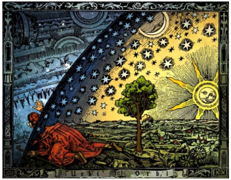
Математические модели теоретической физики

(математика и компьютерные науки)

Математические основы физики

(математика и информатика)

профессор Игнатьев Юрий Геннадиевич



Казанский федеральный университет
Институт математики и механики
им. Н.И. Лобачевского
Кафедра высшей математики и математического моделирования

Казань, VI семестр, 2015 г.

Лекция IX: Уравнения движения заряда в электромагнитном поле

Содержание лекции

- Четырехмерный потенциал поля и действие для заряда в электромагнитном поле
- Вывод уравнений Эйлера - Лагранжа для заряда в электромагнитном поле
- Тензор электромагнитного поля (тензор Максвелла)
- "3+1" разбиение уравнений движения и законы сохранения

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том II. Теория поля. М: Наука – любое издание, начиная с 1973 г.
2. Дж. Синг. Общая теория относительности. М: Наука – любое издание, начиная с 1963 г.
3. Игнатьев Ю.Г. Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Лекции для школы по математическому моделированию. Казань: Казанский университет, 2014. - 298 с. ISBN 978-5-00019-150-7. *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05-IMM/05_120_000443.pdf*>

Содержание лекции

- Четырехмерный потенциал поля и действие для заряда в электромагнитном поле
- Вывод уравнений Эйлера - Лагранжа для заряда в электромагнитном поле
- Тензор электромагнитного поля (тензор Максвелла)
- "3+1" разбиение уравнений движения и законы сохранения

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том II. Теория поля. М: Наука – любое издание, начиная с 1973 г.
2. Дж. Синг. Общая теория относительности. М: Наука – любое издание, начиная с 1963 г.
3. Игнатьев Ю.Г. Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Лекции для школы по математическому моделированию. Казань: Казанский университет, 2014. - 298 с. ISBN 978-5-00019-150-7. *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05-IMM/05_120_000443.pdf>*

Содержание лекции

- Четырехмерный потенциал поля и действие для заряда в электромагнитном поле
- Вывод уравнений Эйлера - Лагранжа для заряда в электромагнитном поле
- Тензор электромагнитного поля (тензор Максвелла)
- "3+1" разбиение уравнений движения и законы сохранения

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том II. Теория поля. М: Наука – любое издание, начиная с 1973 г.
2. Дж. Синг. Общая теория относительности. М: Наука – любое издание, начиная с 1963 г.
3. Игнатьев Ю.Г. Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Лекции для школы по математическому моделированию. Казань: Казанский университет, 2014. - 298 с. ISBN 978-5-00019-150-7. *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05-IMM/05_120_000443.pdf>*

Содержание лекции

- Четырехмерный потенциал поля и действие для заряда в электромагнитном поле
- Вывод уравнений Эйлера - Лагранжа для заряда в электромагнитном поле
- Тензор электромагнитного поля (тензор Максвелла)
- "3+1" разбиение уравнений движения и законы сохранения

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том II. Теория поля. М: Наука – любое издание, начиная с 1973 г.
2. Дж. Синг. Общая теория относительности. М: Наука – любое издание, начиная с 1963 г.
3. Игнатьев Ю.Г. Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Лекции для школы по математическому моделированию. Казань: Казанский университет, 2014. - 298 с. ISBN 978-5-00019-150-7. *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05-IMM/05_120_000443.pdf>*

Лекция IX: Уравнения движения заряда в электромагнитном поле

Содержание лекции

- Четырехмерный потенциал поля и действие для заряда в электромагнитном поле
- Вывод уравнений Эйлера - Лагранжа для заряда в электромагнитном поле
- Тензор электромагнитного поля (тензор Максвелла)
- “3+1” разбиение уравнений движения и законы сохранения

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том II. Теория поля. М: Наука – любое издание, начиная с 1973 г.
2. Дж. Синг. Общая теория относительности. М: Наука – любое издание, начиная с 1963 г.
3. Игнатьев Ю.Г. Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Лекции для школы по математическому моделированию. Казань: Казанский университет, 2014. - 298 с. ISBN 978-5-00019-150-7. *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05-IMM/05_120_000443.pdf>*

Лекция IX: Уравнения движения заряда в электромагнитном поле

Содержание лекции

- Четырехмерный потенциал поля и действие для заряда в электромагнитном поле
- Вывод уравнений Эйлера - Лагранжа для заряда в электромагнитном поле
- Тензор электромагнитного поля (тензор Максвелла)
- "3+1" разбиение уравнений движения и законы сохранения

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том II. Теория поля. М: Наука – любое издание, начиная с 1973 г.
2. Дж. Синг. Общая теория относительности. М: Наука – любое издание, начиная с 1963 г.
3. Игнатьев Ю.Г. Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Лекции для школы по математическому моделированию. Казань: Казанский университет, 2014. - 298 с. ISBN 978-5-00019-150-7. *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05-IMM/05_120_000443.pdf>*

Лекция IX: Уравнения движения заряда в электромагнитном поле

Содержание лекции

- Четырехмерный потенциал поля и действие для заряда в электромагнитном поле
- Вывод уравнений Эйлера - Лагранжа для заряда в электромагнитном поле
- Тензор электромагнитного поля (тензор Максвелла)
- "3+1" разбиение уравнений движения и законы сохранения

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том II. Теория поля. М: Наука – любое издание, начиная с 1973 г.
2. Дж. Синг. Общая теория относительности. М: Наука – любое издание, начиная с 1963 г.
3. Игнатьев Ю.Г. Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Лекции для школы по математическому моделированию. Казань: Казанский университет, 2014. - 298 с. ISBN 978-5-00019-150-7. *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05-IMM/05_120_000443.pdf>*

Лекция IX: Уравнения движения заряда в электромагнитном поле

Содержание лекции

- Четырехмерный потенциал поля и действие для заряда в электромагнитном поле
- Вывод уравнений Эйлера - Лагранжа для заряда в электромагнитном поле
- Тензор электромагнитного поля (тензор Максвелла)
- "3+1" разбиение уравнений движения и законы сохранения

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том II. Теория поля. М: Наука – любое издание, начиная с 1973 г.
2. Дж. Синг. Общая теория относительности. М: Наука – любое издание, начиная с 1963 г.
3. Игнатьев Ю.Г. Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Лекции для школы по математическому моделированию. Казань: Казанский университет, 2014. - 298 с. ISBN 978-5-00019-150-7. *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05-IMM/05_120_000443.pdf>*

- **Элементарные частицы в классической релятивистской физике** представляются математическими точками, снабженными некоторыми неизменными фундаментальными характеристиками, постоянными для элементарных частиц данного класса. Такими элементарными частицами являются, например, электроны, протоны, нейтроны, фотоны, нейтрино (электронные и мюонные), мюоны, кварки, хиггсовы бозоны и т.п. Все элементарные частицы делятся, во-первых, на два больших класса: фермионы, имеющие полуцелый спин $(s = (2n+1)/2)$, и бозоны, имеющие целый спин $s = n$. Кроме того, частицы могут иметь массу покоя m_0. Если масса покоя равна нулю, частицы называются безмассовыми. Частицы также могут иметь различные заряды в качестве констант взаимодействия с различными полями: электрический заряд e по отношению к электромагнитному взаимодействию, лептонный заряд ℓ по отношению к электрослабому взаимодействию, странность - charm - “аромат” по отношению к сильным взаимодействиям, цветовой заряд q по отношению к кварк-глюонным взаимодействиям.
- В классической теории движения заряда в электромагнитном поле имеется пара потенциалов электромагнитного поля: скалярный, φ, и векторный, $\mathbf{A}$, так что:
- $$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{grad}\varphi; \quad \mathbf{H} = \mathbf{rot}\mathbf{A}. \qquad (1)$$
- где **grad** и **rot** - векторные дифференциальные операторы первого порядка, имеющие в декартовых координатах следующие выражения:

$$\mathbf{grad}\varphi = \nabla\varphi; \quad \mathbf{divA} = (\nabla, \mathbf{A}); \quad \mathbf{rot\ A} = [\nabla, \mathbf{A}]; \qquad (2)$$

$$\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}). \qquad (3)$$

Четырехмерный векторный потенциал электромагнитного поля

- **Элементарные частицы в классической релятивистской физике** представляются математическими точками, снабженными некоторыми неизменными фундаментальными характеристиками, постоянными для элементарных частиц данного класса. Такими элементарными частицами являются, например, электроны, протоны, нейтроны, фотоны, нейтрино (электронные и мюонные), мюоны, кварки, хиггсовы бозоны и т.п. Все элементарные частицы делятся, во-первых, на два больших класса: фермионы, имеющие полуцелый спин ($s = (2n + 1)/2$), и бозоны, имеющие целый спин $s = n$. Кроме того, частицы могут иметь массу покоя m_0. Если масса покоя равна нулю, частицы называются безмассовыми. Частицы также могут иметь различные заряды в качестве констант взаимодействия с различными полями: электрический заряд e по отношению к электромагнитному взаимодействию, лептонный заряд ℓ по отношению к электрослабому взаимодействию, странность - charm - "аромат" по отношению к сильным взаимодействиям, цветовой заряд q по отношению к кварк-глюонным взаимодействиям.
- В классической теории движения заряда в электромагнитном поле имеется пара потенциалов электромагнитного поля: скалярный, φ, и векторный, $\mathbf{A}$, так что:
-
- где $\mathbf{grad}$ и $\mathbf{rot}$ - векторные дифференциальные операторы первого порядка, имеющие в декартовых координатах следующие выражения:

$$\mathbf{grad}\varphi = \nabla\varphi; \quad \mathbf{divA} = (\nabla, \mathbf{A}); \quad \mathbf{rot}\ \mathbf{A} = [\nabla, \mathbf{A}]; \qquad (2)$$

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right). \qquad (3)$$

Четырехмерный векторный потенциал электромагнитного поля

- **Элементарные частицы в классической релятивистской физике** представляются математическими точками, снабженными некоторыми неизменными фундаментальными характеристиками, постоянными для элементарных частиц данного класса. Такими элементарными частицами являются, например, электроны, протоны, нейтроны, фотоны, нейтрино (электронные и мюонные), мюоны, кварки, хиггсовы бозоны и т.п. Все элементарные частицы делятся, во-первых, на два больших класса: фермионы, имеющие полуцелый спин $(s = (2n + 1)/2)$, и бозоны, имеющие целый спин $s = n$. Кроме того, частицы могут иметь массу покоя m_0. Если масса покоя равна нулю, частицы называются безмассовыми. Частицы также могут иметь различные заряды в качестве констант взаимодействия с различными полями: электрический заряд e по отношению к электромагнитному взаимодействию, лептонный заряд ℓ по отношению к электрослабому взаимодействию, странность - charm - "аромат" по отношению к сильным взаимодействиям, цветовой заряд q по отношению к кварк-глюонным взаимодействиям.
- В классической теории движения заряда в электромагнитном поле имеется пара потенциалов электромагнитного поля: скалярный, φ, и векторный, $\mathbf{A}$, так что:
- $$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{grad}\varphi; \quad \mathbf{H} = \mathbf{rot}\mathbf{A}, \qquad (1)$$
- где $\mathbf{grad}$ и $\mathbf{rot}$ - векторные дифференциальные операторы первого порядка, имеющие в декартовых координатах следующие выражения:

$$\mathbf{grad}\varphi = \nabla\varphi; \quad \mathbf{divA} = (\nabla, \mathbf{A}); \quad \mathbf{rot}\ \mathbf{A} = [\nabla, \mathbf{A}]; \qquad (2)$$

$$\nabla = \Bigl(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\Bigr). \qquad (3)$$

Четырехмерный векторный потенциал электромагнитного поля

- **Элементарные частицы в классической релятивистской физике** представляются математическими точками, снабженными некоторыми неизменными фундаментальными характеристиками, постоянными для элементарных частиц данного класса. Такими элементарными частицами являются, например, электроны, протоны, нейтроны, фотоны, нейтрино (электронные и мюонные), мюоны, кварки, хиггсовы бозоны и т.п. Все элементарные частицы делятся, во-первых, на два больших класса: фермионы, имеющие полуцелый спин ($s=(2n+1)/2$), и бозоны, имеющие целый спин $s=n$. Кроме того, частицы могут иметь массу покоя m_0. Если масса покоя равна нулю, частицы называются безмассовыми. Частицы также могут иметь различные заряды в качестве констант взаимодействия с различными полями: электрический заряд e по отношению к электромагнитному взаимодействию, лептонный заряд ℓ по отношению к электрослабому взаимодействию, странность - charm - "аромат" по отношению к сильным взаимодействиям, цветовой заряд q по отношению к кварк-глюонным взаимодействиям.
- В классической теории движения заряда в электромагнитном поле имеется пара потенциалов электромагнитного поля: скалярный, φ, и векторный, $\mathbf{A}$, так что:
- $$\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}-\mathbf{grad}\varphi;\quad \mathbf{H}=\mathbf{rot}\mathbf{A}, \tag{1}$$
- где $\mathbf{grad}$ и $\mathbf{rot}$ - векторные дифференциальные операторы первого порядка, имеющие в декартовых координатах следующие выражения:

$$\mathbf{grad}\varphi=\nabla\varphi;\quad \mathbf{divA}=(\nabla,\mathbf{A});\quad \mathbf{rot}\ \mathbf{A}=[\nabla,\mathbf{A}]; \tag{2}$$

$$\nabla=(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}). \tag{3}$$

- **Элементарные частицы в классической релятивистской физике** представляются математическими точками, снабженными некоторыми неизменными фундаментальными характеристиками, постоянными для элементарных частиц данного класса. Такими элементарными частицами являются, например, электроны, протоны, нейтроны, фотоны, нейтрино (электронные и мюонные), мюоны, кварки, хиггсовы бозоны и т.п. Все элементарные частицы делятся, во-первых, на два больших класса: фермионы, имеющие полуцелый спин ($s = (2n+1)/2$), и бозоны, имеющие целый спин $s = n$. Кроме того, частицы могут иметь массу покоя m_0. Если масса покоя равна нулю, частицы называются безмассовыми. Частицы также могут иметь различные заряды в качестве констант взаимодействия с различными полями: электрический заряд e по отношению к электромагнитному взаимодействию, лептонный заряд ℓ по отношению к электрослабому взаимодействию, странность - charm - "аромат" по отношению к сильным взаимодействиям, цветовой заряд q по отношению к кварк-глюонным взаимодействиям.
- В классической теории движения заряда в электромагнитном поле имеется пара потенциалов электромагнитного поля: скалярный, φ, и векторный, $\mathbf{A}$, так что:
- $$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{grad}\varphi; \quad \mathbf{H} = \mathbf{rot}\mathbf{A}, \tag{1}$$
- где $\mathbf{grad}$ и $\mathbf{rot}$ - векторные дифференциальные операторы первого порядка, имеющие в декартовых координатах следующие выражения:

$$\mathbf{grad}\varphi = \nabla\varphi; \quad \mathbf{divA} = (\nabla, \mathbf{A}); \quad \mathbf{rot\ A} = [\nabla, \mathbf{A}]; \tag{2}$$

$$\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}). \tag{3}$$

- **Элементарные частицы в классической релятивистской физике** представляются математическими точками, снабженными некоторыми неизменными фундаментальными характеристиками, постоянными для элементарных частиц данного класса. Такими элементарными частицами являются, например, электроны, протоны, нейтроны, фотоны, нейтрино (электронные и мюонные), мюоны, кварки, хиггсовы бозоны и т.п. Все элементарные частицы делятся, во-первых, на два больших класса: фермионы, имеющие полуцелый спин ($s = (2n + 1)/2$), и бозоны, имеющие целый спин $s = n$. Кроме того, частицы могут иметь массу покоя m_0. Если масса покоя равна нулю, частицы называются безмассовыми. Частицы также могут иметь различные заряды в качестве констант взаимодействия с различными полями: электрический заряд e по отношению к электромагнитному взаимодействию, лептонный заряд ℓ по отношению к электрослабому взаимодействию, странность - charm - "аромат" по отношению к сильным взаимодействиям, цветовой заряд q по отношению к кварк-глюонным взаимодействиям.
- В классической теории движения заряда в электромагнитном поле имеется пара потенциалов электромагнитного поля: скалярный, φ, и векторный, $\mathbf{A}$, так что:
- $$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{grad}\varphi; \quad \mathbf{H} = \mathbf{rot}\mathbf{A}, \tag{1}$$
- где $\mathbf{grad}$ и $\mathbf{rot}$ - векторные дифференциальные операторы первого порядка, имеющие в декартовых координатах следующие выражения:

$$\mathbf{grad}\varphi = \nabla\varphi; \quad \mathbf{div}\mathbf{A} = (\nabla, \mathbf{A}); \quad \mathbf{rot}\ \mathbf{A} = [\nabla, \mathbf{A}]; \tag{2}$$

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right). \tag{3}$$

- Из формулы (1) видно, что потенциалы φ и $\mathbf{A}$ имеют одинаковую размерность. Построим из этих потенциалов четырехмерный векторный потенциал по правилу:

$$A^i = (-\mathbf{A}, -\varphi); \Rightarrow A_i = (\mathbf{A}, -\varphi). \qquad (4)$$

- Согласно принципу аддитивности функции Лагранжа суммарное действия для заряженной частицы и электромагнитного поля представим в виде:

$$S = S_p + S_{ef} + S_f, \qquad (5)$$

  где S_p – действие для свободной частицы (заряда), S_{ef} – действие взаимодействия заряда с электромагнитным полем, S_f – действие для электромагнитного поля. Очевидно, что действие для свободной частицы может быть пропорционально лишь ее четырехмерному интервалу, $\int ds$, так как другого инварианта, связанного со свободной частицей, нет. Для того, чтобы действие имело правильную размерность $[S] = [E \cdot t]$;, этот интервал необходимо умножить на mc, так как другого выбора у нас нет.
- Итак,

$$S_p = mc \int ds. \qquad (6)$$

  (обратите внимание на знак, отличающийся от знака в книге Ландау!)

