Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

А. М. Бикчентаев, Идеальные F-нормы на C^*-алгебрах, *Изв. вузов. Матем.*, 2015, номер 5, 69–74

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 178.213.242.77
2 ноября 2016 г., 11:11:25

Известия вузов. Математика
2015, №5, с. 69–74

http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Краткое сообщение

А.М. БИКЧЕНТАЕВ

ИДЕАЛЬНЫЕ F-НОРМЫ НА C^*-АЛГЕБРАХ

Аннотация. Показано, что каждая мера некомпактности на W^*-алгебре является идеальной F-псевдонормой. Установлен критерий правой фредгольмовости элемента относительно W^*-алгебры. Доказано, что максимум расстояния по идеальной F-псевдонорме от положительного элемента до подмножества всех изометрий унитальной C^*-алгебры реализуется на элементе $-I$, где I — единица C^*-алгебры. Получена оценка идеальной F-псевдонормы разности двух конечных произведений элементов единичного шара C^*-алгебры. Найден критерий сходимости по полной идеальной F-норме для пары рядов из элементов W^*-алгебры.

Ключевые слова: C^*-алгебра, W^*-алгебра, след, гильбертово пространство, линейный оператор, фредгольмов оператор, изометрия, унитарный оператор, компактный оператор, идеал, идеальная F-норма, мера некомпактности.

УДК: 517.983 : 517.986

Введение. Исследованы идеальные F-нормы на C^*-алгебрах. Показано, что каждая мера некомпактности на W^*-алгебре является идеальной F-псевдонормой. Установлен критерий правой фредгольмовости элемента относительно W^*-алгебры. Доказано, что минимум расстояния по идеальной полунорме от произвольного элемента до эрмитовой (соответственно косоэрмитовой) части C^*-алгебры реализуется на эрмитовой (соответственно косоэрмитовой) части этого элемента. Показано, что максимум расстояния по идеальной F-псевдонорме от положительного элемента до подмножества всех изометрий унитальной C^*-алгебры реализуется на элементе $-I$. Получена оценка идеальной F-псевдонормы разности двух конечных произведений элементов единичного шара C^*-алгебры. Найден критерий сходимости по полной идеальной F-норме для пары рядов из элементов W^*-алгебры.

1. Определения и обозначения. C^*-алгеброй называется комплексная банахова $*$-алгебра $\mathcal{A}$ такая, что $\|A^*A\| = \|A\|^2$ для всех $A \in \mathcal{A}$. W^*-алгеброй называется C^*-алгебра $\mathcal{A}$, имеющая преддвойственное банахово пространство $\mathcal{A}_*$: $\mathcal{A} \simeq (\mathcal{A}_*)^*$. Для C^*-алгебры $\mathcal{A}$ через $\mathcal{A}^{\mathrm{sa}}$ и $\mathcal{A}^+$ будем обозначать ее подмножества эрмитовых элементов и положительных элементов соответственно. Пусть $\mathcal{A}^1 = \{A \in \mathcal{A} : \|A\| \le 1\}$. Если $A \in \mathcal{A}$, то $|A| = \sqrt{A^*A} \in \mathcal{A}^+$, $\Re A = (A + A^*)/2$ и $\Im A = (A - A^*)/(2i)$ лежат в $\mathcal{A}^{\mathrm{sa}}$. Для унитальной $\mathcal{A}$ через $\mathcal{A}^{\mathrm{u}}$ и $\mathcal{A}^{\mathrm{iso}}$ будем обозначать ее подмножества унитарных элементов ($A^*A = AA^* = I$) и изометрий ($A^*A = I$) соответственно.

Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ — W^*-алгебра всех линейных ограниченных операторов в $\mathcal{H}$. Любую C^*-алгебру можно реализовать как C^*-подалгебру

Поступила 13.10.2014

в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ для некоторого гильбертова пространства $\mathcal{H}$ (И.М. Гельфанд–М.А. Наймарк; см. [1], теорема 3.4.1).

