Кетов Илья 09-711

Отчет по теме «метод простой итерации»

3. Пример. Решим с помощью функции `Iter_Volt.m` упражнение 1.19, с. 73, из книги [3]. Дано уравнение

$$y(x) = 1 + \int\limits_0^x y(s)ds, \quad x \in [0, 7]. \tag{5}$$

Точное решение этого уравнения $y(x) = e^x$. Надо найти приближенное решение этого уравнения методом последовательных приближений, основанным на использовании формулы трапеций с равномерной сеткой. Шаг сетки $h = 0.07$, относительная погрешность решения $\varepsilon = 10^{-3}$. На языке Matlab сценарий решения этого упражнения выглядит следующим образом.

Задача 1

На каком шаге итерационного процесса была достигнута требуемая точность?

Требуемая точность была достигнута на 16-ой итерации. Величина ошибки относительно точного решения составляет $err = 5e - 03$.

Задача 2

Исследуйте, как зависит от шага сетки точность вычислений и скорость сходимости итерационного процесса.

h	err	$iter$
0.5	0.396	26
0.25	0.76	22
0.1	0.01	21
0.05	2.7e-03	21
0.025	6.0e-04	21
0.01	1.0e-04	20
0.005	2.0e-05	20
0.0025	3.2e-06	20
0.001	3.1e-06	20

Таблица 1. Зависимость точности вычислений и скорости сходимости итерационного процесса от шага сетки при $eps = 1.0e - 05$.

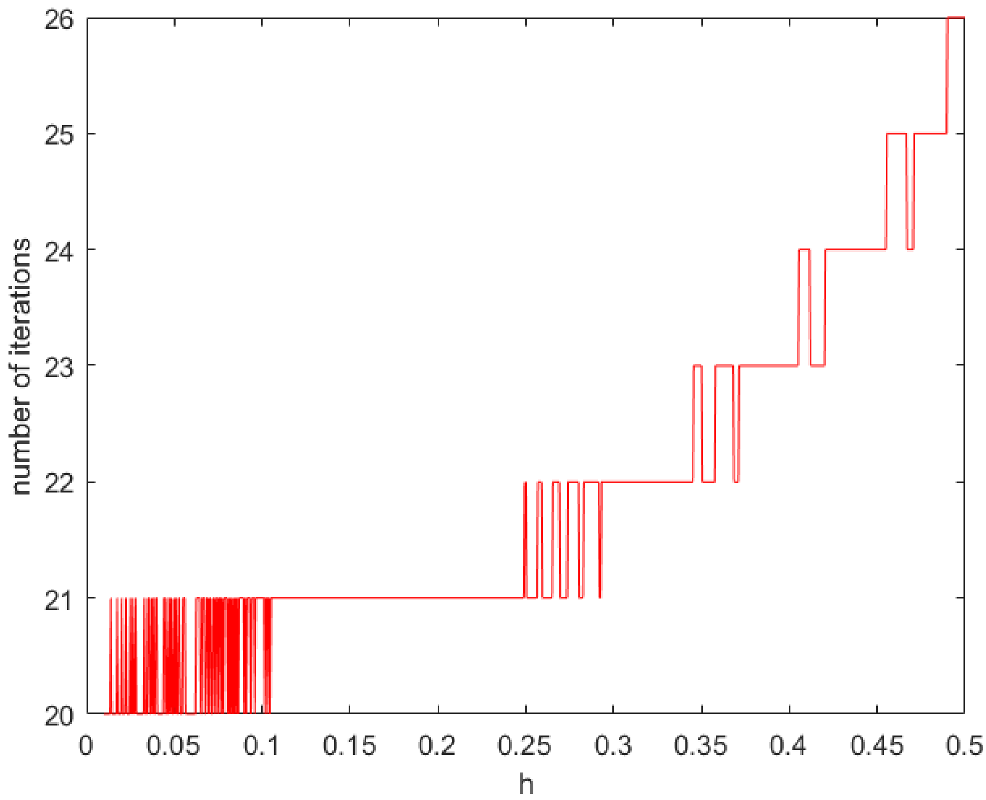

Рисунок 1. Зависимость скорости сходимости итерационного процесса от шага сетки h при $eps = 1.0e - 05$.

