Подготовка к коллоквиуму по теме «Интегралы»

ЗАДАЧИ С КОНКРЕТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

Составление интегральных сумм

Задание 1. Постройте последовательность интегральных сумм функции $f(x) = \frac{1}{x+1}$ на отрезке $[0;\ 1]$ с мелкостью, стремящейся к 0.

Решение. Рассмотрим равномерное разбиение отрезка на n частей точками $\frac{i}{n}, i = 0, 1, \dots, n$. Все отрезки этого разбиения имеют длину $\Delta x_i = \frac{1}{n}, i = 1, 2, \dots, n$. Соответственно, и мелкость разбиения равна $\frac{1}{n}$.

В качестве разметки выберем правые концы отрезков, $\xi_i = \frac{i}{n}, i = 1, 2, \dots, n$. Имеем

$$f(\xi_i) = \frac{1}{\xi_i + 1} = \frac{1}{\frac{i}{n} + 1} = \frac{n}{i + n}$$

Интегральная сумма для такого разбиения и разметки равна

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{n}{i+n} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}$$

Вычислим интеграл по формуле Ньютона-Лейбница.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+1} = \ln(x+1)|_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

Но интеграл – это предел интегральных сумм. Значит,

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}\right) = \ln 2$$

Задание 2. Найдите предел последовательности

$$b_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n^2+i^2} = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+4} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}$$

Решение. В этой последовательности не только увеличивается число слагаемых, но и каждое из них меняется с ростом n. Попробуем представить член последовательности как интегральную сумму.

$$\frac{n}{n^2+i^2} = \frac{n^2}{n^2+i^2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2} \cdot \frac{1}{n} = f\left(\frac{i}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}$$

где $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Значит, b_n – интегральная сумма этой функции на отрезке $[0;\ 1]$. Предел этой последовательности равен

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4}$$

Использование симметрии функции

Задание 1. (было разобрано в Лекции 2.2.) Доказать равенство

$$\int_0^\pi x f(\sin x)\, dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x) dx$$

где f – функция, непрерывная на отрезке $[0; 1]$.

Решение. Заметим, что график синуса расположен симметрично на отрезке $[0; \pi]$. То есть $\sin(\pi - x) = \sin x$. Сделаем соответствующую замену переменных.

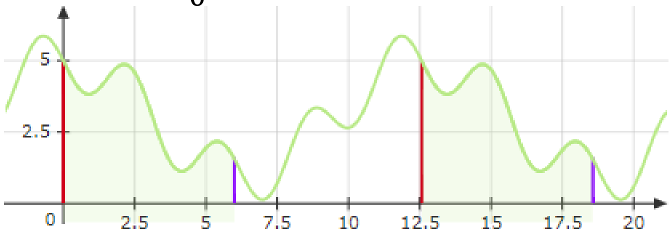
$$I = \int_0^{\pi} x\,\mathrm{f}(\sin x)dx = \begin{bmatrix} x = \pi - t & \sin(\pi - t) = \sin t \\ dx = -dt & t(0) = \pi; t(\pi) = 0 \end{bmatrix} =$$

$$= -\int_{\pi}^{0} (\pi - t) f(\sin t)dt = \int_0^{\pi} \pi f(\sin t)dt - \int_0^{\pi} t f(\sin t)dt$$

Заметим, что интеграл является числом и не зависит от обозначения переменной интегрирования, поэтому $\int_0^{\pi} t f(\sin t)dt$ также равен I. Окончательно получаем, что

$$I = \pi \int_0^{\pi} f(\sin t)dt - I;\ \ I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin t)dt$$

Задание 2. Доказать, что $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^{T} f(x)dx$, если T – период непрерывной функции *f*(*x*).



Решение. Первый интеграл – между синими отрезками, второй – между красными. Чтобы превратить один в другой, надо «отрезать» заштрихованную область (используется аддитивность интеграла) и передвинуть на T (замена переменных)

$$\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a+T} f(x)dx = \begin{bmatrix} x = t + T & t(a) = a + T \\ dx = dt & t(0) = T \end{bmatrix} =$$

$$= \int_{a+T}^{T} f(t+T)dt + \int_{0}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{a+T} f(x)dx + \int_{a+T}^{T} f(t)dt = \int_{0}^{T} f(x)dx$$

Задание 3. И какой-же пароль?

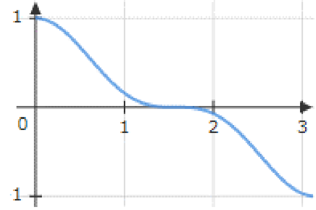
Решение. Первое слагаемое является нечетной функцией, интеграл от нее равен 0.

$$y = \sqrt{4 - x^2}; y^2 = 4 - x^2; x^2 + y^2 = 4$$

Второе слагаемое – 1/2 площади под полуокружностью радиуса 2. Значит, интеграл равен π.