- Из формулы (1) видно, что потенциалы φ и $\mathbf{A}$ имеют одинаковую размерность. Построим из этих потенциалов четырехмерный векторный потенциал по правилу:

$$A^i = (-\mathbf{A}, -\varphi); \Rightarrow A_i = (\mathbf{A}, -\varphi). \qquad (4)$$

- Согласно принципу аддитивности функции Лагранжа суммарное действия для заряженной частицы и электромагнитного поля представим в виде:

$$S = S_p + S_{ef} + S_f, \qquad (5)$$

где S_p – действие для свободной частицы (заряда), S_{ef} – действие взаимодействия заряда с электромагнитным полем, S_f – действие для электромагнитного поля. Очевидно, что действие для свободной частицы может быть пропорционально лишь ее четырехмерному интервалу, $\int ds$, так как другого инварианта, связанного со свободной частицей, нет. Для того, чтобы действие имело правильную размерность $[S] = [E \cdot t]$;, этот интервал необходимо умножить на mc, так как другого выбора у нас нет.

- Итак,

$$S_p = mc\int ds. \qquad (6)$$

(обратите внимание на знак, отличающийся от знака в книге Ландау!)

- Из формулы (1) видно, что потенциалы φ и $\mathbf{A}$ имеют одинаковую размерность. Построим из этих потенциалов четырехмерный векторный потенциал по правилу:

$$A^i = (-\mathbf{A}, -\varphi); \Rightarrow A_i = (\mathbf{A}, -\varphi). \tag{4}$$

- Согласно принципу аддитивности функции Лагранжа суммарное действия для заряженной частицы и электромагнитного поля представим в виде:

$$S = S_p + S_{ef} + S_f, \tag{5}$$

где S_p – действие для свободной частицы (заряда), S_{ef} – действие взаимодействия заряда с электромагнитным полем, S_f – действие для электромагнитного поля. Очевидно, что действие для свободной частицы может быть пропорционально лишь ее четырехмерному интервалу, $\int ds$, так как другого инварианта, связанного со свободной частицей, нет. Для того, чтобы действие имело правильную размерность $[S] = [E \cdot t]$;, этот интервал необходимо умножить на mc, так как другого выбора у нас нет.

- Итак,

$$S_p = mc \int ds. \tag{6}$$

(обратите внимание на знак, отличающийся от знака в книге Ландау!)

- Из формулы (1) видно, что потенциалы φ и $\mathbf{A}$ имеют одинаковую размерность. Построим из этих потенциалов четырехмерный векторный потенциал по правилу:

$$A^i = (-\mathbf{A}, -\varphi); \Rightarrow A_i = (\mathbf{A}, -\varphi). \tag{4}$$

- Согласно принципу аддитивности функции Лагранжа суммарное действия для заряженной частицы и электромагнитного поля представим в виде:

$$S = S_p + S_{ef} + S_f, \tag{5}$$

  где S_p – действие для свободной частицы (заряда), S_{ef} – действие взаимодействия заряда с электромагнитным полем, S_f – действие для электромагнитного поля. Очевидно, что действие для свободной частицы может быть пропорционально лишь ее четырехмерному интервалу, $\int ds$, так как другого инварианта, связанного со свободной частицей, нет. Для того, чтобы действие имело правильную размерность $[S] = [E \cdot t]$;, этот интервал необходимо умножить на mc, так как другого выбора у нас нет.

- Итак,

$$S_p = mc\int ds \tag{6}$$

  (обратите внимание на знак, отличающийся от знака в книге Ландау!)

Четырехмерный векторный потенциал электромагнитного поля и функция действия

- Из формулы (1) видно, что потенциалы φ и $\mathbf{A}$ имеют одинаковую размерность. Построим из этих потенциалов четырехмерный векторный потенциал по правилу:

$$A^i = (-\mathbf{A}, -\varphi); \Rightarrow A_i = (\mathbf{A}, -\varphi). \tag{4}$$

- Согласно принципу аддитивности функции Лагранжа суммарное действия для заряженной частицы и электромагнитного поля представим в виде:

$$S = S_p + S_{ef} + S_f, \tag{5}$$

  где S_p – действие для свободной частицы (заряда), S_{ef} – действие взаимодействия заряда с электромагнитным полем, S_f – действие для электромагнитного поля. Очевидно, что действие для свободной частицы может быть пропорционально лишь ее четырехмерному интервалу, $\int ds$, так как другого инварианта, связанного со свободной частицей, нет. Для того, чтобы действие имело правильную размерность $[S] = [E \cdot t]$;, этот интервал необходимо умножить на mc, так как другого выбора у нас нет.

- Итак,

$$S_p = mc \int ds. \tag{6}$$

  (обратите внимание на знак, отличающийся от знака в книге Ландау!)

- Из формулы (1) видно, что потенциалы φ и $\mathbf{A}$ имеют одинаковую размерность. Построим из этих потенциалов четырехмерный векторный потенциал по правилу:

$$A^i = (-\mathbf{A}, -\varphi); \Rightarrow A_i = (\mathbf{A}, -\varphi). \qquad (4)$$

- Согласно принципу аддитивности функции Лагранжа суммарное действия для заряженной частицы и электромагнитного поля представим в виде:

$$S = S_p + S_{ef} + S_f, \qquad (5)$$

где S_p – действие для свободной частицы (заряда), S_{ef} – действие взаимодействия заряда с электромагнитным полем, S_f – действие для электромагнитного поля. Очевидно, что действие для свободной частицы может быть пропорционально лишь ее четырехмерному интервалу, $\int ds$, так как другого инварианта, связанного со свободной частицей, нет. Для того, чтобы действие имело правильную размерность $[S] = [E \cdot t]$;, этот интервал необходимо умножить на mc, так как другого выбора у нас нет.

- Итак,

$$S_p = ms \int ds. \qquad (6)$$

(обратите внимание на знак, отличающийся от знака в книге Ландау!)

- Из формулы (1) видно, что потенциалы φ и $\mathbf{A}$ имеют одинаковую размерность. Построим из этих потенциалов четырехмерный векторный потенциал по правилу:

$$A^i = (-\mathbf{A}, -\varphi); \Rightarrow A_i = (\mathbf{A}, -\varphi). \qquad (4)$$

- Согласно принципу аддитивности функции Лагранжа суммарное действия для заряженной частицы и электромагнитного поля представим в виде:

$$S = S_p + S_{ef} + S_f, \qquad (5)$$

где S_p – действие для свободной частицы (заряда), S_{ef} – действие взаимодействия заряда с электромагнитным полем, S_f – действие для электромагнитного поля. Очевидно, что действие для свободной частицы может быть пропорционально лишь ее четырехмерному интервалу, $\int ds$, так как другого инварианта, связанного со свободной частицей, нет. Для того, чтобы действие имело правильную размерность $[S] = [E \cdot t]$;, этот интервал необходимо умножить на mc, так как другого выбора у нас нет.

- Итак,

$$S_p = ms \int ds. \qquad (6)$$

(обратите внимание на знак, отличающийся от знака в книге Ландау!)

- Далее, рассмотрим функцию действия заряда e во внешнем электромагнитном поле. Очевидно, что это действие должно, с одной стороны, определяться зарядом и динамическими переменными частицы, с другой стороны, – потенциалом электромагнитного поля. Единственно возможная такая комбинация для функции Лагранжа есть $\mathrm{Cost} \cdot eu^i A_i$. Подбирая константу из соображений размерности, запишем:

$$S_{ef} = \frac{e}{c}\int (u, A)ds \equiv \frac{e}{c}\int A_i dx^i. \qquad (7)$$

- Таким образом, если пока не учитывать динамических степеней свободы электромагнитного поля, т.е., считать его заданным/внешним, функцию действия для заряда в электромагнитном поле можно записать в виде:

- Вычислим вариацию этого действия, учитывая результат из теории геодезических:

абсолютная производная скорости вдоль траектории.

Действие для частицы в электромагнитном поле; уравнения движения заряда

- Далее, рассмотрим функцию действия заряда e во внешнем электромагнитном поле. Очевидно, что это действие должно, с одной стороны, определяться зарядом и динамическими переменными частицы, с другой стороны, – потенциалом электромагнитного поля. Единственно возможная такая комбинация для функции Лагранжа есть $\mathrm{Cost} \cdot eu^i A_i$. Подбирая константу из соображений размерности, запишем:

$$S_{ef} = \frac{e}{c}\int (u, A)ds \equiv \frac{e}{c}\int A_i dx^i. \tag{7}$$

- Таким образом, если пока не учитывать динамических степеней свободы электромагнитного поля, т.е., считать его заданным/внешним, функцию действия для заряда в электромагнитном поле можно записать в виде:

$$\boxed{S_{em} = S_p + S_{ef} = \int\limits^{B}\left(mc\,ds + \frac{e}{c}A_i dx^i\right)} \tag{8}$$

- Вычислим вариацию этого действия, учитывая результат из теории геодезических:

$$\delta\int\limits_A^B ds = \int\limits_A^B (g_{ik} D_s u^k \delta x^i) ds, \quad \text{где } D_s u^k = \frac{du^k}{ds} + \Gamma^k_{lm} u^l u^m \tag{9}$$

абсолютная производная скорости вдоль траектории.

- Далее, рассмотрим функцию действия заряда e во внешнем электромагнитном поле. Очевидно, что это действие должно, с одной стороны, определяться зарядом и динамическими переменными частицы, с другой стороны, – потенциалом электромагнитного поля. Единственно возможная такая комбинация для функции Лагранжа есть $\mathrm{Cost} \cdot eu^i A_i$. Подбирая константу из соображений размерности, запишем:

$$S_{ef} = \frac{e}{c} \int (u, A) ds \equiv \frac{e}{c} \int A_i dx^i. \tag{7}$$

- Таким образом, если пока не учитывать динамических степеней свободы электромагнитного поля, т.е., считать его заданным/внешним, функцию действия для заряда в электромагнитном поле можно записать в виде:

$$\boxed{S_{em} = S_p + S_{ef} = \int\limits_A^B \left(mcds + \frac{e}{c} A_i dx^i\right) \tag{8}}$$

- Вычислим вариацию этого действия, учитывая результат из теории геодезических:

абсолютная производная скорости вдоль траектории.

- Далее, рассмотрим функцию действия заряда e во внешнем электромагнитном поле. Очевидно, что это действие должно, с одной стороны, определяться зарядом и динамическими переменными частицы, с другой стороны, – потенциалом электромагнитного поля. Единственно возможная такая комбинация для функции Лагранжа есть $\mathrm{Cost} \cdot eu^i A_i$. Подбирая константу из соображений размерности, запишем:

$$S_{ef} = \frac{e}{c}\int (u, A)ds \equiv \frac{e}{c}\int A_i dx^i. \tag{7}$$

- Таким образом, если пока не учитывать динамических степеней свободы электромагнитного поля, т.е., считать его заданным/внешним, функцию действия для заряда в электромагнитном поле можно записать в виде:

$$\boxed{S_{em} = S_p + S_{ef} = \int\limits_A^B \left(mcds + \frac{e}{c}A_i dx^i\right)} \tag{8}$$

- Вычислим вариацию этого действия, учитывая результат из теории геодезических:

$$\delta\int\limits_A^B ds = -\int\limits_A^B (g_{ik} D u^k \delta x^i) ds, \text{ где } D u^k = \frac{du^k}{ds} + \Gamma^k_{lm} u^l u^m \tag{9}$$

абсолютная производная скорости вдоль траектории.

- Далее, рассмотрим функцию действия заряда e во внешнем электромагнитном поле. Очевидно, что это действие должно, с одной стороны, определяться зарядом и динамическими переменными частицы, с другой стороны, – потенциалом электромагнитного поля. Единственно возможная такая комбинация для функции Лагранжа есть $\mathrm{Cost} \cdot e u^i A_i$. Подбирая константу из соображений размерности, запишем:

$$S_{ef} = \frac{e}{c} \int (u, A) ds \equiv \frac{e}{c} \int A_i dx^i. \tag{7}$$

- Таким образом, если пока не учитывать динамических степеней свободы электромагнитного поля, т.е., считать его заданным/внешним, функцию действия для заряда в электромагнитном поле можно записать в виде:

$$\boxed{S_{em} = S_p + S_{ef} = \int_A^B \left(mc ds + \frac{e}{c} A_i dx^i\right)} \tag{8}$$

- Вычислим вариацию этого действия, учитывая результат из теории геодезических:

$$\delta \int_A^B ds = \int_A^B (g_{ik} D_s u^k \delta x^i) ds, \text{ где } D_s u^k = \frac{du^k}{ds} + \Gamma^k_{lm} u^l u^m \tag{9}$$

абсолютная производная скорости вдоль траектории.

- Далее, рассмотрим функцию действия заряда e во внешнем электромагнитном поле. Очевидно, что это действие должно, с одной стороны, определяться зарядом и динамическими переменными частицы, с другой стороны, – потенциалом электромагнитного поля. Единственно возможная такая комбинация для функции Лагранжа есть $\mathrm{Cost}\cdot eu^iA_i$. Подбирая константу из соображений размерности, запишем:

$$S_{ef} = \frac{e}{c}\int (u,A)ds \equiv \frac{e}{c}\int A_i dx^i. \tag{7}$$

- Таким образом, если пока не учитывать динамических степеней свободы электромагнитного поля, т.е., считать его заданным/внешним, функцию действия для заряда в электромагнитном поле можно записать в виде:

$$\boxed{S_{em} = S_p + S_{ef} = \int\limits_A^B \left(mcds + \frac{e}{c}A_i dx^i\right)} \tag{8}$$

- Вычислим вариацию этого действия, учитывая результат из теории геодезических:

$$\delta\int\limits_A^B ds = \int\limits_A^B (g_{ik}D_s u^k \delta x^i)ds, \text{ где } D_s u^k \equiv \frac{du^k}{ds} + \Gamma^k_{lm}u^l u^m \tag{9}$$

абсолютная производная скорости вдоль траектории.

- Далее, рассмотрим функцию действия заряда e во внешнем электромагнитном поле. Очевидно, что это действие должно, с одной стороны, определяться зарядом и динамическими переменными частицы, с другой стороны, – потенциалом электромагнитного поля. Единственно возможная такая комбинация для функции Лагранжа есть $\mathrm{Cost}\cdot eu^i A_i$. Подбирая константу из соображений размерности, запишем:

$$S_{ef} = \frac{e}{c}\int (u, A)ds \equiv \frac{e}{c}\int A_i dx^i. \tag{7}$$

- Таким образом, если пока не учитывать динамических степеней свободы электромагнитного поля, т.е., считать его заданным/внешним, функцию действия для заряда в электромагнитном поле можно записать в виде:

$$\boxed{S_{em} = S_p + S_{ef} = \int\limits_A^B \left(mcds + \frac{e}{c}A_i dx^i\right)} \tag{8}$$

- Вычислим вариацию этого действия, учитывая результат из теории геодезических:

$$\delta\int\limits_A^B ds = \int\limits_A^B (g_{ik}D_s u^k \delta x^i)ds, \text{ где } D_s u^k \equiv \frac{du^k}{ds} + \Gamma^k_{lm}u^l u^m \tag{9}$$

абсолютная производная скорости вдоль траектории.

