7. Обобщение интегральной формулы Коши. Высшие производные

Пусть D — некоторая ограниченная область в $\mathbb{C}$ (возможно, не односвязная и не линейно связная) с кусочно гладкой границей Γ, ориентированной так, что при прохождении границы область остается слева (см. файл Pic2.jpg). Пусть всюду далее $f(z)$ — функция комплексного переменного, аналитическая в $D+\Gamma$. Напомним, что воспользовавшись формулой Грина из действительного анализа, нетрудно получить:

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = 0. \tag{1}$$

Пусть z_0 — некоторая точка из области D. Функция $\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$ остаётся аналитической во всех точках $D+\Gamma$, кроме точки z_0. Для любого натурального n имеет место следующая важная формула:

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{n!}\,f^{(n)}(z_0). \tag{2}$$

то есть

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz.$$

Из этой формулы следует, в частности, что если функция $f(z)$ аналитична в точке z_0 (то есть дифференцируема в некоторой окрестности этой точки), то в этой точке она бесконечно дифференцируема.

Рассмотрим применения формулы (2) для вычисления интегралов. Отметим, что в комплексном анализе вычисление производных производится по правилам, аналогичным тем, что использовались в действительном анализе.

Пример 1. Вычислим $\int\limits_{|z|=1} \dfrac{\cos z}{z^2}\,dz$. Применяем формулу (2), полагая $z_0 = 0$, $n = 1$, $f(z) = \cos z$:

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^2}\,dz = 2\pi i(-\sin 0) = 0.$$

(В №138 [Ду] — опечатка либо в условии либо в ответе.)

Пример 2. В №142 [Ду] можно применить формулу (2), взяв $z_0 = 2$, $n = 2$, $f(z) = \dfrac{z}{z+4}$ — функцию, аналитическую в круге $|z-3| < 6$.

Замечание. Пусть нам требуется сосчитать $\int\limits_{\Gamma} g(z)\,dz$, где Γ — соответствующим образом ориентированная граница области D, а функция $g(z)$ аналитическая во всех точках $D+\Gamma$, кроме конечного числа точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$ в области D. Возьмём $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы круги $|z - z_i| \leq \varepsilon$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ целиком лежали в D и взаимно не пересекались. Пусть $O_\varepsilon(z_i)$ — соответствующие окружности, ориентированные против часовой стрелки, и $O_\varepsilon^-(z_i)$ — те же окружности, но ориентированные по часовой стрелке. Согласно формуле (1)

$$\int\limits_{\Gamma} g(z)\,dz + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{O_\varepsilon^-(z_i)} g(z)\,dz = 0,$$

откуда

$$\int\limits_{\Gamma} g(z)\,dz = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{O_\varepsilon(z_i)} g(z)\,dz,$$

и в некоторых случаях интегралы $\int\limits_{O_\varepsilon(z_i)} g(z)\,dz$ удаётся сосчитать, применяя интегральную формулу Коши или формулу (2).

При подготовке к занятию постарайтесь ещё разобраться в разделе “Примеры с решениями” в [Ду, стр. 45–47].