функции $y = \sin \frac{\pi}{x}$,

Поступила 01.10.2013

Исследования первого автора выполнены при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты №№ 12-01-00636а, 12-01-07015-р_поволжье_а, 13-01-00322а.

$0 < x \le 1$, не является жордановой кривой. Это связано с наличием у Γ_0 предельного континуума — отрезка $I^* = [-i, i]$ мнимой оси. Ориентируясь на этот пример, введем класс контуров NJ, обладающих следующими свойствами:

— контур $\Gamma_0 \in NJ$ есть множество точек правой полуплоскости такое, что для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ пересечение $\Gamma_0 \cap \{z = x + iy : x > \varepsilon\}$ непусто и является простой жордановой кусочно-гладкой дугой с концом в точке b (начало этой дуги $a(\varepsilon)$ лежит на прямой $\operatorname{Re} z = \varepsilon$);

— множество $\overline{\Gamma_0} \setminus \Gamma_0$ представляет собой не сводящийся к точке отрезок I^* мнимой оси;

— существует прямолинейный отрезок I (остов Γ_0) с началом в одной из точек отрезка I^* и концом в точке b такой, что $\Gamma_0 \bigcup I$ можно представить в виде объединения бесконечного семейства простых замкнутых кусочно-гладких кривых, являющихся границами не налегающих друг на друга конечных областей (эти замкнутые кривые могут быть ориентированы как в положительном, так и в отрицательном направлении).

Так, для приведенного выше примера в качестве остова I можно взять отрезок вещественной оси $[0, 1]$. При этом возникает два семейства областей $\Delta_n^+ := \big\{z = x+iy : \frac{1}{2n} < x < \frac{1}{2n-1}, 0 < y < \sin\frac{\pi}{x}\big\}$, $n = 1, 2, \dots$, и $\Delta_n^- := \big\{z = x+iy : \frac{1}{2n+1} < x < \frac{1}{2n}, \sin\frac{\pi}{x} < y < 0\big\}$, $n = 1, 2, \dots$. Множество $\Gamma_0 \bigcup I$ представимо в виде объединения границ всех этих областей, но при этом границы областей Δ_n^+ обходятся по часовой стрелке, а границы Δ_n^- — против часовой стрелки.

В следующем пункте опишем основные результаты, пункт 3 посвящен их доказательству, а пункт 4 — построению семейства примеров.

2. Основные результаты. Сформулируем задачу о скачке на контуре $\Gamma_0 \in NJ$; при этом будем считать, что он направлен от своего предельного континуума I^* к концу b в правой полуплоскости. Отыскиваем все аналитические в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\Gamma_0}$ функции $\Phi(z)$ такие, что

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = f(t), \quad t \in \Gamma_0 \setminus b, \tag{1}$$

где $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ — предельные значения $\Phi(z)$ при приближении z к точке $t \in \Gamma_0 \setminus b$ слева и справа от Γ_0 соответственно, f — заданная на $\Gamma_0 \setminus b$ функция, $\Phi(\infty) = 0$, а вблизи конца b искомая функция $\Phi(z)$ допускает оценку

$$|\Phi(z)| \le C|z - b|^{-\beta}, \quad \beta = \beta(\Phi) \in [0, 1). \tag{2}$$

Относительно скачка $f(t)$ будем предполагать, что он удовлетворяет условию Гёльдера с некоторым показателем $\nu \in (0, 1]$ на замыкании $\overline{\Gamma_0}$, т. е.

$$\sup\left\{\frac{|f(t') - f(t'')|}{|t' - t''|^\nu} : t', t'' \in \overline{\Gamma_0}, \quad t' \ne t''\right\} = h_\nu(f) < \infty.$$

Обозначим множество всех удовлетворяющих этому условию функций через $H_\nu(\overline{\Gamma_0})$.

Отметим, что если Φ_0 — какое-то решение этой задачи, то ее решением будет и каждая функция вида $\Phi_0 + F$, где функция F аналитическая в $\overline{\mathbb{C}} \setminus I^*$ и исчезает в бесконечно удаленной точке. Поэтому имеет смысл говорить главным образом о существовании решения, но не о его единственности. Для выяснения вопроса о единственности ниже наложим на решение дополнительное ограничение.