Уравнения движения заряда и тензор электромагнитного поля

- Вычислим теперь вариацию S_{ef}:

$$\delta S_{ef} = \frac{e}{c}\int_A^B (\delta A_i dx^i + A_i \delta dx^i). \qquad (10)$$

- Переставляя во втором члене операции варьирования и дифференцирования и вычисляя по частям соответствующий интеграл с учетом равенства нулю вариаций координат в концевых точках A и B и дифференцируя $A_i(x)$ как сложную функцию, приведем вариацию действия к виду показать как это сделать:

$$\delta S_{ef} = \frac{e}{c}\int_A^B (\partial_k A_i - \partial_i A_k) dx^i \delta x^k = \frac{e}{c}\int_A^B F_{ki} u^i \delta x^k ds, \qquad (11)$$

- где введен антисимметричный тензор электромагнитного поля = тензор Максвелла:

$$F_{ik} = \partial_i A_k - \partial_k A_i \Rightarrow F_{ki} = -F_{ik}. \qquad (12)$$

- Складывая теперь вариации от обеих частей действия (9) и (11), получим, меняя местами немые индексы ik о втором члене с учетом антисимметричности тензора Максвелла:

$$\delta S_{em} = \int_A^B \left(mc g_{ik} D_s u^k - \frac{e}{c} F_{ik} u^k\right) \delta x^i ds. \qquad (13)$$

- Вычислим теперь вариацию S_{ef}:

$$\delta S_{ef} = \frac{e}{c}\int_A^B (\delta A_i dx^i + A_i \delta dx^i). \tag{10}$$

- Переставляя во втором члене операции варьирования и дифференцирования и вычисляя по частям соответствующий интеграл с учетом равенства нулю вариаций координат в концевых точках A и B и дифференцируя $A_i(x)$ как сложную функцию, приведем вариацию действия к виду показать как это сделать:

- где введен антисимметричный тензор электромагнитного поля = тензор Максвелла:

- Складывая теперь вариации от обеих частей действия (9) и (11), получим, меняя местами немые индексы ik о втором члене с учетом антисимметричности тензора Максвелла:

- Вычислим теперь вариацию S_{ef}:

$$\delta S_{ef} = \frac{e}{c}\int_A^B (\delta A_i dx^i + A_i \delta dx^i). \tag{10}$$

- Переставляя во втором члене операции варьирования и дифференцирования и вычисляя по частям соответствующий интеграл с учетом равенства нулю вариаций координат в концевых точках A и B и дифференцируя $A_i(x)$ как сложную функцию, приведем вариацию действия к виду показать как это сделать:

$$\delta S_{ef} = \frac{e}{c}\int\limits_A^B (\partial_k A_i - \partial_i A_k) dx^i \delta x^k = \frac{e}{c}\int\limits_A^B F_{ki} u^i \delta x^k ds, \tag{11}$$

- где введен антисимметричный тензор электромагнитного поля = тензор Максвелла:

$$F_{ik} \equiv \partial_i A_k - \partial_k A_i \Rightarrow F_{ki} = -F_{ik}. \tag{12}$$

- Складывая теперь вариации от обеих частей действия (9) и (11), получим, меняя местами немые индексы ik о втором члене с учетом антисимметричности тензора Максвелла:

$$\delta S_{em} = \int\limits_A^B \left(mc g_{ik} D_s u^k - \frac{e}{c} F_{ik} u^k\right) \delta x^i ds \tag{13}$$

- Вычислим теперь вариацию S_{ef}:

$$\delta S_{ef} = \frac{e}{c}\int_A^B (\delta A_i dx^i + A_i \delta dx^i). \qquad (10)$$

- Переставляя во втором члене операции варьирования и дифференцирования и вычисляя по частям соответствующий интеграл с учетом равенства нулю вариаций координат в концевых точках A и B и дифференцируя $A_i(x)$ как сложную функцию, приведем вариацию действия к виду показать как это сделать:

$$\delta S_{ef} = \frac{e}{c}\int\limits_A^B (\partial_k A_i - \partial_i A_k) dx^i \delta x^k \equiv \frac{e}{c}\int\limits_A^B F_{ki} u^i \delta x^k ds, \qquad (11)$$

- где введен антисимметричный тензор электромагнитного поля = тензор Максвелла:

$$F_{ik} = \partial_i A_k - \partial_k A_i \Rightarrow F_{ki} = -F_{ik}. \qquad (12)$$

- Складывая теперь вариации от обеих частей действия (9) и (11), получим, меняя местами немые индексы ik о втором члене с учетом антисимметричности тензора Максвелла:

- Вычислим теперь вариацию S_{ef}:

$$\delta S_{ef} = \frac{e}{c}\int_A^B (\delta A_i dx^i + A_i \delta dx^i). \qquad (10)$$

- Переставляя во втором члене операции варьирования и дифференцирования и вычисляя по частям соответствующий интеграл с учетом равенства нулю вариаций координат в концевых точках A и B и дифференцируя $A_i(x)$ как сложную функцию, приведем вариацию действия к виду показать как это сделать:

$$\delta S_{ef} = \frac{e}{c}\int\limits_A^B \big(\partial_k A_i - \partial_i A_k\big) dx^i \delta x^k \equiv \frac{e}{c}\int\limits_A^B F_{ki} u^i \delta x^k ds, \qquad (11)$$

- где введен антисимметричный тензор электромагнитного поля = тензор Максвелла:

$$F_{ik} = \partial_i A_k - \partial_k A_i \Rightarrow F_{ki} = -F_{ik}. \qquad (12)$$

- Складывая теперь вариации от обеих частей действия (9) и (11), получим, меняя местами немые индексы ik о втором члене с учетом антисимметричности тензора Максвелла:

Уравнения движения заряда и тензор электромагнитного поля

- Вычислим теперь вариацию S_{ef}:

$$\delta S_{ef} = \frac{e}{c}\int_A^B (\delta A_i dx^i + A_i \delta dx^i). \tag{10}$$

- Переставляя во втором члене операции варьирования и дифференцирования и вычисляя по частям соответствующий интеграл с учетом равенства нулю вариаций координат в концевых точках A и B и дифференцируя $A_i(x)$ как сложную функцию, приведем вариацию действия к виду показать как это сделать:

$$\delta S_{ef} = \frac{e}{c}\int\limits_A^B (\partial_k A_i - \partial_i A_k) dx^i \delta x^k \equiv \frac{e}{c}\int\limits_A^B F_{ki} u^i \delta x^k ds, \tag{11}$$

- где введен антисимметричный тензор электромагнитного поля = тензор Максвелла:

$$F_{ik} \equiv \partial_i A_k - \partial_k A_i \Rightarrow F_{ki} = -F_{ik}. \tag{12}$$

- Складывая теперь вариации от обеих частей действия (9) и (11), получим, меняя местами немые индексы ik о втором члене с учетом антисимметричности тензора Максвелла:

- Вычислим теперь вариацию S_{ef}:

$$\delta S_{ef} = \frac{e}{c}\int_A^B (\delta A_i dx^i + A_i \delta dx^i). \tag{10}$$

- Переставляя во втором члене операции варьирования и дифференцирования и вычисляя по частям соответствующий интеграл с учетом равенства нулю вариаций координат в концевых точках A и B и дифференцируя $A_i(x)$ как сложную функцию, приведем вариацию действия к виду показать как это сделать:

$$\delta S_{ef} = \frac{e}{c}\int\limits_A^B (\partial_k A_i - \partial_i A_k) dx^i \delta x^k \equiv \frac{e}{c}\int\limits_A^B F_{ki} u^i \delta x^k ds, \tag{11}$$

- где введен антисимметричный тензор электромагнитного поля = тензор Максвелла:

$$F_{ik} \equiv \partial_i A_k - \partial_k A_i \Rightarrow F_{ki} = -F_{ik}. \tag{12}$$

- Складывая теперь вариации от обеих частей действия (9) и (11), получим, меняя местами немые индексы ik о втором члене с учетом антисимметричности тензора Максвелла:

$$\delta S_{em} = \int\limits_A^B (mcg_{ik} D_s u^k - \frac{e}{c} F_{ik} u^k) \delta x^i ds \tag{13}$$

- Вычислим теперь вариацию S_{ef}:

$$\delta S_{ef} = \frac{e}{c}\int_A^B (\delta A_i dx^i + A_i \delta dx^i). \tag{10}$$

- Переставляя во втором члене операции варьирования и дифференцирования и вычисляя по частям соответствующий интеграл с учетом равенства нулю вариаций координат в концевых точках A и B и дифференцируя $A_i(x)$ как сложную функцию, приведем вариацию действия к виду показать как это сделать:

$$\delta S_{ef} = \frac{e}{c}\int\limits_A^B (\partial_k A_i - \partial_i A_k) dx^i \delta x^k \equiv \frac{e}{c}\int\limits_A^B F_{ki} u^i \delta x^k ds, \tag{11}$$

- где введен антисимметричный тензор электромагнитного поля = тензор Максвелла:

$$F_{ik} \equiv \partial_i A_k - \partial_k A_i \Rightarrow F_{ki} = -F_{ik}. \tag{12}$$

- Складывая теперь вариации от обеих частей действия (9) и (11), получим, меняя местами немые индексы ik о втором члене с учетом антисимметричности тензора Максвелла:

$$\delta S_{em} = \int\limits_A^B \left(mcg_{ik} D_s u^k - \frac{e}{c} F_{ik} u^k\right) \delta x^i ds \tag{13}$$

- Вычислим теперь вариацию S_{ef}:

$$\delta S_{ef} = \frac{e}{c}\int_A^B (\delta A_i dx^i + A_i \delta dx^i). \tag{10}$$

- Переставляя во втором члене операции варьирования и дифференцирования и вычисляя по частям соответствующий интеграл с учетом равенства нулю вариаций координат в концевых точках A и B и дифференцируя $A_i(x)$ как сложную функцию, приведем вариацию действия к виду показать как это сделать:

$$\delta S_{ef} = \frac{e}{c}\int\limits_A^B (\partial_k A_i - \partial_i A_k) dx^i \delta x^k \equiv \frac{e}{c}\int\limits_A^B F_{ki} u^i \delta x^k ds, \tag{11}$$

- где введен антисимметричный тензор электромагнитного поля = тензор Максвелла:

$$F_{ik} \equiv \partial_i A_k - \partial_k A_i \Rightarrow F_{ki} = -F_{ik}. \tag{12}$$

- Складывая теперь вариации от обеих частей действия (9) и (11), получим, меняя местами немые индексы ik о втором члене с учетом антисимметричности тензора Максвелла:

$$\delta S_{em} = \int\limits_A^B \left(mcg_{ik} D_s u^k - \frac{e}{c} F_{ik} u^k\right) \delta x^i ds \tag{13}$$

- Приравнивая вариацию нулю, вследствие основной леммы вариационного исчисления получим уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$mcg_{ik}D_s u^k - \frac{e}{c}F_{ik}u^k = 0. \qquad (14)$$

- Сворачивая эти уравнения с контрвариантным метрическим тензором g^{ij}, производя замену $j \to i$ и перенося член с тензором Максвелла в правую часть полученных уравнений, получим окончательно ковариантные релятивистские уравнения движения заряда в электромагнитном поле:

$$\boxed{mcD_s u^i = \frac{e}{c}F^i_{\cdot k}u^k \Rightarrow \frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{kl}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds} = \frac{e}{mc^2}F^i_{\cdot k}u^k}$$

где

$$F^i_{\cdot k} = g^{ij}F_{jk}.$$

Поскольку тензор Максвелла антисимметричен, точкой мы указываем позицию, с которой был поднят индекс i.

- Для выяснения связи компонент тензора Максвелла с трехмерными векторами проведем так называемое «3+1» разбиение, отделяя пространственные и временные компоненты. Так найдем, полагая $\alpha, \beta = \overline{1,3}$:

$$F_{\beta 4} = \partial_\beta A_4 - \partial_4 A_\beta = \frac{\partial A_4}{\partial x^\beta}$$

- Приравнивая вариацию нулю, вследствие основной леммы вариационного исчисления получим уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$mcg_{ik}D_s u^k - \frac{e}{c}F_{ik}u^k = 0. \qquad (14)$$

- Сворачивая эти уравнения с контрвариантным метрическим тензором g^{ij}, производя замену $j \to i$ и перенося член с тензором Максвелла в правую часть полученных уравнений, получим окончательно ковариантные релятивистские уравнения движения заряда в электромагнитном поле:

$$\boxed{mcD_s u^i - \frac{e}{c}F^i_{\cdot k}u^k \to \frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jl}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^l}{ds} = \frac{e}{mc^2}F^i_{\cdot k}u^k,} \qquad (15)$$

где

$$F^i_{\cdot k} = g^{ij}F_{jk}. \qquad (16)$$

Поскольку тензор Максвелла антисимметричен, точкой мы указываем позицию, с которой был поднят индекс i.

- Для выяснения связи компонент тензора Максвелла с трехмерными векторами проведем так называемое «3+1» разбиение, отделяя пространственные и временные компоненты. Так найдем, полагая $\alpha, \beta = \overline{1,3}$:

- Приравнивая вариацию нулю, вследствие основной леммы вариационного исчисления получим уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$mcg_{ik}D_s u^k - \frac{e}{c}F_{ik}u^k = 0. \tag{14}$$

- Сворачивая эти уравнения с контрвариантным метрическим тензором g^{ij}, производя замену $j \to i$ и перенося член с тензором Максвелла в правую часть полученных уравнений, получим окончательно ковариантные релятивистские уравнения движения заряда в электромагнитном поле:

$$\boxed{mcD_s u^i = \frac{e}{c}F^i_{\cdot k}u^k \Rightarrow \frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{kl}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds} = \frac{e}{mc^2}F^i_{\cdot k}u^k,} \tag{15}$$

где

$$F^i_{\cdot k} = g^{ij}F_{jk}.$$

Поскольку тензор Максвелла антисимметричен, точкой мы указываем позицию, с которой был поднят индекс i.

- Для выяснения связи компонент тензора Максвелла с трехмерными векторами проведем так называемое «3+1» разбиение, отделяя пространственные и временные компоненты. Так найдем, полагая $\alpha, \beta = \overline{1,3}$:

- Приравнивая вариацию нулю, вследствие основной леммы вариационного исчисления получим уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$mcg_{ik}D_s u^k - \frac{e}{c}F_{ik}u^k = 0. \tag{14}$$

- Сворачивая эти уравнения с контрвариантным метрическим тензором g^{ij}, производя замену $j \to i$ и перенося член с тензором Максвелла в правую часть полученных уравнений, получим окончательно ковариантные релятивистские уравнения движения заряда в электромагнитном поле:

$$\boxed{mcD_s u^i = \frac{e}{c}F^{i}_{\cdot\ k}u^k \Rightarrow \frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{kl}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds} = \frac{e}{mc^2}F^{i}_{\cdot\ k}u^k,} \tag{15}$$

где

$$F^{i}_{\cdot\ k} = g^{ij}F_{ij}. \tag{16}$$

Поскольку тензор Максвелла антисимметричен, точкой мы указываем позицию, с которой был поднят индекс i.

- Для выяснения связи компонент тензора Максвелла с трехмерными векторами проведем так называемое «3+1» разбиение, отделяя пространственные и временные компоненты. Так найдем, полагая $\alpha, \beta = \overline{1,3}$:

Уравнения движения заряда и “3+1”-разбиение

- Приравнивая вариацию нулю, вследствие основной леммы вариационного исчисления получим уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$mcg_{ik}D_s u^k - \frac{e}{c}F_{ik}u^k = 0. \tag{14}$$

- Сворачивая эти уравнения с контрвариантным метрическим тензором g^{ij}, производя замену $j \to i$ и перенося член с тензором Максвелла в правую часть полученных уравнений, получим окончательно ковариантные релятивистские уравнения движения заряда в электромагнитном поле:

$$\boxed{mcD_s u^i = \frac{e}{c}F^{i}_{\cdot\,k}u^k \Rightarrow \frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{kl}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds} = \frac{e}{mc^2}F^{i}_{\cdot\,k}u^k,} \tag{15}$$

где

$$F^{i}_{\cdot\,k} = g^{ij}F_{ij}. \tag{16}$$

Поскольку тензор Максвелла антисимметричен, точкой мы указываем позицию, с которой был поднят индекс i.

- Для выяснения связи компонент тензора Максвелла с трехмерными векторами проведем так называемое «3+1» разбиение, отделяя пространственные и временные компоненты. Так найдем, полагая $\alpha, \beta = \overline{1,3}$:

- Приравнивая вариацию нулю, вследствие основной леммы вариационного исчисления получим уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$mcg_{ik}D_s u^k - \frac{e}{c}F_{ik}u^k = 0. \tag{14}$$

- Сворачивая эти уравнения с контрвариантным метрическим тензором g^{ij}, производя замену $j \to i$ и перенося член с тензором Максвелла в правую часть полученных уравнений, получим окончательно ковариантные релятивистские уравнения движения заряда в электромагнитном поле:

$$\boxed{mcD_s u^i = \frac{e}{c}F^{i}_{\cdot\,k}u^k \Rightarrow \frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{kl}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds} = \frac{e}{mc^2}F^{i}_{\cdot\,k}u^k,} \tag{15}$$

где

$$F^{i}_{\cdot\,k} = g^{ij}F_{ij}. \tag{16}$$

Поскольку тензор Максвелла антисимметричен, точкой мы указываем позицию, с которой был поднят индекс i.

