Набережночелнинский институт (филиал)
федерального государственного автономного образовательного
учреждения высшего профессионального образования
«Казанский (Приволжский)
федеральный университет»

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Лабораторный практикум для студентов вузов

Набережные Челны, 2014

УДК 519.6 (075.8)
ББК 22.19я73
Е 70

Печатается по решению учебно-методического комиссии
Набережночелнинского филиала
федерального государственного автономного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Казанский (Приволжский)
федеральный университет»

протокол №5 от « 2 » октября 2014 г.

Рецензенты:

Кризский В.Н.	докт. ф-м. наук, профессор, зам. директора по научной работе и инновациям Стерлитамакского филиала ФГБОУ ВПО «Башскирский государственный университет».
Михайлов П.Н.	докт. ф-м. наук, профессор, зав. кафедры алгебры, геометрии и методики обучения математике Стерлитамкского филиала ФГБОУ ВПО «Башкирского государственного университета»

И.И. Еремина, Н.Н. Савицкая, С.К. Савицкий, С.Л. Хаустов Вычислительная математика. Лабораторный практикум для студентов (учебное пособие Гриф УМО РАЕ) / Учебное пособие для вузов. – Набережные Челны: Изд-во Набережноченинского института КФУ (филиала), 2014. – 168 с.: ил.

В учебном пособии рассматриваются основы теории погрешностей и численные методы решения различных классов прикладных задач. Пособие предназначено для изучения дисциплин «Численные методы», «Вычислительная математика» и составлено в соответствии с федеральным образовательным стандартом по направлениям 230100.62 Информатика и вычислительная техника, 210700.62 Инфокоммуникационные технологии и системы связи.

Учебное пособие содержит вариативную базу для самостоятельной работы по специализированным разделам науки «Вычислительная математика», предназначенным для организации деятельности специалиста, обладающего высоким уровнем информационной коммуникационной компетентности. Предложенный материал полезен студентам университетов, учителям информатики и др.

230100.62 Информатика и вычислительная техника (бакалавриат)
210700.62 Инфокоммуникационные технологии и системы связи (бакалавриат)
230700.62 Прикладная информатика в экономике (бакалавриат)

Блок Б2. Математический и естественно-научный цикл
Блок Б3. Профессиональный блок

ОГЛАВЛЕНИЕ

Тема 1. Элементарная теория погрешностей 5

Запись чисел в вычислительных машинах и ограничения точности вычислений ... 5

Лабораторная работа № 4 Элементарная теория погрешностей 9

Тема 2. Кодирование информации. 13

Лабораторная работа №1. Перевод чисел из одной позиционной системы счисления в другую 13

Лабораторная работа №2. Двоичная арифметика 21

Лабораторная работа №3. Основы машинной арифметики 25

Тема 3. Моделирование как метод познания.. 30

Постановка задачи 31

Этапы приближенного решения нелинейных уравнений 32

Тема 3. Итерационные методы решения нелинейных уравнений 36

Уточнение корней методом деления отрезка пополам 36

Лабораторная работа № 5 40

Метод бисекции 40

Лабораторная работа № 6 41

Метод хорд 41

Лабораторная работа № 7 43

Метод Ньютона 43

Лабораторная работа № 8 44

Метод простых итераций 44

Тема 3. Решение систем линейных уравнений 47

Лабораторная работа № 9 47

Работа с массивами констант 47

Лабораторная работа № 10 55

Решение систем линейных алгебраических уравнений в Excel. Метод Гаусса 55

Лабораторная работа № 11 62

Метод простых итераций 62

Тема 4. Интерполирование функций 66
Лабораторная работа № 12. 66
Метод Лагранжа 66
Тема 5. Приближенное интегрирование 68
Лабораторная работа №13. 68
Приближенное интегрирование с заданным шагом 68
Тема 6. Численное дифференцирование 74
Лабораторная работа №14. 74
Применение интерполирования 74

Тема 1. Элементарная теория погрешностей

Проведение вычислительного эксперимента предполагает исследование математической модели с помощью ЭВМ, а реализация численного метода средствами той или иной программной среды предполагает выполнение арифметических операций с приближенными значениями действительных чисел. Мерой точности приближенных чисел является погрешность. Погрешности могут возникать на разных этапах решения задачи. Отметим основные источники погрешностей при реализации вычислительного эксперимента.

Существенную погрешность может вносить построенное математическое модель, если в ней не учтены какие-либо важные черты, рассматриваемой задачи или область применимости. Кроме того, источником погрешности являются исходные данные, которые могут быть измерены с определенной степенью точности или значения исходных данных известны с некоторой степенью вероятности. Таким образом, из-за не точности модели и исходных данных формируется **неустранимая погрешность**. Её величина не может быть уменьшена ни до начала решения задачи, ни в процессе решения. Если R - точное решение некоторой задачи, а R_1 – значение, полученная в результате исследования модели для определенного набора исходных данных, то образовавшаяся при этом погрешность $\varepsilon_1 = R - R_1$.

Другим источником погрешности является выбранный для решения задачи численный метод, который дает приближенный результат, что может быть связана с заменой одного понятия другим более пригодным для вычислений. То есть вместо значения R_1 будет получен приближенный результат R_2. Погрешность $\varepsilon_2 = R_2 - R_1$ называется **погрешность метода**.

Погрешность метода может быть уменьшена путем изменения некоторого параметра (например, шага интегрирования). Данный вид погрешности доводят до величины в несколько раз меньшей погрешности исходных данных.

Еще одним источником погрешности является неизбежность округления значений при вычислениях, что связана с особенностями представления числе ЭВМ. Этот вид погрешности называется **погрешность округления** или **вычислительная погрешность**. Неизбежность округления приводит к получению результата R_2, который отличается от R_2 на величину $\varepsilon_3 = R_3 - R_2$. Эту погрешность можно сделать сколь угодно малой, сохраняя достаточное количество цифр в каждом из промежуточных результатов. Но при этом увеличивается продолжительность каждой операции.

Полная погрешность определяется как сумма, рассмотренных видов погрешностей

$$\varepsilon = R - R_3 = (R - R_1) + (R_1 - R_2) + (R_2 - R_3) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

При решении конкретных задач отдельный виды погрешностей могут отсутствовать или оказывать незначительное влияние на конечный результат. Для полного представления о точности получаемых результатов необходим полный анализ погрешностей всех видов.

Запись чисел в вычислительных машинах и ограничения точности вычислений

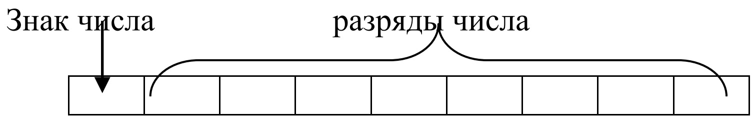
Точность расчетов, выполняемых на ЭВМ, всегда объективно ограничена и зависит от способа аппроксимации действительных чисел посредством конечного множества машинных представлений.

Обычно в ЭВМ используют два способа представления чисел:

- естественная (с фиксированной запятой)
- нормальная [нормализованная] (с плавающей запятой).

Особенность машинного представления чисел (для любой из указанных выше форм) – конечность разрядной сетки, в которой хранятся числа в компьютере.

Рассмотрим схему представления чисел с фиксированной запятой, на примере 8-разрядной сетки. Десятичный разделитель (запятая или точка) может оказаться в любом цифровом разряде сетки.



Естественная (с фиксированной запятой) (FIXED – POINT REPRESENTATION) форма представления чисел предполагает, что положение запятой, отделяющей целую часть от дробной, фиксировано в разрядной сетке машины. Для представления знака выделяется специальный разряд – знаковый. Обычно это крайний левый разряд. Для положительных чисел в знаковом разряде записывается 0, а для отрицательных 1.

Количество двоичных разрядов и положение запятой в разрядной сетке машины определяют такие важные характеристики ЭВМ, как точность и диапазон представляемых чисел. Так, например, для n–разрядной сетки точность (дискретность) равна 2^{-n}, а диапазон $0 \le |N| \le 2^{-1}-1$.

Обычно в ЭВМ используются два способа расположения фиксированной запятой: перед старшим разрядом или после младшего разряда. В первом случае ЭВМ работает только с числами, меньшими единицы (а), во втором – с целыми (б).

0	1	2	. . .	n–1	n
	2^{-1}	2^{-2}	. . .	$2^{-(n-1)}$	2^{-n}
Знак	Мантисса				

а) запятая перед старшим разрядом

0	1	2	. . .	n–1	n
	2^{n}	2^{n-1}	. . .	2^{1}	2^{0}
Знак	Мантисса				

б) запятая после младшего разряда

Такой способ представления чисел, позволяет решать многие практические задачи, но в то же время неудобен для представления слишком больших или, наоборот, слишком малых чисел. Кроме того, несет в себе ограничения точности из-за необходимости проведения в соответствие разрядов обрабатываемых чисел и связанных с этим округлений или может привести к переполнению (когда старший разряд числа не уменьшается в отведенной разрядной сетке). Точность можно увеличить за счет расширения разрядной сетки.

Более универсальным является представление действительных чисел в форме с плавающей запятой, главным достоинством которой является автоматическое масштабирование числа на каждом этапе обработки, что, с одной стороны, обеспечивает максимально возможную точность вычислений, а с другой – избавляет от необходимости принимать меры по предотвращению переполнения.

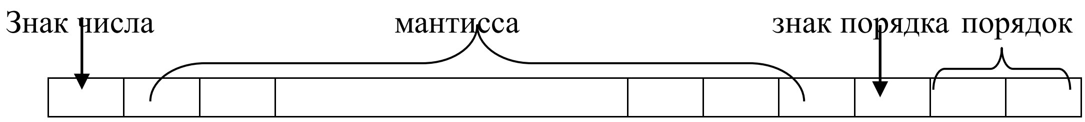
В этом случае число представляется в виде

$$x = \pm M \cdot 10^{\pm p}$$

где M – мантисса; p – порядок числа.

Особенность такой системы представления – неравномерность расположения чисел на числовой оси.

На хранение каждого из компонентов (знак числа, мантисса, знак порядка, порядок) отводится определенное количество разрядов в памяти компьютера.



В представлении, изображенном на рисунке, абсолютная величина порядка может выражаться максимальным двузначным числом 99.

Одна из причин накопления ошибок при выполнении арифметических действий в системе чисел с плавающей запятой – это запись конечных десятичных дробей бесконечными дробями в двоичной системе счисления. Например, десятичное число 0,1 в двоичной записи имеет бесконечное представление и оказывается представленным приближенно. Например, при добавлении на ЭВМ к единице 10 раз по 0,1 получим ответ не 2, а число 1,999…9.

Если обычным образом выполнять арифметические операции в системе чисел с плавающей запятой, то очень редко результат будет принадлежать этой же системе. Результат либо выйдет за пределы этой системы чисел (если он окажется больше максимального по модулю нулевого элемента этой системы), либо окажется между двумя числами из этой системы. В первом случае ситуация характеризуется возникновением переполнения или машинного нуля, во втором – вместо истинного результата появляется значение, которое является ближайшим к истинному результату числом из системы чисел с плавающей запятой. Особенности выполнения арифметических операций в системе чисел с плавающей запятой приводят к тому, что, например, для сложения и умножения сохраняются законы коммутативности, но законы ассоциативности и дистрибутивности для них не выполняются.

Длину разрядной сетки с фиксированной запятой в современных универсальных ЭВМ принято выбирать кратной байту (8 бит или 8 двоичных разрядов). В персональных ЭВМ используется разрядная сетка длиной 8, 16, 32 или 64 разряда. Для специализированных вычислителей возможны другая кратность и длина разрядной сетки.

Одним из важных преимуществ данной формы представления числа является возможность построения сравнительно несложных операционных устройств ЭВМ с высоким быстродействием, а недостатком – малый диапазон представления числа.

Нормальная (с плавающей запятой) (FLOATION – POINT REPRESENTATION) форма представления чисел позволяет значительно увеличить диапазон представления чисел.

Разрядная сетка с плавающей запятой.

0	1	2	. . .					n–1	n
	2^m	...	2^0		2^m	2^{m-1}	. . .	2^1	2^0
Знак	Порядок			Знак	Мантисса				

Представление числа в форме с плавающей запятой в общем виде определяется выражением $\mathbf{N=\pm M*2^{\pm p}}$, где М – мантисса числа, p – порядок, $\mathbf{2^p}$ характеристика числа. Знак числа совпадает со знаком мантиссы. Говорят, что число представлено в нормальной форме. Однако такое представление приводит к неоднозначности, поэтому мантисса М обычно представляется правильной дробью в нормализованном виде (первая цифра справа от запятой в числе должна быть отличной от нуля). Таким образом, значение нормализованной мантиссы должно удовлетворять неравенству $\mathbf{2^{-1}\le|M|<1}$. Для кодирования отрицательных чисел в ЭВМ применяют прямой, обратный и дополнительный коды. Обратный код числа получают инвертированием всех разрядов, а дополнительный код получают инвертированием всех разрядов и дальнейшим суммированием единицы с младшим разрядом.

Применение при вычислениях формы представления чисел с плавающей запятой обеспечивает единообразие при их записи и обработке, и что важно, в результате автоматического масштабирования числа на каждом этапе его обработки сокращается погрешность вычислений.

Различие правил обработки целых и нормальных чисел приводит к необходимости точного описания типов переменных перед их использованием в программах. Вторая причина описания типов состоит в оптимизации расходования памяти компьютера, поскольку числа разных типов требуют для хранения различных ресурсов памяти.

Иногда для кодирования отрицательных чисел в ЭВМ применяют модифицированные прямой, обратный и дополнительный коды. В модифицированных кодах для кодирования числа отводят два разряда, причем знак плюс кодируется сочетанием 00, а знак минус – 11. Два разряда под знак позволяют контролировать переполнение разрядной сетки отведенной под мантиссу числа при выполнении арифметических операций. В остальном модифицированные коды аналогичны обычным.

Определение погрешности

Число a называют **приближенным** для **точного** числа A, если a незначительно отличается от A и заменяет его в вычислениях.

Ошибкой называют разность $\Delta a = A - a$ (в некоторых учебниках $\Delta a = a - A$) имеем $A = a + \Delta a$.

Поскольку A обычно неизвестно, то ни величина Δa, ни даже ее знак неизвестны. Знак игнорируем, вводим понятие **абсолютной погрешности** $\Delta = |\Delta a| = |A - a|$.

Если точное значение известно, абсолютная погрешность легко находится. На практике, как правило, точное значение не известно. В этом случае для абсолютной погрешности находится оценка сверху.

Предельной абсолютной погрешностью Da называют всякое число, заведомо не меньшее абсолютной погрешности.

$\Delta = |A - a| <= \Delta a \quad => \quad a - \Delta a < A < a + \Delta a$ записывают: $A = a \pm \Delta a$

Всякое число, большее предельной абсолютной погрешности, может считаться предельной абсолютной погрешностью (возникает проблема выбора наименьшего значения, отраженная в названии - "предельность")

Относительной погрешностью q называют отношение

$\delta = \Delta / |A| \quad => \quad \Delta = |A| * \delta$

Аналогично вводим понятие **предельной относительной** погрешности Qa

$$\delta <= \delta a \quad => \quad \Delta <= |A| * \delta a \quad => \quad \Delta a = |A| * \delta a$$

Так как на практике A близко к a, в предварительных расчетах можно использовать $\Delta a = |a| * \delta a$

$$A = a * (1 \pm \delta a)$$

Связь между погрешностями

$\delta a = \Delta a / (a - \Delta a) \quad \Delta a = a * \delta a / (1 - \Delta a)$

доказать самостоятельно.

$$\Delta = \delta * A \le \delta a * (a + \Delta a) \Rightarrow \Delta a = \delta a * (a + \Delta a) \Rightarrow \Delta a = a * \delta a + \delta a * \Delta a \Rightarrow \Delta a (1 - \delta a) = a * Qa \Rightarrow \Delta a = a * \delta a / (1 - \delta a)$$

Источники погрешностей

Погрешности разделяются на две группы, - те, где их величину можно уменьшить, - устранимые, и неустранимые.

Различают:

- погрешность задачи /связана с построением(выбором) модели явления;

Математические соотношение редко точно отображают реальные явления: обычно они дают более или менее идеализированные модели.

- погрешность метода

Когда задача в точной постановке не решается, ее заменяют близкой по результатам приближенной задачей.

Выбор более сложно решаемой задачи иногда позволяет уменьшить погрешность ценой возрастания объема вычислений;

- погрешность округления (вычислительная)

погрешность уменьшается при сохранении большего количества значащих цифр промежуточных результатов, увеличивается объем вычислений, погрешность связана с системой счисления;

- остаточная

погрешность работы бесконечных процессов, уменьшается, если брать большее количество слагаемых в бесконечных рядах;

- погрешность инструментов

очень трудно, а ниже некоторого уровня - невозможно уменьшить, трудно оценить

- начальная (параметров)

погрешность исходных данных (неустранимые)

- погрешность действий

При выполнении действий над приближенными величинами, их погрешность переносится на результат, вычисляется по определенным правилам.

Лабораторная работа № 4
Элементарная теория погрешностей

Образец выполнения задания

1) 9/11=0.818; $\sqrt{18}$ = 4,24;

2) а) 72,353 (±0,026); б) 2,3544; δ = 0,2%;

3) а) 0,4357; б) 12,384.

1) Находим значения данных выражений с большим числом десятичных знаков:
 $a1 = 9/11 = 0{,}81818...$, $a_2 = \sqrt{18} = 4{,}2426...$.

Затем вычисляем предельные абсолютные погрешности, округляя их с избытком:
$\Delta(a1) = |\ 0{,}81818-0{,}818\ | <= 0{,}00019$, $\Delta(a_2) = |\ 4{,}2426- 4{,}241| <= 0{,}0027$.

Предельные относительные погрешности составляют
$\delta(a1) = 0{,}00019/0{,}818 = 0.00024 = 0.024\%$ $\delta(a2) = 0{,}0027/4{,}24 = 0.00064 = 0.064\%$

Так как $\delta(a1) < \delta(a2)$, то равенство 9/11=0,818 является более точным.