Пусть $\mathcal{A}$ — W^*-алгебра. Для проекторов $P, Q \in \mathcal{A}$ пишем $P \sim Q$, если $P = U^*U$ и $Q = UU^*$ с некоторым $U \in \mathcal{A}$. Проектор $P \in \mathcal{A}$ называется *конечным*, если из $P \sim Q \leq P$ следует $P = Q$; $\mathcal{A}$ называется *конечной*, если проектор I конечен. Через $\mathcal{F}$ обозначим идеал, порожденный конечными относительно $\mathcal{A}$ проекторами. Равномерное замыкание $\mathcal{F}$ образует идеал $\mathcal{K}$ компактных (относительно $\mathcal{A}$) элементов. Пусть $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{K}$ — каноническое отображение. Элемент $A \in \mathcal{A}$ называется правым фредгольмовым относительно $\mathcal{A}$, если $\pi(A)$ обратим справа в $\mathcal{A}/\mathcal{K}$. Множество всех таких элементов обозначим через $\Phi^-(\mathcal{A})$.

2. Основные результаты. Пусть $\mathcal{A}$ — C^*-алгебра.

Лемма 1 ([1], теорема 2.2.5, п. (2))**.** *Если $A, B \in \mathcal{A}^{\mathrm{sa}}$ и $C \in \mathcal{A}$, то из неравенства $A \leq B$ следует $CAC^* \leq CBC^*$.*

Лемма 2 ([1], теорема 2.2.6)**.** *Если $A, B \in \mathcal{A}^+$, то из неравенства $A \leq B$ вытекает $\sqrt{A} \leq \sqrt{B}$.*

Лемма 3. *Если $A, B \in \mathcal{A}$, то $|BA| \leq \|B\|\,|A|$.*

Определение 1. Отображение $\rho : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ называется идеальной F-псевдонормой, если $\rho(0) = 0$ и выполнены условия

(i) $\rho(A) = \rho(A^*) = \rho(|A|)$ для всех $A \in \mathcal{A}$,

(ii) $\rho(A) \leq \rho(B)$ для всех $A, B \in \mathcal{A}^+$ с $A \leq B$,

(iii) $\rho(A + B) \leq \rho(A) + \rho(B)$ для всех $A, B \in \mathcal{A}$.

При этом множество $J_\rho = \{A \in \mathcal{A} : \rho(A) < +\infty\}$ является $*$-идеалом в $\mathcal{A}$. Например, если $A \in J_\rho$ и $B \in \mathcal{A}$, то в силу леммы 3 имеем

$$\rho(BA) = \rho(|BA|) \leq \rho(\|B\|\,|A|) \leq \rho(([\|B\|] + 1)|A|) \leq ([\|B\|] + 1)\rho(|A|) < +\infty,$$

где $[a]$ — целая часть числа a. Естественными являются условия

(iv) $\rho(\varepsilon A) \to 0$ $(\varepsilon \to 0+)$ для всех $A \in J_\rho \bigcap \mathcal{A}^+$,

(v) $\rho(A^*A) = \rho(AA^*)$ для всех $A \in \mathcal{A}$.

Отображение $\rho : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ называется идеальной F-нормой, если $\rho(A) = 0 \Longleftrightarrow A = 0$ и выполнены условия (i)–(iv). Если $\mathcal{A}$ унитальна и $\rho : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+$ удовлетворяет условию (ii), то (iv) равносильно условию

(iv)$'$ $\rho(\varepsilon I) \to 0$ $(\varepsilon \to 0+)$,

поскольку $0 \leq \varepsilon A \leq \varepsilon\|A\|I$ для всех $\varepsilon > 0$ и $A \in \mathcal{A}^+$, при этом имеем $\rho(0) = 0$.

Для W^*-алгебр $\mathcal{A}$ отображения $\rho : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ со свойствами (i)–(iii) исследованы в [2]–[4]. Для широкого класса отображений $\rho : \mathcal{A}^+ \to [0, +\infty]$ со свойствами (ii), (v) и

(iii)$'$ $\rho(A + B) \leq \rho(A) + \rho(B)$ для всех $A, B \in \mathcal{A}^+$

получены представления через положительные элементы $\mathcal{A}_*$: в [5] для абелевой $\mathcal{A}$ и в [6] для атомической $\mathcal{A}$.