- Для выяснения связи компонент тензора Максвелла с трехмерными векторами проведем так называемое «3+1» разбиение, отделяя пространственные и временные компоненты. Так найдем, полагая $\alpha, \beta = \overline{1,3}$:

$$F_{\alpha 4} = \partial_4 A_\alpha - \partial_\alpha A_4 = \frac{\partial A_\alpha}{c\partial t} - \partial_\alpha \varphi \Rightarrow \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad}\varphi = -\mathbf{E} \tag{17}$$

- Приравнивая вариацию нулю, вследствие основной леммы вариационного исчисления получим уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$mcg_{ik}D_s u^k - \frac{e}{c}F_{ik}u^k = 0. \quad (14)$$

- Сворачивая эти уравнения с контрвариантным метрическим тензором g^{ij}, производя замену $j \to i$ и перенося член с тензором Максвелла в правую часть полученных уравнений, получим окончательно ковариантные релятивистские уравнения движения заряда в электромагнитном поле:

$$\boxed{mcD_s u^i = \frac{e}{c}F^i_{\cdot\ k}u^k \Rightarrow \frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{kl}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds} = \frac{e}{mc^2}F^i_{\cdot\ k}u^k, \quad (15)}$$

где

$$F^i_{\cdot\ k} = g^{ij}F_{ij}. \quad (16)$$

Поскольку тензор Максвелла антисимметричен, точкой мы указываем позицию, с которой был поднят индекс i.

- Для выяснения связи компонент тензора Максвелла с трехмерными векторами проведем так называемое «3+1» разбиение, отделяя пространственные и временные компоненты. Так найдем, полагая $\alpha, \beta = \overline{1,3}$:

$$F_{\alpha 4} = \partial_4 A_\alpha - \partial_\alpha A_4 = \frac{\partial A_\alpha}{c\partial t} - \partial_\alpha \varphi \Rightarrow \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad}\varphi \equiv -\mathbf{E} \quad (17)$$

- Приравнивая вариацию нулю, вследствие основной леммы вариационного исчисления получим уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$mcg_{ik}D_s u^k - \frac{e}{c}F_{ik}u^k = 0. \tag{14}$$

- Сворачивая эти уравнения с контрвариантным метрическим тензором g^{ij}, производя замену $j \to i$ и перенося член с тензором Максвелла в правую часть полученных уравнений, получим окончательно ковариантные релятивистские уравнения движения заряда в электромагнитном поле:

$$\boxed{mcD_s u^i = \frac{e}{c}F^i_{\cdot\, k}u^k \Rightarrow \frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{kl}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds} = \frac{e}{mc^2}F^i_{\cdot\, k}u^k,} \tag{15}$$

где

$$F^i_{\cdot\, k} = g^{ij}F_{ij}. \tag{16}$$

Поскольку тензор Максвелла антисимметричен, точкой мы указываем позицию, с которой был поднят индекс i.

- Для выяснения связи компонент тензора Максвелла с трехмерными векторами проведем так называемое «3+1» разбиение, отделяя пространственные и временные компоненты. Так найдем, полагая $\alpha, \beta = \overline{1,3}$:

$$F_{\alpha 4} = \partial_4 A_\alpha - \partial_\alpha A_4 = \frac{\partial A_\alpha}{c\partial t} - \partial_\alpha \varphi \Rightarrow \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad}\varphi \equiv -\mathbf{E} \tag{17}$$

- Рассмотрим теперь пространственные компоненты тензора Максвелла:
$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha \Rightarrow F_{12} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 \equiv H_3$$
$$\Rightarrow H^\gamma = e^{\alpha\beta\gamma} F_{\alpha\beta}, \quad e_{\alpha\beta\gamma} = -e_{\beta\alpha\gamma} = e_{\alpha\gamma\beta} \quad (e_{123} = 0), \qquad (18)$$
где $e_{\alpha\beta\gamma}$ – единичный абсолютно антисимметричный тензор перестановок.
- Точнее говоря, $e_{\alpha\beta\gamma}$ является тензором только по отношению к движениям в евклидовом пространстве. Для того, чтобы получить из этих величин ковариантный тензор валентности 3, необходимо ввести дискриминантный тензор:
$$\eta_{\alpha\beta\gamma} = \frac{e_{\alpha\beta\gamma}}{\sqrt{|g|}}, \quad |g| = abs(||g_{\alpha\beta}||). \qquad (19)$$
Докажите, что это тензор.
- Оказывается, в любом римановом пространстве V_n можно ввести аналогичные ковариантные и контрвариантные дискриминантные тензоры:
$$\eta_{i_1 \ldots i_n} = \frac{\varepsilon_{i_1 \ldots i_n}}{\sqrt{|g|}}; \quad \eta^{i_1 \ldots i_n} = \sqrt{|g|}\,\varepsilon_{i_1 \ldots i_n}, \qquad (20)$$
где $\varepsilon_{12\ldots n} = 1$ для главной последовательности чисел, остальные ненулевые компоненты получаются из этого значения перестановками.
- Дискриминантный тензор наряду с метрическим тензором является фундаментальным тензором риманова пространства. Во-первых, также как и метрический тензор, он ковариантно постоянен (докажите):
$$\nabla_k \eta_{i_1 \ldots i_n} = 0; \quad \nabla_k \eta^{i_1 \ldots i_n} = 0. \qquad (21)$$

Тензор Максвелла и дискриминантный тензор

- Рассмотрим теперь пространственные компоненты тензора Максвелла:
$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha \Rightarrow F_{12} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 \equiv H_3$$
$$\Rightarrow H^\gamma = e^{\alpha\beta\gamma} F_{\alpha\beta}, \quad e_{\alpha\beta\gamma} = -e_{\beta\alpha\gamma} = e_{\alpha\gamma\beta} \quad (e_{123} = 0), \tag{18}$$
где $e_{\alpha\beta\gamma}$ – единичный абсолютно антисимметричный тензор перестановок.
- Точнее говоря, $e_{\alpha\beta\gamma}$ является тензором только по отношению к движениям в евклидовом пространстве. Для того, чтобы получить из этих величин ковариантный тензор валентности 3, необходимо ввести дискриминантный тензор:
$$\eta_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}}{\sqrt{|g|}}, \quad |g| = abs(\|g_{ik}\|). \tag{19}$$
Докажите, что это тензор.
- Оказывается, в любом римановом пространстве V_n можно ввести аналогичные ковариантные и контрвариантные дискриминантные тензоры:

где $\varepsilon_{12\ldots n} = 1$ для главной последовательности чисел, остальные ненулевые компоненты получаются из этого значения перестановками.
- Дискриминантный тензор наряду с метрическим тензором является фундаментальным тензором риманова пространства. Во-первых, также как и метрический тензор, он ковариантно постоянен (докажите):

- Рассмотрим теперь пространственные компоненты тензора Максвелла:

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha \Rightarrow F_{12} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 \equiv H_3$$

$$\Rightarrow H^\gamma = e^{\alpha\beta\gamma} F_{\alpha\beta}, \quad e_{\alpha\beta\gamma} = -e_{\beta\alpha\gamma} = e_{\alpha\gamma\beta} \quad (e_{123} = 0), \tag{18}$$

  где $e_{\alpha\beta\gamma}$ – единичный абсолютно антисимметричный тензор перестановок.

- Точнее говоря, $e_{\alpha\beta\gamma}$ является тензором только по отношению к движениям в евклидовом пространстве. Для того, чтобы получить из этих величин ковариантный тензор валентности 3, необходимо ввести дискриминантный тензор:

$$\eta_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}}{\sqrt{|g|}}, \quad |g| = abs(||g_ik||). \tag{19}$$

  Докажите, что это тензор.

- Оказывается, в любом римановом пространстве V_n можно ввести аналогичные ковариантные и контрвариантные дискриминантные тензоры:

  где $\varepsilon_{12\ldots n} = 1$ для главной последовательности чисел, остальные ненулевые компоненты получаются из этого значения перестановками.

- Дискриминантный тензор наряду с метрическим тензором является фундаментальным тензором риманова пространства. Во-первых, также как и метрический тензор, он ковариантно постоянен (докажите):

- Рассмотрим теперь пространственные компоненты тензора Максвелла:

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha \Rightarrow F_{12} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 \equiv H_3$$

$$\Rightarrow H^\gamma = e^{\alpha\beta\gamma} F_{\alpha\beta}, \quad e_{\alpha\beta\gamma} = -e_{\beta\alpha\gamma} = e_{\alpha\gamma\beta} \quad (e_{123} = 0), \qquad (18)$$

  где $e_{\alpha\beta\gamma}$ – единичный абсолютно антисимметричный тензор перестановок.

- Точнее говоря, $e_{\alpha\beta\gamma}$ является тензором только по отношению к движениям в евклидовом пространстве. Для того, чтобы получить из этих величин ковариантный тензор валентности 3, необходимо ввести дискриминантный тензор:

$$\eta_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}}{\sqrt{|g|}}, \quad |g| = abs(||g_i k||). \qquad (19)$$

  Докажите, что это тензор.

- Оказывается, в любом римановом пространстве V_n можно ввести аналогичные ковариантные и контрвариантные дискриминантные тензоры:

$$\eta_{i_1\ldots i_n} = \frac{\varepsilon_{i_1\ldots i_n}}{\sqrt{|g|}}; \quad \eta^{i_1\ldots i_n} = \sqrt{|g|}\varepsilon_{i_1\ldots i_n}, \qquad (20)$$

  где $\varepsilon_{12\ldots n} = 1$ для главной последовательности чисел, остальные ненулевые компоненты получаются из этого значения перестановками.

- Дискриминантный тензор наряду с метрическим тензором является фундаментальным тензором риманова пространства. Во-первых, также как и метрический тензор, он ковариантно постоянен (докажите):

Тензор Максвелла и дискриминантный тензор

- Рассмотрим теперь пространственные компоненты тензора Максвелла:

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha \Rightarrow F_{12} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 \equiv H_3$$

$$\Rightarrow H^\gamma = e^{\alpha\beta\gamma} F_{\alpha\beta}, \quad e_{\alpha\beta\gamma} = -e_{\beta\alpha\gamma} = e_{\alpha\gamma\beta} \quad (e_{123} = 0), \tag{18}$$

  где $e_{\alpha\beta\gamma}$ – единичный абсолютно антисимметричный тензор перестановок.

- Точнее говоря, $e_{\alpha\beta\gamma}$ является тензором только по отношению к движениям в евклидовом пространстве. Для того, чтобы получить из этих величин ковариантный тензор валентности 3, необходимо ввести дискриминантный тензор:

$$\eta_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}}{\sqrt{|g|}}, \quad |g| = abs(||g_i k||). \tag{19}$$

  Докажите, что это тензор.

- Оказывается, в любом римановом пространстве V_n можно ввести аналогичные ковариантные и контрвариантные дискриминантные тензоры:

$$\eta_{i_1\ldots i_n} = \frac{\varepsilon_{i_1\ldots i_n}}{\sqrt{|g|}}; \quad \eta^{i_1\ldots i_n} = \sqrt{|g|}\varepsilon_{i_1\ldots i_n}, \tag{20}$$

  где $\varepsilon_{12\ldots n} = 1$ для главной последовательности чисел, остальные ненулевые компоненты получаются из этого значения перестановками.

- Дискриминантный тензор наряду с метрическим тензором является фундаментальным тензором риманова пространства. Во-первых, также как и метрический тензор, он ковариантно постоянен (докажите):

$$\nabla \eta_{i_1\ldots i_n} = 0; \quad \nabla \eta^{i_1\ldots i_n} = 0.$$

- Рассмотрим теперь пространственные компоненты тензора Максвелла:
$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha \Rightarrow F_{12} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 \equiv H_3$$
$$\Rightarrow H^\gamma = e^{\alpha\beta\gamma} F_{\alpha\beta}, \quad e_{\alpha\beta\gamma} = -e_{\beta\alpha\gamma} = e_{\alpha\gamma\beta} \quad (e_{123} = 0), \tag{18}$$
где $e_{\alpha\beta\gamma}$ – единичный абсолютно антисимметричный тензор перестановок.
- Точнее говоря, $e_{\alpha\beta\gamma}$ является тензором только по отношению к движениям в евклидовом пространстве. Для того, чтобы получить из этих величин ковариантный тензор валентности 3, необходимо ввести дискриминантный тензор:
$$\eta_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}}{\sqrt{|g|}}, \quad |g| = abs(||g_i k||). \tag{19}$$
Докажите, что это тензор.
- Оказывается, в любом римановом пространстве V_n можно ввести аналогичные ковариантные и контрвариантные дискриминантные тензоры:
$$\eta_{i_1\ldots i_n} = \frac{\varepsilon_{i_1\ldots i_n}}{\sqrt{|g|}}; \quad \eta^{i_1\ldots i_n} = \sqrt{|g|}\varepsilon_{i_1\ldots i_n}, \tag{20}$$
где $\varepsilon_{12\ldots n} = 1$ для главной последовательности чисел, остальные ненулевые компоненты получаются из этого значения перестановками.
- Дискриминантный тензор наряду с метрическим тензором является фундаментальным тензором риманова пространства. Во-первых, также как и метрический тензор, он ковариантно постоянен (докажите):
$$\nabla_i \eta_{i_1\ldots i_n} = 0; \quad \nabla_i \eta^{i_1\ldots i_n} = 0. \tag{21}$$

- Рассмотрим теперь пространственные компоненты тензора Максвелла:
$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha \Rightarrow F_{12} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 \equiv H_3$$
$$\Rightarrow H^\gamma = e^{\alpha\beta\gamma} F_{\alpha\beta}, \quad e_{\alpha\beta\gamma} = -e_{\beta\alpha\gamma} = e_{\alpha\gamma\beta} \quad (e_{123} = 0), \tag{18}$$
где $e_{\alpha\beta\gamma}$ – единичный абсолютно антисимметричный тензор перестановок.
- Точнее говоря, $e_{\alpha\beta\gamma}$ является тензором только по отношению к движениям в евклидовом пространстве. Для того, чтобы получить из этих величин ковариантный тензор валентности 3, необходимо ввести дискриминантный тензор:
$$\eta_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}}{\sqrt{|g|}}, \quad |g| = abs(||g_i k||). \tag{19}$$
Докажите, что это тензор.
- Оказывается, в любом римановом пространстве V_n можно ввести аналогичные ковариантные и контрвариантные дискриминантные тензоры:
$$\eta_{i_1\ldots i_n} = \frac{\varepsilon_{i_1\ldots i_n}}{\sqrt{|g|}}; \quad \eta^{i_1\ldots i_n} = \sqrt{|g|}\varepsilon_{i_1\ldots i_n}, \tag{20}$$
где $\varepsilon_{12\ldots n} = 1$ для главной последовательности чисел, остальные ненулевые компоненты получаются из этого значения перестановками.
- Дискриминантный тензор наряду с метрическим тензором является фундаментальным тензором риманова пространства. Во-первых, также как и метрический тензор, он ковариантно постоянен (докажите):
$$\nabla_i \eta_{i_1\ldots i_n} \equiv 0; \quad \nabla_i \eta^{i_1\ldots i_n} \equiv 0. \tag{21}$$

Тензор Максвелла и дискриминантный тензор

- Рассмотрим теперь пространственные компоненты тензора Максвелла:
$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha \Rightarrow F_{12} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 \equiv H_3$$
$$\Rightarrow H^\gamma = e^{\alpha\beta\gamma} F_{\alpha\beta}, \quad e_{\alpha\beta\gamma} = -e_{\beta\alpha\gamma} = e_{\alpha\gamma\beta} \quad (e_{123} = 0), \tag{18}$$
где $e_{\alpha\beta\gamma}$ – единичный абсолютно антисимметричный тензор перестановок.
- Точнее говоря, $e_{\alpha\beta\gamma}$ является тензором только по отношению к движениям в евклидовом пространстве. Для того, чтобы получить из этих величин ковариантный тензор валентности 3, необходимо ввести дискриминантный тензор:
$$\eta_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}}{\sqrt{|g|}}, \quad |g| = abs(||g_i k||). \tag{19}$$
Докажите, что это тензор.
- Оказывается, в любом римановом пространстве V_n можно ввести аналогичные ковариантные и контрвариантные дискриминантные тензоры:
$$\eta_{i_1\ldots i_n} = \frac{\varepsilon_{i_1\ldots i_n}}{\sqrt{|g|}}; \quad \eta^{i_1\ldots i_n} = \sqrt{|g|}\varepsilon_{i_1\ldots i_n}, \tag{20}$$
где $\varepsilon_{12\ldots n} = 1$ для главной последовательности чисел, остальные ненулевые компоненты получаются из этого значения перестановками.
- Дискриминантный тензор наряду с метрическим тензором является фундаментальным тензором риманова пространства. Во-первых, также как и метрический тензор, он ковариантно постоянен (докажите):
$$\nabla_i \eta_{i_1\ldots i_n} \equiv 0; \quad \nabla_i \eta^{i_1\ldots i_n} \equiv 0. \tag{21}$$

- Во-вторых, этот тензор, подобно метрическому определяет некоторые меры в римановом пространстве. Так, объем бесконечно малого n-мерного параллелепипеда в n-мерном римановом пространстве, построенный на векторах $d\xi^i_{(1)}, d\xi^i_{(2)}, \ldots, d\xi^i_{(n)}$ равен

$$dV_n = \eta_{i_1\ldots i_n} d\xi^{i_1}_{(1)} \cdots d\xi^{i_n}_{(n)}. \qquad (22)$$

- В-третьих, с помощью этого тензора можно составить вектор

$$S_i = \eta_{i i_2\ldots i_n} d\xi^{i_2}_{(2)} \cdots d\xi^{i_n}_{(n)}, \qquad (23)$$

модуль которого определяет площадь $n-1$ - мерной грани $d\xi_{(1)} = 0$. Показать примеры объемов и площадей для 1-3-х мерных пространств.