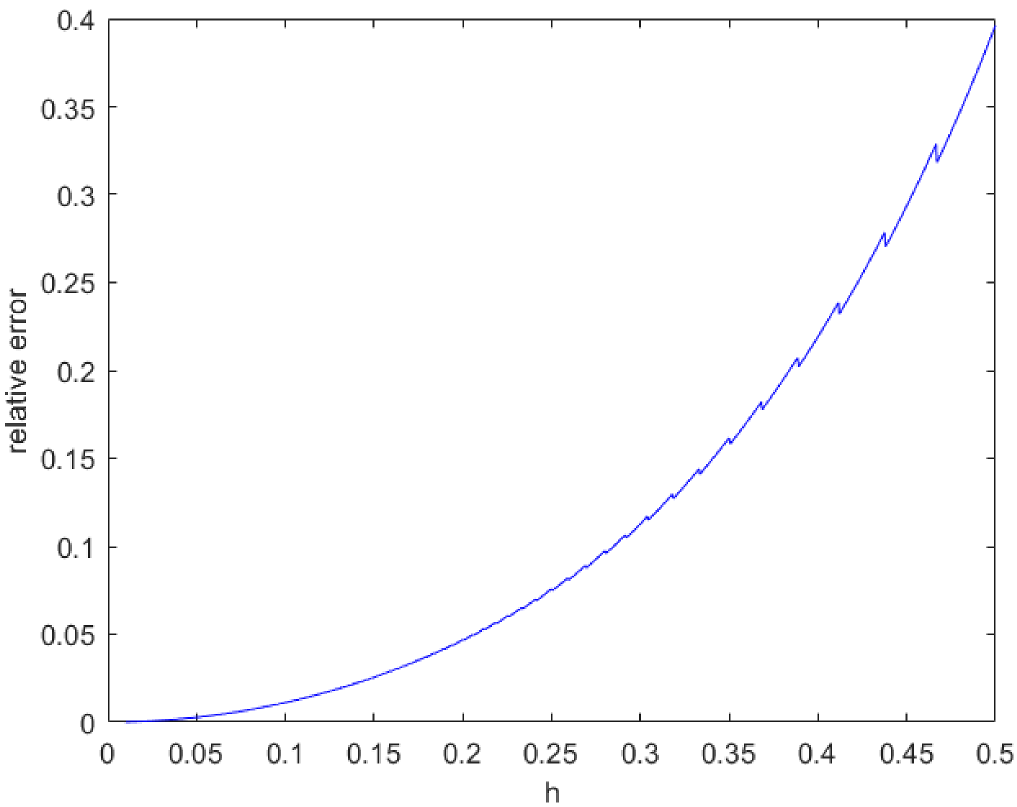

Рисунок 2. Зависимость величины относительной ошибки от шага h при $eps = 1.0e - 05$, h меняется от 0.01 до 0.5 .