2) а) Пусть 72,353 (±0,026) = А. Согласно условию, погрешность a_a = 0,026 < 0,05; это означает, что в числе 72,353 верными в узком смысле являются цифры 7, 2, 3. По правилам округления найдем приближенное значение числа, сохранив десятые доли:

a1 = 72,4; Δ(a1) = 0,026 + 0,047 = 0,073.

Полученная погрешность больше 0,05; значит, нужно уменьшить число цифр в приближенном числе до двух:

a_2 = 72; Δ(a2) = 0,026 + 0,353 = 0,379.

Так как Δ(a2) < 0,5, то обе оставшиеся цифры верны в узком смысле.

б) Пусть a = 2,3544; δ(a) = 0,2%; тогда Δ(a2) = a δ(a) <= 0,00471. В данном числе верными в широком смысле являются три цифры, поэтому округляем его, сохраняя эти три цифры:

a1 =2,35; Δ(a1) = 0,0044+ 0,00471= 0,00911< 0,01.

Значит, и в округленном числе 2,35 все три цифры верны в широком смысле.

3) а) Так как все четыре числа a = 0,4357 верны в узком смысле, то абсолютная погрешность Δ(a) = 0,00005, а относительная погрешность δ(a) = $1/(2*4*10^3)$ = 0,000125 = 0,0125%.

б) Так как все пять цифр числа a =12,384 верны в широком смысле, то Δ(a) = 0,001; δ(a) = $1/(1*10^4)$ = 0,0001 =0,01%.

вариант	1 задание	2 задание	3 задание
	Определить, какое равенство точнее.	**Округлить сомнительные цифры числа, оставив верные знаки: а) в узком смысле: б) в широком смысле. Определить абсолютную погрешность результата.**	**Найти предельные абсолютные и относительные погрешности чисел, если они имеют только верные цифры: а) в узком смысле; б) в широком смысле.**
№ 1.	$\sqrt{44}$ = 6,63 или 19/41=0,463.	а) 22,553(±0,016); б) 2,8546; δ = 0,3%.	а) 0,2387; б) 42,884.
№ 2.	7/15 = 0,467 или $\sqrt{30}$ =5,48.	а) 17.2834; δ = 0,3%. б) 6,4257 (±0.0024).	а) 3.751; б) 0,537.
№ 3.	$\sqrt{10,5}$ = 3,24 или 4/17 = 0,235.	а) 34,834; δ = 0,1%; б) 0,5748 (±0,0034).	а) 11,445; б) 2,043.
№ 4.	15/7 = 2.14 или $\sqrt{10}$ = 3,l6.	а) 2.3485 (±0,0042); б) 0.34484; δ = 0,4%.	а) 2.3445; б) 0,745.
№ 5.	6/7 = 0,857	а) 5,435 (±0,0028);	а) 8,345; б) 0,288.

вариант	1 задание	2 задание	3 задание
	Определить, какое равенство точнее.	Округлить сомнительные цифры числа, оставив верные знаки: а) в узком смысле: б) в широком смысле. Определить абсолютную погрешность результата.	Найти предельные абсолютные и относительные погрешности чисел, если они имеют только верные цифры: а) в узком смысле; б) в широком смысле.
	или $\sqrt{4.8}$ = 2.19.	б) 10.8441; δ = 0,5%.	
№ 6.	12/11 = 1,091 или $\sqrt{6.8}$ = 2,61.	а) 8,24163; δ = 0.2%; б) 0,12356 (±0,00036).	а) 12,45; б) 3,4453.
№ 7.	2/21=0,095 или $\sqrt{22}$ = 4,69.	а) 2,4543 (±0.0032); б) 24,5643; δ = 0,1%.	а) 0,374; б) 4,348.
№8.	23/15=1,53 или $\sqrt{9.8}$ = 3,13.	а) 23,574; δ = 0,2%; б) 8,3445 (±0.0022).	а) 20.43; б) 0.576.
№ 9.	6/11=0,545 или $\sqrt{83}$ = 9,11.	а) 21,68563; δ = 0,3%; б) 3,7834 (±0,0041).	а) 41,72; б) 0.678.
№ 10.	17/19 = 0,895 или $\sqrt{52}$ = 7,21.	а) 13,537 (±0,0026); б) 7,521; δ = 0,12%.	а) 5,634; б) 0,0748.
№ 11.	21/29 = 0,723 или $\sqrt{44}$ = 6,63.	а) 0,3567; δ = 0,042%; б) 13,6253 (±0,0021).	а) 18,357; б) 2,16.
№ 12.	50/19 = 2,63 или $\sqrt{27}$ = 5,19.	а) 1.784 (±0,0063); б) 0,85637; δ = 0,21%.	а) 0,5746; б) 236,58.
№ 13.	13/17 = 0,764 или $\sqrt{31}$ = 5,56.	а) 3,6878 (±0.0013); б) 15,873; δ = 0,42%.	а) 14,862; б) 8,73.
№ 14.	7/22 = 0,318 или $\sqrt{13}$ = 3.60.	а) 27,1548 (±0.0016); б) 0,3945; δ = 0,16%.	0,3648; б) 21,7.
№ 15.	17/11 = 1,545; $\sqrt{18}$ = 4,24	а) 0.8647 (±0.0013); б) 24,3618; δ = 0.22%.	а) 2,4516; б) 0,863.
№ 16.	5/3=1,667 или $\sqrt{38}$ = 6,16.	а) 3,7542; δ = 0,32%; б) 0,98351 (±0,00042).	а) 62,74; б) 0,389.
№ 17.	49/13 = 3,77 или $\sqrt{14}$ = 3,74.	а) 83,736; δ = 0,085%; б) 5,6483 (±0.0017).	а) 5,6432; б) 0,00858.
№ 18.	13/7=1,857 или $\sqrt{7}$ = 2,64.	а) 2,8867; δ = 0,43%; б) 32,7486 (±0,0012).	а) 0,0384; б) 63,745.
№19.	19/12=1,58 или $\sqrt{12}$ =3,46.	а) 4,88445 (±0,00052); б) 0.096835; δ = 0,32%.	а) 12,688; б) 4.636.
№ 20.	51 /11 = 4,64 или $\sqrt{35}$ = 5,91.	а) 38,4258 (±0,0014); б) 0,66385; δ = 0,34%	а) 6,743; б) 0,543.
№ 21.	18/7 = 2,57 или $\sqrt{22}$ =4,69.	а) 0,39642 (±0.00022); б) 46,453; δ = 0,15%.	а) 15,644; б) 6,125.
№ 22.	19/9 = 2,11 или $\sqrt{17}$ = 4.12.	а) 5,8425; δ = 0,23%. б) 0,66385 (±0,00042).	а) 0,3825; б) 24,6.
№ 23.	16/7=2,28	а) 24.3872; δ = 0,34%;	а) 16,383; б) 5.734.

вариант	1 задание	2 задание	3 задание
	Определить, какое равенство точнее.	**Округлить сомнительные цифры числа, оставив верные знаки: а) в узком смысле: б) в широком смысле. Определить абсолютную погрешность результата.**	**Найти предельные абсолютные и относительные погрешности чисел, если они имеют только верные цифры: а) в узком смысле; б) в широком смысле.**
	или $\sqrt{11}$ =*3,32*.	б) 0,75244 (±0.00013).	
№ 24.	20/13=1,54 или $\sqrt{63}$ = 7,94.	а) 2,3684 (±0,0017); б) 45,7832; δ = 0,18%.	а) 0,573; б) 3,6761.
№ 25.	12/7 = 1,71 или $\sqrt{47}$ = 6,86.	а) 72,354; δ = 0,24%; б) 0,38725 (±0,00112).	а) 18,275; б) 0.00644.
№ 26.	6/7 = 0,857 или $\sqrt{41}$ = 6,40.	а) 0,36127 (±0,00034); б) 46,7843; δ = 0,32%.	а) 3,425; б) 7,38.
№ 27.	23/9 = 2,56 или $\sqrt{87}$ =9,33.	а) 23,7564; δ = 0,44%; б) 4,57633 (±0,00042).	а) 3,75; б) 6,8343.
№ 28.	27/31=0,872 или $\sqrt{42}$ = 6,48.	а) 15,8372 (±0,0026); б) 0,088748; δ = 0,56%.	а) 3,643; б) 72,385.
№ 29.	7/3 = 2,33 или $\sqrt{58}$ = 7,61.	а) 3,87683; δ = 0,33%; б) 13,5726 (±0,0072).	а) 26,3; б) 4.8556.
№ 30.	14/17 = 0,823 или $\sqrt{53}$ = 7,28.	а) 0,66835 (±0,00115); б) 23,3748; δ = 0,27%.	а) 43,813; б) 0,645.

Тема 2. Кодирование информации.
Лабораторная работа №1.
Перевод чисел из одной позиционной системы счисления в другую

Цель работы. Изучение методов и отработка навыков перевода чисел из одной позиционной системы счисления в другую.

Количество различных цифр *p,* используемых в позиционной системе, определяет название системы счисления и называется **основанием** *p*-й системы счисления.

Любое число N в позиционной системе счисления с основанием *p* может быть представлено в виде полинома от основания *p:*

$$N = a_k p^k + a_{k-1} p^{k-1} + ... + a_1 p^1 + a_0 p^0 + a_{-1} p^{-1} + a_{-2} p^{-2} + ... ,$$

где N — число, a_i — цифры числа (коэффициенты при степенях *p), p* — основание системы счисления *(p* > 1).

Числа записывают в виде последовательности цифр:

$N = a_k a_{k-1} ... a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} ...$ — точка в последовательности отделяет целую часть числа от дробной (коэффициенты при неотрицательных степенях от коэффициентов при отрицательных степенях). Точка опускается, если число целое (нет отрицательных степеней).

В компьютерных системах применяют позиционные системы счисления с недесятичным основанием: двоичную, восьмеричную, шестнадцатеричную.

В аппаратной основе ЭВМ лежат двухпозиционные элементы, которые могут находиться только в двух состояниях, одно из которых обозначается 0, а другое — 1. Поэтому арифметико-логической основной ЭВМ является двоичная система счисления.

Двоичная система счисления. Используется две цифры: 0 и 1. В двоичной системе любое число может быть представлено в виде $X = b_M b_{M-1} ... b_j ... b_1 b_0 . b_{-1} b_{-2} ...$, где b_j либо 0, либо 1.

Эта запись соответствует сумме степеней числа 2, взятых с указанными коэффициентами:

$$X = b_M \cdot 2^M + b_{M-1} \cdot 2^{M-1} + ... + b_1 \cdot 2^1 + b_0 \cdot 2^0 + b_{-1} \cdot 2^{-1} + b_{-2} \cdot 2^{-2} + ...$$

Восьмеричная система счисления. Используется восемь цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Употребляется в ЭВМ как вспомогательная система для записи информации в сокращенном виде. Для представления одной цифры восьмеричной системы используется три двоичных разряда (триада) (табл. 1).

Шестнадцатеричная система счисления. Для изображения чисел используется 16 цифр. Первые десять цифр этой системы обозначаются цифрами от 0 до 9, а старшие шесть цифр — латинскими буквами: A (10), B (11), C (12), D(13), E(14), F(15). Шестнадцатеричная система, также как и восьмеричная, используется для записи информации в сокращенном виде. Для представления одной цифры шестнадцатеричной системы счисления используется четыре двоичных разряда (тетрада) (табл. 1).

Таблица 1

Алфавиты позиционных систем счисления (с.с.)

Двоичная с.с. (Основание 2)	Восьмеричная с.с. (основание 8)		Десятичная с.с. (Основание 10)	Шестнадцатеричная с.с. (Основание 16)	
	Двоичные триады			Двоичные тетрады	
0	0	000	0	0	0000
1	1	001	1	1	0001
	2	010	2	2	0010
	3	011	3	3	0011
	4	100	4	4	0100
	5	101	5	5	0101
	6	110	6	6	0110
	7	111	7	7	0111
			8	8	1000
			9	9	1001
				A	1010
				B	1011
				C	1100
				D	1101
				E	1110
				F	1111

Задание 1. Переведите числа из заданных систем счисления в десятичную систему.

Методические указания.

Перевод чисел в десятичную систему осуществляется путем составления суммы степенного ряда с основанием той системы, из которой число переводится. Затем подсчитывается значение этой суммы.

Примеры:

а) Перевести $10101101{,}101_2 \rightarrow 10$ с.с.

$10101101{,}101_2 =$

$$1\cdot 2^7 + 0\cdot 2^6 + 1\cdot 2^5 + 0\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 + 1\cdot 2^{-1} + 0\cdot 2^{-2} + 1\cdot 2^{-3} = 173{,}625_{10}.$$

Ответ: $10101101{,}101_2 = 173{,}625_{10}$.

б) Перевести $703{,}04_8 \rightarrow 10$ с.с.

$$703{,}04_8 = 7\cdot 8^2 + 0\cdot 8^1 + 3\cdot 8^0 + 0\cdot 8^{-1} + 4\cdot 8^{-2} = 451{,}0625_{10}.$$

Ответ: $703{,}04_8 = 451{,}0625_{10}$.

в) Перевести $B2E{,}4_{16} \rightarrow 10$ с.с.

$$B2E{,}4_{16} = 11\cdot 16^2 + 2\cdot 16^1 + 14\cdot 16^0 + 4\cdot 16^{-1} = 2862{,}25_{10}.$$

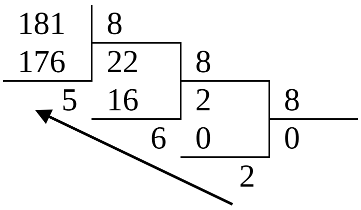
Ответ: $B2E{,}4_{16} = 2862{,}25_{10}$.

Задание 2. Переведите целые числа из десятичной системы в восьмеричную, шестнадцатеричную и двоичную системы.

Методические указания.

Перевод целых десятичных чисел в восьмеричную, шестнадцатеричную и двоичную системы осуществляется последовательным делением десятичного числа на основание той системы, в которую оно переводится, до тех пор, пока не получится частное, равное нулю. Число в новой системе записывается в виде остатков от деления, начиная с последнего.

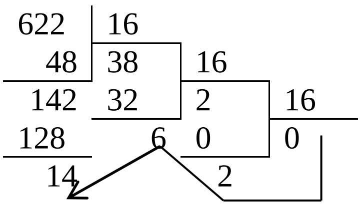
Примеры: а) Перевести $181_{10} \to 8$ с.с.



В таблице представлено деление:
181: 8 = 22 (остаток 5)
22: 8 = 2 (остаток 6)
2:8 = 0 (остаток 2)

Ответ: $181_{10} = 265_8$.

б) Перевести $622_{10\to}$ 16 с.с.



В таблице представлено деление:

622:16=38 (остаток $14_{10} = E_{16}$)
38:16=2 (остаток 6)
2:16=0 (остаток 2)
Ответ: $622_{10} = 26E_{16}$.

Задание 3. Переведите правильные десятичные дроби из десятичной системы в восьмеричную, шестнадцатеричную и двоичную системы.

Методические указания.

Для перевода правильной десятичной дроби в другую систему эту дробь последовательно умножают на основание той системы, в которую она переводится. При этом умножаются только дробные части полученных произведений. Если в результате умножения на некотором шаге дробная часть становится равной нулю, это означает, что получили конечную дробь в новой системе счисления. В новой системе дробь записывается в виде целых частей полученных произведений, начиная с первого. Не все конечные дроби в результате перевода станут конечными, зачастую в новой системе счисления получается бесконечная дробь.

Примеры

а) Перевести $0{,}3125_{10} \to 8$ с.с.

0,	3125
	x 8
2,	5000
	x 8
4	0000

0,	3125
	x 8
2,	5000
	x 8
4	0000

Условно отделим вертикальной чертой целую и дробную части полученных произведений.

Результат перевода есть последовательность цифр, состоящих из целых частей произведений, записанная сверху вниз.

Ответ: $0{,}3125_{10} = 0{,}24_8$.

б) Перевести с точностью до 6 знаков после запятой $0{,}65_{10} \rightarrow 2$ с.с.

0,	**65**$\times$**2**	$0{,}65\times 2=1{,}3$
1	**3**$\times$**2**	$0{,}3\times 2=0{,}6$
0	**6**$\times$**2**	$0{,}6\times 2=1{,}2$
1	**2**$\times$**2**	$0{,}2\times 2=0{,}4$
0	**4**$\times$**2**	$0{,}4\times 2=0{,}8$
0	**8**$\times$**2**	$0{,}8\times 2=1{,}6$
1	**6**$\times$**2**	$0{,}6\times 2=1{,}2$

Далее умножаем дробную часть полученного произведения. Каждый раз умножаем только дробную часть произведения.

Обратите внимание, в результате перевода получилась бесконечная периодическая дробь

Ответ: $0{,}65_{10} \approx 0{,}10(1001)_2$.

Задание 4. Переведите неправильные десятичные дроби из десятичной системы в восьмеричную, шестнадцатеричную и двоичную системы.

Методические указания.

Для перевода неправильной десятичной дроби в систему счисления с недесятичным основанием необходимо отдельно перевести целую часть и отдельно дробную.

Пример.

Перевести $23{,}125_{10} \rightarrow 2$ с.с.

1) Переведем целую часть:

23	2				
22	11	2			
1	10	5	2		
	1	4	2	2	
		1	2	1	2
			0	0	0
				1	

2) Переведем дробную часть:

0,	125 x 2
0	25 x 2
0	5 x 2
1	0

Получили $23_{10} = 10111_2$; $0{,}125_{10} = 0{,}001_2$. Результат перевода $23{,}125_{10} = 10111{,}001_2$.

Ответ: $23{,}125_{10} = 10111{,}001_2$.

Задание 5. Переведите числа из восьмеричной и шестнадцатеричной систем счисления в двоичную систему.

Методические указания.

Для перевода восьмеричного или шестнадцатеричного числа в двоичную форму достаточно заменить каждую цифру этого числа соответствующим трехразрядным двоичным числом (триадой) (см. табл. 1) или четырехразрядным двоичным числом (тетрадой) (см. табл. 1), при этом отбрасывают незначащие нули в старших и младших (после запятой) разрядах.