Задание 4. Какой интеграл больше: $\int_0^{\pi} \cos^3 x\,dx$ или $\int_0^{\pi} \sin^5 x\,dx$?

Решение. Можно воспользоваться решением задания 1, но можно обойтись и без него. График косинуса симметричен относительно точки $\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$, то же верно для $\cos^3 x$. Значит, первый из интегралов равен 0.



Во втором же подынтегральная функция положительна, так что он больше 0. Итак, первый интеграл меньше второго.

Действия с функциями и неравенства

Задание 1. Функции f и g непрерывны и $\int_0^1 |f(x)|dx = 2$, $\int_0^1 |g(x)|dx = 3$. Может ли оказаться, что $\int_0^1 |f(x) + g(x)|dx = 6$?

Решение. Решим задачу в более общем виде. Пусть

$$\int_a^b |f(x)|dx = A; \int_a^b |g(x)|dx = B$$

По неравенству треугольника имеем

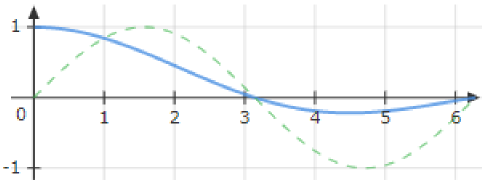
$$|f(x)| - |g(x)| \le |f(x) + g(x)| \le |f(x)| + |g(x)|$$

Интегрируя эти неравенства, получим, что

$$|A - B| \le \int_a^b |f(x) + g(x)| dx \le A + B$$

В частности, в нашем примере $1 \le \int_0^1 |f(x) + g(x)| dx \le 5$.

Задание 2. Каков знак интеграла $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x dx}{x}$?



Решение. График синуса симметричен относительно точки $(0; \pi)$, так что «положительная» часть компенсирует «отрицательную». Но при делении на *x* «отрицательная» часть делится на бОльшие значения, то есть площадь *под* левой частью графика меньше, чем площадь *над* его правой частью. Искомый интеграл положителен. Заметим, что интеграл собственный (в нуле особенности нет).

Докажем утверждение формально. Имеем

$$\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin x\,dx}{x}=\begin{bmatrix}x=t+\pi & t(\pi)=0\\ dx=dt & t(2\pi)=\pi\end{bmatrix}=\int_0^{\pi}\frac{\sin(t+\pi)\,dt}{t+\pi}$$

Значит,

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin x\,dx}{x}=\int_0^{\pi}\frac{\sin x\,dx}{x}-\int_0^{\pi}\frac{\sin x\,dx}{x+\pi}=\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+\pi}\right)\sin x\,dx>0$$

как интеграл от положительной функции.

Задание 3. Найти приближенно значение интеграла $\int_1^3\frac{dx}{\ln(x+1)}$.

Решение. Оценим значения подынтегральной функции.

$$\ln 2\le\ln(x+1)\le\ln 4=2\ln 2\Rightarrow\frac{1}{2\ln 2}\le\frac{1}{\ln(x+1)}\le\frac{1}{\ln 2}$$

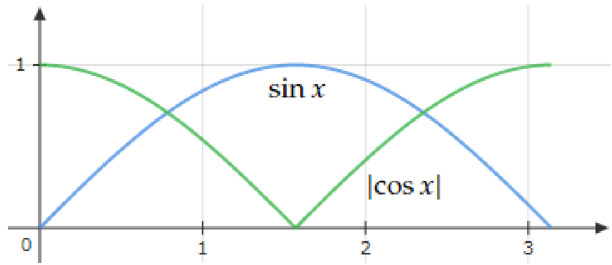
Значит, по теореме о среднем,

$$\frac{3-1}{2\ln 2}\le\int_1^3\frac{dx}{\ln(x+1)}\le\frac{3-1}{\ln 2};\frac{1}{\ln 2}\le\int_1^3\frac{dx}{\ln(x+1)}\le\frac{2}{\ln 2}$$

$$\int_1^3\frac{dx}{\ln(x+1)}\approx\frac{1{,}5}{\ln 2}\approx 2{,}16$$

Задание 4. Какой интеграл больше: $\int_0^\pi \cos^4 x\,dx$ или $\int_0^\pi \sin^5 x\,dx$?

Решение. Задание похоже на предыдущее, в котором мы сравнивали $\int_0^\pi \cos^3 x\,dx$ и $\int_0^\pi \sin^5 x\,dx$. Однако там мы воспользовались нечетностью степени косинуса. В нашем примере обе функции положительны.