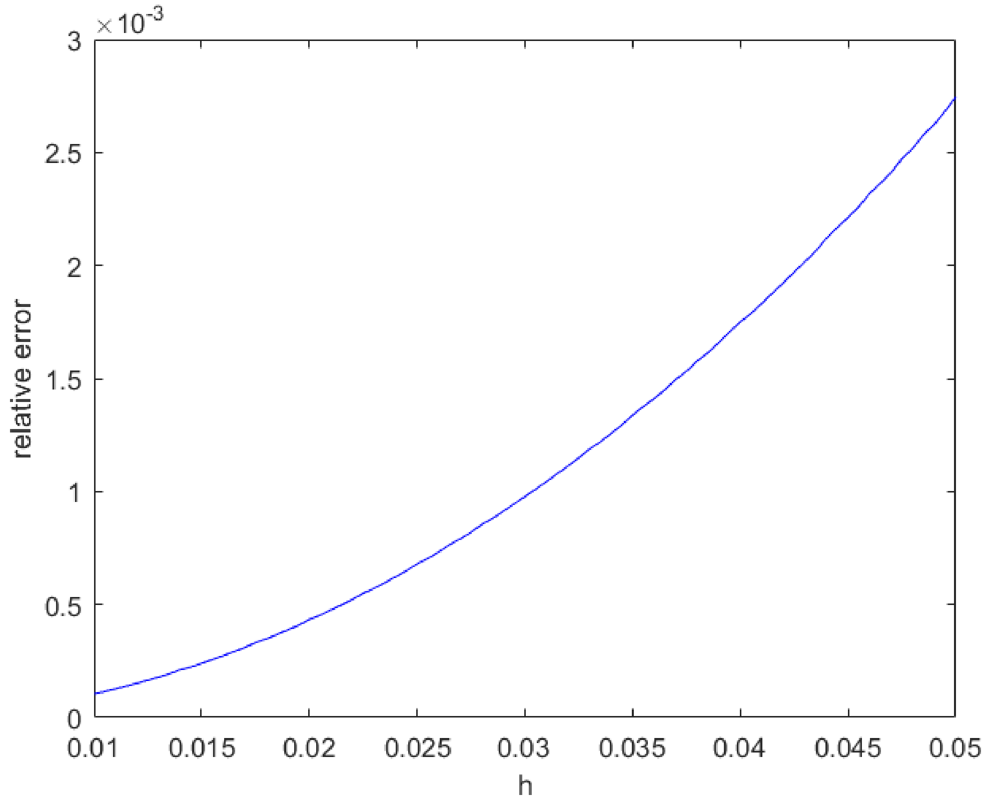

Рисунок 3. Зависимость величины относительной ошибки от шага h при $eps = 1.0e - 05$, h меняется от 0.01 до 0.05 .

Вывод:
Количество итераций и величина относительной ошибки уменьшаются вместе с уменьшением величина шага сетки. По результатам графиков, можно сказать, что лучше следует выбирать шаг сетки из диапазона от 0.01 до 0.05, в таком случае максимальная величина относительно ошибки не будет превосходить $3.0e - 03$, а количество итераций составит не более 21.

Задача 3

3) С помощью функции `Iter_Volt.m` найдите приближенное решение уравнения

$$y(x) = x - \int_0^x (x - s)y(s)ds, \quad x \in [0, 2\pi].$$

Его точное решение $y(x) = \sin x$ (см. пример 1.18., с. 72, [3]).

Код

```
clc
clear all
close all
```

```
%% Входные параметры
a = 0; b = 2*pi;
h = 0.1;
eps = 1.0e-05;
n = numel(h);
%% Ядро уравнения
K = @(x,s) - (x - s);
%% Правая часть
f = @(x) x;
%% Точное решение
y = @(x) sin(x);
%% Вычисления
x = a:h:b;
[yApprox,iter]=IterVolt(x,h,eps,f,K);
yExact = y(x);
%% Графики
figure('Name','Graphs of the exact and the appr.
solutions');
plot(x,yApprox,'.r'); hold on;
plot(x,yExact);       hold on;
xlabel('x');
ylabel('y');
legend('appr. solution','exact solution')
axis([0 2*pi -1 1]);
%% Ошибка
err = norm(yExact - yApprox,inf)/norm(yExact,inf);
fprintf('Ошибка аппроксимации err = %f \n', err)
fprintf('Количество итераций iter = %.0f \n', iter)
```

Результаты

```
Ошибка аппроксимации err = 0.002477
Количество итераций iter = 11
```

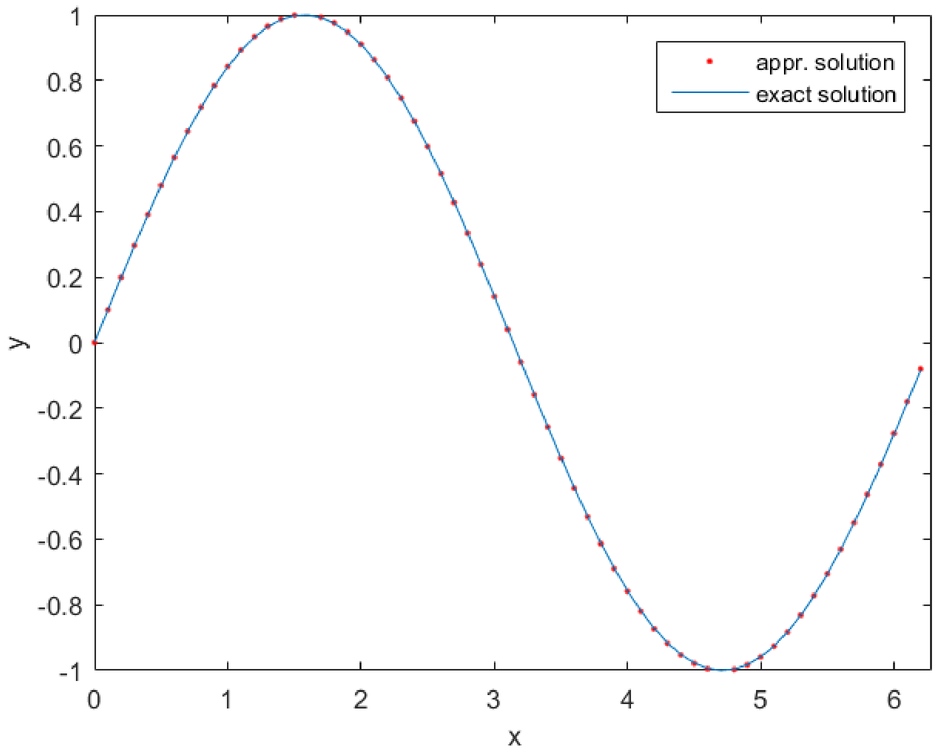

Рисунок 4. Графики точного и приближенного решений при $eps = 1.0e - 05$, h = 0.01.