Примеры:

а) $\underbrace{2}_{010}\underbrace{0}_{000}\underbrace{4}_{100},\underbrace{4}_{100}{}_8 = 10\,000\,100{,}1_2$;

б) $\underbrace{6}_{0110}\underbrace{C}_{1100}\underbrace{3}_{0011},\underbrace{A}_{1010}{}_{16} = 11011000011{,}101_2$.

Задание 6. Переведите числа из восьмеричной и шестнадцатеричной систем счисления в двоичную систему.

Методические указания.

Для перехода от двоичной к восьмеричной (шестнадцатеричной) системе поступают следующим образом: двигаясь от точки влево и вправо, разбивают двоичное число на группы по три (четыре) разряда, дополняя при необходимости нулями крайние левую и правую группы. Затем триаду (тетраду) заменяют соответствующей восьмеричной (шестнадцатеричной) цифрой.

Примеры:

а) Перевести $10011001111{,}0101_2 \to 8$ с.с.

$\underbrace{010}_{2}\underbrace{011}_{3}\underbrace{001}_{1}\underbrace{111}_{7},\underbrace{010}_{2}\underbrace{100}_{4} = 2317{,}24_8.$

б) Перевести $10111111011{,}100011_2 \to 16$ с.с.

$\underbrace{0101}_{5}\underbrace{1111}_{F}\underbrace{1011}_{B},\underbrace{1000}_{8}\underbrace{1100}_{C} = 5FB{,}8C_{16}.$

Задание 7. Переведите числа из восьмеричной в шестнадцатеричную систему счисления и из шестнадцатеричной в восьмеричную систему счисления.

Методические указания.

Перевод из восьмеричной в шестнадцатеричную систему и обратно осуществляется через двоичную систему с помощью триад и тетрад.

Пример.

Перевести $135{,}14_8 \to 16$ с.с.

$\underbrace{1}_{001}\underbrace{3}_{011}\underbrace{5}_{101},\underbrace{1}_{001}\underbrace{4}_{100}{}_8 = 1011101{,}0011_2 = \underbrace{0101}_{5}\underbrace{1101}_{D},\underbrace{0011}_{3}{}_2 = 5D{,}3_{16}$.

Ответ: $135{,}14_8 = 5D{,}3_{16}$.

Задания для самостоятельной работы

Задание 1.

Вариант	Переведите числа в 10-ю с.с.	Переведите десятичные числа в 2-ю, 8-ю, и 16-ю с.с.	Восьмеричное число переведите в 16-ю с.с., а шестнадцатеричное – в 8-ю с.с.
1.	$10010011111,101_2$ $1372,12_8$ $3CA,7D_{16}$	1802 286,06	$1263,71_8$ $2BA,2C_{16}$
2.	$11100101010,011_2$ $2136,31_8$ $1C3,A2_{16}$	1731 476,91	$3472,62_8$ $4CA,27_{16}$
3.	$11001100111,011_2$ $1742,36_8$ $123E,4D_{16}$	1660 438,76	$1724,31_8$ $2AF,3C_{16}$
4.	$11101011101,1001_2$ $1467,63_8$ $1AF,73_{16}$	1589 362,87	$1273,56_8$ $30A,E0F_{16}$
5.	$101011010110,001_2$ $1523,24_8$ $2A7,3E_{16}$	1518 305,37	$1623,72_8$ $5C2,C7_{16}$
6.	$11001100011,1001_2$ $1273,56_8$ $30A,E0F_{16}$	1682 324,93	$12372,41_8$ $1D2,7D_{16}$
7.	$10011010111,011_2$ $1623,72_8$ $5C2,C7_{16}$	1846 457,21	$1735,12_8$ $5AD,4D_{16}$
8.	$11000001111,011_2$ $1735,66_8$ $23A,EF_{16}$	2010 343,43	$2451,23_8$ $2BA,D3_{16}$
9.	$10000111111,1001_2$ $1327,46_8$ $3CD,BA_{16}$	1933 381,93	$1372,12_8$ $3CA,7D_{16}$
10.	$11100001101,011_2$ $1523,74_8$ $4BA,2F_{16}$	1856 419,96	$2136,31_8$ $1C3,A2_{16}$
11.	$11011110110,101_2$ $4123,17_8$ $1C3,A5_{16}$	1779 400,01	$1742,36_8$ $123E,4D_{16}$
12.	$110010010111,1001_2$ $1272,12_8$ $3AD,7D_{16}$	1702 153,63	$5123,14_8$ $1B3,4D_{16}$
13.	$11100110101,1011_2$ $1071,21_8$ $5DC,F2_{16}$	1625 172,04	$1263,71_8$ $2BA,2C_{16}$
14.	$10011010111,011_2$ $2372,12_8$ $1F2,7B_{16}$	1548 191,11	$3472,62_8$ $4CA,27_{16}$
15.	$11110010101,1001_2$ $1574,61_8$ $35C,F1_{16}$	1702 210,96	$1724,31_8$ $2AF,3C_{16}$
16.	$11000011010,1001_2$ $6123,51_8$ $13A,C2_{16}$	1856 229,74	$1272,12_8$ $3AD,7D_{16}$

Вариант	*Переведите числа в 10-ю с.с.*	*Переведите десятичные числа в 2-ю, 8-ю, и 16-ю с.с.*	*Восьмеричное число переведите в 16-ю с.с., а шестнадцатеричное – в 8-ю с.с.*
17.	$10011000111,1111_2$ $5412,63_8$ $52A,17_{16}$	*1794* *248,2*	$1071,21_8$ $5DC,F2_{16}$
18.	$11101101101,1001_2$ $5123,14_8$ $1B3,4D_{16}$	*1732* *267,72*	$2372,12_8$ $1F2,7B_{16}$
19.	$11101011001,0101_2$ $1263,71_8$ $2BA,2C_{16}$	*1670* *571,58*	$1742,36_8$ $123E,4D_{16}$
20.	$10101110111,0101_2$ $3472,62_8$ $4CA,27_{16}$	*1608* *590,72*	$1467,63_{18}$ $1AF,73_{16}$
21.	$10101101111,011_2$ $1724,31_8$ $2AF,3C_{16}$	*1732* *495,32*	$1523,24_8$ $2A7,3E_{16}$
22.	$11100101101,1011_2$ $1275,46_8$ $23A,E7_{16}$	*1856* *552,5*	$1735,66_8$ $23A,EF_{16}$
23.	$10011010111,011_2$ $12372,41_8$ $1D2,7D_{16}$	*1980* *533,51*	$1327,46_8$ $3CD,BA_{16}$
24.	$11011100010,1101_2$ $1735,12_8$ $5AD,4D_{16}$	*1805* *514,58*	$1523,74_8$ $4BA,2F_{16}$
25.	$10100101111,101_2$ $2451,23_8$ $2BA,D3_{16}$	*1630* *609,11*	$4123,17_8$ $1C3,A5_{16}$

Задание 2.

Внимательно изучить теоретический материал и придумать «нелепую» историю, в которой числовые данные приведены в системе счисления, отличной от десятичной.

Например:

история «Бабушка»

У моей бабушки, пенсионерки в возрасте 144 лет, недалеко от Елабуги есть маленький сад площадью всего 20 га. Этот год был очень урожайным, и именно поэтому на своей плантации бабушка вырастила 122 кг огурцов, 22 кг помидоров и 320 кг яблок. Каждое лето на эту дачу приезжает множество бабушкиных знакомых. Вот и в этом году к ней приехала на выходные её подруга, которой 152 года; моя бабушка подарила ей 1/23 всех яблок, а остальные 304 кг оставила себе. Её подруга была очень рада и пообещала нам приехать в гости ещё раз 50 октября в мои осенние каникулы.

Комментарий

В этой истории была использована 6-я СС.

В 10-й СС бабушке – 64 года, площадь сада 12 га, а бабушка вырастила 50 кг огурцов, 14 кг помидоров и 120 кг яблок. Бабушкиной подруге 68 лет, бабушка подарила ей 1/15 всех яблок, а остальные 112 кг оставила себе, подруга пообещала приехать 30 октября.1

Задание 3.

В таблице представлены числа, записанные в различных СС. Среди них встречаются и недопустимые записи, которые нужно вычеркнуть, оставшиеся после вычёркивания «правильные» числа необходимо перевести в 10-ю систему, и в ней выполнить остальные задания. Ответы приводятся в 10-й СС.

По данной таблице требуется посчитать:

1. Сумму чисел в каждой строке.
2. Произведение чисел в столбцах.
3. Сумму чисел на главной диагонали.
4. Произведение чисел на побочной диагонали.

157	14 3	103	196
23 7	24 5	314	356
25 6	1 F16	177	168
33 3	112	189	235

Контрольные вопросы

1. *Как осуществляется перевод чисел из р-й с.с. в десятичную?*
2. *Как перевести целое десятичное число в р-ю с.с. ?*
3. *Как перевести правильную десятичную дробь в р-ю с.с. ?*
4. *Как перевести неправильную десятичную дробь в р-ю с.с. ?*

Лабораторная работа №2.
Двоичная арифметика

Цель работы. Научиться выполнять арифметические операции (сложение, вычитание, умножение и деление) с двоичными числами.

Двоичная арифметика – краткое наименование системы арифметических операций (включающей сложение, вычитание, умножение, деление, иногда некоторые другие операции) над двоичными числами, т.е. целыми числами, представленными в двоичной позиционной системе; собирательное название схемных решений для выполнения арифметических операций над двоичными числами – сумматоров, умножителей, схем вычитания, деления и другие.

В последнее время почти вся техника, связанная с передачей и обработкой информации, стала цифровой. Цифровыми стали аудио и видеомагнитофоны, превратившись в DVD-плейеры и Айподы, телевизоры, фотоаппараты, а многие виды электронно-вычислительной техники и современные мобильные телефоны были цифровыми изначально. Это означает, что информация, циркулирующая в этих устройствах, представляется (или, как говорят, кодируется) в цифровом виде, т.е. как правило, в виде строк (или последовательностей), состоящих из нулей и единиц. Этим строкам можно сопоставить по некоторым правилам целые числа, для чего обычно используется двоичная позиционная система их записи.

Таким образом, с определенной точки зрения, все цифровые устройства генерируют потоки целых чисел, по некоторым правилам их преобразуют, обрабатывают, кодируют, декодируют и т.д., и передают другим цифровым устройствам. Область науки и техники, которая занимается изучением подобных процессов, называется цифровой обработкой сигналов (английская аббревиатура DSP – Digital Signal Processing).

Существенную роль в этом играют алгоритмические процедуры, выполняющие арифметические и логические операции с различными типами числовых данных. Проектированием подобных алгоритмов и устройств, их реализующих, занимается компьютерная арифметика. Ее математической основой является теория сложности так называемых булевых функций (более длинно именуемых функциями алгебры логики)

В большей своей части компьютерная арифметика является двоичной арифметикой. Этому есть две причины. Во-первых, алгоритмы арифметических операций двоичной арифметики (т.е. арифметики, использующей двоичную позиционную систему) очень просты и являются в определенном смысле простейшими среди подобных алгоритмов для всех позиционных числовых систем. Во-вторых, дискретные (не аналоговые) электронные схемы, как самые современные, так и использовавшиеся много лет назад, имеют в определенном смысле двоичную природу и легко описываются на языке алгебры логики. Алгебра логики применяется как для моделирования функционирования этих схем, так и для их проектирования (синтеза).

Правила выполнения арифметических действий над двоичными числами можно задать таблицами двоичного сложения, вычитания и умножения.

Таблица двоичного сложения	**Таблица двоичного вычитания**	**Таблица двоичного умножения**
0+0=0 0+1=1 1+0=1 1+1=10	0-0=0 1-0=1 1-1=0 10-1=1	0×0=0 0×1=0 1×0=0 1×1=1

Задание 1. Выполните сложение чисел в двоичной системе счисления $100100111{,}001_2 + 100111010{,}101_2$

Методические указания.

При **сложении** двоичных чисел в каждом разряде производится сложение цифр слагаемых и цифры, переносимой из соседнего младшего разряда, если она имеется. При этом необходимо учитывать, что 1 + 1 дают нуль в данном разряде и единицу переноса в следующий разряд.

Примеры:

1) Выполнить сложение двоичных чисел X=1101, Y=111.

Единицы Переноса

$$\begin{array}{rr} \longrightarrow & 111 \\ X = & 1101 \\ Y = & 111 \\ \hline X+Y = & 10100 \end{array}$$

В приведенном примере в младшем нулевом разряде две единицы: 1 + 1 = 10 дают нуль в данном разряде и единицу переноса в следующий разряд. В первом разряде:

0+1 + 1 = 10 (крайняя единица перенесена из нулевого разряда)

дают 0 и единицу переноса в следующий.

Во втором разряде сумма 1 + 1 + 1 = 11

(крайняя единица перенесена из первого разряда) дает 1 и единицу переноса в следующий разряд.

В старшем третьем разряде 1 и единица переноса из предыдущего разряда дают

1 + 1 = 10.

Результат: 1101 + 111 = 10100.

2) Сложить три двоичных числа X=1101, Y=101, Z=111.

Единицы переноса

$$\begin{array}{rr} & 1 \\ \longrightarrow & 1111 \\ X = & 1101 \\ Y = & 101 \\ Z = & 111 \\ \hline X+Y = & 11001 \end{array}$$

Результат: 1101 + 101 + 111 = 11001.

Задание 2. Выполните вычитание чисел в двоичной системе счисления: $1100110110{,}0011_2 - 11111110{,}01_2$.

Методические указания.

При **вычитании** двоичных чисел в данном разряде при необходимости занимается 1 из старшего разряда. Эта занимаемая 1 равна двум единицам данного разряда, так как 10 = 1 + 1.

Примеры:

1) Заданы двоичные числа X = 10010 и Y = 101. Вычислите X - $У$.

$$\begin{array}{ccccc} ^{*} & ^{1} & ^{10} & ^{*} & ^{10} \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Результат: $10010_2 - 101_2 = 1101_2$

Замечание. Число $100\ldots00_2$ можно представить в виде суммы

Данное разложение на слагаемые объясняет правило вычитания в столбик. Если вы занимаете 1 из ближайшего старшего разряда, тогда над всеми следующими за единицей нулями следует дописывать 1, а над крайним нулем, для которого произведен заем, 1 + 1 или 10.

	*	1	1	*	10
	1	0	0	0	0
-					1
		1	1	1	1

2) Выполнить вычитание: $1100000011{,}011_2 - 101010111{,}1_2$

1	1	0	0	0	0	0	0	1	1,	0	1	1
-	1	0	1	0	1	0	1	1	1,	1		
	1	1	0	1	0	1	0	1	1,	1	1	1

Результат: $1100000011{,}011_2 - 101010111{,}1_2 = 110101011{,}111_2$

Задание 3. Выполните умножение чисел 11001_2 и 1011100_2 в двоичной системе счисления.

Методические указания.

Правила умножения двоичных чисел такие же, как и для умножения десятичных чисел в столбик, с использованием двоичного умножения и сложения.

Пример.

Найти произведение $1001_2 * 101_2$.

		1	0	0	1
*		1	0	1	
		1	0	0	1
+	1	0	0	1	
1	0	1	1	0	1

Результат: $1001_2 * 101_2 = 101101_2$.

Задание 4. Выполните деление чисел 111101_2 и 1110_2 в двоичной системе счисления.

Методические указания.

Деление двоичных чисел производится так же, как и десятичных чисел, при этом используется двоичное умножение и вычитание.

Пример.

Найти частное от деления $1100{,}011_2 : 10{,}01_2$.

	1	1	0	0	0	1,	1	1	0	0	1
-	1	0	0	1				1	0	1,	1
			1	1	0	1					

$$
\begin{array}{rrrrr}
- & 1 & 0 & 0 & 1 \\
\cline{2-5}
 & & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 & - & 1 & 0 & 0 & 1 \\
\cline{3-6}
 & & & & & 0
\end{array}
$$

Результат: $1100{,}011_2 : 10{,}01_2 = 101{,}1_2$.

Задания для самостоятельной работы

Вариант	Заданы двоичные числа X и Y. Вычислить X+Y и X-Y, если:	Заданы двоичные числа X и Y. Вычислить X*Y и X/Y, если:
1.	$X = 100101{,}101_2 \quad Y = 11101{,}11_2$	$X = 100101{,}011_2 \quad Y = 110{,}1_2$
2.	$X = 101101{,}101_2 \quad Y = 1101{,}111_2$	$X = 110000{,}11_2 \quad Y = 110{,}1_2$
3.	$X = 110101{,}101_2 \quad Y = 11101{,}11_2$	$X = 111001{,}0001_2 \quad Y = 1010{,}011_2$
4.	$X = 1101111{,}101_2 \quad Y = 10101{,}11_2$	$X = 111011{,}0001_2 \quad Y = 101{,}01_2$
5.	$X = 1000111{,}11_2 \quad Y = 11101{,}111_2$	$X = 111100{,}011_2 \quad Y = 101{,}11_2$
6.	$X = 1110001{,}101_2 \quad Y = 10011{,}11_2$	$X = 110110{,}101_2 \quad Y = 100{,}11_2$
7.	$X = 1010001{,}101_2 \quad Y = 10011{,}11_2$	$X = 100110{,}0001_2 \quad Y = 111{,}01_2$
8.	$X = 1000011{,}101_2 \quad Y = 10011{,}011_2$	$X = 101011{,}111_2 \quad Y = 110{,}11_2$
9.	$X = 1101001{,}101_2 \quad Y = 10111{,}11_2$	$X = 1010110{,}101_2 \quad Y = 1000{,}01_2$
10.	$X = 1010001{,}101_2 \quad Y = 1111{,}011_2$	$X = 111111{,}01_2 \quad Y = 101{,}1_2$
11.	$X = 101001{,}101_2 \quad Y = 10111{,}111_2$	$X = 1011010{,}101_2 \quad Y = 111{,}01_2$
12.	$X = 1010111{,}101_2 \quad Y = 11100{,}111_2$	$X = 1000101{,}0011_2 \quad Y = 110{,}11_2$
13.	$X = 110101{,}101_2 \quad Y = 1111{,}11_2$	$X = 100101{,}011_2 \quad Y = 110{,}1_2$
14.	$X = 101111{,}101_2 \quad Y = 1101{,}111_2$	$X = 100000{,}1101_2 \quad Y = 101{,}01_2$
15.	$X = 110101{,}011_2 \quad Y = 10011{,}11_2$	$X = 110111{,}11_2 \quad Y = 101{,}11_2$
16.	$X = 1001011{,}11_2 \quad Y = 10101{,}101_2$	$X = 100101{,}11_2 \quad Y = 111{,}01_2$
17.	$X = 100011{,}011_2 \quad Y = 10011{,}111_2$	$X = 100011{,}01_2 \quad Y = 1011{,}1_2$
18.	$X = 1010001{,}101_2 \quad Y = 1011{,}011_2$	$X = 100001{,}101_2 \quad Y = 1001{,}01_2$
19.	$X = 110001{,}101_2 \quad Y = 10111{,}11_2$	$X = 111001{,}101_2 \quad Y = 1101{,}11_2$
20.	$X = 1000111{,}011_2 \quad Y = 11111{,}11_2$	$X = 1010111{,}011_2 \quad Y = 111{,}11_2$
21.	$X = 111001{,}101_2 \quad Y = 1110{,}111_2$	$X = 11100001{,}101_2 \quad Y = 110{,}11_2$
22.	$X = 100001{,}101_2 \quad Y = 1111{,}111_2$	$X = 1000001{,}101_2 \quad Y = 1111{,}01_2$
23.	$X = 1011101{,}101_2 \quad Y = 10111{,}011_2$	$X = 1010101{,}101_2 \quad Y = 100{,}011_2$
24.	$X = 1111000{,}101_2 \quad Y = 101111{,}11_2$	$X = 1111001{,}011_2 \quad Y = 1011{,}11_2$
25.	$X = 1100000{,}101_2 \quad Y = 1111{,}111_2$	$X = 1100011{,}01_2 \quad Y = 11{,}111_2$

Контрольные вопросы

1. *Каковы правила сложения двоичных чисел ?*
2. *Каковы правила вычитания двоичных чисел ?*
3. *Каковы правила умножения двоичных чисел ?*
4. *Каковы правила вычитания двоичных чисел ?*

Лабораторная работа №3. Основы машинной арифметики

Цель работы. Изучить основы машинной арифметики, представления чисел в прямом, обратном и дополнительном кодах и арифметических операций над ними.