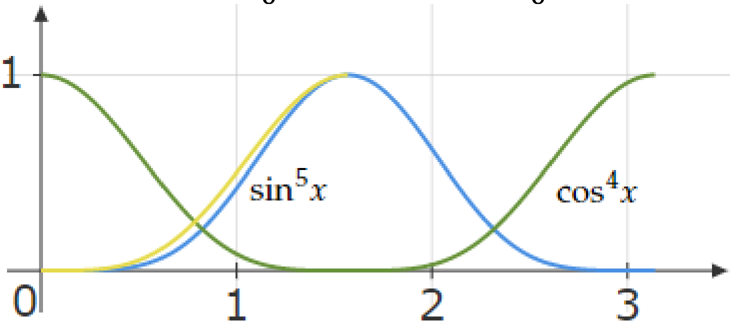
Заметим, что график модуля косинуса на этом промежутке можно получить из графика синуса, «поменяв местами» левую и правую части.

И вообще, оба интеграла можно рассматривать только на промежутке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Доказывается это подходящей заменой переменной, как в предыдущем разделе. Итак,

$$\int_0^\pi \sin^5 x\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\,dx$$

$$\int_0^{\pi} \cos^4 x\,dx = 2\int_0^{\pi/2} \cos^4 x\,dx = 2\int_0^{\pi/2} \sin^4 x\,dx$$

Но $\sin^5 x \le \sin^4 x$, поэтому $\int_0^{\pi} \sin^5 x\,dx \le \int_0^{\pi} \cos^4 x\,dx$.



Интеграл и первообразная

Если функция непрерывна на промежутке, то у нее существует первообразная. Если функция имеет разрывы, можно, тем не менее, построить непрерывную функцию, производная которой совпадает с исходной в точках ее непрерывности. Ее также будем называть первообразной.

Задание 1. Задана функция $f(x) = [x]$ – целая часть *x*. Найдите первообразную $F(x)$, непрерывную на отрезке $[0; x]$, $x>0$.

Решение. Указанная функция задается разными формулами на разных промежутках. Первообразную можно задать на каждом отдельно (с точностью до константны, своей на каждом промежутке). Для того, чтобы первообразная $F(x)$ была непрерывна, надо согласовать значения этих констант. Например,

$$[x] = \begin{cases} 0, 0 \leq x < 1 \\ 1, 1 \leq x < 2 \\ 2, 2 \leq x < 3 \end{cases}$$

Значит,

$$\int [x]dx = \begin{cases} C_1, 0 \leq x \leq 1 \\ x + C_2, 1 \leq x \leq 2 \\ 2x + C_3, 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

При x=1 получаем $C_1 = 1 + C_2$, $C_2 = C_1 - 1$, значит, на промежутке $1 \leq x \leq 2$ имеем $F(x) = x - 1 + C_1$.

Аналогично, при x=2 получаем $2 + C_2 = 4 + C_3$, $C_3 = C_2 - 2 = C_1 -$

3, на промежутке $2 \leq x \leq 3$ имеем $F(x) = 2x - 3 + C_1$. Можно продолжать так же и далее. Однако, таким образом сложно получить общую формулу.

Другой подход – найти первообразную как интеграл с переменным верхним пределом. В силу аддитивности интеграла

$$\int_0^x [t]dt = \int_0^1 [t]dt + \cdots + \int_{n-1}^n [t]dt + \int_n^x [t]dt$$

где n – целая часть x. Имеем

$$\int_{k-1}^k [t]dt = \int_{k-1}^k (k-1)dt = k-1$$

Значит, исходный интеграл принимает вид

$$\int_0^x [t]dt = 0 + \cdots + (n-1) + \int_n^x n dt = \frac{n(n-1)}{2} + n(x-n) =$$

$$= nx + \frac{n}{2}(n - 1 - 2n) = nx - \frac{n(n+1)}{2}$$

Первообразная отличается от интеграла с переменным верхним пределом только константой. Итак,

$$F(x) = [x]x - \frac{[x]([x]+1)}{2} + C$$

Задание 2. Найти $g'(x)$, если $g(x) = \int_x^{2x} \sqrt{t^2 + 2t} dt$, $x \geq 0$.

Решение. Функция $F(u) = \int_0^u \sqrt{t^2 + 2t} dt$ является первообразной для функции $f(u) = \sqrt{u^2 + 2u}$, т.е. $F'(u) = f(u)$. Функцию g можно записать как $g(x) = F(2x) - F(x)$, значит

$$g'(x) = (F(2x) - F(x))' = f(2x) \cdot 2 - f(x) = 2\sqrt{4x^2 + 4x} - \sqrt{x^2 + 2x}$$

Задание 1. Можно ли в интеграле $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2+x+1}$ сделать формальную замену $x = 1/t$? Почему?