Лемма 4. *Пусть $\mathcal{A}$ — унитальная C^*-алгебра и $\rho : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ удовлетворяет условию* (i)*. Тогда $\rho(A) = \rho(UAV^*)$ для всех $A \in \mathcal{A}$ и $U, V \in \mathcal{A}^{\mathrm{iso}}$. Если $\mathcal{A}$ W^*-алгебра и ρ удовлетворяет еще и условию* (ii)*, то ρ удовлетворяет* (v)*.*

Доказательство. Имеем $|UX| = |X|$ для всех $X \in \mathcal{A}$ и $U \in \mathcal{A}^{\mathrm{iso}}$. Пусть $B = AV^*$, тогда $\rho(UAV^*) = \rho(UB) = \rho(|UB|) = \rho(B) = \rho(|B^*|) = \rho(|VA^*|) = \rho(|A^*|) = \rho(A)$.

Пусть $\mathcal{A}$ — W^*-алгебра и ρ удовлетворяет (i) и (ii), $A \in \mathcal{A}$ и $A^* = U|A^*|$ — полярное разложение. Тогда $U \in \mathcal{A}^1$ и $|A^*| \in \mathcal{A}^+$, $|A| = U|A^*|U^*$ и $A^*A = UAA^*U^*$. Пусть $B = AA^*U^*$, тогда $|UB| \leq |B|$ в силу леммы 3. Имеем

$$\rho(A^*A) = \rho(UB) = \rho(|UB|) \leq \rho(|B|) = \rho(B) = \rho(AA^*U^*) = \rho(|(AA^*U^*)^*|) = \rho(|UAA^*|) \leq \rho(AA^*).$$

Заменив A на A^*, с учетом равенства $(A^*)^* = A$, получаем $\rho(AA^*) \leq \rho(A^*A)$ для всех $A \in \mathcal{A}$. $\square$

Определение 2 ([7], определение 2.1)**.** Пусть $\mathcal{A}$ — W^*-алгебра. Отображение $\delta : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+$ называется мерой некомпактности, если выполнены условия

(a) δ является полунормой на $\mathcal{A}$,
(b) $\delta(A) = 0 \Longleftrightarrow A \in \mathcal{K}$,
(c) $\delta(A) \leq \|A\|$ для всех $A \in \mathcal{A}$,
(d) $\delta(AB) \leq \delta(A)\delta(B)$ для всех $A, B \in \mathcal{A}$.

Например, $\alpha(A) = \inf\{\|A - K\| \,\big|\, K \in \mathcal{K}\}$ является мерой некомпактности на $\mathcal{A}$. Хорошо известно, что алгебра Калкина $\mathcal{A}/\mathcal{K}$ относительно нормы, индуцированной α, является C^*-алгеброй. Так как $\delta(A) = \delta(A + K)$ для всех $K \in \mathcal{K}$ и мер некомпактности δ, то из (c) следует $\delta(A) \leq \alpha(A)$ для всех $A \in \mathcal{A}$.

Предложение 1. *Каждая мера некомпактности δ на W^*-алгебре $\mathcal{A}$ удовлетворяет условиям* (i)–(v).

Для проверки (i) заметим, что для $A \in \mathcal{A}$ равенство $\delta(A) = \delta(|A|)$ приведено в ([7], с. 366, замечание (4)). Если $A = U|A|$ — полярное разложение, то $U \in \mathcal{A}^1$ и $\delta(A^*) = \delta(|A|U^*) \leq \delta(|A|)\delta(U^*) \leq \|U^*\|\delta(A) \leq \delta(A)$. Поменяв A и A^* ролями, получаем $\delta(A) \leq \delta(A^*)$.

Для проверки (ii) выберем $A, B \in \mathcal{A}^+$ с $A \leq B$. Тогда существует такой элемент $C \in \mathcal{A}^1$, что $A = CBC^*$ ([8], гл. 1, раздел 1, лемма 2). В силу (d) и (c) имеем

$$\delta(A) = \delta(CBC^*) \leq \|C\|\,\|C^*\|\delta(B) \leq \delta(B).$$

Свойства (iii) и (iv) вытекают из (a); теперь (v) следует из леммы 4. $\square$

Из ([7], теорема 2.4) и предложения 1 вытекает

Следствие 1. Пусть δ — мера некомпактности на W^*-алгебре $\mathcal{A}$ и $A \in \mathcal{A}$. Элемент $A \in \Phi^-(\mathcal{A})$ тогда и только тогда, когда существует такая константа $c > 0$, что $\delta(BA) \geq c\delta(B)$ для всех $B \in \mathcal{A}$.