Любые данные (числа, текст, команды программ и др.) в памяти компьютера представлены двоичными кодами, которые представляют собой совокупность битов. В частности, двоичный код, содержащий 8 бит (говорят: «8 разрядов»), называется байтом. Для хранения данных используют следующие форматы двоичного кода: 8-разрядный (байт), 16-разрядный (полуслово), 32-разрядный (слово) и 64-разрядный (двойное слово).

Для выполнения арифметических операций используют специальные коды представления чисел, которые позволяют свести операцию вычитания чисел к арифметическому сложению этих кодов. Различают прямой, **обратный** и дополнительный коды. Прямой код используется для представления отрицательных чисел в памяти компьютера, а также при выполнении операций умножения и деления. Обратный и дополнительный коды применяются для выполнения операции вычитания, которую заменяют операцией сложения чисел с разными знаками: $a - b = a + (-b)$.

В коде числа каждому разряду соответствует определенный элемент разрядной сетки. Для записи знака числа в разрядной сетке имеется строго определенный фиксированный разряд, обычно это крайний разряд разрядной сетки.

Замечание. Условимся при записи кода знаковый разряд числа отделять запятой от других разрядов. Если формат числа не указан, будем считать, что число 8-разрядное (байт).

Задание 1. Запишите следующие числа в прямом, обратном и дополнительном кодах.
а) 1101011; б) -101011; в) -101101; г) -1100111.

Методические указания.

Прямой код **целого числа.** Под прямым кодом двоичного числа понимают запись самого числа. Значение знакового разряда для положительных чисел определяют равным нулю (0), для отрицательных чисел — единице (1). Например, если для записи кода используется байт, то:

Число	*Прямой код*
+1101	0,0001101
-1101	1,0001101

Крайний левый разряд в прямом коде нами отведен под знак числа, остальные разряды — под само число. Число располагаем в разрядной сетке так, чтобы цифра младшего разряда числа занимала крайнюю правую ячейку.

Знаковый разряд →

0,	0	0	0	1	1	0	1

Обратный код целого числа. Обратный код целого положительного числа совпадает с его прямым кодом. Для отрицательного числа обратный код строится заменой каждого незнакового байта его представления в прямом коде на противоположный (заменим 1 на 0, 0 на 1), знаковый разряд не изменяется.

Пример.

Число	*Прямой код*	*Обратный код*	*Замечание*
+11011	0,00011011	0,00011011	Число положительное, обратный и прямой коды совпадают
-11011	1,00011011	1,11100100	Число отрицательное, каждый байт, кроме знакового, изменен на противоположный

Дополнительный код целого числа. Дополнительный код положительного числа совпадает с его прямым кодом. Для отрицательного числа дополнительный код образуется путем получения обратного кода и добавлением к младшему разряду единицы.

Пример.

Число	*Прямой код*	*Обратный код*	*Дополнительный код*
+1110	0,0001110	0,0001110	0.0001110
-1110	1,0001110	1,1110001	1,1110010

Задание 2. Переведите числа X и У в прямой, обратный и дополнительный коды. Выполните сложение в обратном и дополнительном кодах. Результат переведите в прямой код. Полученный результат проверьте, используя правила двоичной арифметики.

а) X= - 11010; Y= 100111;

б) X= - 11101; Y= - 10011;

в) X=111010; Y= - 101111;

г) X= - 101110; Y= - 11101;

д) X=1101011; Y= - 1001110;

е) X= - 11011; Y= - 10111.

Методические указания.

При сложении чисел в знаковом разряде могут появиться две цифры, вторую единицу от запятой называют **единицей переноса.**

При **сложении чисел в дополнительном коде** возникающая единица переноса в знаковом разряде отбрасывается.

При **сложении чисел в обратном коде** возникающая единица переноса в знаковом разряде прибавляется к младшему разряду суммы кодов.

Если результат арифметических действий является кодом отрицательного числа, необходимо преобразовать его в прямой код. При этом обратный код преобразуется в прямой заменой цифр во всех разрядах, кроме знакового, на противоположные. Дополнительный код преобразуется в прямой так же, как и обратный, с последующим прибавлением единицы к младшему разряду.

Пример.

Сложить X и Y в обратном и дополнительном кодах:

а) X = 1111 и *Y*= -101. Сложим числа, пользуясь:

правилами двоичной арифметики	обратным кодом	дополнительным кодом
$X =$ 1111 $Y =$ $\underline{-\ 101}$ $X+Y =$ 1010	$X_{обр} =$ 0,0001111 $Y_{обр} =$ $\underline{1,1111010}$ 1 0,0001001 +1 $(X+Y)_{обр} =$ 0,0001010	$X_{доп} =$ 0,0001111 $Y_{доп} =$ $\underline{1,1111011}$ Единица переноса отбрасывается 1 0,0001010 $(X+Y)_{доп} =$ 0,0001010

Так как результат сложения является кодом положительного числа (знаку плюс (+)

соответствует 0 в знаковом разряде), то .

б) X= -101, *Y*= -111.

Сложим числа, пользуясь:

правилами двоичной арифметики	обратным кодом	дополнительным кодом
$X = -101$	$X_{обр} = 1,1111010$	$X_{доп} = 1,1111011$
$Y = \underline{-111}$	$Y_{обр} = \underline{1,1111000}$	$Y_{доп} = \underline{1,1111001}$
$X+Y = -1100$	$11,1110010$	Единица переноса отбрасывается $1\ 1,1110100$
	$+1$	
	$(X+Y)_{обр} = 1,1110011$	$(X+Y)_{доп} = 1,1110100$

Так как сумма является кодом отрицательного числа (знак 1), то необходимо перевести результаты в прямой код:

- из обратного кода:
- из дополнительного кода:.

Получили *X*+ *Y* = -1100, результат совпадает с суммой, полученной по правилам двоичной арифметики.

Задание 3. Сложите числа *X* и *Y* в модифицированном обратном и модифицированном дополнительном восьмиразрядных кодах. При обнаружении переполнения увеличьте число разрядов в кодах и повторите суммирование. Результат переведите в прямой код. Полученный результат проверьте, используя правила двоичной арифметики:

а) X=1101101;	б) X=111101;	в) X= - 111010;
Y=110101;	Y= - 111001;	Y= - 1100111;
г) X= - 11001;	д) X= - 10101;	е) X= - 1101;
Y= - 100011;	Y=111010;	Y= - 111011.

Методические указания.

Модифицированные обратный и дополнительный коды

Переполнение разрядной сетки может привести к переносу единицы в знаковый разряд, что приведет к неправильному результату. Положительное число, получившееся в результате арифметической операции, может восприниматься как отрицательное, так как в знаковом разряде появится «1», и наоборот.

Например: *X*= 0,1011110

Y= <u>0.1101100</u>

X+ *Y*= 1,1001010

X и Y — коды положительных чисел, но в процессе сложения в знаковом разряде появилась «1», что означает код отрицательного числа. Чтобы распознать переполнение разрядной сетки, вводятся модифицированные коды.

Модифицированный обратный **код** характеризуется тем, что под знак числа отводится не один, а два разряда. Форма записи чисел в модифицированном обратном коде выглядит следующим образом:

- для положительного числа

X= Xn Xn-1 …X2 X1 X0 … $\Rightarrow \boxed{X_{обр}^{мод} = 00, X_n\, X_{n-1} \ldots. X_2\, X_1\, X_0}$;

- для отрицательного числа

X= Xn Xn-1 …X2 X1 X0 … $\Rightarrow \boxed{X_{обр}^{мод} = 11, \overline{X_n}\, \overline{X_{n-1}} \ldots. \overline{X_2}\, \overline{X_1}\, \overline{X_0}}$;

($\overline{X}$ - обозначение логической операции отрицания «не X»,

если X=0, то $\overline{X}$ =1; X=1, то $\overline{X}$ =0).

В модифицированных обратном и дополнительном кодах под знак числа отводится не один, а два разряда: «00» соответствует знаку «+», «11» — знаку «–». Любая другая комбинация («01» или «10»), получившаяся в знаковых разрядах, является признаком переполнения разрядной сетки. Сложение чисел в модифицированных кодах ничем не отличается от сложения в обычных обратном и дополнительном кодах.

Пример.

Даны два числа: *X*= 101001 и *Y*= -11010. Сложить их в дополнительном и модифицированном дополнительном кодах.

Обычная запись	X= + 0101011	Y= - 0011110
Обратный код	$X_{обр} = 0{,}0101011$	$Y_{обр} = 1{,}1100001$
Модифицированный обратный код	$X_{обр}^{мод} = 00{,}101011$	$Y_{обр}^{мод} = 11{,}100001$
Дополнительный код	$X_{доп} = 0{,}0101011$	$Y_{обр} = 1{,}1100001$ $+ \; 1$ $Y_{доп} = 1{,}1100010$ Прибавили 1 т.к. Y отрицательное число
Модифицированный дополнительный код	$X_{доп}^{мод} = 00{,}101011$	$Y_{доп}^{мод} = 11{,}100010$

Выполним сложение:

Дополнительный код	**Модифицированный дополнительный код**
$X_{доп} = \quad 0{,}0101011$ $Y_{доп} = \quad 1{,}1100010$ $\underline{1}0{,}0001101$ *единица переноса отбрасывается т.к. комбинация* "10" $(X+Y)_{доп} = 0{,}0001101$	$X_{доп}^{мод} = \quad 00{,}0101011$ $Y_{доп}^{мод} = \quad 11{,}1100010$ $\underline{1}00{,}0001101$ *единица переноса отбрасывается т.к. комбинация* "10" $(X+Y)_{доп}^{мод} = 00{,}0001101$

Переполнение не наблюдается (в знаковых разрядах «00»). Результаты, полученные в обычном и модифицированном кодах, совпадают *(X* + Y=1101).

Задания **для** ***самостоятельной работы***

1. Запишите числа X и Y в прямом, обратном и дополнительном кодах. Выполните сложение в обратном и дополнительном кодах. Результат переведите в прямой код. Полученный результат проверьте, используя правила двоичной арифметики.

2. Измените число *Y*, добавив в конец числа две единицы «11». Сложите полученные числа в модифицированном обратном и модифицированном дополнительном кодах. Результат переведите в прямой код. Выполните проверку сложения, используя правила двоичной арифметики.

Вариант	Числа X и Y	Вариант	Числа X и Y
1.	X= - 100101 Y=11101	2.	X= - 101101 Y=1101
3.	X= - 110101 Y=11101	4.	X= - 1101111 Y=10101
5.	X= - 1000111 Y=11101	6.	X= - 1110001 Y=10011
7.	X= - 1010001 Y=10011	8.	X= - 1000011 Y=10011
9.	X= - 1101001 Y=10111	10.	X= - 1010001 Y=1111
11.	X= - 101001 Y=10111	12.	X= - 1010111 Y=11100
13.	X= - 110101 Y=1111	14.	X= - 101111 Y=1101
15.	X= - 110101 Y=10011	16.	X= - 1001011 Y=10101
17.	X= - 100011 Y=10011	18.	X= - 1010001 Y=1011
19.	X= - 110001 Y=10111	20.	X= - 1000111 Y=11111
21.	X= - 111001 Y=1110	22.	X= - 100001 Y=1111
23.	X= - 1011101 Y=10111	24.	X= - 1111000 Y=101111
25.	X= - 1100000 Y=1111	26.	X= - 10101 Y=1101

Контрольные вопросы

1. *Что понимают под прямым кодом числа?*
2. *Как образуется обратный код целого положительного числа ?*
3. *Как образуется обратный код целого отрицательного числа?*
4. *Каков алгоритм сложения чисел в прямом коде?*
5. *Каков алгоритм сложения чисел в обратном коде?*
6. *Чем характеризуется модифицированный обратный код?*

Тема 3. Моделирование как метод познания.

Основой эффективного сотрудничества специалистов разных профилей является наличие общей методологии, в рамках которой проводятся исследования. Такая методология носит название "системный анализ". Один из важнейших инструментов системного анализа - моделирование (моделирование на ЭВМ).

Моделирование = способ изучения различных процессов и явлений.

Различают:

Натурный эксперимент - процесс исследуется, как он проходит в природе.

Физическое моделирование - модель воспроизводит изучаемый процесс (оригинал) с сохранением его физической природы (продувка модели самолета в аэродинамической трубе, ...)

Отличается от натурного эксперимента более богатой возможностью изменения условий реализации процесса. Работа с моделью дешевле работы с оригиналом. *Ограничения: между процессом моделью и процессом-оригиналом должно сохраняться определенное подобие, вытекающее из закономерностей физической природы явлений и гарантирующее возможность использования получаемых сведений.*

Математическое моделирование - способ исследования различных процессов путем изучения явлений, имеющих различное физическое содержание, но описываемых одинаковыми математическими соотношениями (гармонические колебания в механике и электричестве, ...).

Основные способы использования математической модели

- *аналитическое исследование процессов*
- *исследование процессов численными методами*
- *аппаратурное моделирование процессов на ЭВМ непрерывного действия и стендах*
- *моделирование процессов на ЭВМ дискретного действия (цифровых)*

Математическая модель для аналитического исследования процесса преобразуется в систему соотношений (например, уравнений) относительно искомых величин. Соотношения должны допускать получение нужного результата аналитическими методами. *Результатом считают получение явных формул для искомых величин, либо приведение уравнения к виду, для которого решения известны, либо исследование уравнения качественными методами (исследование асимптот, устойчивости решения, ...).*

Подобные решения могут ответить на всевозможные вопросы (если их можно математически сформулировать) и именно к ним стремятся исследователи. Это направление так заманчиво, что при решении многих прикладных, а иногда и теоретических задач, идут на заведомое искажение (упрощение) модели, лишь бы система соотношений, образованных моделью, имела решение.

Численное моделирование. Когда математическую модель не удается преобразовать в подходящую систему уравнений, а упрощения приводят к недопустимо грубым результатам, иногда удается получить приемлемые результаты численными методами.

Разница заключается в том, что полученные уравнения аналитически неразрешимы, но используемые приемы позволяют оценивать и уменьшать величину отклонения получаемых на модели результатов от реальных.

Получаемые решения менее полные, зачастую ограничиваются исследованием частных случаев процесса.

Имитационное моделирование. Когда ни аналитическое, ни численное исследование модели не удаются, применяют имитационное моделирование. Явление воспроизводится с сохранением логической структуры, последовательности составляющих во времени, а иногда и физического содержания на специальной установке. *Содержание выполняемых операций слабо зависит от того, какие величины выбраны в качестве искомых. Для оценки искомых величин может быть использована любая информация, циркулирующая в модели, если только она доступна регистрации и последующей обработке.*

Имитационное моделирование оказывается весьма удобным, при исследовании случайных процессов (пример - методы Монте-Карло).

Сравнительно легко снимаются трудности, связанные с синтезом уравнений относительно неизвестных законов распределения или других вероятностных характеристик анализируемых процессов, а так же с решением этих уравнений.

Информационная модель – модель, в которой изучаемое явление или процесс представлены в виде процессов передачи и обработки информации.

= управление = процесс сбора, передачи и переработки информации, осуществляемый специальными средствами.

= система управления, предназначенная для оперирования над особо интенсивными потоками информации и структура которой приспособлена к выполнению специальных мероприятий, направленных на оптимальный сбор, хранение, переработку и выдачу больших массивов информации. (системы управления предприятием на технологическом уровне, как правило, перерабатывают незначительный объем информации и к информационным системам не относятся).

Выделяются два основных вида перемещения информации: - осведомительная информация (снизу)(вверх) - управляющие команды (сверху)(вниз), которые образуют потоки информации.

В настоящее время, с учетом появления огромного количества ПЭВМ, моделирование на ЭВМ приняло форму **вычислительного эксперимента**, который, объединяет в себе две составляющие: аналитическую (информационную) и имитационную...

Предметом изучения курса "Вычислительная математика", он же "Численные методы и математическое моделирование", он же "Численные методы математического анализа", являются численные модели и, отчасти, вычислительный эксперимент.