- Таким образом, вычисляя, найдем:

$$\|F_{ik}\| = \begin{pmatrix} 0 & H_3 & -H_2 & -E_1 \\ -H_3 & 0 & H_1 & -E_2 \\ H_2 & -H_1 & 0 & -E_3 \\ E_1 & E_2 & E_3 & 0 \end{pmatrix} \qquad (24)$$

- Во-вторых, этот тензор, подобно метрическому определяет некоторые меры в римановом пространстве. Так, объем бесконечно малого n-мерного параллелепипеда в n-мерном римановом пространстве, построенный на векторах $d\xi^i_{(1)}, d\xi^i_{(2)}, \ldots, d\xi^i_{(n)}$ равен

$$dV_n = \eta_{i_1\ldots i_n} d\xi^{i_1}_{(1)} \cdots d\xi^{i_n}_{(n)}, \qquad (22)$$

- В-третьих, с помощью этого тензора можно составить вектор

  модуль которого определяет площадь $n-1$ - мерной грани $d\xi_{(1)} = 0$.
  Показать примеры объемов и площадей для 1-3-х мерных пространств.
- Таким образом, вычисляя, найдем:

- Во-вторых, этот тензор, подобно метрическому определяет некоторые меры в римановом пространстве. Так, объем бесконечно малого n-мерного параллелепипеда в n-мерном римановом пространстве, построенный на векторах $d\xi^i_{(1)}, d\xi^i_{(2)}, \dots, d\xi^i_{(n)}$ равен

$$dV_n = \eta_{i_1 \dots i_n} d\xi^{i_1}_{(1)} \cdots d\xi^{i_n}_{(n)}, \tag{22}$$

- В-третьих, с помощью этого тензора можно составить вектор

$$S_i = \eta_{i i_2 \dots i_n} d\xi^{i_2}_{(2)} \cdots d\xi^{i_n}_{(n)}, \tag{23}$$

модуль которого определяет площадь $n-1$ - мерной грани $d\xi_{(1)} = 0$.
Показать примеры объемов и площадей для 1-3-х мерных пространств.

- Таким образом, вычисляя, найдем:

Тензор Максвелла и дискриминантный тензор

- Во-вторых, этот тензор, подобно метрическому определяет некоторые меры в римановом пространстве. Так, объем бесконечно малого n-мерного параллелепипеда в n-мерном римановом пространстве, построенный на векторах $d\xi^i_{(1)}, d\xi^i_{(2)}, \ldots, d\xi^i_{(n)}$ равен

$$dV_n = \eta_{i_1 \ldots i_n} d\xi^{i_1}_{(1)} \cdots d\xi^{i_n}_{(n)}, \tag{22}$$

- В-третьих, с помощью этого тензора можно составить вектор

$$S_i = \eta_{i i_2 \ldots i_n} d\xi^{i_2}_{(2)} \cdots d\xi^{i_n}_{(n)}, \tag{23}$$

модуль которого определяет площадь $n-1$ - мерной грани $d\xi_{(1)} = 0$.
Показать примеры объемов и площадей для 1-3-х мерных пространств.

- Таким образом, вычисляя, найдем:

$$||F_{ik}|| = \begin{pmatrix} 0 & H_3 & -H_2 & -E_1 \\ -H_3 & 0 & H_1 & -E_2 \\ H_2 & -H_1 & 0 & -E_3 \\ E_1 & E_2 & E_3 & 0 \end{pmatrix} \tag{24}$$

Тензор Максвелла и дискриминантный тензор

- Во-вторых, этот тензор, подобно метрическому определяет некоторые меры в римановом пространстве. Так, объем бесконечно малого n-мерного параллелепипеда в n-мерном римановом пространстве, построенный на векторах $d\xi^i_{(1)}, d\xi^i_{(2)}, \ldots, d\xi^i_{(n)}$ равен

$$dV_n = \eta_{i_1 \ldots i_n} d\xi^{i_1}_{(1)} \cdots d\xi^{i_n}_{(n)}, \tag{22}$$

- В-третьих, с помощью этого тензора можно составить вектор

$$S_i = \eta_{i i_2 \ldots i_n} d\xi^{i_2}_{(2)} \cdots d\xi^{i_n}_{(n)}, \tag{23}$$

модуль которого определяет площадь $n-1$ - мерной грани $d\xi_{(1)} = 0$. Показать примеры объемов и площадей для 1-3-х мерных пространств.

- Таким образом, вычисляя, найдем:

$$||F_{ik}|| = \begin{pmatrix} 0 & H_3 & -H_2 & -E_1 \\ -H_3 & 0 & H_1 & -E_2 \\ H_2 & -H_1 & 0 & -E_3 \\ E_1 & E_2 & E_3 & 0 \end{pmatrix} \tag{24}$$

- Во-вторых, этот тензор, подобно метрическому определяет некоторые меры в римановом пространстве. Так, объем бесконечно малого n-мерного параллелепипеда в n-мерном римановом пространстве, построенный на векторах $d\xi^i_{(1)}, d\xi^i_{(2)}, \ldots, d\xi^i_{(n)}$ равен

$$dV_n = \eta_{i_1 \ldots i_n} d\xi^{i_1}_{(1)} \cdots d\xi^{i_n}_{(n)}, \tag{22}$$

- В-третьих, с помощью этого тензора можно составить вектор

$$S_i = \eta_{ii_2 \ldots i_n} d\xi^{i_2}_{(2)} \cdots d\xi^{i_n}_{(n)}, \tag{23}$$

модуль которого определяет площадь $n-1$ - мерной грани $d\xi_{(1)} = 0$. Показать примеры объемов и площадей для 1-3-х мерных пространств.

- Таким образом, вычисляя, найдем:

$$||F_{ik}|| = \begin{pmatrix} 0 & H_3 & -H_2 & -E_1 \\ -H_3 & 0 & H_1 & -E_2 \\ H_2 & -H_1 & 0 & -E_3 \\ E_1 & E_2 & E_3 & 0 \end{pmatrix} \tag{24}$$

- Во-вторых, этот тензор, подобно метрическому определяет некоторые меры в римановом пространстве. Так, объем бесконечно малого n-мерного параллелепипеда в n-мерном римановом пространстве, построенный на векторах $d\xi^i_{(1)}, d\xi^i_{(2)}, \ldots, d\xi^i_{(n)}$ равен

$$dV_n = \eta_{i_1\ldots i_n} d\xi^{i_1}_{(1)} \cdots d\xi^{i_n}_{(n)}, \qquad (22)$$

- В-третьих, с помощью этого тензора можно составить вектор

$$S_i = \eta_{ii_2\ldots i_n} d\xi^{i_2}_{(2)} \cdots d\xi^{i_n}_{(n)}, \qquad (23)$$

модуль которого определяет площадь $n-1$ - мерной грани $d\xi_{(1)} = 0$. Показать примеры объемов и площадей для 1-3-х мерных пространств.

- Таким образом, вычисляя, найдем:

$$||F_{ik}|| = \begin{pmatrix} 0 & H_3 & -H_2 & -E_1 \\ -H_3 & 0 & H_1 & -E_2 \\ H_2 & -H_1 & 0 & -E_3 \\ E_1 & E_2 & E_3 & 0 \end{pmatrix} \qquad (24)$$

Тензор Максвелла и дуальный тензор

- Поднимая индексы с помощью тензора Минковского η^{ik}, учитывая его диагональность и тот факт, что смешанные компоненты $F_{\alpha 4}$ при таком поднятии индексов будут менять знак на противоположный, а пространственные компоненты $F_{\alpha\beta}$ не изменяют знак, получим

$$||F^{ik}|| = \begin{pmatrix} 0 & H_3 & -H_2 & E_1 \\ -H_3 & 0 & H_1 & E_2 \\ H_2 & -H_1 & 0 & E_3 \\ -E_1 & -E_2 & -E_3 & 0 \end{pmatrix} \qquad (25)$$

- Введем дуальный тензор к тензору Максвелла

$$\tilde{F}^{ik} = \frac{1}{2}\eta^{iklm}F_{lm} \qquad (26)$$

- Простым вычислением нетрудно показать, что этот тензор получается из тензора Максвелла (25) и (24) (обратите внимание на порядок!) подстановками $E_\alpha \rightleftarrows H_\alpha$ (Докажите!):

$$||\tilde{F}^{ik}|| = \begin{pmatrix} 0 & E_3 & -E_2 & -H_1 \\ -E_3 & 0 & E_1 & -H_2 \\ E_2 & -E_1 & 0 & -H_3 \\ H_1 & H_2 & H_3 & 0 \end{pmatrix} \qquad (27)$$

Тензор Максвелла и дуальный тензор

- Поднимая индексы с помощью тензора Минковского η^{ik}, учитывая его диагональность и тот факт, что смешанные компоненты $F_{\alpha 4}$ при таком поднятии индексов будут менять знак на противоположный, а пространственные компоненты $F_{\alpha\beta}$ не изменяют знак, получим

$$||F^{ik}|| = \begin{pmatrix} 0 & H_3 & -H_2 & E_1 \\ -H_3 & 0 & H_1 & E_2 \\ H_2 & -H_1 & 0 & E_3 \\ -E_1 & -E_2 & -E_3 & 0 \end{pmatrix} \qquad (25)$$

- Введем дуальный тензор к тензору Максвелла

$$\tilde{F}^{ik} = \frac{1}{2}\eta^{iklm}F_{lm}. \qquad (26)$$

- Простым вычислением нетрудно показать, что этот тензор получается из тензора Максвелла (25) и (24) (обратите внимание на порядок!) подстановками $E_\alpha \rightleftarrows H_\alpha$ (Докажите!):

$$||\tilde{F}^{ik}|| = \begin{pmatrix} 0 & E_3 & -E_2 & -H_1 \\ -E_3 & 0 & E_1 & -H_2 \\ E_2 & -E_1 & 0 & -H_3 \\ H_1 & H_2 & H_3 & 0 \end{pmatrix} \qquad (27)$$

Тензор Максвелла и дуальный тензор

- Поднимая индексы с помощью тензора Минковского η^{ik}, учитывая его диагональность и тот факт, что смешанные компоненты $F_{\alpha 4}$ при таком поднятии индексов будут менять знак на противоположный, а пространственные компоненты $F_{\alpha\beta}$ не изменяют знак, получим

$$||F^{ik}|| = \begin{pmatrix} 0 & H_3 & -H_2 & E_1 \\ -H_3 & 0 & H_1 & E_2 \\ H_2 & -H_1 & 0 & E_3 \\ -E_1 & -E_2 & -E_3 & 0 \end{pmatrix} \qquad (25)$$

- Введем дуальный тензор к тензору Максвелла

$$\overset{*}{F}{}^{ik} = \frac{1}{2}\eta^{iklm}F_{lm}. \qquad (26)$$

- Простым вычислением нетрудно показать, что этот тензор получается из тензора Максвелла (25) и (24) (обратите внимание на порядок!) подстановками $E_\alpha \rightleftarrows H_\alpha$ (Докажите!):

Тензор Максвелла и дуальный тензор

- Поднимая индексы с помощью тензора Минковского η^{ik}, учитывая его диагональность и тот факт, что смешанные компоненты $F_{\alpha 4}$ при таком поднятии индексов будут менять знак на противоположный, а пространственные компоненты $F_{\alpha\beta}$ не изменяют знак, получим

$$||F^{ik}|| = \begin{pmatrix} 0 & H_3 & -H_2 & E_1 \\ -H_3 & 0 & H_1 & E_2 \\ H_2 & -H_1 & 0 & E_3 \\ -E_1 & -E_2 & -E_3 & 0 \end{pmatrix} \tag{25}$$

- Введем дуальный тензор к тензору Максвелла

$$\overset{*}{F}{}^{ik} = \frac{1}{2}\eta^{iklm}F_{lm}. \tag{26}$$

- Простым вычислением нетрудно показать, что этот тензор получается из тензора Максвелла (25) и (24) (обратите внимание на порядок!) подстановками $E_\alpha \rightleftarrows H_\alpha$ (Докажите!):

$$||\overset{*}{F}{}^{ik}|| = \begin{pmatrix} 0 & E_3 & -E_2 & -H_1 \\ -E_3 & 0 & E_1 & -H_2 \\ E_2 & -E_1 & 0 & -H_3 \\ H_1 & H_2 & H_3 & 0 \end{pmatrix} \tag{27}$$

Тензор Максвелла и дуальный тензор

- Поднимая индексы с помощью тензора Минковского η^{ik}, учитывая его диагональность и тот факт, что смешанные компоненты $F_{\alpha 4}$ при таком поднятии индексов будут менять знак на противоположный, а пространственные компоненты $F_{\alpha\beta}$ не изменяют знак, получим

$$||F^{ik}|| = \begin{pmatrix} 0 & H_3 & -H_2 & E_1 \\ -H_3 & 0 & H_1 & E_2 \\ H_2 & -H_1 & 0 & E_3 \\ -E_1 & -E_2 & -E_3 & 0 \end{pmatrix} \tag{25}$$

- Введем дуальный тензор к тензору Максвелла

$$\overset{*}{F}{}^{ik} = \frac{1}{2}\eta^{iklm}F_{lm}. \tag{26}$$

- Простым вычислением нетрудно показать, что этот тензор получается из тензора Максвелла (25) и (24) (обратите внимание на порядок!) подстановками $E_\alpha \rightleftarrows H_\alpha$ (Докажите!):

$$||\overset{*}{F}{}^{ik}|| = \begin{pmatrix} 0 & E_3 & -E_2 & -H_1 \\ -E_3 & 0 & E_1 & -H_2 \\ E_2 & -E_1 & 0 & -H_3 \\ H_1 & H_2 & H_3 & 0 \end{pmatrix} \tag{27}$$

Тензор Максвелла и дуальный тензор

- Поднимая индексы с помощью тензора Минковского η^{ik}, учитывая его диагональность и тот факт, что смешанные компоненты $F_{\alpha 4}$ при таком поднятии индексов будут менять знак на противоположный, а пространственные компоненты $F_{\alpha\beta}$ не изменяют знак, получим

$$||F^{ik}|| = \begin{pmatrix} 0 & H_3 & -H_2 & E_1 \\ -H_3 & 0 & H_1 & E_2 \\ H_2 & -H_1 & 0 & E_3 \\ -E_1 & -E_2 & -E_3 & 0 \end{pmatrix} \qquad (25)$$

- Введем дуальный тензор к тензору Максвелла

$$\overset{*}{F}{}^{ik} = \frac{1}{2}\eta^{iklm}F_{lm}. \qquad (26)$$

- Простым вычислением нетрудно показать, что этот тензор получается из тензора Максвелла (25) и (24) (обратите внимание на порядок!) подстановками $E_\alpha \rightleftarrows H_\alpha$ (Докажите!):

$$||\overset{*}{F}{}^{ik}|| = \begin{pmatrix} 0 & E_3 & -E_2 & -H_1 \\ -E_3 & 0 & E_1 & -H_2 \\ E_2 & -E_1 & 0 & -H_3 \\ H_1 & H_2 & H_3 & 0 \end{pmatrix} \qquad (27)$$

Тензор Максвелла и дуальный тензор

- Поднимая индексы с помощью тензора Минковского η^{ik}, учитывая его диагональность и тот факт, что смешанные компоненты $F_{\alpha 4}$ при таком поднятии индексов будут менять знак на противоположный, а пространственные компоненты $F_{\alpha\beta}$ не изменяют знак, получим

$$||F^{ik}|| = \begin{pmatrix} 0 & H_3 & -H_2 & E_1 \\ -H_3 & 0 & H_1 & E_2 \\ H_2 & -H_1 & 0 & E_3 \\ -E_1 & -E_2 & -E_3 & 0 \end{pmatrix} \tag{25}$$

- Введем дуальный тензор к тензору Максвелла

$$\overset{*}{F}{}^{ik} = \frac{1}{2}\eta^{iklm}F_{lm}. \tag{26}$$

- Простым вычислением нетрудно показать, что этот тензор получается из тензора Максвелла (25) и (24) (обратите внимание на порядок!) подстановками $E_\alpha \rightleftarrows H_\alpha$ (Докажите!):

$$||\overset{*}{F}{}^{ik}|| = \begin{pmatrix} 0 & E_3 & -E_2 & -H_1 \\ -E_3 & 0 & E_1 & -H_2 \\ E_2 & -E_1 & 0 & -H_3 \\ H_1 & H_2 & H_3 & 0 \end{pmatrix} \tag{27}$$

- Аналогично получим

$$\| \overset{*}{F}_{ik} \| = \begin{pmatrix} 0 & E_3 & -E_2 & H_1 \\ -E_3 & 0 & E_1 & H_2 \\ E_2 & -E_1 & 0 & H_3 \\ -H_1 & -H_2 & -H_3 & 0 \end{pmatrix} \qquad (28)$$