Заметим, что в ([7], с. 367) это утверждение было приведено при “дополнительном” требовании $\delta(T) = \delta(T^*)$, $T \in \mathcal{A}$.

Лемма 5. *Пусть $\mathcal{A}$ — C^*-алгебра и $\rho : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ удовлетворяет условиям* (ii) *и* (v). *Тогда $\rho(\sqrt{A_1}A_2\sqrt{A_1}) \leq \rho(\sqrt{A_2}B_1\sqrt{A_2}) \leq \rho(\sqrt{B_1}B_2\sqrt{B_1})$ для всех $A_k, B_k \in \mathcal{A}$ с $A_k \leq B_k$, $k = 1, 2$.*

Лемма 1 дает $\sqrt{A_2}A_1\sqrt{A_2} \leq \sqrt{A_2}B_1\sqrt{A_2}$ и $\sqrt{B_1}A_2\sqrt{B_1} \leq \sqrt{B_1}B_2\sqrt{B_1}$, поэтому

$$\rho(\sqrt{A_1}A_2\sqrt{A_1}) = \rho(\sqrt{A_2}A_1\sqrt{A_2}) \leq \rho(\sqrt{A_2}B_1\sqrt{A_2}) = \rho(\sqrt{B_1}A_2\sqrt{B_1}) \leq \rho(\sqrt{B_1}B_2\sqrt{B_1}).$$

Предложение 2. *Пусть $\mathcal{A}$ — унитальная C^*-алгебра и $\rho : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ удовлетворяет условию* (ii). *Тогда $\rho(A + B) \leq \rho(\sqrt{I + B}(I + A)\sqrt{I + B})$ для всех $A \in \mathcal{A}^+ \bigcap \mathcal{A}^1$ и $B \in \mathcal{A}^+$. Если ρ удовлетворяет еще и условию* (v), *то $\rho(\sqrt{I + B}(I + A)\sqrt{I + B}) \leq \rho(e^{B/2}e^Ae^{B/2})$ для всех $A, B \in \mathcal{A}^+$.*

Доказательство. Поскольку $0 \leq A \leq I$, в силу леммы 1 имеем

$$A + B \leq I + B + \sqrt{I + B}A\sqrt{I + B} = \sqrt{I + B}(I + A)\sqrt{I + B}.$$

Так как $I + X \leq e^X$ для всех $X \in \mathcal{A}^+$, можно применить лемму 5. $\square$

Предложение 3. *Пусть $\mathcal{A}$ — C^*-алгебра, $A \in \mathcal{A}$, отображение $\rho : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ удовлетворяет условию* (iii) *и $\rho(X) = \rho(-X) = \rho(X^*) = 2\rho(X/2)$ для всех $X \in \mathcal{A}$. Тогда $\rho(A - \Re A) \leq \rho(A - B)$ и $\rho(A - i\Im A) \leq \rho(A - iB)$ для всех $B \in \mathcal{A}^{\mathrm{sa}}$.*

Таким образом, $\inf\limits_{B\in\mathcal{A}^{\rm sa}} \rho(A-B) = \rho(A-\Re A)$ и $\inf\limits_{B\in\mathcal{A}^{\rm sa}} \rho(A-iB) = \rho(A-i\Im A)$ для всех $A\in\mathcal{A}$. Утверждение вытекает из равенств

$$A-\Re A = \frac{A-B}{2} - \frac{A^*-B}{2} = \frac{A-B}{2} - \frac{(A-B)^*}{2},$$
$$A-i\Im A = \frac{A-iB}{2} + \frac{A^*+iB}{2} = \frac{A-iB}{2} + \frac{(A-iB)^*}{2}. \qquad \square$$