Постановка задачи

Пусть имеется уравнение вида

$$f(x) = 0. \tag{1}$$

где $f(x)$ - заданная алгебраическая или трансцендентная функция. (**Функция** называется **алгебраической**, если для получения её значения нужно выполнить арифметические операции и возведение в степень с рациональным показателем. Примеры **трансцендентных функций** - показательная, логарифмическая, тригонометрические, обратные тригонометрические.)

Решить уравнение - значит найти все его корни, то есть те значения x, которые обращают уравнение в тождество, или доказать, что корней нет.

Если алгебраическое или трансцендентное уравнение достаточно сложно, то довольно редко удается точно найти его корни. Кроме того, в некоторых случаях уравнение может содержать коэффициенты, известные лишь приблизительно, поэтому сама задача о точном нахождении корней теряет смысл. В таких случаях применяют численные (приближенные) методы решения.

Поставим задачу найти такое приближенное значение корня $x_{пр}$, которое мало отличается от точного значения корня x^*, так что выполняется неравенство $|x^* - x_{пр}| < \varepsilon$, где ε (эпсилон) – малая положительная величина – допустимая ошибка, которую мы можем заранее задать по своему усмотрению. Если корень найден с точностью ε, то принято писать $x^* = x_{пр} \pm \varepsilon$.

Будем предполагать, что уравнение (1) имеет лишь изолированные корни, т.е. для каждого корня существует окрестность, не содержащая других корней этого уравнения.

Этапы приближенного решения нелинейных уравнений

Приближенное решение уравнения состоит из двух этапов:

1. ***Отделение корней***, то есть нахождение интервалов из области определения функции *f (x)*, в каждом из которых содержится только один корень уравнения (1).
2. ***Уточнение корней*** до заданной точности.

Отделение корней можно проводить графически и аналитически.

Для того чтобы графически отделить корни уравнения (1), необходимо построить график функции $y = f(x)$. Абсциссы точек его пересечения с осью *Ox* являются действительными корнями уравнения (рис. 1).

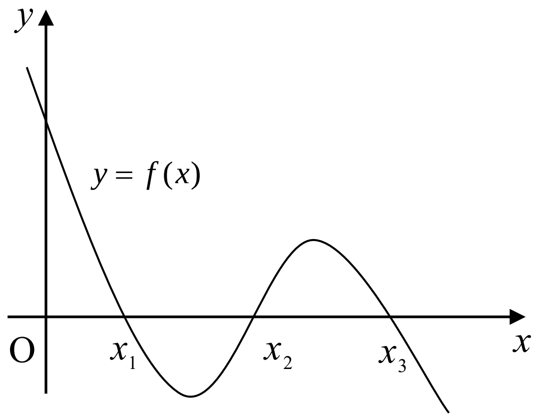


Рисунок 1. Графическое отделение корней (1-ый способ).

На практике же бывает удобнее заменить уравнение (1) равносильным ему уравнением

$$\varphi(x) = \psi(x), \qquad (2)$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ - более простые функции, чем $f(x)$. Абсциссы точек пересечения графиков функций $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$ дают корни уравнения (2), а значит и исходного уравнения (1) (рис.2).

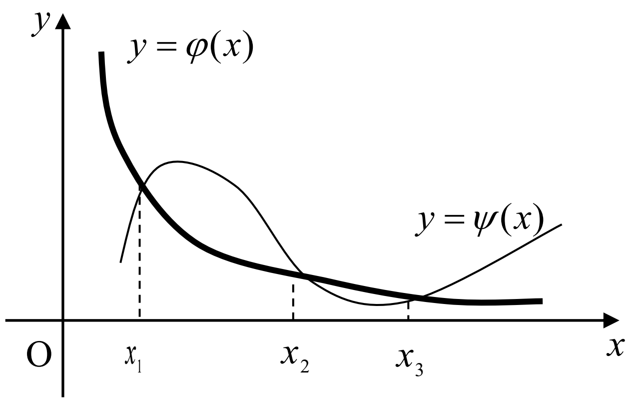


Рисунок 2. Графическое отделение корней (2-ой способ).

Пример 1. Отделить графически корень уравнения $1 - x^2 + \frac{1}{6}x^3 = 0$.

Решение. Для решения задачи построим график функции $y = 1 - x^2 + \frac{1}{6}x^3$ (рис. 3).

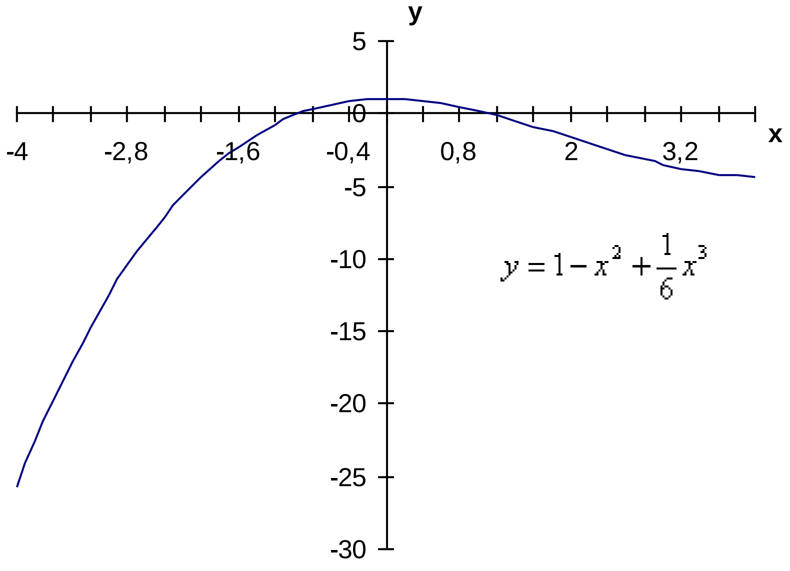


Рисунок 3. График функции $y = 1 - x^2 + \frac{1}{6}x^3$.

Из рисунка видно, что один из корней уравнения принадлежит отрезку $[-1{,}2;-0{,}8]$, второй – отрезку $[0{,}8;1{,}2]$. Так как рассматриваемое уравнение имеет третью степень, то должен существовать еще один корень на интервале $(3{,}2;+\infty)$.

Пример 2. Отделить графически корень уравнения $(x-1)^2 - \frac{1}{2}e^x = 0$.

Решение. Преобразуем уравнение к виду $(x-1)^2 = \frac{1}{2}e^x$ и построим графики функций $y = (x-1)^2$ и $y = \frac{1}{2}e^x$ (рис. 4).

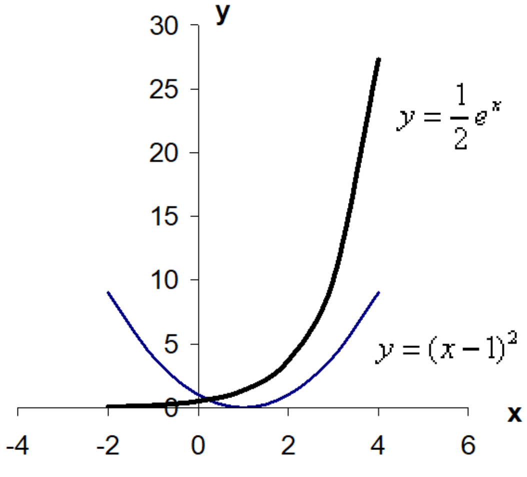


Рисунок 4. Графическое отделение корней.

Из рисунка видно, что абсцисса точки пересечения этих графиков принадлежит отрезку $[0;1]$.

<u>Аналитическое отделение</u> корней основано на следующих теоремах.

Теорема 1. Если непрерывная функция $y = f(x)$ принимает на концах отрезка $[a,b]$ значения разных знаков, т.е. $f(a)\cdot f(b) < 0$, то на этом отрезке содержится по крайней мере один корень уравнения (1) (рис. 5).

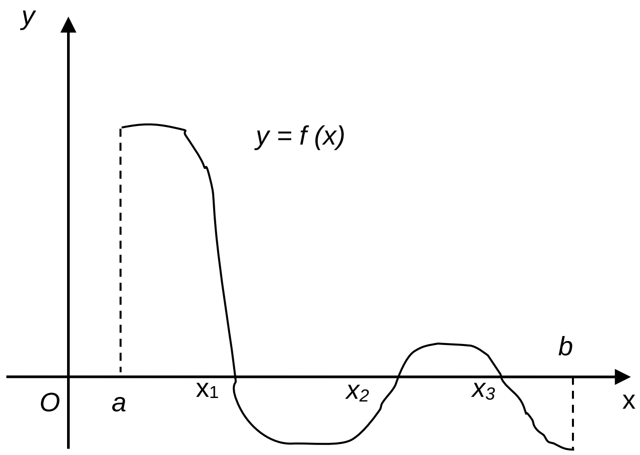


Рисунок 5. Существование корня на отрезке.

Теорема 2. Если непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция $y = f(x)$ принимает на концах отрезка значения разных знаков, а производная $f'(x)$ сохраняет знак внутри отрезка $[a,b]$, то внутри отрезка существует единственный корень уравнения *f (x)* = 0 (рис. 6).

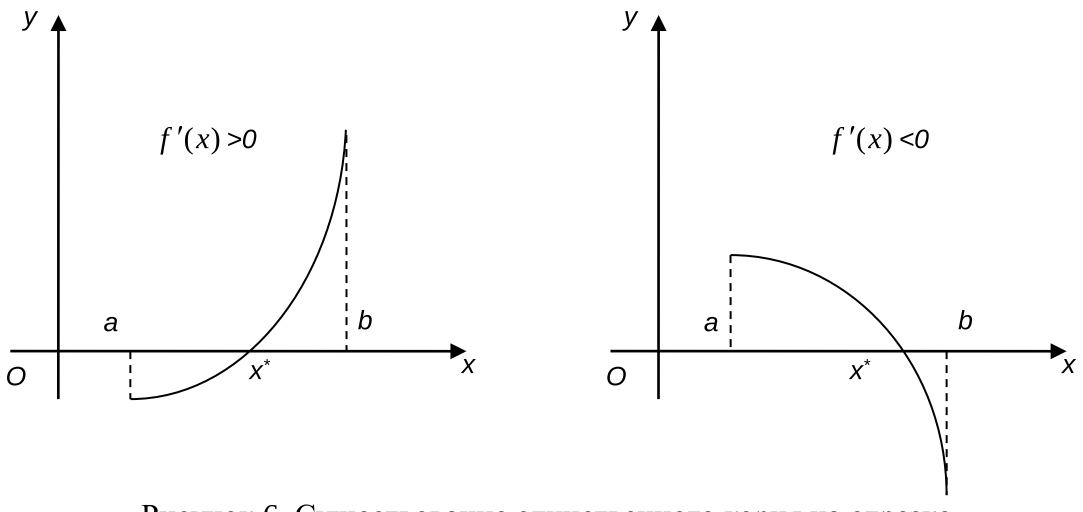


Рисунок 6. Существование единственного корня на отрезке.

Пример 3. Подтвердить аналитически правильность нахождения отрезка изоляции корня уравнения $(x-1)^2 - \frac{1}{2}e^x = 0$.

Решение. Для отрезка $[0;1]$ имеем:

$$f(0) = (0-1)^2 - \frac{1}{2}e^0 = 0.5;\ \ f(1) = (1-1)^2 - \frac{1}{2}e^1 = -\frac{1}{2}e = -1.359.$$

Значит, $f(0) \cdot f(1) < 0$.

Следовательно, корень отделён правильно.

Уточнение корней до заданной точности заключается в сужении интервала изоляции корня и выполняется одним из специальных методов. Наиболее распространенными являются метод деления отрезка пополам, метод касательных (Ньютона), метод секущих (хорд).

Тема 3. Итерационные методы решения нелинейных уравнений

Уточнение корней методом деления отрезка пополам

Постановка задачи

Общая запись уравнения с одной переменной f(x)=0

Здесь f(x) - некоторая функция, имеющая область определения и набор значений.

Корень уравнения (корень функции) - число из области определения функции, при подстановке которого в уравнение получаем тождество.

Если при подстановке числа в уравнение в 0 обращается не только функция, но и все ее производные до k-1 порядка включительно, то корень имеет кратность k. Корень кратности 1 называется **простым**.

Решить уравнение - значит установить, имеет ли оно корни, сколько корней и определить значения корней.

Два уравнения называются **равносильными**, если всякий корень одного уравнения является корнем другого.

Аналитическое решение уравнения заключается в последовательной замене исходного уравнения на равносильное, пока не получатся уравнения, решения которых известны.

Подавляющее большинство уравнений путем аналитических преобразований (точными методами) не решаются. К тому же, зачастую, коэффициенты уравнений известны лишь приближенно, то есть задача отыскания точных значений корней теряет смысл. В подобных ситуациях применяют численные (приближенные) методы поиска корней уравнений. Эти методы позволяют не только дать приближенное значение корня, но и указать величину погрешности приближения.

Метод деления отрезка пополам имеет другие названия: **метод половинного деления, метод дихотомии, метод проб, метод бисекций.**

Метод бисекции или метод деления отрезка пополам – простейший численный метод для решения нелинейных уравнений вида f(x)=0. Предполагается только непрерывность функции f(x). Поиск основывается на теореме о промежуточных значениях.

Алгоритм основан на следующем следствии из теоремы Больцано–Коши:

Пусть непрерывная функция $f(x) \in C([a,b])$ тогда, если $sign(f(a)) \neq sign(f(b))$, то $\exists C \in [a,b]: f(c) = 0$

Таким образом, если мы ищем ноль, то на концах отрезка функция должна быть противоположных знаков. Разделим отрезок пополам и возьмём ту из половинок, на концах которой функция по-прежнему принимает значения противоположных знаков. Если значение функции в серединной точке оказалось искомым нулём, то процесс завершается.

Точность вычислений задаётся одним из двух способов:

- $\varepsilon_{f(x)}$ по оси OY, что ближе к условию f(x)=0 из описания алгоритма;
- ε_x , по оси OX, что может оказаться удобным в некоторых случаях.

Процедуру следует продолжать до достижения заданной точности.

Для поиска произвольного значения достаточно вычесть из значения функции искомое значение и искать ноль получившейся функции.

Описание алгоритма

Задача заключается в нахождении корней нелинейного уравнения f(x)=0

Для начала итераций необходимо знать отрезок $[x_L, x_R]$ значений x, на концах которого функция принимает значения противоположных знаков.

Противоположность знаков значений функции на концах отрезка можно определить множеством способов. Один из множества этих способов — умножение значений функции на концах отрезка и определение знака произведения путём сравнения результата умножения с нулём:

$$f(x_L) \cdot f(x_R) < 0$$

в действительных вычислениях такой способ проверки противоположности знаков при крутых функциях приводит к преждевременному переполнению.

Для устранения переполнения и уменьшения затрат времени, то есть для увеличения быстродействия, на некоторых программно-компьютерных комплексах противоположность знаков значений функции на концах отрезка нужно определять по формуле:

$$\sin g(f(x_L)) \neq \sin g(f(x_R))$$

так как одна операция сравнения двух знаков двух чисел требует меньшего времени, чем две операции: умножение двух чисел (особенно с плавающей запятой и двойной длины) и сравнение результата с нулём. При данном сравнении, значения функции f(x) в точках x_L и x_R можно не вычислять, достаточно вычислить только знаки функции f(x) в этих точках, что требует меньшего машинного времени.

Из непрерывности функции f(x) следует, что на отрезке $[x_L, x_R]$ существует хотя бы один корень уравнения (в случае не монотонной функции f(x) функция имеет несколько корней и метод приводит к нахождению одного из них).

Найдём значение x в середине отрезка:

$$x_M = \frac{x_L + x_R}{2}$$

в действительных вычислениях, для уменьшения числа операций, в начале, вне цикла, вычисляют длину отрезка по формуле:

$$x_D = (x_R - x_L)$$

а в цикле вычисляют длину очередных новых отрезков по формуле:

$x_D = \dfrac{x_D}{2}$ и новую середину по формуле:

$$x_M = x_L + x_D$$

Вычислим значение функции $f(x_M)$ в середине отрезка x_M:

Если $f(x_M) = 0$ или,

в действительных вычислениях, $f(x_M) \leq \varepsilon_{f(x)}$,

где $\varepsilon_{f(x)}$ – заданная точность по оси OY, то корень найден.

Иначе $f(x_M) \neq 0$ или, в действительных вычислениях, $f(x_M) > \varepsilon_{f(x)}$, то разобьём отрезок $[x_L, x_R]$ на два равных отрезка: $[x_L, x_M]$ и $[x_M, x_R]$.

Теперь найдём новый отрезок, на котором функция меняет знак:

Если значения функции на концах отрезка имеют противоположные знаки на левом отрезке,

$f(x_L) \cdot f(x_M) < 0$ или

$\sin g(f(x_L)) \neq \sin g(f(x_M))$,

то, соответственно, корень находится внутри левого отрезка $[x_L, x_R]$. Тогда возьмём левый отрезок присвоением $x_R = x_M$ и повторим описанную процедуру до достижения требуемой точности $\varepsilon_{f(x)}$ по оси OY.

Иначе значения функции на концах отрезка имеют противоположные знаки на правом отрезке, $f(x_L) \cdot f(x_M) < 0$ или

$\sin g(f(x_M)) \neq \sin g(f(x_R))$,

то, соответственно, корень находится внутри правого отрезка $[x_M, x_R]$. Тогда возьмём правый отрезок присвоением $x_L = x_M$, и повторим описанную процедуру до достижения требуемой точности $\varepsilon_{f(x)}$ по оси OY.

За количество итераций N деление пополам осуществляется Nраз, поэтому длина конечного отрезка в 2^Nраз меньше длины исходного отрезка.

Существует похожий метод, но с критерием останова вычислений ε_x по оси OX, в этом методе вычисления продолжаются до тех пор, пока, после очередного деления пополам, новый отрезок больше заданной точности по оси x: $(x_R - x_L) > \varepsilon_x$.

В этом методе отрезок на оси OXможет достичь заданной величины ε_x, а значения функций f(x) (особенно крутых) на оси y могут очень далеко отстоять от нуля, при пологих же функциях f(x) этот метод приводит к большому числу лишних вычислений.

В дискретных функциях — это номера элементов массива, которые не могут быть дробными, и, в случае второго критерия останова вычислений, разность $x_R - x_L$ не может быть меньше $\varepsilon_x = 1$.