Воспользуемся следующими характеристиками контура [8], [9]. С каждой конечной областью Δ, ограниченной кривой γ нулевой площади, свяжем величины

$$S_\alpha(\Delta) := \iint_\Delta \frac{dx\,dy}{(\operatorname{dist}(z, \gamma))^\alpha}, \quad z = x + iy, \quad \alpha \in [0, 1),$$

названные в [8] $\alpha-$размерами этой области. По определению класса NJ контур Γ_0 имеет остов I такой, что $\Gamma_0 \bigcup I$ можно представить в виде объединения бесконечного семейства простых замкнутых кусочно-гладких кривых, являющихся границами не налегающих друг на друга конечных областей Δ_j, $j = 1, 2, \dots$. Рассмотрим величины

$$S_\alpha(\Gamma_0, I) := \sum_{j=1}^{\infty} S_\alpha(\Delta_j),$$

зависящие, вообще говоря, от выбора остова. Будем относить контур $\Gamma_0 \in NJ$ к подклассу NJ_α, если его остов I можно выбрать так, чтобы $S_\alpha(\Gamma_0, I) < \infty$. Очевидно, $S_0(\Gamma, I)$ есть сумма площадей областей Δ_j, поэтому $NJ_0 = NJ$.

Сформулируем основные результаты работы.

Теорема 1. *Пусть функция f принадлежит классу $H_\nu(\overline{\Gamma_0})$. Если $\Gamma_0 \in NJ_{1-\nu}$, то задача о скачке* (1), (2) *имеет решение. В частности, при $f \in H_1(\overline{\Gamma_0})$ задача разрешима для любого контура $\Gamma_0 \in NJ$.*

Далее, будем называть решение Φ задачи (1), (2) непрерывным, если функция $\Phi(z)$ непрерывна на предельном континууме I^*.

Теорема 2. *Пусть функция f принадлежит классу $H_\nu(\overline{\Gamma_0})$, $\nu > 1/2$, и исчезает на предельном континууме I^*. Если $\Gamma_0 \in NJ_\alpha$ при $\alpha > 2(1-\nu)$, то задача о скачке* (1), (2) *имеет единственное непрерывное решение. В частности, если исчезающая на отрезке I^* функция f удовлетворяет условию Гёльдера с показателем* 1, *то эта задача имеет единственное непрерывное решение для любого контура $\Gamma_0 \in NJ$.*

3. Доказательства. Пусть Γ_0 — контур класса NJ, I — его остов, а множество $\Gamma_0 \bigcup I$ представимо в виде объединения границ γ_j попарно не налегающих конечных областей Δ_j. Положим $\sigma_j = +1$, если γ_j ориентирована положительно относительно Δ_j, и $\sigma_j = -1$ в обратном случае. Продолжим функцию $f \in H_\nu(\overline{\Gamma_0})$ на всю комплексную плоскость с помощью оператора продолжения Уитни (например, [10]), сохраняя за продолженной функцией обозначение f. Эта функция удовлетворяет во всей комплексной плоскости условию Гёльдера с тем же показателем ν и тем же коэффициентом $h_\nu(f)$. Обозначим $f_j := f|_{\gamma_j}$; очевидно, $f_j \in H_\nu(\gamma_j)$ и $h_\nu(f_j) \le h_\nu(f)$, $j = 1, 2, \dots$. Рассмотрим на кусочно-гладкой замкнутой кривой γ_j задачу о скачке

$$\Phi_j^+(t) - \Phi_j^-(t) = f_j(t), \quad t \in \gamma_j.$$

Ее решением с учетом ориентации γ_j является интеграл типа Коши (например, [1]–[3])

$$\Phi_j(z) = \frac{\sigma_j}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{f_j(t)dt}{t - z}.$$

Для доказательства теоремы 1 остается установить сходимость ряда

$$\Psi(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \Phi_j(z)$$

при $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\Gamma_0}$. Для этого повторно применим оператор продолжения Уитни к каждой из функций f_j, сохраняя за продолженной функцией прежнее обозначение, и воспользуемся формулой Бореля–Помпейю (например, [11]). В результате этот ряд получает представление

$$\Psi(z) = \psi(z) - \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial \psi}{\partial \overline{\zeta}} \frac{d\zeta d\overline{\zeta}}{\zeta - z}, \quad \psi(z) := \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j f_j(z) \chi_j(z), \tag{3}$$

где $\chi_j(z)$ — характеристическая функция области Δ_j, т. е. она равна единице в этой области и нулю вне ее. Таким образом, задающая функцию $\psi(z)$ сумма локально конечна.