Исследуем величину относительной ошибки и скорость сходимости метода при различных значениях h и фиксированном eps

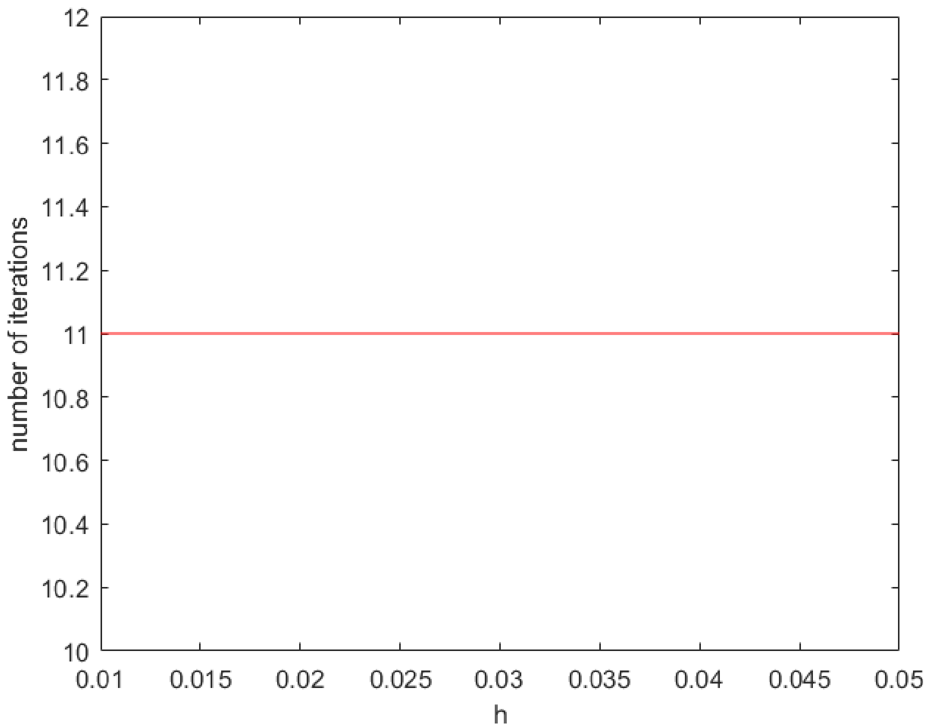

Рисунок 5. Скорость сходимости метода при $eps = 1.0e - 05$, h меняется от 0.01 до 0.05.

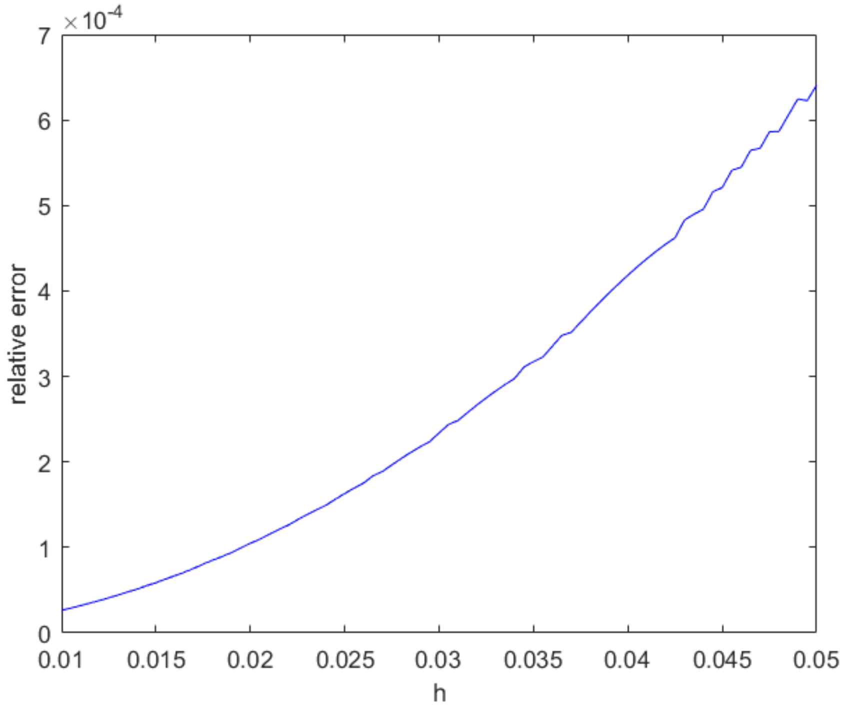

Рисунок 6. Величина относительной ошибки при $eps = 1.0e - 05$, h меняется от 0.01 до 0.05.