Пусть корень уравнения *f (x)* = 0 отделен на отрезке $[a,b]$, т.е. $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Алгоритм приближенного вычисления корня методом половинного деления.

Исходные данные:

f (x) – функция*;*

ε – требуемая точность;

a, b – границы заданного интервала (границы поиска корня).

Результат: $x_{пр}$ – приближенный корень уравнения *f (x)* = 0.

Метод решения:

Шаг 1. Выбрать середину $c = \frac{a+b}{2}$ отрезка $[a,b]$ в качестве приближенного корня.

Шаг 2. Если $f(c) = 0$, то c – искомый корень уравнения, на этом прекращаем вычисления. В противном случае перейти к шагу 3.

Шаг 3. Точный корень уравнения x^* отличается от *c* не более чем на половину длины отрезка, т.е. не более чем на $\frac{(b-a)}{2}$ (полученная точность). Проверяем условие $\frac{(b-a)}{2} \leq \varepsilon$. Если условие не выполняется, т.е. полученная точность нас не устраивает (она больше, чем требуемая), то перейти к шагу 4; в противном случае прекратить вычисления, поскольку мы достигли требуемой точности, и приближенным корнем уравнения *f (x)* = 0 считать середину c отрезка $[a,b]$.

Шаг 4. Определить интервал дальнейшего поиска корня. Из двух образовавшихся при делении отрезков переходим к той из его половин $[a,c]$ и $[c,b]$, на концах которого функция принимает значения разных знаков.

Случай 1 (рис. 7). Корень на отрезке $[a,c]$. $f(a) \cdot f(c) \leq 0$, граница *b* сдвигается влево – заменить *b* на *c*: *b:= c*.

Случай 2 (рис. 7). Корень на отрезке $[c,b]$. $f(a)\cdot f(c)>0$, граница *a* сдвигается вправо – заменить *a* на *c*: *a:= c*.

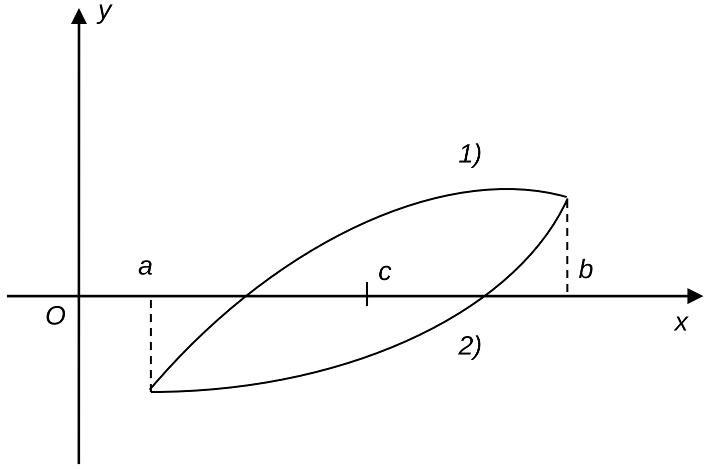


Рис. 7. Графическая иллюстрация метода половинного деления.

Перейти к шагу 1.

Алгоритм деления отрезка пополам довольно медленный, но зато абсолютно застрахован от неудач. Основное достоинство метода состоит в том, что его скорость сходимости не зависит от вида функции *f (x)*. Данный метод не имеет дополнительных условий сходимости, кроме $f(a)\cdot f(b)<0$.

Решение задачи

Решение задачи разделяется на 2 этапа.

Сначала проводится отделение корней. Этот этап трудно формализуем, как правило проводится "вручную". Цель этапа - указать все интервалы области определения функции, внутри которых функция непрерывна и содержит ровно один корень. Универсальным приемом является исследование левой части уравнения (функции) методами математического анализа и схематичное построение графика. Окрестности точек пересечения графиком оси X - результат выполнения этапа.

Часто исходное уравнение f(x)=0 можно заменить равносильным уравнением h(x)=g(x), графики которых известны. Эти графики схематично строятся.

Пример:

Если f(x)=sin(2x)-ln(x), то вместо уравнения f(x)=0 можно использовать уравнение sin(2x)=ln(x) .

Если f(x)=x*ln(x)-1, то вместо уравнения f(x)=0 можно использовать уравнение ln(x)=1/x .

Результат этапа - окрестности абсцисс точек пересечения графиков.

Оба случая опираются на приближенные изображения и могут выдать неверные результаты. Для проверки используются следующие теоремы математического анализа:

Теорема *Если функция непрерывна на некотором отрезке и на концах этого отрезка имеет значения разного знака, то внутри отрезка обязательно есть корень, а возможно и не один.*

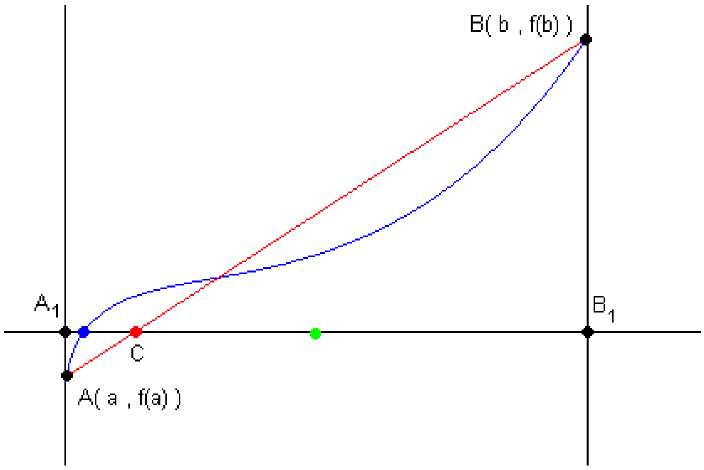
Теорема *Если функция непрерывна и строго монотонна на некотором отрезке и на концах этого отрезка имеет значения разного знака, то внутри отрезка есть единственный корень.*

Следующий этап - уточнение корней - заключается в определении числового приближенного значения каждого отделенного корня с требуемой точностью. Разработано множество приемов достижения результата. Все они легко формализуются, то есть можно составить соответствующую программу и поручить работу компьютеру.

Лабораторная работа № 5
Метод бисекции

Алгоритм нахождения корня уравнения с помощью итерационного метода состоит из двух этапов:

1) Отыскание приближенного значения корня
2) Уточнение приближенного значения



Допустим, найден отрезок, в котором расположено искомое значение корня $x = c$. В качестве начального приближения корня c_0 принимается середина этого отрезка $c_0=(a+b)/2$. Далее исследуется значение функции на концах отрезков $[a,c_0]$ и $[c_0,b]$. Тот отрезок, на концах которого $F(x)$ принимает значения разных знаков, содержит искомый корень, его принимают в качестве нового отрезка и т.д. После каждой итерации отрезок, на котором расположен корень, уменьшается вдвое. Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока $|F(x)| < \varepsilon$.

Пример. Найти решение нелинейного уравнения методом бисекции с точностью $\varepsilon=0{,}001$

$$\sin^2(x+3)-\lg(x+2)+1=0$$

Приведем функцию F(x)=0 к виду g(x)=h(x)

$\sin^2(x+3)=\lg(x+2)-1$, где

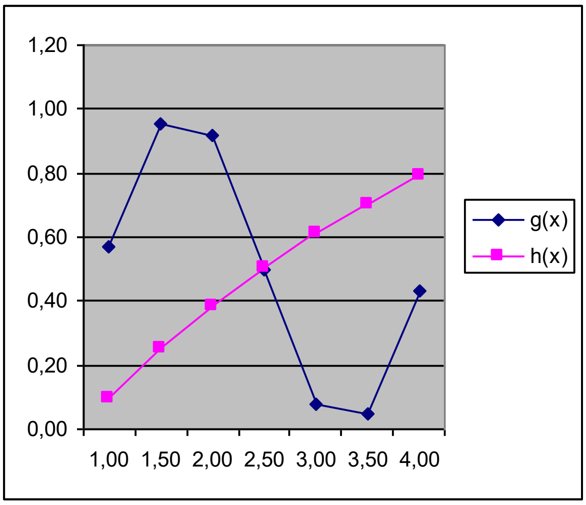
$$g(x)=\sin^2(x+3)$$

$$h(x)=\lg(x+2)-1$$

Выполним графическое отделение корней. Для этого табулируем функции g(x), h(x).

Построим график.

x	g(x)	h(x)
1,00	0,57	0,10
1,50	0,96	0,25
2,00	0,92	0,39
2,50	0,50	0,50
3,00	0,08	0,61
3,50	0,05	0,70
4,00	0,43	0,79



Определим точку пересечения графиков. Отрезок [a,b] содержит точку пересечения, на концах отрезка функция *F(x)* меняет знак.

a	b	c	F(a)	F(b)	F(c)
1,500	3,000	2,250	0,703	-0,531	0,291
2,250	3,000	2,625	0,291	-0,531	-0,157
2,250	2,625	2,438	0,291	-0,157	0,070
2,438	2,625	2,531	0,070	-0,157	-0,044
2,438	2,531	2,484	0,070	-0,044	0,013
2,484	2,531	2,508	0,013	-0,044	-0,016
2,484	2,508	2,496	0,013	-0,016	-0,002
2,484	2,496	2,490	0,013	-0,002	0,006
2,490	2,496	2,493	0,006	-0,002	0,002
2,493	2,496	2,495	0,002	-0,002	0,000

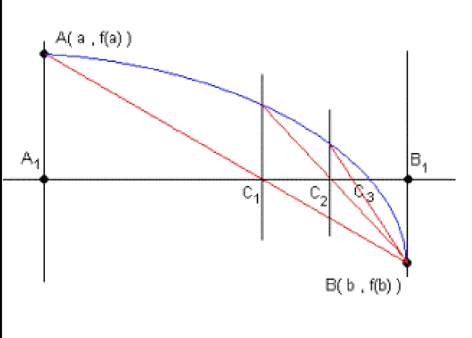
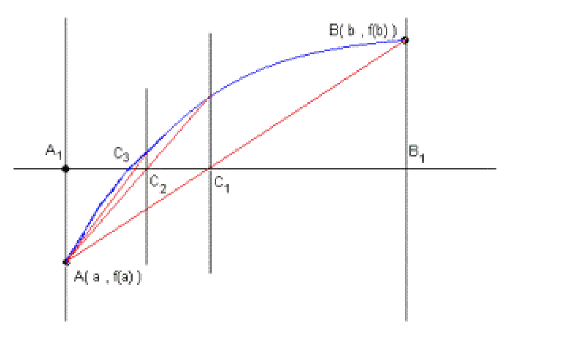
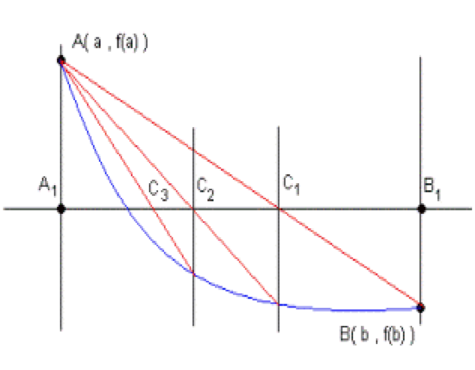
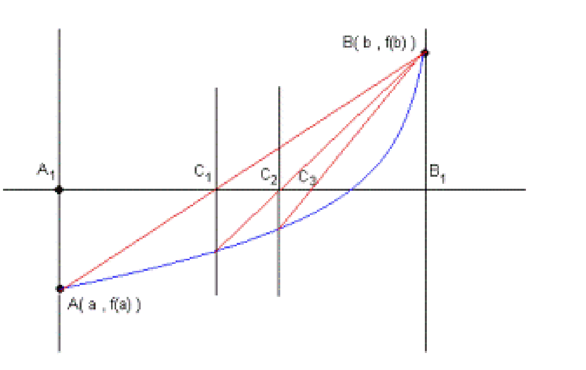
Корень уравнения *x=2,495*

Лабораторная работа № 6
Метод хорд

Пусть найден отрезок [a,b], в котором функция *F(x)* меняет знак. В данном методе процесс итерации состоит в том, что в качестве приближения к корню, принимаются значения c_0, c_1, c_2, … *точек* пересечения хорды с осью абсцисс.

$$c_0 = a - \frac{b-a}{F(b)-F(a)} F(a)$$

Будем считать, что отрезок, на котором отделен корень, достаточно мал, и на нем первая и вторая производные знакопостоянны. Получаем 4 различных возможности:

	f'<0 функция убывает	f'>0 функция возрастает
f"<0 функция выпукла вверх		
f">0 функция выпукла вниз		

Далее сравниваются значения *F(a), F(c_0), F(b)* и выбирается отрезок [a,c_0] или [c_0,b]. Тот отрезок, на концах которого *F(x)* принимает значения разных знаков, содержит искомый корень, его принимают в качестве нового отрезка и т.д. Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока | *F(x)* | < *ε.*

__Пример.__ Найти решение нелинейного уравнения методом хорд с точностью ε=*0,001*

$$sin^2(x+3) - lg(x+2) + 1 = 0$$

a	b	F(a)	F(b)	c_i	F(c)	|F(c)|	ε
1,500	3,000	0,703	-0,531	2,354	0,171		
2,354	3,000	0,171	-0,531	2,511	-0,020	0,020	
2,354	2,511	0,171	-0,020	2,495	0,000	0,000	<0,001

Корень уравнения *x=2,495*

Лабораторная работа № 7
Метод Ньютона

В данном методе не обязательно задавать отрезок [a,b], содержащий корень уравнения, а достаточно найти начальное приближение корня $x=c_0$. Отличие метода касательных от метода хорд состоит в том, на k-й итерации вместо хорды проводится касательная к кривой $y=F(x)$. Уравнение касательной к кривой $y=F(x)$ в точке D_0, с координатами c_0 и $F(c_0)$, имеет вид:

$$y-F(c_0)=F'(c_0)(x-c_0)$$

Следующее приближение корня c_1 находится как абсцисса точки пересечения касательной с осью Ox:

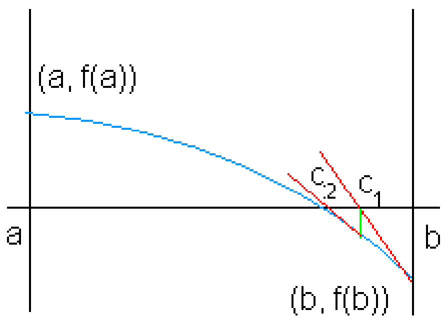
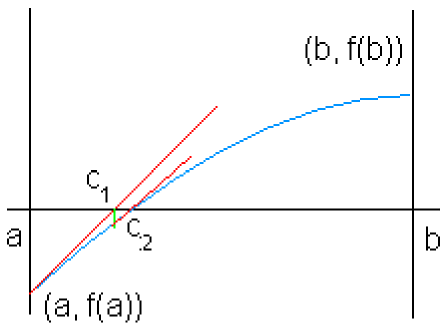
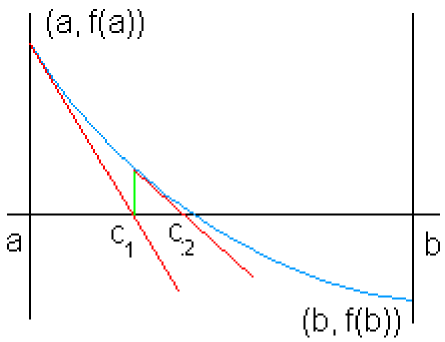
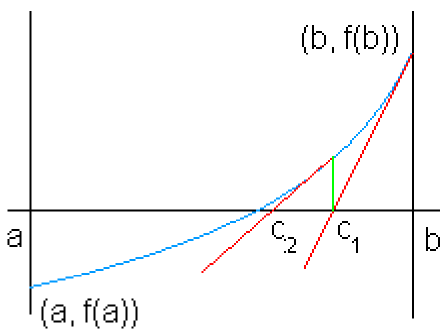
$$c_1=c_0-F(c_0)/F'(c_0)$$

Аналогично находятся следующие приближения как точки пересечения с осью абсцисс касательных, проведенных в точках D_1, D_2, …

$$c_{n+1}=c_n-F(c_n)/F'(c_n)\,,\quad F'(c_n)\neq 0\,.$$

Для окончания итерационного процесса можно использовать одно из условий: $|\,F(x)\,|<\varepsilon$ или $|\,c_{n+1}-c_n\,|<\varepsilon$.

Будем считать, что отрезок, на котором отделен корень, достаточно мал, и на нем первая и вторая производные знакопостоянны. Получаем 4 различных возможности:

	f'<0 функция убывает	f'>0 функция возрастает
f"<0 функция выпукла вверх		
f">0 функция выпукла вниз		

Выбираем тот конец отрезка, на котором отделен корень, для которого касательная пересчет ось OX внутри отрезка [a,b]. Перебирая все 4 случая, отмечаем, что для этого достаточно, чтобы в выбранной точке знак функции и знак ее второй производной совпали (f(x)*f"(x)>0). Это заявление можно строго доказать.

__Пример__. Найти решение нелинейного уравнения
$y=4x^3-2x^2+5x-8$ методом касательных с точностью $\varepsilon=0{,}\,001$.
Найдем первую и вторую производную функции y= F(x).

$y' = 12x^2 - 4x + 5$

$y'' = 24x - 4$

Построим итерационную таблицу:

c	F(c)	F'(c)	F''(c)	F'(c)*F''(c)>0
2.000	26.000	45.000	44.000	ИСТИНА
1.422	6.573	23.584		
1.144	1.084	16.118		
1.076	0.052	14.596		
1.073	0.000	14.518		

Корень уравнения *x=1.073*

Лабораторная работа № 8
Метод простых итераций

Метод решения уравнения $f(x) = 0$ состоит в замене исходного уравнения эквивалентным ему уравнением $x = \varphi(x)$ и построении последовательности $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, сходящейся при $n \to \infty$ к точному решению. Итерационный процесс прекращается, если результаты двух последовательных итераций близки, т.е. выполнено неравенство $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$.

Достаточное условие сходимости метода простой итерации дается теоремой.