Далее, в силу известных свойств продолжения Уитни (например, [10])

$$\left|\frac{\partial f_j}{\partial \overline{z}}\right| \leq \frac{h_\nu(f)}{(\mathrm{dist}(z,\gamma_j))^{1-\nu}}.$$

Отсюда

$$\left|\frac{\partial \psi}{\partial \overline{z}}\right|^p \leq \frac{h_\nu^p(f)\chi(z)}{(\mathrm{dist}(z,\Gamma_0\bigcup I))^{p(1-\nu)}}, \tag{4}$$

где $\chi(z) := \sum\limits_{j=1}^{\infty}\chi_j(z)$ — характеристическая функция множества $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}\Delta_j$. Полагая здесь $p=1$, убеждаемся в интегрируемости производной $\frac{\partial\psi}{\partial\overline{z}}$ при $\Gamma_0 \in NJ_{1-\nu}$. Значит, при этом условии интеграл в (3) сходится, и эта формула дает аналитическую в $\overline{\mathbb{C}}\setminus(\Gamma_0\bigcup I)$ функцию, исчезающую в бесконечно удаленной точке. В точках контура Γ_0 она имеет заданный скачок f, а в точках остова I — скачок, равный продолжению Уитни f (напомним, что за продолженным скачком сохранено обозначение f). Поэтому разность

$$\Phi(z) = \Psi(z) - \frac{1}{2\pi i}\int_I \frac{f(t)dt}{t-z} \tag{5}$$

является решением задачи (1), (2). Теорема 1 доказана.

Покажем теперь, что при условиях теоремы 2 решение (5) будет непрерывным. Величину p в оценке (4) выберем так, что $p>2$ и $p(1-\nu)<\alpha$. Тогда при $\Gamma_0 \in NJ_\alpha$ производная $\frac{\partial\psi}{\partial\overline{z}}$ интегрируема в степени $p>2$, и интегральное слагаемое в (3) представляет функцию, непрерывную во всей комплексной плоскости (например, [11]). Непрерывность внеинтегрального слагаемого на предельном континууме I^* следует из обращения там в нуль функции f. Тем самым доказано существование непрерывного решения. Если Φ_1 и Φ_2 — два таких решения, то их разность есть аналитическая во всей комплексной плоскости функция, равная нулю в бесконечности, т. е. тождественный нуль. Теорема 2 доказана.

Замечание. Ограничения на контуры в обеих теоремах могут быть ослаблены. Скажем, остов I может быть не прямолинейным отрезком, а кусочно-гладкой дугой. Полагаем, что в первой публикации по задаче о скачке на нежордановых контурах целесообразно ограничиться наиболее прозрачной ситуацией с прямолинейным отрезком.

4. Примеры. Рассмотрим следующее семейство контуров. Пусть $a=\{a_j\}$, $j=1,2,\ldots$, есть бесконечная убывающая последовательность положительных чисел, $a_1=1$, $\lim\limits_{j\to\infty}a_j=0$. Введем вторую последовательность чисел $b=\{b_j\}$ таких, что $0<b_j<a_j-a_{j+1}$, $j=1,2,\ldots$. Контур $\Gamma(a,b)$ состоит из вертикальных отрезков $[a_j,a_j+i]$, $[a_j-b_j,a_j-b_j+i]$, $j=1,2,\ldots$, и соединяющих их горизонтальных отрезков $[a_j+i,a_j-b_j+i]$ и $[a_{j+1},a_j-b_j]$, $j=1,2,\ldots$. Его предельный континуум есть отрезок $I^*=[0,i]$ мнимой оси, а в качестве остова можно использовать отрезок вещественной оси $I=[0,1]$. Тогда области Δ_j — прямоугольники $\{z=x+iy : a_j-b_j<x<a_j,\ 0<y<1\}$. Несложные вычисления показывают, что $S_\alpha(\Delta_j)\asymp b_j^{1-\alpha}$ при $\alpha<1$ и соответственно $S_\alpha(\Gamma(a,b),I)\asymp\sum\limits_{j=1}^{\infty}b_j^{1-\alpha}$.

Пусть, например, $a_j = c\sum_{n=j}^{\infty}\frac{1}{n^q}$, $q>1$, $c=\zeta^{-1}(q)$ (здесь ζ — дзета-функция Римана). Тогда $a_j - a_{j+1} = cj^{-q}$. Пусть $b_j = c'j^{-q}$, где $0<c'<c$. Отсюда $S_\alpha(\Gamma(a,b),I)\asymp\sum_{j=1}^{\infty} j^{-q(1-\alpha)}$, и эта величина конечна при $q(1-\alpha)>1$. Таким образом, при $\nu>q^{-1}$ выполнены условия теоремы 1, т. е. задача (1), (2) разрешима, а при $\nu>\frac{1+q^{-1}}{2}$ выполнены условия теоремы 2, т. е. эта задача имеет непрерывное решение и оно единственно.