Вывод: Для данной задачи количество итераций, при выбранном диапазон изменения шага, не изменяется. Величина относительной ошибки увеличивается с уменьшением количества узлов сетки по экспоненциальному закону.

Задача 4

Напишите функцию, реализующую метод последовательных приближений, на основе квадратурной формулы Симпсона (12), с. 9. Решите с помощью этой функции уравнения из этого параграфа и сравните эффективность применения метода Симпсона с использованием метода трапеций.

Будем решать следующее уравнение:

$$y(x) = x - \int_0^x (x - s) y(s) ds, \quad x \in [0, 2\pi].$$

Его точное решение $y(x) = \sin x$ (см. пример 1.18., с. 72, [3]).

Сравним точность вычислений методов при различном количестве итераций

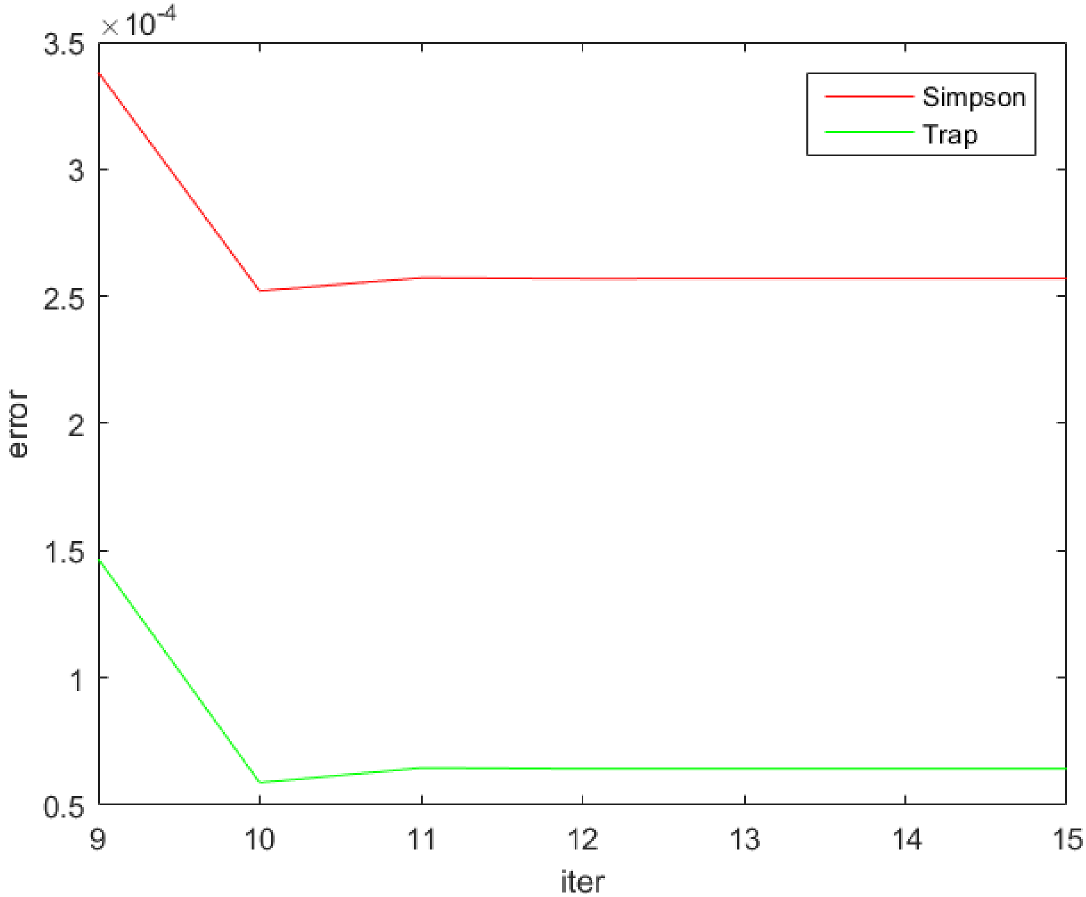

Рисунок 6. Точность вычислений метода Симпсона и метода квадратуры трапеции при различном количестве итераций.