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{A}$ — унитальная C^*-алгебра и $\rho:\mathcal{A}^+\to\mathbb{R}^+$ удовлетворяет условиям* (ii), (iii)$'$, (iv)$'$ *и* (v). *Тогда $\rho(|A-U|)\le\rho(A+I)$ для всех $A\in\mathcal{A}^+$ и $U\in\mathcal{A}^{\rm iso}$.*

Доказательство. В силу ([9], теорема 4.2) имеем

$$\forall\varepsilon>0\ \exists V,W\in\mathcal{A}^{\rm u}\ \ (|A-U|\le VAV^*+W|U|W^*+\varepsilon I = V(A+I)V^*+\varepsilon I).$$

В силу свойств ρ и леммы 4 получаем $\rho(|A-U|)\le\rho(V(A+I)V^*+\varepsilon I)\le\rho(A+I)+\rho(\varepsilon I)$. Совершив предельный переход при $\varepsilon\to 0+$, завершаем доказательство. $\square$

Таким образом, $\sup\limits_{U\in\mathcal{A}^{\rm iso}} \rho(|A-U|) = \rho(A-(-I))$ для всех $A\in\mathcal{A}^+$. Другими словами, максимальное "ρ-расстояние" от элемента $A\in\mathcal{A}^+$ до множества $\mathcal{A}^{\rm iso}$ реализуется на элементе $U_0=-I$. Поскольку $U_0\in\mathcal{A}^{\rm u}$, имеем $\sup\limits_{U\in\mathcal{A}^{\rm u}} \rho(|A-U|) = \rho(A-(-I))$.

Пусть J — $*$-идеал в унитальной C^*-алгебре $\mathcal{A}$ и $A\in\mathcal{A}^+$. Если $U-A\in J$ для некоторого $U\in\mathcal{A}^{\rm iso}$, то $I-A\in J$. Действительно, имеем $U^*-A\in J$ и $I-A^2=(U^*-A)(U+A)+U^*(U-A)-(U^*-A)U\in J$. Так как $I+A$ обратим, то $I-A=(I-A^2)(I+A)^{-1}\in J$.

Следствие 2. Пусть $\mathcal{A}$ — унитальная C^*-алгебра и $\rho:\mathcal{A}\to\mathbb{R}^+$ удовлетворяет условиям (i)–(iii), (iv)$'$ и (v). Если $A\in\mathcal{A}$ имеет полярное разложение $A=U|A|$ с $U\in\mathcal{A}^{\rm u}$, то

$$\sup_{V\in\mathcal{A}^{\rm iso}} \rho(A-V) = \sup_{V\in\mathcal{A}^{\rm u}} \rho(A-V) = \rho(A+U).$$

Доказательство. Для $V\in\mathcal{A}^{\rm iso}$ имеем $U^*V\in\mathcal{A}^{\rm iso}$. В силу леммы 4 и теоремы 1 получаем

$$\rho(A-V)=\rho(U|A|-V)=\rho(U(|A|-U^*V))=\rho(|A|-U^*V)\le$$
$$\le\rho(|A|+I)=\rho(U|A|+U)=\rho(A+U). \qquad \square$$

Если $\mathcal{A}$ — конечная W^*-алгебра, $A\in\mathcal{A}$ и $A=T|A|$ — полярное разложение с частичной изометрией T, то T можно продолжить до $U\in\mathcal{A}^{\rm u}$ со свойством $A=U|A|$ (см. [3], доказательство теоремы 2).

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{A}$ — C^*-алгебра и $\rho:\mathcal{A}\to[0,+\infty]$ удовлетворяет условиям* (i)–(iii). *Тогда*

$$\rho\Big(\prod_{k=1}^n A_k - \prod_{k=1}^n B_k\Big) \le \sum_{k=1}^n \rho(A_k-B_k) \quad \text{для всех} \quad A_k,B_k\in\mathcal{A}^1,\quad k=1,\dots,n. \tag{1}$$

Доказательство. В силу лемм 1–3 получаем

$$|((A_1-B_1)A_2)^*| = \sqrt{(A_1-B_1)A_2A_2^*(A_1-B_1)^*} \le |(A_1-B_1)^*|,$$
$$|B_1(A_2-B_2)| = \sqrt{(A_2-B_2)^*B_1^*B_1(A_2-B_2)} \le |A_2-B_2|.$$