- Как и во всякой теории, в электродинамике имеют большое значение инварианты электромагнитного поля. Очевидно, что мы можем образовать лишь 3 таких инварианта:

$$a = \frac{1}{2} F_{ik} F^{ik}, \quad b = \frac{1}{2} F_{ik} \overset{*}{F}{}^{ik}, \quad c = \frac{1}{2} \overset{*}{F}_{ik} \overset{*}{F}{}^{ik}. \qquad (29)$$

- Вычислим, например, инвариант a:

$$a = F_{ik} F^{ik} = 2(F_{12}F^{12} + F_{13}F^{13} +$$
$$F_{23}F^{23} + F_{14}F^{14} + F_{24}F^{24} + F_{34}F^{34}) \equiv$$
$$H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 - E_1^2 - E_2^2 - E_3^2 \equiv \mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2. \qquad (30)$$

- Учитывая, что инвариант c можно получить из инварианта a перестановкой $\mathbf{E} \rightleftarrows \mathbf{H}$, получим c:

$$c = \mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2 \equiv -a. \qquad (31)$$

- Аналогично получим:

$$b = \frac{1}{2} F_{ik} \overset{*}{F}{}^{ik} = (\mathbf{EH}). \qquad (32)$$

- Аналогично получим

$$|| \overset{*}{F}_{ik} || = \begin{pmatrix} 0 & E_3 & -E_2 & H_1 \\ -E_3 & 0 & E_1 & H_2 \\ E_2 & -E_1 & 0 & H_3 \\ -H_1 & -H_2 & -H_3 & 0 \end{pmatrix} \qquad (28)$$

- Как и во всякой теории, в электродинамике имеют большое значение инварианты электромагнитного поля. Очевидно, что мы можем образовать лишь 3 таких инварианта:

- Вычислим, например, инвариант a:

$$a = F_{ik}F^{ik} = 2(F_{12}F^{12} + F_{13}F^{13} +$$
$$F_{23}F^{23} + F_{14}F^{14} + F_{24}F^{24} + F_{34}F^{34}) \equiv$$
$$H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 - E_1^2 - E_2^2 - E_3^2 \equiv \mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2. \qquad (30)$$

- Учитывая, что инвариант c можно получить из инварианта a перестановкой $\mathbf{E} \rightleftarrows \mathbf{H}$, получим c:

$$c = \mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2 \equiv -a. \qquad (31)$$

- Аналогично получим:

- Аналогично получим

$$\| \overset{*}{F}_{ik} \| = \begin{pmatrix} 0 & E_3 & -E_2 & H_1 \\ -E_3 & 0 & E_1 & H_2 \\ E_2 & -E_1 & 0 & H_3 \\ -H_1 & -H_2 & -H_3 & 0 \end{pmatrix} \tag{28}$$

- Как и во всякой теории, в электродинамике имеют большое значение инварианты электромагнитного поля. Очевидно, что мы можем образовать лишь 3 таких инварианта:

$$a = \frac{1}{2} F_{ik} F^{ik}; \quad b = \frac{1}{4} F_{ik} \overset{*}{F}{}^{ik}; \quad c = \frac{1}{2} \overset{*}{F}_{ik} \overset{*}{F}{}^{ik}. \tag{29}$$

- Вычислим, например, инвариант a:

$$a = F_{ik}F^{ik} = 2(F_{12}F^{12} + F_{13}F^{13} +$$
$$F_{23}F^{23} + F_{14}F^{14} + F_{24}F^{24} + F_{34}F^{34}) \equiv$$
$$H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 - E_1^2 - E_2^2 - E_3^2 \equiv \mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2. \tag{30}$$

- Учитывая, что инвариант c можно получить из инварианта a перестановкой $\mathbf{E} \rightleftarrows \mathbf{H}$, получим c:

$$c = \mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2 \equiv -a. \tag{31}$$

- Аналогично получим:

$$b = \frac{1}{4} F_{ik} \overset{*}{F}{}^{ik} = (\mathbf{EH}).$$

- Аналогично получим

$$|| \overset{*}{F}_{ik} || = \begin{pmatrix} 0 & E_3 & -E_2 & H_1 \\ -E_3 & 0 & E_1 & H_2 \\ E_2 & -E_1 & 0 & H_3 \\ -H_1 & -H_2 & -H_3 & 0 \end{pmatrix} \tag{28}$$

- Как и во всякой теории, в электродинамике имеют большое значение инварианты электромагнитного поля. Очевидно, что мы можем образовать лишь 3 таких инварианта:

$$a = \frac{1}{2} F_{ik} F^{ik}; \quad b = \frac{1}{4} F_{ik} \overset{*}{F}{}^{ik}; \quad c = \frac{1}{2} \overset{*}{F}_{ik} \overset{*}{F}{}^{ik}. \tag{29}$$

- Вычислим, например, инвариант a:

$$a = F_{ik} F^{ik} = 2(F_{12}F^{12} + F_{13}F^{13} +$$
$$F_{23}F^{23} + F_{14}F^{14} + F_{24}F^{24} + F_{34}F^{34}) \equiv$$
$$H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 - E_1^2 - E_2^2 - E_3^2 \equiv \mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2. \tag{30}$$

- Учитывая, что инвариант c можно получить из инварианта a перестановкой $\mathbf{E} \rightleftarrows \mathbf{H}$, получим c:

$$c = \mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2 \equiv -a. \tag{31}$$

- Аналогично получим:

$$b = \frac{1}{2} F_{ik} \overset{*}{F}{}^{ik} = (\mathbf{EH}). \tag{32}$$

Инварианты электромагнитного поля

- Аналогично получим

$$\|\overset{*}{F}_{ik}\| = \begin{pmatrix} 0 & E_3 & -E_2 & H_1 \\ -E_3 & 0 & E_1 & H_2 \\ E_2 & -E_1 & 0 & H_3 \\ -H_1 & -H_2 & -H_3 & 0 \end{pmatrix} \qquad (28)$$

- Как и во всякой теории, в электродинамике имеют большое значение инварианты электромагнитного поля. Очевидно, что мы можем образовать лишь 3 таких инварианта:

$$a = \frac{1}{2}F_{ik}F^{ik}; \quad b = \frac{1}{4}F_{ik}\overset{*}{F}{}^{ik}; \quad c = \frac{1}{2}\overset{*}{F}_{ik}\overset{*}{F}{}^{ik}. \qquad (29)$$

- Вычислим, например, инвариант a:

$$a = F_{ik}F^{ik} = 2(F_{12}F^{12} + F_{13}F^{13} +$$
$$F_{23}F^{23} + F_{14}F^{14} + F_{24}F^{24} + F_{34}F^{34}) \equiv$$
$$H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 - E_1^2 - E_2^2 - E_3^2 \equiv \mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2. \qquad (30)$$

- Учитывая, что инвариант c можно получить из инварианта a перестановкой $\mathbf{E} \rightleftarrows \mathbf{H}$, получим c:

$$c = \mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2 \equiv -a. \qquad (31)$$

- Аналогично получим:

Инварианты электромагнитного поля

- Аналогично получим

$$|| \overset{*}{F}_{ik} || = \begin{pmatrix} 0 & E_3 & -E_2 & H_1 \\ -E_3 & 0 & E_1 & H_2 \\ E_2 & -E_1 & 0 & H_3 \\ -H_1 & -H_2 & -H_3 & 0 \end{pmatrix} \tag{28}$$

- Как и во всякой теории, в электродинамике имеют большое значение инварианты электромагнитного поля. Очевидно, что мы можем образовать лишь 3 таких инварианта:

$$a = \frac{1}{2} F_{ik} F^{ik}; \quad b = \frac{1}{4} F_{ik} \overset{*}{F}{}^{ik}; \quad c = \frac{1}{2} \overset{*}{F}_{ik} \overset{*}{F}{}^{ik}. \tag{29}$$

- Вычислим, например, инвариант a:

$$\begin{aligned} a = F_{ik} F^{ik} = 2(F_{12}F^{12} + F_{13}F^{13} + \\ F_{23}F^{23} + F_{14}F^{14} + F_{24}F^{24} + F_{34}F^{34}) \equiv \\ H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 - E_1^2 - E_2^2 - E_3^2 \equiv \mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2. \end{aligned} \tag{30}$$

- Учитывая, что инвариант c можно получить из инварианта a перестановкой $\mathbf{E} \rightleftarrows \mathbf{H}$, получим c:

$$c = \mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2 \equiv -a. \tag{31}$$

- Аналогично получим:

- Аналогично получим

$$\| \overset{*}{F}_{ik} \| = \begin{pmatrix} 0 & E_3 & -E_2 & H_1 \\ -E_3 & 0 & E_1 & H_2 \\ E_2 & -E_1 & 0 & H_3 \\ -H_1 & -H_2 & -H_3 & 0 \end{pmatrix} \qquad (28)$$

- Как и во всякой теории, в электродинамике имеют большое значение инварианты электромагнитного поля. Очевидно, что мы можем образовать лишь 3 таких инварианта:

$$a = \frac{1}{2} F_{ik} F^{ik}; \quad b = \frac{1}{4} F_{ik} \overset{*}{F}{}^{ik}; \quad c = \frac{1}{2} \overset{*}{F}_{ik} \overset{*}{F}{}^{ik}. \qquad (29)$$

- Вычислим, например, инвариант a:

$$\begin{aligned} a = F_{ik}F^{ik} = 2(F_{12}F^{12} + F_{13}F^{13} + \\ F_{23}F^{23} + F_{14}F^{14} + F_{24}F^{24} + F_{34}F^{34}) \equiv \\ H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 - E_1^2 - E_2^2 - E_3^2 \equiv \mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2. \end{aligned} \qquad (30)$$

- Учитывая, что инвариант c можно получить из инварианта a перестановкой $\mathbf{E} \rightleftarrows \mathbf{H}$, получим c:

$$c = \mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2 \equiv -a. \qquad (31)$$

- Аналогично получим:

$$b = \frac{1}{4} F_{ik} \overset{*}{F}{}^{ik} \equiv (\mathbf{EH}). \qquad (32)$$

- Аналогично получим

$$|| \overset{*}{F}_{ik} || = \begin{pmatrix} 0 & E_3 & -E_2 & H_1 \\ -E_3 & 0 & E_1 & H_2 \\ E_2 & -E_1 & 0 & H_3 \\ -H_1 & -H_2 & -H_3 & 0 \end{pmatrix} \qquad (28)$$

- Как и во всякой теории, в электродинамике имеют большое значение инварианты электромагнитного поля. Очевидно, что мы можем образовать лишь 3 таких инварианта:

$$a = \frac{1}{2} F_{ik} F^{ik}; \quad b = \frac{1}{4} F_{ik} \overset{*}{F}{}^{ik}; \quad c = \frac{1}{2} \overset{*}{F}_{ik} \overset{*}{F}{}^{ik}. \qquad (29)$$

- Вычислим, например, инвариант a:

$$a = F_{ik} F^{ik} = 2(F_{12}F^{12} + F_{13}F^{13} +$$
$$F_{23}F^{23} + F_{14}F^{14} + F_{24}F^{24} + F_{34}F^{34}) \equiv$$
$$H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 - E_1^2 - E_2^2 - E_3^2 \equiv \mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2. \qquad (30)$$

- Учитывая, что инвариант c можно получить из инварианта a перестановкой $\mathbf{E} \rightleftarrows \mathbf{H}$, получим c:

$$c = \mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2 \equiv -a. \qquad (31)$$

- Аналогично получим:

$$b = \frac{1}{4} F_{ik} \overset{*}{F}{}^{ik} \equiv (\mathbf{EH}). \qquad (32)$$

- Аналогично получим

$$|| \overset{*}{F}_{ik} || = \begin{pmatrix} 0 & E_3 & -E_2 & H_1 \\ -E_3 & 0 & E_1 & H_2 \\ E_2 & -E_1 & 0 & H_3 \\ -H_1 & -H_2 & -H_3 & 0 \end{pmatrix} \qquad (28)$$

- Как и во всякой теории, в электродинамике имеют большое значение инварианты электромагнитного поля. Очевидно, что мы можем образовать лишь 3 таких инварианта:

$$a = \frac{1}{2}F_{ik}F^{ik}; \quad b = \frac{1}{4}F_{ik} \overset{*}{F}{}^{ik}; \quad c = \frac{1}{2} \overset{*}{F}_{ik}\overset{*}{F}{}^{ik}. \qquad (29)$$

- Вычислим, например, инвариант a:

$$a = F_{ik}F^{ik} = 2(F_{12}F^{12} + F_{13}F^{13} +$$
$$F_{23}F^{23} + F_{14}F^{14} + F_{24}F^{24} + F_{34}F^{34}) \equiv$$
$$H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 - E_1^2 - E_2^2 - E_3^2 \equiv \mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2. \qquad (30)$$

- Учитывая, что инвариант c можно получить из инварианта a перестановкой $\mathbf{E} \rightleftarrows \mathbf{H}$, получим c:

$$c = \mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2 \equiv -a. \qquad (31)$$

- Аналогично получим:

$$b = \frac{1}{4}F_{ik} \overset{*}{F}{}^{ik} \equiv (\mathbf{EH}). \qquad (32)$$

- Рассмотрим преобразования Лоренца:

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; y = y', z = z', ct = \frac{\frac{V}{c}x' + ct'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \tag{33}$$

- которым соответствует матрица преобразования (мы полагаем $x^4 = ct$):

$$||C^i_{k'}|| = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} & 0 & 0 & \frac{V}{c}\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{V}{c}\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \end{pmatrix} \tag{34}$$

$\Rightarrow \det(||C^i_{k'}||) = 1$. Как мы отмечали ранее, обратные преобразования, а вместе с ними и обратная матрица преобразований, получаются из этих заменой $V \to -V$.

- Таким образом, найдем, например:

$$E_{1'} = F_{4'1'} = C^i_{4'}C^k_{1'}F_{ik} = C^4_{4'}C^1_{1'}F_{41} + C^1_{4'}C^4_{1'}F_{14}$$

$$\Rightarrow E_{1'} = E_1\left(\left(\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\right)^2 - \left(\frac{V}{c}\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\right)^2\right) \equiv E_1. \tag{35}$$

- Таким образом, получим (вычислить самостоятельно) (Замечание об инвариантах и !):

$$E_{1'} = E_1; \quad E_{2'} = \frac{E_{2'} - \frac{V}{c}H_{3'}}{\sqrt{1-V^2/c^2}}; \quad E_{3'} = \frac{E_{3'} + \frac{V}{c}H_{2'}}{\sqrt{1-V^2/c^2}};$$

$$H_{1'} = H_1; \quad H_{2'} = \frac{H_{2'} + \frac{V}{c}E_{3'}}{\sqrt{1-V^2/c^2}}; \quad H_{3'} = \frac{H_{3'} - \frac{V}{c}E_{2'}}{\sqrt{1-V^2/c^2}}; \tag{36}$$

Инварианты электромагнитного поля

- Рассмотрим преобразования Лоренца:

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; y = y', z = z', ct = \frac{\frac{V}{c}x' + ct'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \qquad (33)$$

- которым соответствует матрица преобразования (мы полагаем $x^4 = ct$):

$$||C^i_{k'}|| = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} & 0 & 0 & \frac{V}{c}\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{V}{c}\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \end{pmatrix}. \qquad (34)$$

  $\Rightarrow \det(||C^i_{k'}||) = 1$. Как мы отмечали ранее, обратные преобразования, а вместе с ними и обратная матрица преобразований, получаются из этих заменой $V \to -V$.

- Таким образом, найдем, например:

$$E_{1'} = F_{4'1'} = C^i_{4'}C^k_{1'}F_{ik} = C^4_{4'}C^1_{1'}F_{41} + C^1_{4'}C^4_{1'}F_{14}$$

$$\Rightarrow E_{1'} = E_1\left(\left(\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\right)^2 - \left(\frac{V}{c}\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\right)^2\right) = E_1. \qquad (35)$$

- Таким образом, получим (вычислить самостоятельно) (Замечание об инвариантах и !):

$$E_{1'} = E_1; \quad E_{2'} = \frac{E_{2'} - \frac{V}{c}H_{3'}}{\sqrt{1-V^2/c^2}}; \quad E_{3'} = \frac{E_{3'} + \frac{V}{c}H_{2'}}{\sqrt{1-V^2/c^2}};$$

$$H_{1'} = H_1; \quad H_{2'} = \frac{H_{2'} + \frac{V}{c}E_{3'}}{\sqrt{1-V^2/c^2}}; \quad H_{3'} = \frac{H_{3'} - \frac{V}{c}E_{2'}}{\sqrt{1-V^2/c^2}}; \qquad (36)$$

- Рассмотрим преобразования Лоренца:

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; y = y', z = z', ct = \frac{\frac{V}{c}x' + ct'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \qquad (33)$$

- которым соответствует матрица преобразования (мы полагаем $x^4 = ct$):

$$||C^i_{k'}|| = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} & 0 & 0 & \frac{V}{c}\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{V}{c}\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \end{pmatrix}, \qquad (34)$$

$\Rightarrow \det(||C^i_{k'}||) = 1$. Как мы отмечали ранее, обратные преобразования, а вместе с ними и обратная матрица преобразований, получаются из этих заменой $V \to -V$.