Пусть $b_j = c'j^{-qk}$, $k>1$, при той же последовательности a. Тогда $S_\alpha(\Gamma(a,b),I)<\infty$ при $kq(1-\alpha)>1$, и условия теоремы 1 выполнены при $\nu>(kq)^{-1}$, а условия теоремы 2 при $\nu>\frac{1+(kq)^{-1}}{2}$.

Теперь рассмотрим последовательность $a_j=q^{-j+1}$, $q>1$. Здесь $a_j-a_{j+1}=(q-1)q^{-j}$. Положим $b_j=cq^{-j}$, $0<c<q-1$. Тогда $S_\alpha(\Gamma(a,b),I)\asymp\sum_{j=1}^{\infty} q^{-j(1-\alpha)}$, и эта величина конечна при $0<\alpha<1$. Поэтому условия теоремы 1 выполнены при любом $\nu\in(0,1]$, а условия теоремы 2 — при любом $\nu\in(1/2,1]$.

Тем самым показано, что условия теорем 1 и 2 допускают довольно простую проверку.

Литература

[1] Гахов Ф.Д. *Краевые задачи* (Наука, М., 1977).

[2] Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения* (Наука, М., 1962).

[3] Jian-Ke Lu. *Boundary value problems for analytic functions* (World Scientific, Singapore, 1993).

[4] Кац Б.А. *Краевая задача Римана на негладких дугах и фрактальные размерности*, Алгебра и анализ **6** (1), 172–202 (1994).

[5] Kats B.A. *The Riemann boundary value problem on non-rectifiable curves and related questions*, Complex Var. Elliptic Equ. **59** (8), 1053–1069 (2014).

[6] Кац Б.А. *Краевая задача Римана на неспрямляемой жордановой кривой*, ДАН СССР **267** (4), 789–792 (1982).

[7] Кац Б.А. *Задача Римана на замкнутой жордановой кривой*, Изв. вузов. Матем., № 4, 68–80 (1983).

[8] Кац Б.А., Миронова С.Р., Погодина А.Ю. *Об одном условии разрешимости задачи о скачке и ее приложениях*, Вестн. КГТУ им. А.Н. Туполева, № 4, 110–118 (2011).

[9] Kats B.A., Mironova S.R., and Pogodina A.Yu. *Краевая задача Римана–Гильберта для матриц на негладкой дуге*, Известия НАН Армении. Математика **47** (4), 15–22 (2012).

[10] Стейн И. *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций* (Мир, М., 1973).

[11] Векуа И.Н. *Обобщенные аналитические функции* (Наука, М., 1988).

Б.А. Кац

профессор, кафедра математического анализа,
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

`e-mail:` katsboris877@gmail.com

С.Р. Миронова

доцент, кафедра теоретической и прикладной механики и математики,
Казанский национальный исследовательский технический университет,
ул. К. Маркса, д. 10, г. Казань, 420111, Россия,

`e-mail:` srmironova@yandex.ru

А.Ю. Погодина

доцент, кафедра математической экономики,
Саратовский государственный университет,
ул. Астраханская, д. 83, г. Саратов, 410012, Россия,

`e-mail:` apogodina@yandex.ru

B.A. Kats, S.R. Mironova, and A.Yu. Pogodina

A problem on a jump on a contour with limit continuum

Abstract. We obtain a condition of resolvablity of boundary-value problem on restoring holomorphic function by a given jump on a contour with limit continuum. An example of such contour is a graph of the function $y = \sin\frac{\pi}{x}$, $0 < x \leq 1$, whose limit continuum is a segment $[-i, i]$ of imaginary axis.

Keywords: contour with limit continuum, analytic function, the jump boundary value problem.

B.A. Kats

Professor, Chair of Mathematical Analysis,
Kazan (Volga Region) Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

`e-mail:` katsboris877@gmail.com

S.R. Mironova

Associate Professor, Chair of Theoretical and Applied Mechanics and Mathematics,
Kazan National Research Technical University,
10 K. Marksa str., Kazan, 420111 Russia,

`e-mail:` srmironova@yandex.ru

A.Yu. Pogodina

Associate Professor, Chair of Mathematical Economics,
Saratov State University,
83 Astrakhanskaya str., Saratov, 410012 Russia,

`e-mail:` apogodina@yandex.ru