Решение. Формальная замена приводит к интегралу

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2+x+1} = \begin{bmatrix} x = \dfrac{1}{t} & t(-1) = -1 \\ dx = -\dfrac{dt}{t^2} & t(1) = 1 \end{bmatrix} = -\int_{-1}^{1}\frac{dt}{t^2\left(\dfrac{1}{t^2}+\dfrac{1}{t}+1\right)} =$$

$$= -\int_{-1}^{1}\frac{dt}{1+t+t^2}$$

То есть интеграл равен самому себе с минусом. Это возможно, только если он равен 0, но он положителен. Значит, такая замена противоречит теореме о замене переменной.

Теорема. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$. Кроме того, пусть функция $x = \varphi(t)$ задана и непрерывно дифференцируема на отрезке $[c; d]$, причем ее значения принадлежат области определения функции f и $x(c) = a; x(d) = b$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(x(t)) \cdot \varphi'(t)dt$$

В нашем примере функция $x = \frac{1}{t}$ не является непрерывной на отрезке $[-1; 1]$. Она не переводит этот отрезок в отрезок.

Определение интеграла

Задание 1. Чему равно колебание функции $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ на отрезке $\left[0; \frac{1}{\pi n}\right]$? Интегрируема ли эта функция на отрезке [0; 1]?

Решение. Колебание равно 2, так как в любом таком отрезке функция принимает как значение –1, так и 1. Тем не менее, функция интегрируема.

Для проверки интегрируемости надо показать, что сумму $\sum \omega_i \Delta x_i$ можно сделать сколь угодно малой за счёт уменьшения мелкости разбиения $d(\tau)$. Здесь ω_i – колебание функции на отрезке разбиения.

Дело в том, что особенность можно окружить такой малой окрестностью, что на ней $\sum \omega_i \Delta x_i$ будет меньше $\frac{\varepsilon}{2}$. Действительно, на отрезке $[0; \delta]$ сумма не превосходит $\sum 2\Delta x_i = 2\delta$. Можно выбрать $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$

В остальной части отрезка функция непрерывна, ее колебание на отрезке стремится к 0 при условии, что длина отрезка стремится к 0 (теорема Кантора). Для нее также можно сделать $\sum \omega_i \Delta x_i$ меньше $\frac{\varepsilon}{2}$ за счет уменьшения колебания функции. Вся сумма не превзойдет ε.

Свойства интеграла

Задание 1. Для непрерывных на $[a; b]$ функций f и g выполняется неравенство $f(x) > g(x), \forall x \in [a; b], a < b$. Верно ли, что $\int_a^b f(x)dx > \int_a^b g(x)dx$? То же для интегрируемых функций.

Решение. Теорема говорит о том, что в условиях задачи $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$. Будет ли это неравенство строгим? Да.

Достаточно, чтобы исходное неравенство $f(x) \geq g(x)$ было строгим хотя бы в одной точке. Тогда по локальному свойству непрерывная функция $f - g$ отделена от 0 в некоторой окрестности этой точки. То есть выполняется $f(x) - g(x) \geq \alpha > 0$ в некотором промежутке положительной длины d. Но тогда и $\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx \geq \alpha \cdot d > 0$.

Замечание. Последнее неравенство использует также аддитивность интеграла. В каком месте? Подумайте сами.

Итак, в доказательстве использованы следующие факты:

1. Локальная отделенность от 0 непрерывной функции
2. Аддитивность интеграла.
3. Свойство интеграла, связанное с неравенством

Если неравенство $f(x) \geq g(x)$ является нестрогим в некоторых точках, то интегралы от этих функций могут и совпадать, так как интеграл не зависит от поведения функции в конечном числе точек.

Однако, если неравенство является строгим на всем отрезке, то и $\int_a^b f(x)dx > \int_a^b g(x)dx$.

Для доказательства можно использовать критерий интегрируемости, звучащий так: функция интегрируема на отрезке тогда и только тогда, когда множество ее точек разрыва имеет лебегову меру 0.

Это значит, что интегрируемая функция не может быть разрывной в каждой точке. Достаточно подобрать точку x_0, в которой функция непрерывна, к ней подходит предыдущее рассуждение.

Несобственный интеграл

Задание 1. Сколько особенностей у интеграла $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3 - x} dx$? Какие?

Решение. Бесконечность – сама по себе особенность. Знаменатель обращается в ноль в точках $0, \ \pm 1$. Точка (–1) не входит в пределы интегрирования. При $x \to 1$ функция стремится к бесконечности, а при $x \to 0$ функция стремится к –1 (особенности нет).

Ответ. Две особенности, $+\infty$ и 1.

Задание 2. Почему признаки сходимости несобственного интеграла зависят от знака функции?

Ответ. Если подынтегральная функция неотрицательная, то первообразная монотонна. Сходимость монотонной функции равносильна ее ограниченности. Для немонотонной первообразной этого недостаточно.