Теорема. Пусть функция $\varphi(x)$ определена и дифференцируема на $[a,b]$, причем все ее значения $\varphi(x) \in [a,b]$ и выполняется условие $|\varphi'(x) \le 1|$, $\forall x \in [a,b]$. Тогда последовательность $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ сходится к единственному решению уравнения при любом начальном значении $x_0 \in [a,b]$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi(x_n) = c$, $f(c) = 0$, $c \in [a,b]$.

Выполнение условия сходимости можно добиться путем перехода от исходного уравнения $f(x) = 0$ к виду $x = \varphi(x)$ следующим образом: умножим обе части исходного уравнения на *d*=const, затем прибавим к обеим частям по x, тогда $x + df(x) = x$. Обозначим $\varphi(x) = x + df(x)$. Константа *d* выбирается так, чтобы выполнялось достаточное условие сходимости итерационного процесса, т.е. $|\varphi'(x)| = |1 + df'(x)| < 1, \forall x \in [a,b]$.

Пример. Найти решение уравнения $y=4x^3-2x^2+5x-8$ методом простых итераций с точностью $\mathcal{E}$*=0,001.*

c	φ(c)	c_k-c_{k-1}	Iφ'(c)I<1
1,000	1,060		0,22
1,060	1,071	0,060	
1,071	1,073	0,011	
1,073	1,073	0,002	
1,073	1,073	0,000	

$\varphi(x)=x+d(4x^3-2x^2+5x-8)$, где d=-0,06

Корень уравнения *x=1.073*

Варианты заданий к лабораторным работам

Лабораторная работа № 5-8

№вар.	1-2	3-4
1	$x^2 - 5\sin x = 0$	$x^3 - 6x^2 - 3x + 15 = 0$
2	$tg9x - 13x = 0$	$x^3 - 3x^2 - x + 7 = 0$
3	$\ln(8{,}5x) - 9{,}6x + 2 = 0$	$2x^3 - 3x^2 - x + 8 = 0$
4	$0{,}5\sin 5x - 5x = 0$	$1{,}5x^3 + x^2 - 3x + 1 = 0$
5	$0{,}5e^{-0{,}7x} - x = 0$	$x^3 + 0{,}6x^2 + x + 5 = 0$
6	$x^2 - 10\sin x = 0$	$x^3 + 0{,}2x^2 + 1{,}5 = 0$
7	$tg0{,}9x - 1{,}4x = 0$	$x^3 - 2x + 8 = 0$
8	$\ln(0{,}3x) - 0{,}3x + 0{,}5 = 0$	$x^3 - 2{,}6x^2 - 3x - 4 = 0$
9	$10\sin 7x - 7x = 0$	$x^3 - 3x + 3{,}2 = 0$
10	$e^{-0{,}5x} - x = 0$	$x^3 + 8x^2 - x + 11 = 0$
11	$x - e^{-0{,}1x} = 0$	$x^3 - x^2 - x - 1 = 0$
12	$10x - e^x = 0$	$x^3 - 6x^2 - 3x + 15 = 0$
13	$\ln(0{,}1x + 2) - 3x + 4 = 0$	$4x^3 + x^2 - 3x + 7 = 0$
14	$4\sin 3{,}8x - 3{,}25x = 0$	$x^3 + 0{,}7x^2 + x + 2 = 0$
15	$tg3x - 5x = 0$	$x^3 + 6x - 12 = 0$
16	$0{,}9e^{-0{,}5x} - x = 0$	$x^3 + 12x^2 + 9x + 3 = 0$
17	$x^2 - 3\sin x = 0$	$x^3 - 3{,}6x^2 - 4x + 1 = 0$
18	$\ln(1{,}3x + 25) - 8x + 3 = 0$	$x^3 + 0{,}2x^2 - x + 6 = 0$
19	$15x - e^x = 0$	$0{,}1x^3 + 0{,}4x^2 + x = 0$
20	$tg(10x + 4) - x^2 = 0$	$x^3 + 12x + 5 = 0$
21	$6\sin(5x + 1) - 5x - 1 = 0$	$x^3 + x^2 + 7x + 7 = 0$
22	$x + 2 - 4\sin x = 0$	$x^3 + 0{,}4x^2 - 9x - 3 = 0$
23	$-10x - 2e^x = 0$	$x^3 - 15x + 9 = 0$
24	$\ln(0{,}1x + 4) - 3x = 0$	$x^3 - 4x^2 + 0{,}3x - 5 = 0$
25	$15x - e^x = 0$	$0{,}5x^3 + 0{,}1x^2 - x + 1 = 0$
26	$tg(9{,}5x + 20) - x^2 = 0$	$x^3 - 9x^2 + 5x - 7 = 0$

№вар.	1-2	3-4
27	$5\sin(4{,}5x) - 9x - 5 = 0$	$x^3 - 3x^2 + x + 4{,}5 = 0$
28	$x - e^{-x} = 0$	$x^3 + 0{,}8x^2 - 6x - 2{,}3 = 0$
29	$ctgx - \frac{x}{2} = 0$	$x^3 + 0{,}6x^2 + x + 5 = 0$
30	$ctgx - x^2 = 0$	$x^3 - 0{,}4x^2 + x - 1 = 0$

Тема 3. Решение систем линейных уравнений
Лабораторная работа № 9
Работа с массивами констант

Формулы массива и их ввод

Формула массива может выполнить несколько вычислений, а затем вернуть одно значение или группу значений. Формула массива воздействует на несколько наборов значений, называемых аргументами массива. При этом все аргументы массива должны иметь одинаковое количество строк и столбцов. Каждый аргумент массива должен иметь соответствующий номер строки и столбца. Формула массива создается так же, как и простая формула. Выделяется ячейка или группа ячеек, в которых необходимо создать формулу, вводится формула, а затем нажимаются клавиши Ctrl + ⇧ Shift + Enter

Если необходимо вычислить одно значение, Microsoft Excel может понадобиться выполнить несколько действий для возврата такого значения. *Например*, следующая формула вычисляет среднее значение только тех ячеек, принадлежащих диапазону D5:D15, которым в столбце А поставлена в соответствие строка «авиалиния Небеса». Функция ЕСЛИ находит ячейки в диапазоне А5:А15, содержащие строку «авиалиния Небеса», и возвращает значения, соответствующие этой строке в диапазоне D5:D15, функции СРЗНАЧ.

{=СРЗНАЧ(ЕСЛИ(A5:A15=”авиалиния Небеса”,D5:D15))}

Для вычисления нескольких значений в формуле массива, необходимо ввести массив в диапазон ячеек, имеющих соответствующее число строк или столбцов, как аргументы массива.

Константы в формулах массива

Обычно формула при обработке нескольких аргументов возвращает одно значение; в качестве аргумента формулы может при этом выступать либо ссылка на ячейку, содержащую значение, либо само значение. Для создания ссылки на диапазон ячеек используется формула массива, позволяющая ввести в одну ячейку массив значений.

Этот массив значений называется массивом констант; удобен он тем, что при этом не требуется заполнять значениями вспомогательные ячейки. Чтобы создать массив констант, выполните следующие действия:

- весь массив заключается в фигурные скобки ({ });
- значения столбцов разделяются точками с запятой (;);
- значения строк разделяются двоеточиями (:).

Например, вместо ввода четырех чисел (10, 20, 30, 40) в отдельные ячейки их можно ввести в массив, непосредственно в используемой функции в фигурных скобках: {1O;20;3O;40}.

Чтобы записать массив $\begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 & 40 \\ 50 & 60 & 70 & 80 \end{pmatrix}$ непосредственно в используемой функции необходимо представить значения «10, 20, 30, 40» и «50, 60, 70, 80», находящиеся в расположенных друг под другом ячейках, следующим образом: {10;20;30;40:50;60;70;80}.

Элементы массива констант

- Массив констант может состоять из чисел, текста, логических значений (например ИСТИНА или ЛОЖЬ) или значений ошибок (например #Н/Д).
- Числа в массиве могут быть целыми, с десятичной точкой или экспоненциальными.
- Текст должен быть взят в двойные кавычки, например “Четверг”.
- Массив констант может состоять из элементов разного типа, *например* {1,3,4;ИСТИНА, ЛОЖЬ, ИСТИНА}.
- Элементы массива должны быть константами, но не формулами.

- Массив констант не может содержать знаки доллара ($), в круглых скобок и процента (%).
- Массив констант не может содержать ссылок.
- Массив констант не может иметь столбцы или строки разного размера.

Вычисление определителя матрицы

МОПРЕД(массив) - Возвращает определитель матрицы (матрица хранится в массиве). *Массив* - это числовой массив с равным количеством строк и столбцов.

- Массив может быть задан как интервал ячеек, например, A1:C3 или как массив констант, *например* {1;2;3:4;5;6:7;8;9} или как имя, именующее интервал или массив.
- Если какая-либо ячейка в массиве пуста или содержит текст, то функция МОПРЕД возвращает значение ошибки #ЗНАЧ!.
- МОПРЕД также возвращает значение ошибки #ЗНАЧ!, если массив имеет неравное количество трок и столбцов.

Замечания.

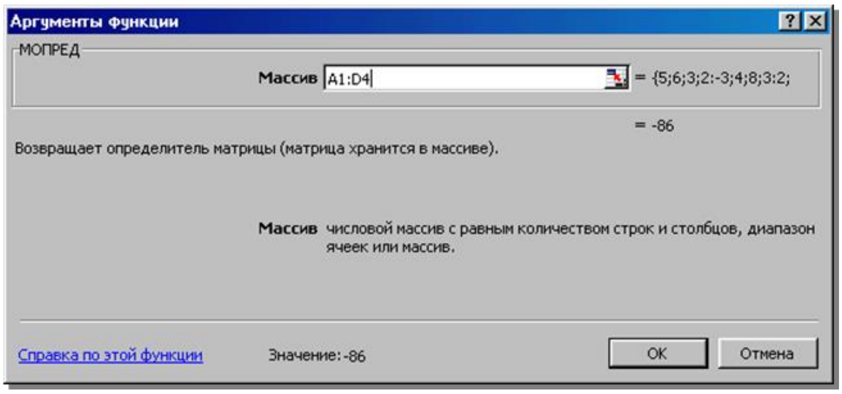
1. Определитель матрицы - это число, вычисляемое на основе значений элементов массива. Для массива A1 :C3, состоящего из трех сток и трех столбцов, определитель вычисляется следующим образом:

МОПРЕД(A1:C3) равняется A1*(B2*C3-B3*C2) + A2*(B3*C1-B1*C3) + A3*(B1*C2-B2*C1)

2. Определители матриц обычно используются при решении систем уравнений с несколькими неизвестными.
3. МОПРЕД производит вычисления с точностью примерно 16 значащих цифр, что может в некоторых случаях приводить к небольшим численным ошибкам.

Создание формулы вычисления определителя массива

1. Занесите исходную матрицу в таблицу.
2. В свободном месте таблицы выделите ячейку, в которой будет выведен результат.
3. Вызовите функцию МОПРЕД(). На экране появится диалоговое окно:



4. Нажмите красную стрелочку в строке Массив, при этом на экране появится лист с исходными данными.
5. Выделите матрицу, для которой надо найти определитель.
6. Нажмите красную стрелочку для возврата в диалоговое окно:

7. Нажмите клавишу 

.

Кроме этого, можно в данной функции ввести массивы непосредственно:
Примеры
МОПРЕД({1; 3; 8; 5: 1; 3; 6; 1: 1; 1; 1; 0;7; 3; 10; 2}) равняется 88

МОПРЕД({3; 6; 1: 1; 1; 0; 3; 10; 2)) равняется 1

МОПРЕД({3; 6:1; 1}) равняется -3

МОПРЕД({ 1; 3; 8; 5 : 1; 3; 6; 1}) равняется #ЗНАЧ!, так как массив имеет неравное количество строк и столбцов.

Вычисление обратной матрицы

МОБР(массив) - Возвращает обратную матрицу для матрицы, хранящейся в массиве. *Массив* - это числовой массив с равным количеством строк и столбцов.

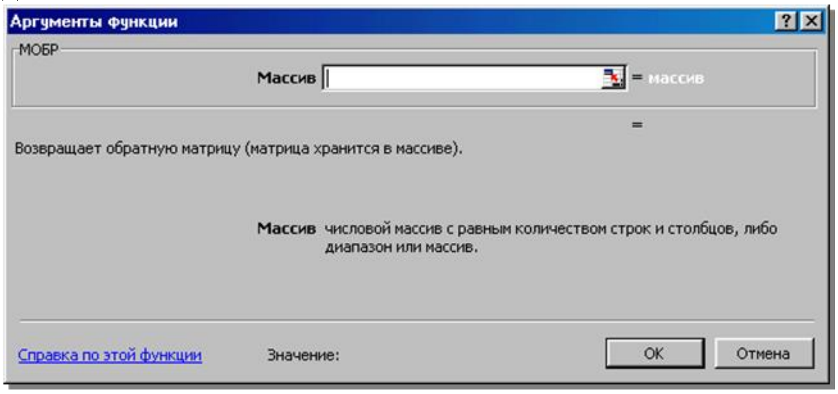
- Массив может быть задан как диапазон ячеек, например А1 :С3; как массив констант, например { 1;2;3: 4;5;6: 7;8;9} или как имя диапазона или массива.
- Если какая-либо из ячеек в массиве пуста или содержит текст, то функция МОБР возвращает значение ошибки #ЗНАЧ!.
- МОБР также возвращает значение ошибки #ЗНАЧ! если массив имеет неравное число строк и столбцов.

Замечания.

1. Формулы, которые возвращают массивы, должны быть введены как формулы массива.
2. Обратные матрицы, как и определители, обычно используются для решения систем уравнений с несколькими неизвестными. Произведение матрицы на ее обратную - это единичная матрица, то есть квадратный массив, у которого диагональные элементы равны 1, а все остальные элементы равны 0.
3. МОБР производит вычисления с точностью до 16 значащих цифр, что может привести к небольшим численным ошибкам округления.
4. Некоторые квадратные матрицы не могут быть обращены, в таких случаях функция МОБР возвращает значение ошибки #ЧИСЛО!. Определитель такой матрицы равен 0.

Создание формулы вычисления обратного массива

1. Занесите исходную матрицу в таблицу.
2. В свободном месте таблицы выделите блок для обратной матрицы.
3. Вызовите функцию МОБР() в классе математических функций. На экране появится диалоговое окно:



4. Нажмите красную стрелочку в строке Массив, при этом на экране появится лист с исходными данными.
5. Выделите матрицу, для которой надо найти обратную.
6. Нажмите красную стрелочку для возврата в диалоговое окно

Нажмите комбинацию клавиш Ctrl + ⇧ Shift + Enter .На экране появится обратная матрица.

Кроме этого, можно в данной функции ввести массивы непосредственно:

Примеры.

МОБР({4; -1: 2; 0}) равняется {0; 0,5 ; -1; 2}

МОБР({1; 2; 1: 3; 4; -1: 0; 2; 0)) равняется

{0,25; 0,25; -0,75 : 0; 0; 0,5 : 0,75; -0,25; -0,25}

Умножение массивов

МУМНОЖ(массив1;массив2) - Возвращает произведение матриц (матрицы хранятся в массивах). Результатом является массив с таким же числом строк, как массив 1 и с таким же числом столбцов, как массив2.

Массив1, массив2 - это перемножаемые массивы; могут быть заданы как интервалы, массивы констант или ссылки.

Количество столбцов аргумента *массив1* должно быть таким же, как количество сток аргумента *массив2*, и оба массива должны содержать только числа.

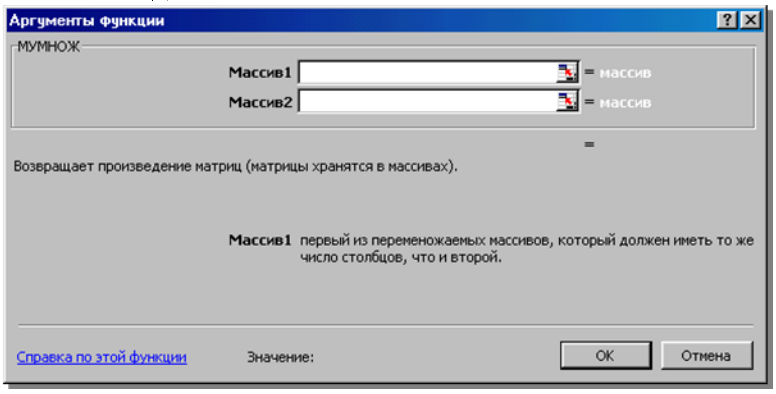
Если хотя бы одна ячейка в аргументах пуста или содержит текст, или если число столбцов в аргументе *массив1* отличается от числа строк в аргументе *массив2*, то функция МУМНОЖ возвращает значение ошибки #ЗНАЧ!.

Замечания.

1. Массив а, который является произведением двух массивов Ь и с определяется следующим образом: где i - это номер строки, а j - это номер столбца.
2. Формулы, которые возвращают массивы, должны быть введены как формулы массива.

Создание формулы перемножения массивов

1. Занесите исходные матрицы в таблицу.
2. В свободном месте таблицы выделите блок для результирующей матрицы.
3. Вызовите функцию МУМНОЖ() в классе математических функций. На экране появится диалоговое окно:



4. Нажмите красную стрелочку в строке Массив1, при этом на экране появится лист с исходными данными.
5. Выделите первую матрицу.
6. Нажмите красную стрелочку для возврата в диалоговое окно:

7. Нажмите красную стрелочку в строке Массив2, при этом на экране появится лист с исходными данными.
8. Выделите вторую матрицу.
9. Нажмите красную стрелочку для возврата в диалоговое окно:

10. Нажмите комбинацию клавиш Ctrl + ⇧ Shift + Enter На экране появится обратная матрица.

Кроме этого, можно в данной функции ввести массивы непосредственно:

Примеры.

МУМНОЖ({1; 3 : 7; 2}; {2; 0: 0; 2}) равняется {2; 6: 14; 4}

МУМНОЖ({3; 0 : 2; 0}; {2; 0: 0; 2}) равняется {6; 0 : 4; 0}

МУМНОЖ({1; 3; 0 : 7; 2; 0: 1; 0; 0}; {2; 0: 0; 2}) равняется #ЗНАЧ!, поскольку первый массив имеет три столбца, а второй массив имеет только две строки.