- Таким образом, найдем, например:

$$E_{1'} = F_{4'1'} = C^i_{4'}C^k_{1'}F_{ik} = C^4_{4'}C^1_{1'}F_{41} + C^1_{4'}C^4_{1'}F_{14}$$

$$\Rightarrow E_{1'} = E_1\left(\left(\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\right)^2 - \left(\frac{V}{c}\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\right)^2\right) = E_1. \qquad (35)$$

- Таким образом, получим (вычислить самостоятельно) (Замечание об инвариантах и !):

$$E_{1'} = E_1; \quad E_{2'} = \frac{E_{2'} - \frac{V}{c}H_{3'}}{\sqrt{1-V^2/c^2}}; \quad E_{3'} = \frac{E_{3'} + \frac{V}{c}H_{2'}}{\sqrt{1-V^2/c^2}};$$

$$H_{1'} = H_1; \quad H_{2'} = \frac{H_{2'} + \frac{V}{c}E_{3'}}{\sqrt{1-V^2/c^2}}; \quad H_{3'} = \frac{H_{3'} - \frac{V}{c}E_{2'}}{\sqrt{1-V^2/c^2}}; \qquad (36)$$

- Рассмотрим преобразования Лоренца:

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; y = y', z = z', ct = \frac{\frac{V}{c}x' + ct'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \qquad (33)$$

- которым соответствует матрица преобразования (мы полагаем $x^4 = ct$):

$$||C^i_{k'}|| = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} & 0 & 0 & \frac{V}{c}\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{V}{c}\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \end{pmatrix}, \qquad (34)$$

$\Rightarrow \det(||C^i_{k'}||) = 1$. Как мы отмечали ранее, обратные преобразования, а вместе с ними и обратная матрица преобразований, получаются из этих заменой $V \to -V$.

- Таким образом, найдем, например:

$$E_{1'} = F_{4'1'} = C^i_{4'}C^k_{1'}F_{ik} = C^4_{4'}C^1_{1'}F_{41} + C^1_{4'}C^4_{1'}F_{14}$$

$$\Rightarrow E_{1'} = E_1\left(\left(\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\right)^2 - \left(\frac{V}{c}\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\right)^2\right) \equiv E_1. \qquad (35)$$

- Таким образом, получим (вычислить самостоятельно) (Замечание об инвариантах и !):

$$E_{1'} = E_1; \quad E_{2'} = \frac{E_{2'} - \frac{V}{c}H_{3'}}{\sqrt{1-V^2/c^2}}; \quad E_{3'} = \frac{E_{3'} + \frac{V}{c}H_{2'}}{\sqrt{1-V^2/c^2}};$$

$$H_{1'} = H_1; \quad H_{2'} = \frac{H_{2'} + \frac{V}{c}E_{3'}}{\sqrt{1-V^2/c^2}}; \quad H_{3'} = \frac{H_{3'} - \frac{V}{c}E_{2'}}{\sqrt{1-V^2/c^2}}; \qquad (36)$$

- Рассмотрим преобразования Лоренца:

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; y = y', z = z', ct = \frac{\frac{V}{c}x' + ct'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \tag{33}$$

- которым соответствует матрица преобразования (мы полагаем $x^4 = ct$):

$$||C^i_{k'}|| = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} & 0 & 0 & \frac{V}{c}\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{V}{c}\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \end{pmatrix}, \tag{34}$$

$\Rightarrow \det(||C^i_{k'}||) = 1$. Как мы отмечали ранее, обратные преобразования, а вместе с ними и обратная матрица преобразований, получаются из этих заменой $V \to -V$.

- Таким образом, найдем, например:

$$E_{1'} = F_{4'1'} = C^i_{4'}C^k_{1'}F_{ik} = C^4_{4'}C^1_{1'}F_{41} + C^1_{4'}C^4_{1'}F_{14}$$

$$\Rightarrow E_{1'} = E_1\left(\left(\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\right)^2 - \left(\frac{V}{c}\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\right)^2\right) \equiv E_1. \tag{35}$$

- Таким образом, получим (вычислить самостоятельно) (Замечание об инвариантах и !):

$$E_{1'} = E_1; \quad E_{2'} = \frac{E_{2'} - \frac{V}{c}H_{3'}}{\sqrt{1-V^2/c^2}}; \quad E_{3'} = \frac{E_{3'} + \frac{V}{c}H_{2'}}{\sqrt{1-V^2/c^2}};$$

$$H_{1'} = H_1; \quad H_{2'} = \frac{H_{2'} + \frac{V}{c}E_{3'}}{\sqrt{1-V^2/c^2}}; \quad H_{3'} = \frac{H_{3'} - \frac{V}{c}E_{2'}}{\sqrt{1-V^2/c^2}}; \tag{36}$$

- Рассмотрим преобразования Лоренца:

$$x=\frac{x'+Vt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}};y=y',z=z',ct=\frac{\frac{V}{c}x'+ct'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\tag{33}$$

- которым соответствует матрица преобразования (мы полагаем $x^4=ct$):

$$||C^i_{k'}||=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} & 0 & 0 & \frac{V}{c}\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ \frac{V}{c}\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \end{pmatrix},\tag{34}$$

  $\Rightarrow \det(||C^i_{k'}||)=1$. Как мы отмечали ранее, обратные преобразования, а вместе с ними и обратная матрица преобразований, получаются из этих заменой $V\to -V$.
- Таким образом, найдем, например:

$$E_{1'}=F_{4'1'}=C^i_{4'}C^k_{1'}F_{ik}=C^4_{4'}C^1_{1'}F_{41}+C^1_{4'}C^4_{1'}F_{14}$$

$$\Rightarrow E_{1'}=E_1\Big(\Big(\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\Big)^2-\Big(\frac{V}{c}\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\Big)^2\Big)\equiv E_1.\tag{35}$$

- Таким образом, получим (вычислить самостоятельно) (Замечание об инвариантах и !):

$$E_{1'}=E_1;\quad E_{2'}=\frac{E_{2'}-\frac{V}{c}H_{3'}}{\sqrt{1-V^2/c^2}};\quad E_{3'}=\frac{E_{3'}+\frac{V}{c}H_{2'}}{\sqrt{1-V^2/c^2}};$$

$$H_{1'}=H_1;\quad H_{2'}=\frac{H_{2'}+\frac{V}{c}E_{3'}}{\sqrt{1-V^2/c^2}};\quad H_{3'}=\frac{H_{3'}-\frac{V}{c}E_{2'}}{\sqrt{1-V^2/c^2}};\tag{36}$$

- Рассмотрим преобразования Лоренца:

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}; y = y', z = z', ct = \frac{\frac{V}{c}x' + ct'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \tag{33}$$

- которым соответствует матрица преобразования (мы полагаем $x^4 = ct$):

$$||C^i_{k'}|| = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} & 0 & 0 & \frac{V}{c}\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{V}{c}\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \end{pmatrix}, \tag{34}$$

$\Rightarrow \det(||C^i_{k'}||) = 1$. Как мы отмечали ранее, обратные преобразования, а вместе с ними и обратная матрица преобразований, получаются из этих заменой $V \to -V$.

- Таким образом, найдем, например:

$$E_{1'} = F_{4'1'} = C^i_{4'}C^k_{1'}F_{ik} = C^4_{4'}C^1_{1'}F_{41} + C^1_{4'}C^4_{1'}F_{14}$$

$$\Rightarrow E_{1'} = E_1\left(\left(\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\right)^2 - \left(\frac{V}{c}\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\right)^2\right) \equiv E_1. \tag{35}$$

- Таким образом, получим (вычислить самостоятельно) (Замечание об инвариантах и !):

$$E_{1'} = E_1; \quad E_{2'} = \frac{E_{2'} - \frac{V}{c}H_{3'}}{\sqrt{1-V^2/c^2}}; \quad E_{3'} = \frac{E_{3'} + \frac{V}{c}H_{2'}}{\sqrt{1-V^2/c^2}};$$

$$H_{1'} = H_1; \quad H_{2'} = \frac{H_{2'} + \frac{V}{c}E_{3'}}{\sqrt{1-V^2/c^2}}; \quad H_{3'} = \frac{H_{3'} - \frac{V}{c}E_{2'}}{\sqrt{1-V^2/c^2}}; \tag{36}$$

Инварианты электромагнитного поля: псевдоскаляры

- По отношению к поворотам системы координат компоненты дискриминантного тензора $\eta_{i_1 \ldots i_n}$ и $\eta^{i_1 \cdots i_n}$ ведут себя как компоненты тензора. Однако, если рассмотреть преобразования отражения типа:

$$x^1 = x'^1, \ldots, x^p = -x'^p, \ldots, x^n = x'^n, \qquad (37)$$

- которым соответствует матрица преобразования:

$$\|\alpha\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to |\alpha| = -1$$

- Таким образом, по определению компоненты дискриминантного тензора при преобразовании (37) не изменятся, тогда как соответствующие компоненты истинного тензора должны были бы изменить знак. Поэтому введенные нами дискриминантные «тензоры» не являются истинными тензорами, а лишь псевдотензорами.
- Поэтому в отличие от компонент тензора Максвелла F_{ik}, компоненты дуального тензора $\overset{*}{F}_{ik}$ также не являются компонентами истинного тензора, а лишь псевдотензора. Вследствие этого и инвариант электромагнитного поля

$$I = \frac{1}{4} F_{ik} \overset{*}{F}{}^{ik} = (\mathbf{E}\mathbf{H})$$

не является истинным скаляром, а лишь псевдоскаляром: при преобразовании вида (37) такие величины меняют знак.

- По отношению к поворотам системы координат компоненты дискриминантного тензора $\eta_{i_1\dots i_n}$ и $\eta^{i_1\cdots i_n}$ ведут себя как компоненты тензора. Однако, если рассмотреть преобразования отражения типа:

$$x^1 = x'^1, \dots, x^p = -x'^p, \dots, x^n = x'^n, \tag{37}$$

- которым соответствует матрица преобразования:

$$\|C^{k'}_k\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\|C^{k'}_k\|) = -1. \tag{38}$$

- Таким образом, по определению компоненты дискриминантного тензора при преобразовании (37) не изменятся, тогда как соответствующие компоненты истинного тензора должны были бы изменить знак. Поэтому введенные нами дискриминантные «тензоры» не являются истинными тензорами, а лишь псевдотензорами.
- Поэтому в отличие от компонент тензора Максвелла F_{ik}, компоненты дуального тензора $\overset{*}{F}_{ik}$ также не являются компонентами истинного тензора, а лишь псевдотензора. Вследствие этого и инвариант электромагнитного поля

$$b = \frac{1}{4}F_{ik}\overset{*}{F}{}^{ik} = (\mathbf{EH}) \tag{39}$$

не является истинным скаляром, а лишь псевдоскаляром: при преобразовании вида (37) такие величины меняют знак.

- По отношению к поворотам системы координат компоненты дискриминантного тензора $\eta_{i_1\ldots i_n}$ и $\eta^{i_1\cdots i_n}$ ведут себя как компоненты тензора. Однако, если рассмотреть преобразования отражения типа:

$$x^1 = x'^1, \ldots, x^p = -x'^p, \ldots, x^n = x'^n, \tag{37}$$

- которым соответствует матрица преобразования:

$$||C^i_{k'}|| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \Rightarrow \det(||C^i_{k'}||) = -1. \tag{38}$$

- Таким образом, по определению компоненты дискриминантного тензора при преобразовании (37) не изменятся, тогда как соответствующие компоненты истинного тензора должны были бы изменить знак. Поэтому введенные нами дискриминантные «тензоры» не являются истинными тензорами, а лишь псевдотензорами.
- Поэтому в отличие от компонент тензора Максвелла F_{ik}, компоненты дуального тензора $\overset{*}{F}_{ik}$ также не являются компонентами истинного тензора, а лишь псевдотензора. Вследствие этого и инвариант электромагнитного поля

$$b = \frac{1}{4} F_{ik} \overset{*}{F}{}^{ik} \equiv (\mathbf{EH}) \tag{39}$$

не является истинным скаляром, а лишь псевдоскаляром: при преобразовании вида (37) такие величины меняют знак.

- По отношению к поворотам системы координат компоненты дискриминантного тензора $\eta_{i_1\ldots i_n}$ и $\eta^{i_1\cdots i_n}$ ведут себя как компоненты тензора. Однако, если рассмотреть преобразования отражения типа:

$$x^1 = x'^1, \ldots, x^p = -x'^p, \ldots, x^n = x'^n, \tag{37}$$

- которым соответствует матрица преобразования:

$$||C^i_{k'}|| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \Rightarrow \det(||C^i_{k'}||) = -1. \tag{38}$$

- Таким образом, по определению компоненты дискриминантного тензора при преобразовании (37) не изменятся, тогда как соответствующие компоненты истинного тензора должны были бы изменить знак. Поэтому введенные нами дискриминантные «тензоры» не являются истинными тензорами, а лишь псевдотензорами.
- Поэтому в отличие от компонент тензора Максвелла F_{ik}, компоненты дуального тензора $\overset{*}{F}_{ik}$ также не являются компонентами истинного тензора, а лишь псевдотензора. Вследствие этого и инвариант электромагнитного поля

$$b = \frac{1}{4} F_{ik} \overset{*}{F}{}^{ik} = (\mathbf{B}\mathbf{E}) \tag{39}$$

не является истинным скаляром, а лишь псевдоскаляром: при преобразовании вида (37) такие величины меняют знак.

Инварианты электромагнитного поля: псевдоскаляры

- По отношению к поворотам системы координат компоненты дискриминантного тензора $\eta_{i_1\ldots i_n}$ и $\eta^{i_1\cdots i_n}$ ведут себя как компоненты тензора. Однако, если рассмотреть преобразования отражения типа:

$$x^1 = x'^1, \ldots, x^p = -x'^p, \ldots, x^n = x'^n, \tag{37}$$

- которым соответствует матрица преобразования:

$$||C^i_{k'}|| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \Rightarrow \det(||C^i_{k'}||) = -1. \tag{38}$$

- Таким образом, по определению компоненты дискриминантного тензора при преобразовании (37) не изменятся, тогда как соответствующие компоненты истинного тензора должны были бы изменить знак. Поэтому введенные нами дискриминантные «тензоры» не являются истинными тензорами, а лишь псевдотензорами.
- Поэтому в отличие от компонент тензора Максвелла F_{ik}, компоненты дуального тензора $\overset{*}{F}_{ik}$ также не являются компонентами истинного тензора, а лишь псевдотензора. Вследствие этого и инвариант электромагнитного поля

не является истинным скаляром, а лишь псевдоскаляром: при преобразовании вида (37) такие величины меняют знак.

Инварианты электромагнитного поля: псевдоскаляры

- По отношению к поворотам системы координат компоненты дискриминантного тензора $\eta_{i_1\ldots i_n}$ и $\eta^{i_1\cdots i_n}$ ведут себя как компоненты тензора. Однако, если рассмотреть преобразования отражения типа:

$$x^1 = x'^1, \ldots, x^p = -x'^p, \ldots, x^n = x'^n, \tag{37}$$

- которым соответствует матрица преобразования:

$$||C^i_{k'}|| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \Rightarrow \det(||C^i_{k'}||) = -1. \tag{38}$$

- Таким образом, по определению компоненты дискриминантного тензора при преобразовании (37) не изменятся, тогда как соответствующие компоненты истинного тензора должны были бы изменить знак. Поэтому введенные нами дискриминантные «тензоры» не являются истинными тензорами, а лишь псевдотензорами.
- Поэтому в отличие от компонент тензора Максвелла F_{ik}, компоненты дуального тензора $\overset{*}{F}_{ik}$ также не являются компонентами истинного тензора, а лишь псевдотензора. Вследствие этого и инвариант электромагнитного поля

$$b = \frac{1}{4} F_{ik} \overset{*}{F}{}^{ik} \equiv (\mathbf{EH}) \tag{39}$$

не является истинным скаляром, а лишь псевдоскаляром: при преобразовании вида (37) такие величины меняют знак.

- По отношению к поворотам системы координат компоненты дискриминантного тензора $\eta_{i_1\ldots i_n}$ и $\eta^{i_1\cdots i_n}$ ведут себя как компоненты тензора. Однако, если рассмотреть преобразования отражения типа:

$$x^1 = x'^1, \ldots, x^p = -x'^p, \ldots, x^n = x'^n, \tag{37}$$

- которым соответствует матрица преобразования:

$$||C^i_{k'}|| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \Rightarrow \det(||C^i_{k'}||) = -1. \tag{38}$$

- Таким образом, по определению компоненты дискриминантного тензора при преобразовании (37) не изменятся, тогда как соответствующие компоненты истинного тензора должны были бы изменить знак. Поэтому введенные нами дискриминантные «тензоры» не являются истинными тензорами, а лишь псевдотензорами.
- Поэтому в отличие от компонент тензора Максвелла F_{ik}, компоненты дуального тензора $\overset{*}{F}_{ik}$ также не являются компонентами истинного тензора, а лишь псевдотензора. Вследствие этого и инвариант электромагнитного поля

$$b = \frac{1}{4} F_{ik} \overset{*}{F}{}^{ik} \equiv (\mathbf{EH}) \tag{39}$$

не является истинным скаляром, а лишь псевдоскаляром: при преобразовании вида (37) такие величины меняют знак.