Воспользуемся индукцией по $n\in\mathbb{N}$. Для $n=2$ имеем

$$\rho(A_1A_2-B_1B_2)=\rho((A_1-B_1)A_2+B_1(A_2-B_2))\le\rho(A_1-B_1)+\rho(A_2-B_2).$$

Предположение индукции: пусть (1) выполнено для всех $n = 1, 2, \ldots, m$. Тогда

$$\rho\Big(\prod_{k=1}^{m+1} A_k - \prod_{k=1}^{m+1} B_k\Big) \le \rho\Big(\prod_{k=1}^{m} A_k - \prod_{k=1}^{m} B_k\Big) + \rho(A_{m+1} - B_{m+1}) \le \sum_{k=1}^{m+1} \rho(A_k - B_k). \qquad \square$$

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{A}$ — C^*-алгебра, $\rho : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ — такая идеальная F-норма, что J_ρ полно относительно метрики $d_\rho(A, B) = \rho(A - B)$, $X_n, Y_n \in \mathcal{A}^{\mathrm{sa}}$ и $Z_n = X_n + iY_n$, $n \in \mathbb{N}$. Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n^2$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Z_n^2$ ρ-сходятся, то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |Z_n|^2$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |Z_n^*|^2$ также ρ-сходятся; для W^*-алгебры $\mathcal{A}$ верно и обратное утверждение.*

Доказательство. Если $A \in \mathcal{A}$, то $\rho(\Re A) \le \rho(A) + \rho(A^*) = 2\rho(A)$. Аналогично, $\rho(\Im A) \le 2\rho(A)$. Поэтому $\rho(A) \le \rho(\Re A) + \rho(\Im A) \le 4\rho(A)$ и ρ-сходимость последовательности элементов эквивалентна ρ-сходимости эрмитовых и косоэрмитовых частей этих элементов. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (X_n^2 - Y_n^2) = \Re \sum\limits_{n=1}^{\infty} (X_n^2 - Y_n^2 + i(X_nY_n + Y_nX_n)) = \Re \sum\limits_{n=1}^{\infty} Z_n^2$ ρ-сходится, то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Y_n^2$ ρ-сходится. Поскольку

$$|Z_n|^2 + |Z_n^*|^2 = 2X_n^2 + 2Y_n^2, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |Z_n|^2$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |Z_n^*|^2$ также ρ-сходятся.

Пусть теперь $\mathcal{A}$ — W^*-алгебра и ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |Z_n|^2$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |Z_n^*|^2$ ρ-сходятся. В силу (2) ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n^2$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Y_n^2$ также ρ-сходятся. Поэтому

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N} \ \ \forall k \ge N, \ \ \forall m \in \mathbb{N} \ \ \Big(\rho\Big(\sum_{n=k}^{k+m} (X_n^2 + Y_n^2)\Big) < \varepsilon\Big). \tag{3}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ и k, m выбраны в (3). Положим

$$A_{k,m} = \sum_{n=k}^{k+m} (X_n^2 + Y_n^2), \quad B_{k,m} = \sum_{n=k}^{k+m} (X_nY_n + Y_nX_n).$$

Так как $(X_n \pm Y_n)^2 \ge 0$, то $-(X_n^2 + Y_n^2) \le X_nY_n + Y_nX_n \le X_n^2 + Y_n^2$. Суммируя почленно эти двойные неравенства по всем $n = k, \ldots, k + m$, получаем $-A_{k,m} \le B_{k,m} \le A_{k,m}$. В силу ([4], теорема 1; [10]) найдется такой элемент $S \in \mathcal{A}^{\mathrm{u}} \bigcap \mathcal{A}^{\mathrm{sa}}$, что $2|B_{k,m}| \le A_{k,m} + SA_{k,m}S$. Тогда $S^2 = I$ и в силу определения ρ, леммы 4 и (3) имеем

$$\rho(B_{k,m}) \le \rho(2|B_{k,m}|) \le \rho(A_{k,m} + SA_{k,m}S) \le$$
$$\le \rho(A_{k,m}) + \rho(\sqrt{A_{k,m}}S^2\sqrt{A_{k,m}}) = 2\rho(A_{k,m}) < 2\varepsilon.$$

Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (X_nY_n + Y_nX_n)$ ρ-сходится. $\square$

Пример. Пусть τ — точный нормальный полуконечный след на W^*-алгебре $\mathcal{A}$ и число $0 < p < +\infty$. Определим отображение $\rho : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ формулой

$$\rho(A) = \begin{cases} \tau(|A|^p)^{1/p}, & \text{если } p > 1; \\ \tau(|A|^p), & \text{если } 0 < p \le 1. \end{cases}$$

Тогда ρ удовлетворяет условиям (i)–(v). Если $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ и $\tau = \mathrm{tr}$ — канонический след, то J_ρ совпадает с идеалом Шэттена–фон Неймана $\mathfrak{S}_p$. Оператор $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ имеет конечный порядок, если $A \in \mathfrak{S}_p$ для некоторого $p > 0$. Нижняя грань чисел p, при которых имеет место это соотношение, называется порядком оператора и обозначается $q(A)$, т. е. $q(A) = \inf\{p > 0 \mid A \in \mathfrak{S}_p\}$. Тогда $q(A + B) \le \max\{q(A), q(B)\}$ для всех $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ и q является идеальной F-псевдонормой, q не удовлетворяет (iv). Имеем $J_q = \bigcup\limits_{p>0} \mathfrak{S}_p$.

Литература

[1] Мерфи Дж. *C^*-алгебры и теория операторов* (Факториал, М., 1997).

[2] Бикчентаев А.М. *Неравенство треугольника для некоторых пространств измеримых операторов*, Конструктивная теория функций и функциональный анализ, № 8, с. 23–32 (Изд-во КГУ, Казань, 1992).

[3] Бикчентаев А.М. *О минимальности топологии сходимости по мере на конечных алгебрах фон Неймана*, Матем. заметки **75** (3), 342–349 (2004).

[4] Бикчентаев А.М. *Оператор блочного проектирования в нормированных идеальных пространствах измеримых операторов*, Изв. вузов. Матем., № 2, 86–91 (2012).

[5] Бикчентаев А.М. *О задаче Хаагерупа о субаддитивных весах на W^*-алгебрах*, Изв. вузов. Матем., № 10, 94–98 (2011).

[6] Бикчентаев А.М. *О задаче Хаагерупа о субаддитивных весах на W^*-алгебрах.* II, Изв. вузов. Матем., № 12, 72–76 (2013).

[7] Ströh A., Swart J. *Measures of noncompactness of operators in von Neumann algebras*, Indiana Univ. Math. J. **38** (2), 365–375 (1989).

[8] Dixmier J. *Les algebres d'opérateurs dans l'espace Hilbertien* (*algebres de von Neumann*), 2nd ed. (Gauthier-Villars, Paris, 1969).

[9] Akemann C.A., Anderson J., Pedersen G.K. *Triangle inequalities in operator algebras*, Linear Multilinear Algebra **11** (2), 167–178 (1982).

[10] Bikchentaev A.M. *On Hermitian operators X and Y meeting the condition $-Y \le X \le Y$*, Lobachevskii J. Math. **34** (3), 227–233 (2013).

А.М. Бикчентаев

ведущий научный сотрудник,
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: Airat.Bikchentaev@kpfu.ru

A.M. Bikchentaev

Ideal F-norms on C^*-algebras

Abstract. We show that every noncompactness measure on a W^*-algebra is an ideal F-pseudonorm. We establish the criterion of right Fredholm property of an element with respect to W^*-algebra. We prove that the element $-I$ realizes maximum distance from the positive element to the subset of all isometries of unital C^*-algebra, here I is the unit of C^*-algebra. We also consider differences of two finite products of elements from the unit ball of C^*-algebra and obtain an estimate of their ideal F-pseudonorms. The paper is concluded with the convergence criterion in complete ideal F-norm for two series of elements from W^*-algebra.

Keywords: C^*-algebra, W^*-algebra, trace, Hilbert space, linear operator, Fredholm operator, isometry, unitary operator, compact operator, ideal, ideal F-norm, measure of noncompactness.

A.M. Bikchentaev

Leading Researcher,
Kazan (Volga Region) Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: Airat.Bikchentaev@kpfu.ru