- По отношению к поворотам системы координат компоненты дискриминантного тензора $\eta_{i_1\ldots i_n}$ и $\eta^{i_1\cdots i_n}$ ведут себя как компоненты тензора. Однако, если рассмотреть преобразования отражения типа:

$$x^1 = x'^1, \ldots, x^p = -x'^p, \ldots, x^n = x'^n, \tag{37}$$

- которым соответствует матрица преобразования:

$$||C^i_{k'}|| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \Rightarrow \det(||C^i_{k'}||) = -1. \tag{38}$$

- Таким образом, по определению компоненты дискриминантного тензора при преобразовании (37) не изменятся, тогда как соответствующие компоненты истинного тензора должны были бы изменить знак. Поэтому введенные нами дискриминантные «тензоры» не являются истинными тензорами, а лишь псевдотензорами.
- Поэтому в отличие от компонент тензора Максвелла F_{ik}, компоненты дуального тензора $\overset{*}{F}_{ik}$ также не являются компонентами истинного тензора, а лишь псевдотензора. Вследствие этого и инвариант электромагнитного поля

$$b = \frac{1}{4} F_{ik} \overset{*}{F}{}^{ik} \equiv (\mathbf{EH}) \tag{39}$$

не является истинным скаляром, а лишь псевдоскаляром: при преобразовании вида (37) такие величины меняют знак.

Инварианты электромагнитного поля: полярные и аксиальные векторы

- Обратимся теперь к трехмерному представлению тензора Максвелла. Согласно (17) $E_\alpha = F_{4\alpha}$ – по отношению к преобразованиям трехмерного евклидова пространства эти величины преобразуются как компоненты ковариантного вектора.
- Вектор напряженности магнитного поля определяется с помощью трехмерного тензора с gjvjom. (18):

$$H_\gamma = F_{\alpha\beta}\epsilon^{\alpha\beta\gamma} \Rightarrow H_3 = F_{12}, \ldots \qquad (40)$$

- Таким образом, при отражении трехмерных координат $x \to -x, y \to -y, z \to -z$ компоненты трехмерного вектора $\mathbf{E}$ изменят знак на противоположный, тогда как компоненты вектора $\mathbf{H}$ не изменят знак. Векторы, аналогичные, вектору $\mathbf{E}$, называются полярными векторы, а векторы, аналогичные $\mathbf{H}$ – аксиальными векторами (псевдовекторами). Поэтому скалярное произведение полярного и аксиального векторов является псевдоскаляром.
- Однако, величины вида $\overset{*}{F}_{ik}\overset{*}{F}{}^{ik}$, как и величины $(F_{ik}\,\overset{*}{F}{}^{ik})^2$ снова являются истинными скалярами.

- Обратимся теперь к трехмерному представлению тензора Максвелла. Согласно (17) $E_\alpha = F_{4\alpha}$ – по отношению к преобразованиям трехмерного евклидова пространства эти величины преобразуются как компоненты ковариантного вектора.
- Вектор напряженности магнитного поля определяется с помощью трехмерного тензора с gjvjom. (18):

$$H_\gamma = F_{\alpha\beta}\epsilon^{\alpha\beta\gamma} \Rightarrow H_3 = F_{12}, \ldots \tag{40}$$

- Таким образом, при отражении трехмерных координат $x \to -x, y \to -y, z \to -z$ компоненты трехмерного вектора $\mathbf{E}$ изменят знак на противоположный, тогда как компоненты вектора $\mathbf{H}$ не изменят знак. Векторы, аналогичные, вектору $\mathbf{E}$, называются полярными векторы, а векторы, аналогичные $\mathbf{H}$ – аксиальными векторами (псевдовекторами). Поэтому скалярное произведение полярного и аксиального векторов является псевдоскаляром.
- Однако, величины вида $\overset{*}{F}_{ik}\overset{*}{F}{}^{ik}$, как и величины $(F_{ik}\overset{*}{F}{}^{ik})^2$ снова являются истинными скалярами.

- Обратимся теперь к трехмерному представлению тензора Максвелла. Согласно (17) $E_\alpha = F_{4\alpha}$ – по отношению к преобразованиям трехмерного евклидова пространства эти величины преобразуются как компоненты ковариантного вектора.
- Вектор напряженности магнитного поля определяется с помощью трехмерного тензора с gjvjom. (18):

$$H_\gamma = F_{\alpha\beta}\epsilon^{\alpha\beta\gamma} \Rightarrow H_3 = F_{12}, \ldots \tag{40}$$

- Таким образом, при отражении трехмерных координат $x \to -x, y \to -y, z \to -z$ компоненты трехмерного вектора $\mathbf{E}$ изменят знак на противоположный, тогда как компоненты вектора $\mathbf{H}$ не изменят знак. Векторы, аналогичные, вектору $\mathbf{E}$, называются полярными векторы, а векторы, аналогичные $\mathbf{H}$ – аксиальными векторами (псевдовекторами). Поэтому скалярное произведение полярного и аксиального векторов является псевдоскаляром.
- Однако, величины вида $\overset{*}{F}_{ik}\overset{*}{F}{}^{ik}$, как и величины $(F_{ik}\overset{*}{F}{}^{ik})^2$ снова являются истинными скалярами.

- Обратимся теперь к трехмерному представлению тензора Максвелла. Согласно (17) $E_\alpha = F_{4\alpha}$ – по отношению к преобразованиям трехмерного евклидова пространства эти величины преобразуются как компоненты ковариантного вектора.
- Вектор напряженности магнитного поля определяется с помощью трехмерного тензора с gjvjom. (18):

$$H_\gamma = F_{\alpha\beta}\epsilon^{\alpha\beta\gamma} \Rightarrow H_3 = F_{12}, \ldots \tag{40}$$

- Таким образом, при отражении трехмерных координат $x \to -x, y \to -y, z \to -z$ компоненты трехмерного вектора $\mathbf{E}$ изменят знак на противоположный, тогда как компоненты вектора $\mathbf{H}$ не изменят знак. Векторы, аналогичные, вектору $\mathbf{E}$, называются полярными векторы, а векторы, аналогичные $\mathbf{H}$ – аксиальными векторами (псевдовекторами). Поэтому скалярное произведение полярного и аксиального векторов является псевдоскаляром.
- Однако, величины вида $\overset{*}{F}_{ik}\overset{*}{F}{}^{ik}$, как и величины $(F_{ik}\overset{*}{F}{}^{ik})^2$ снова являются истинными скалярами.

- Обратимся теперь к трехмерному представлению тензора Максвелла. Согласно (17) $E_\alpha = F_{4\alpha}$ – по отношению к преобразованиям трехмерного евклидова пространства эти величины преобразуются как компоненты ковариантного вектора.
- Вектор напряженности магнитного поля определяется с помощью трехмерного тензора с gjvjom. (18):

$$H_\gamma = F_{\alpha\beta}\epsilon^{\alpha\beta\gamma} \Rightarrow H_3 = F_{12}, \ldots \tag{40}$$

- Таким образом, при отражении трехмерных координат $x \to -x, y \to -y, z \to -z$ компоненты трехмерного вектора $\mathbf{E}$ изменят знак на противоположный, тогда как компоненты вектора $\mathbf{H}$ не изменят знак. Векторы, аналогичные, вектору $\mathbf{E}$, называются полярными векторы, а векторы, аналогичные $\mathbf{H}$ – аксиальными векторами (псевдовекторами). Поэтому скалярное произведение полярного и аксиального векторов является псевдоскаляром.
- Однако, величины вида $\overset{*}{F}_{ik}\overset{*}{F}{}^{ik}$, как и величины $(F_{ik}\overset{*}{F}{}^{ik})^2$ снова являются истинными скалярами.

- Обратимся теперь к трехмерному представлению тензора Максвелла. Согласно (17) $E_\alpha = F_{4\alpha}$ – по отношению к преобразованиям трехмерного евклидова пространства эти величины преобразуются как компоненты ковариантного вектора.
- Вектор напряженности магнитного поля определяется с помощью трехмерного тензора с gjvjom. (18):

$$H_\gamma = F_{\alpha\beta}\epsilon^{\alpha\beta\gamma} \Rightarrow H_3 = F_{12}, \ldots \qquad (40)$$

- Таким образом, при отражении трехмерных координат $x \to -x, y \to -y, z \to -z$ компоненты трехмерного вектора $\mathbf{E}$ изменят знак на противоположный, тогда как компоненты вектора $\mathbf{H}$ не изменят знак. Векторы, аналогичные, вектору $\mathbf{E}$, называются полярными векторы, а векторы, аналогичные $\mathbf{H}$ – аксиальными векторами (псевдовекторами). Поэтому скалярное произведение полярного и аксиального векторов является псевдоскаляром.
- Однако, величины вида $\overset{*}{F}_{ik}\overset{*}{F}{}^{ik}$, как и величины $\left(F_{ik}\overset{*}{F}{}^{ik}\right)^2$ снова являются истинными скалярами.

"3+1" – разбиение уравнений движения, интеграл энергии

- Как мы знаем, квадрат вектора 4-скорости есть константа:

$$(u,u) = \begin{cases} 1, & m \neq 0; \\ 0, & m = 0. \end{cases} \tag{41}$$

- Свернем уравнения движения заряда в электромагнитном поле (15) с вектором $g_{ij}u^j$, учитывая очевидное вследствие ковариантного постоянства метрического тензора соотношение $g_{ij}u^jD_su^i \equiv \frac{1}{2}D_sg_{ij}u^iu^j$:

$$mD_s(u,u) = \frac{e}{c}F_{ij}u^iu^j \equiv 0. \tag{42}$$

  Таким образом, норма вектора скорости частицы сохраняется в электромагнитном поле.

- Произведем «3+1» - разбиение уравнений движения (15), учитывая полученные ранее соотношения:

$$u^4 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};\ u^\alpha = \frac{v^\alpha}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};$$

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = mc^2u^4;\ \mathbf{p} = \frac{mc\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{43}$$

- Таким образом, получим (самостоятельно):

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{vH}]);$$

$$\frac{dE}{dt} = e(\mathbf{vE}). \tag{44}$$

- Как мы знаем, квадрат вектора 4-скорости есть константа:

$$(u,u) = \begin{cases} 1, & m \neq 0; \\ 0, & m = 0. \end{cases} \tag{41}$$

- Свернем уравнения движения заряда в электромагнитном поле (15) с вектором $g_{ij}u^j$, учитывая очевидное вследствие ковариантного постоянства метрического тензора соотношение $g_{ij}u^jD_su^i \equiv \frac{1}{2}D_sg_{ij}u^iu^j$:

$$m u_i D_s u^i = \frac{e}{c} F_{ij} u^i u^j = 0. \tag{42}$$

Таким образом, норма вектора скорости частицы сохраняется в электромагнитном поле.

- Произведем «3+1» - разбиение уравнений движения (15), учитывая полученные ранее соотношения:

$$u^4 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};\ u^\alpha = \frac{v^\alpha}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};$$

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = mc^2u^4;\ \mathbf{p} = \frac{mc\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{43}$$

- Таким образом, получим (самостоятельно):

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{vH}]);$$

$$\frac{dE}{dt} = e(\mathbf{vE}). \tag{44}$$

- Как мы знаем, квадрат вектора 4-скорости есть константа:

$$(u,u) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & m \neq 0; \\ 0, & m = 0. \end{array} \right. \qquad (41)$$

- Свернем уравнения движения заряда в электромагнитном поле (15) с вектором $g_{ij}u^j$, учитывая очевидное вследствие ковариантного постоянства метрического тензора соотношение $g_{ij}u^j D_s u^i \equiv \frac{1}{2} D_s g_{ij} u^i u^j$:

$$msD_s(u,u) = \frac{e}{c} F_{ij} u^i u^j \equiv 0. \qquad (42)$$

Таким образом, норма вектора скорости частицы сохраняется в электромагнитном поле.

- Произведем «3+1» - разбиение уравнений движения (15), учитывая полученные ранее соотношения:

$$u^4 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};\ u^\alpha = \frac{v^\alpha}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};$$

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = mc^2 u^4;\ \mathbf{p} = \frac{mc\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (43)$$

- Таким образом, получим (самостоятельно):

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{vH}]);$$

$$\frac{dE}{dt} = e(\mathbf{vE}). \qquad (44)$$

“3+1” – разбиение уравнений движения, интеграл энергии

- Как мы знаем, квадрат вектора 4-скорости есть константа:

$$(u,u) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & m \neq 0; \\ 0, & m = 0. \end{array} \right. \tag{41}$$

- Свернем уравнения движения заряда в электромагнитном поле (15) с вектором $g_{ij}u^j$, учитывая очевидное вследствие ковариантного постоянства метрического тензора соотношение $g_{ij}u^j D_s u^i \equiv \frac{1}{2} D_s g_{ij} u^i u^j$:

$$msD_s(u,u) = \frac{e}{c} F_{ij} u^i u^j \equiv 0. \tag{42}$$

Таким образом, норма вектора скорости частицы сохраняется в электромагнитном поле.

- Произведем «3+1» - разбиение уравнений движения (15), учитывая полученные ранее соотношения:

$$u^4 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};\ u^\alpha = \frac{v^\alpha}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};$$

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = mc^2 u^4;\ \mathbf{p} = \frac{mc\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{43}$$

- Таким образом, получим (самостоятельно):

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{vH}]);$$

$$\frac{dE}{dt} = e(\mathbf{vE}). \tag{44}$$

"3+1" – разбиение уравнений движения, интеграл энергии

- Как мы знаем, квадрат вектора 4-скорости есть константа:

$$(u,u) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & m \neq 0; \\ 0, & m = 0. \end{array} \right. \qquad (41)$$

- Свернем уравнения движения заряда в электромагнитном поле (15) с вектором $g_{ij}u^j$, учитывая очевидное вследствие ковариантного постоянства метрического тензора соотношение $g_{ij}u^jD_su^i \equiv \frac{1}{2}D_sg_{ij}u^iu^j$:

$$msD_s(u,u) = \frac{e}{c}F_{ij}u^iu^j \equiv 0. \qquad (42)$$

Таким образом, норма вектора скорости частицы сохраняется в электромагнитном поле.

- Произведем «3+1» - разбиение уравнений движения (15), учитывая полученные ранее соотношения:

$$u^4 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};\ u^\alpha = \frac{v^\alpha}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};$$

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = mc^2u^4;\ \mathbf{p} = \frac{mc\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (43)$$

- Таким образом, получим (самостоятельно):

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{vH}]);$$

$$\frac{dE}{dt} = e(\mathbf{vE}). \qquad (44)$$

- Как мы знаем, квадрат вектора 4-скорости есть константа:
$$(u,u) = \begin{cases} 1, & m \neq 0; \\ 0, & m = 0. \end{cases} \qquad (41)$$
- Свернем уравнения движения заряда в электромагнитном поле (15) с вектором $g_{ij}u^j$, учитывая очевидное вследствие ковариантного постоянства метрического тензора соотношение $g_{ij}u^j D_s u^i \equiv \frac{1}{2} D_s g_{ij} u^i u^j$:
$$msD_s(u,u) = \frac{e}{c} F_{ij} u^i u^j \equiv 0. \qquad (42)$$
Таким образом, норма вектора скорости частицы сохраняется в электромагнитном поле.
- Произведем «3+1» - разбиение уравнений движения (15), учитывая полученные ранее соотношения:
$$u^4 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};\ u^\alpha = \frac{v^\alpha}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};$$
$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = mc^2 u^4;\ \mathbf{p} = \frac{mc\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (43)$$
- Таким образом, получим (самостоятельно):
$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{vH}]);$$
$$\frac{dE}{dt} = e(\mathbf{vE}). \qquad (44)$$

- Как мы знаем, квадрат вектора 4-скорости есть константа:
$$(u,u)=\left\{\begin{array}{ll}1, & m\neq 0;\\ 0, & m=0.\end{array}\right. \qquad (41)$$
- Свернем уравнения движения заряда в электромагнитном поле (15) с вектором $g_{ij}u^j$, учитывая очевидное вследствие ковариантного постоянства метрического тензора соотношение $g_{ij}u^jD_su^i\equiv\frac{1}{2}D_sg_{ij}u^iu^j$:
$$msD_s(u,u)=\frac{e}{c}F_{ij}u^iu^j\equiv 0. \qquad (42)$$
Таким образом, норма вектора скорости частицы сохраняется в электромагнитном поле.
- Произведем «3+1» - разбиение уравнений движения (15), учитывая полученные ранее соотношения:
$$u^4=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};\ u^\alpha=\frac{v^\alpha}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};$$
$$E=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=mc^2u^4;\ \mathbf{p}=\frac{mc\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (43)$$
- Таким образом, получим (самостоятельно):
$$\frac{d\mathbf{p}}{dt}=e\Bigl(\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathbf{vH}]\Bigr);$$
$$\frac{dE}{dt}=e(\mathbf{vE}). \qquad (44)$$