Транспонирование массива

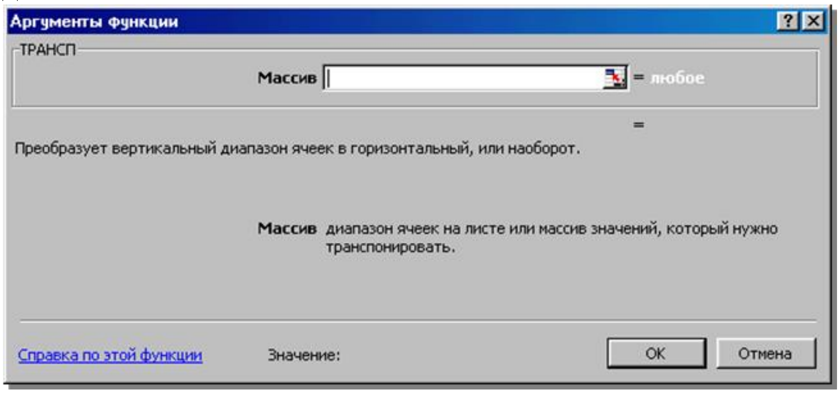
ТРАНСП(массив) - возвращает транспонированный массив.

Функция ТРАНСП должна быть введена как формула массива в интервал, который имеет столько же строк и столбцов, соответственно, сколько столбцов и строк имеет аргумент массив. Функция ТРАНСП используется для того, чтобы поменять ориентацию массива на рабочем листе с вертикальной на горизонтальную и наоборот.

Массив - это транспонируемый массив или диапазон ячеек на рабочем листе. Массив может быть интервалом ячеек. Транспонирование массива заключается в том, что первая строка массива становится первым столбцом нового массива, вторая строка массива становится вторым столбцом нового массива, и так далее.

Создание формулы для транспонирования массива

1. Занесите исходную матрицу в таблицу.
2. В свободном месте таблицы выделите блок для результирующей матрицы.
3. Вызовите функцию ТРАНСП() в классе математических функций. На экране появится диалоговое окно:



4. Нажмите красную стрелочку в строке Массив, при этом на экране появится лист с исходными данными.
5. Выделите исходную матрицу.
6. Нажмите красную стрелочку для возврата в диалоговое окно

7. Нажмите комбинацию клавиш Ctrl + ⇧ Shift + Enter На экране появится транспонированная матрица.

Существует ещё один способ нахождения транспонированного массива:

1. Выделите ячейки, которые необходимо транспонировать.
2. Нажмите кнопку **Копировать.**
3. Укажите левую верхнюю ячейку области вставки, при этом область вставки не должна совпадать с областью копирования.
4. В меню **Правка** выберите команду **Специальная вставка**.
5. Установите флажок Транспонировать.

Нахождение К-го наибольшего элемента массива

НАИБОЛЬШИЙ (массив; k) - Возвращает k-ое наибольшее значение из множества данных.

Эта функция используется, чтобы выбрать значение по его относительному местоположению. Например, функцию НАИБОЛЬШИЙ можно использовать, чтобы определить наилучший, второй или третий результат в баллах, показанный при тестировании.

Массив - это массив или интервал данных, для которых определяется k-ое наибольшее значение.

k - это позиция (начиная с наибольшей) в массиве или интервале ячеек данных.

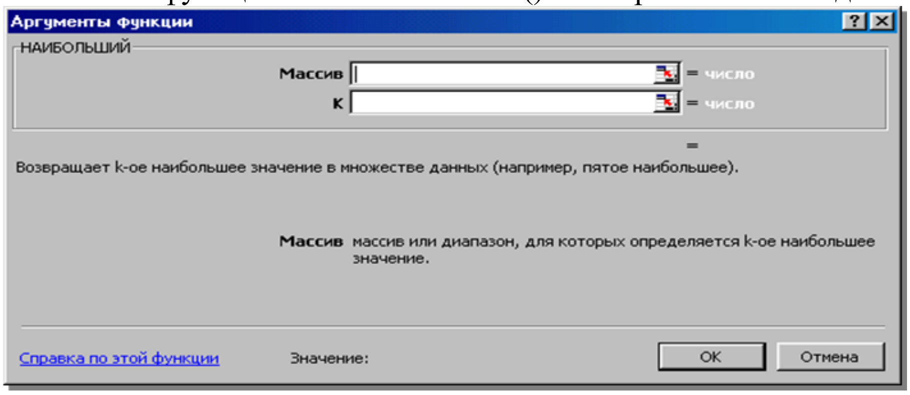
Замечание.

1. Если массив пуст, то функция НАИБОЛЬШИЙ возвращает значение ошибки #ЧИСЛО!.
2. Если k< 0 или если k больше, чем число точек данных, то функция НАИБОЛЬШИЙ возвращает значение ошибки #ЧИСЛО!.

Если n - это число точек данных в интервале, то функция НАИБОЛЬШИЙ(массив;1) возвращает наибольшее значение, а НАИБОЛЬШИЙ(массив;n) возвращает наименьшее значение.

Создание формулы вычисления k-го наибольшего элемента массива

1. Занесите исходную матрицу в таблицу.
2. В свободном месте таблицы выделите ячейку, в которой будет выведен результат.
3. Вызовите функцию НАИБОЛЬШИЙ(). На экране появится диалоговое окно:



4. Нажмите красную стрелочку в строке Массив, при этом на экране появится лист с исходными данными.
5. Выделите матрицу, в которой надо найти наибольший элемент.
6. Нажмите красную стрелочку для возврата в диалоговое окне:

7. Введите в строке ниже число, которое указывает каким но счету наибольшим должен быть элемент.
8. Нажмите клавишу 

.

Кроме этого, можно в данной функции ввести массивы непосредственно:

Примеры

НАИБ0ЛЬШИЙ({3;4;5;2;3;4;5; 6;4;7};3) равняется 5

НАИБОЛЬШИЙ({3;4;5;2;3;4;5;6;4;7};7) равняется 4

Нахождение k-го наименьшего элемента массива

НАИМЕНЬШИЙ (массив ; k) - Возвращает k-ое наименьшее значение в множестве данных.

Эта функция используется для определения значения, занимающего определенное относительное положение в множестве данных.

Работа с этой функцией аналогична функции НАИБОЛЬШИЙ.

Пример.

НАИМЕНЬШИЙ({3;4;5;2;3;4;5;6;4;7};4) равняется 4

НАИМЕНЬШИЙ({1; 4; 8; 3;7; 12; 54; 8; 23}; 2) равняется 3

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ.

1. Откройте новую книгу Microsoft Excel.
2. Сохраните её под именем *Работа с массивами*.
3. Переименуйте лист 1 , задан имя *Функции для работы с массивами*.
4. Выполните упражнения:

Упражнение 1.

Вычислите определитель квадратной матрицы:

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 8 & 3 \\ 2 & 4 & -2 & 1 \\ 5 & 6 & -7 & 8 \end{pmatrix}$$

Упражнение 2.

На этом же листе вычислите обратную матрицу данной квадратной матрицы.

Упражнение 3.

Умножьте исходную матрицу на обратную ей. *Какой получился результат? Почему?*

Упражнение 4.

Найдите первый, второй, третий, четвертый, и наибольшие элементы. *Поясните полученный результат.*

Упражнение 5.

Найдите первый, второй, третий, четвертый, пятый наименьшие элементы. *Поясните полученный результат.*

Упражнение 6.

Найдите транспонированную матрицу для исходной.

Вычисления оформите следующим образом:

Исходная матрица A					**Обратная матрица A^{-1}**			
10	2	3	4		0,11	-0,22	0,11	0
2	3	4	5		-0,22	-4,22	3,11	0,33
3	4	5	6		0,11	3,11	-1,56	-0,67
4	5	6	10		0	0,33	-0,67	0,33
Определитель матрицы:				**-27**				

Матрица A^*A^{-1}					**Транспонированная матрица A^T**			
1	0	0	0		10	2	3	4
0	1	0	0		2	3	4	5
0	0	1	0		3	4	5	6
0	0	0	1		4	5	6	10
Наибольший первый		10			Наименьший первый		2	
Наибольший второй		6			Наименьший второй		2	
Наибольший третий		6			Наименьший третий		3	
Наибольший четвёртый		4			Наименьший четвёртый		3	

Наибольший пятый	5			Наименьший пятый	3	

Решение СЛАУ методом обратной матрицы

Метод обратной матрицы заключается в следующем.

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

В матричном виде данную систему можно записать в виде: A*X=B, где A -матрица коэффициентов при неизвестных; X-вектор неизвестных; B -вектор свободных членов. Тогда $X=A^{-1}*B$, где

A^{-1} - обратная матрица матрицы A.

5. Переименуйте лист 2 , задан имя *Решение СЛАУ*.
6. Методом обратной матрицы решите СЛАУ и сделайте проверку:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & -3 & 3.8 & -5 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \\ 6 & 2.5 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Контрольные вопросы.

1. Что такое массив?
2. Сколько значений может возвращать формула массива?
3. Перечислите правила записи массива констант непосредственно в формуле?
4. Перечислите элементы, из которых может состоять массив констант.
5. Запишите синтаксис команд и опишите процесс создания формул:
   1) Вычисление определителя.
   2) Вычисление обратной матрицы.
   3) Умножение массивов.
   4) Транспонирование массива.
   5) Нахождение наибольшего элемента в массиве.
   6) Нахождение наименьшего элемента в массиве.
6. В чем заключается метод **Обратной матрицы** решения СЛАУ?

Лабораторная работа № 10
Решение систем линейных алгебраических уравнений в Excel. Метод Гаусса

1. Метод Гаусса

Методом Гаусса можно найти решение произвольной системы линейных уравнений. Метод состоит в приведении системы уравнений, с помощью элементарных преобразований, к системе специального вида, эквивалентной исходной, решение которой очевидно. Преобразования по методу Гаусса выполняют в два этапа. Первый этап называют прямым ходом, второй - обратным.

В результате **прямого хода** выясняют: совместна или нет система и если совместна то, сколько имеет решений - одно или бесконечно много, а также, в случае бесконечного множества решений, указывают базисные и свободные неизвестные для записи общего решения системы. Преобразования прямого хода выполняют, как правило, над расширенной матрицей системы $\widetilde{A} = (A\,|\,B)$, которую получают, приписывая справа к матрице системы A столбец свободных членов B. В результате элементарных преобразований строк и перестановкой столбцов, матрица системы A должна быть приведена к матрице A' треугольного или трапециевидного вида с элементами $a'_{ii} \neq 0$. При этом, система уравнений, матрица которой A', является треугольной с диагональными элементами $a'_{ii} \neq 0$ $(i = 1,2,\ldots,n)$, будет иметь единственное решение; система уравнений, матрица которой A', является трапециевидной с элементами $a'_{ii} \neq 0 \quad (i = 1,2,\ldots,k, \quad где\ k < n)$, будет иметь бесконечно много решений. Если, при выполнении преобразований расширенной матрицы $\widetilde{A} \Leftrightarrow \widetilde{A}'$, в преобразованной матрице $\widetilde{A}'$ появится строка $(0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \quad |\, b')$, где $b' \neq 0$, то это говорит о несовместности исходной системы уравнений. Сначала с помощью первого уравнения исключается x_1 из всех последующих уравнений системы. Затем с помощью второго уравнения исключается x_2 из третьего и всех последующих уравнений системы. Процесс продолжается до тех пор, пока в левой части последнего уравнения не останется лишь один член с неизвестным x_n, т.е. матрица системы будет приведена к треугольному виду.

Обратный ход Метода Гаусса состоит в последовательном вычислении искомых неизвестных. Сначала решается последнее уравнение, находится последнее единственное неизвестное x_n. Далее, используя это значение, из предыдущего уравнения вычисляется x_{n-1} и т.д. Последним находится x_1 из первого уравнения.

Рассмотрим метод гаусса для системы:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad (1)$$

Для исключения x_1 из второго уравнения прибавим к нему первое, умноженное на $-a_{21}/a_{11}$, для исключения x_1 из третьего уравнения прибавим к нему первое, умноженное на $-a_{31}x_1/a_{11}$. Получим равносильную систему уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2 \\ \qquad\qquad a'_{33}x_3 = b'_3 \end{cases} \qquad (2)$$

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j}, \; i, j = 2,3$$

$$b'_i = b_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} b_1, \; i = 2,3$$

Затем из третьего уравнения системы (2) нужно исключить x_2. Для этого умножим второе уравнение на $-a'_{32}/a'_{22}$ и прибавим результат к третьему. Получим

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2 \\ \qquad\qquad a''_{33}x_3 = b''_3 \end{cases} \qquad (3)$$

$$a''_{33} = a'_{33} - \frac{a'_{32}}{a'_{22}}a'_{23}, \qquad b''_3 = b'_3 - \frac{a'_{32}}{\&a_{22}}b'_2$$

Матрица системы (3) имеет треугольный вид. Прямой ход выполнен.

Обратный ход начнем с третьего уравнения системы (3):

$x_3 = b''_3 / a''_{33}$

Используя это значение можно найти x_2 из второго уравнения, x_1 из первого уравнения.

$$x_2 = \frac{1}{a'_{22}}(b'_2 - a'_{23}x_3), \quad x_1 = \frac{1}{a'_{11}}(b'_1 - a'_{12}x_2 - a'_{13}x_3)$$

Пример. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса, с точностью ε*=0, 001*

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 8 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 10 \\ -6x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 18 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы (Excel):

2	4	-2	8
3	-5	3	10
-6	2	7	18

Умножим первое уравнение на -(3/2) и результат прибавим ко второму, затем умножим первое уравнение на -(-6/2) и результат прибавим к третьему. Получим:

2.0	4.0	-2.0	8.0
0.0	-11.0	6.0	-2.0
0.0	14.0	1.0	42.0

Умножим второе уравнение на -(14/-11) и результат прибавим к третьему.

2.0	4.0	-2.0	8.0
0.0	-11.0	6.0	-2.0
0.0	0.0	8.6	39.5

Обратный ход метода Гаусса состоит в последовательном вычислении x_3 ,x_2, x_1.

x_3=39,5/8,6=4,6

x_2=(-2 - 6*4,6)/(-11)=2,7

x_1=(8 – (-2)*4,6-4*2,7)/2=3,2

Решение в Mathcad:

Given

$2x1 + 4x2 - 2x3 = 8$

$3x1 - 5x2 + 3x3 = 10$

$-6x1 + 2x2 + 7x3 = 18$

$$\text{Find}(x1, x2, x3) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{306}{95} \\ \frac{254}{95} \\ \frac{434}{95} \end{pmatrix}$$

Метод Гаусса подробно (по шагам) выполняется только в учебных целях, когда нужно показать, что Вы это умеете. А чтобы решить реальную СЛАУ, лучше применить в Excel метод обратной матрицы или воспользоваться специальными программами, например, **этой**.

Краткое описание.

1. Решаю систему уравнений: A*X=B, где A - квадратная матрица n-го порядка, X,B – вектора.
2. К матрице A справа приписываю вектор B. Получаю расширенную матрицу A.
3. В дальнейшем A обозначает расширенную матрицу (n строк, n+1 столбец).
4. A_{ij} - обозначает элемент матрицы, находящийся на i-й строке и j-м столбце.
5. Делю 1-ю строку на A_{11}, т е $A'_{1j} = A_{1j}/A_{11}$ (j=1..n+1). В результате A'_{11}=1. A' обозначает преобразованную строку.
6. Преобразую остальные строки по формуле: $A'_{ij} = A_{ij} - A'_{1j}*A_{i1}$ (i = 2..n; j = 1..n+1).
7. В результате 1-й столбец в строках 2..n заполнится нулями.
8. Отметим, что все эти преобразования не нарушают правильность уравнений.
9. Аналогичные действия проводим для обнуления 2-го столбца в строках 3..n, то есть:
10. Делю 2-ю строку на A'_{22}, т е $A''_{2j}=A'_{2j}/A'_{22}$ (j=2..n+1). В результате A''_{22}=1.
11. A'' обозначает результат 2-го преобразования строки.
12. Преобразую остальные строки по формуле: $A''_{ij} = A'_{ij} - A''_{2j}*A'_{i2}$ (i = 3..n; j = 2..n+1).
13. В результате 2-й столбец в строках 3..n заполнится нулями.
14. Аналогичные действия проводим далее.
15. В результате левые n столбцов матрицы A превращаются в верхнюю треугольную матрицу, т е ниже главной диагонали находятся только нули (а на главной диагонали - единицы) - см Рис 1. На этом рисунке вектор B - слева, S - номер шага.

	A	B	C	D	E	F
7						
8		Прямой ход метода Гаусса				
9	S	j =	1	2	3	4
10		B	A*1	A*2	A*3	A*4
11	0	9	1	5	11	29
12		8	21	32	24	12
13		6	14	24	17	14
14		13	24	15	19	33
15	1	9	1	5	11	29
16		-181	0	-73	-207	-597
17		-120	0	-46	-137	-392
18		-203	0	-105	-245	-663
19	2	9	1	5	11	29
20		2,47945	0	1	2,83562	8,17808
21		-5,9452	0	0	-6,5616	-15,808
22		57,3425	0	0	52,7397	195,699
23	3	9	1	5	11	29
24		2,47945	0	1	2,83562	8,17808
25		0,90605	0	0	1	2,40919
26		9,55741	0	0	0	68,6388
27						
28						
29				Обратный ход метода Гаусса		
30						
31		x4 =	0,13924		Решение совпадае	
32		x3 =	0,57059			
33		x2 =	-0,2773			
34		x1 =	0,07178			

Рис 1

1. Затем выполняется "обратный ход", начиная с нижней строки, из которой можно вычислить $X_n = B_n/A_{nn}$, например: X_4 = 9,55741/68,6388 = 0,13924 (рис. 1).
2. Затем можно вычислить X_3 = (0,9065 - 2,40919*0,13924) = 0,57059.

3. Затем из второй строки: $X_2 + 2{,}83562*X_3 + 8{,}17808*X_4 = 2{,}47945$ вычисляю X_2, и т д.

Нахождение обратной матрицы A

Обратной к квадратной матрице A порядка n, называется матрица A^{-1} того же порядка, если: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$, где E - единичная матрица порядка n.

Квадратная матрица A называется невырожденной, если её определитель $|A| \neq 0$. Обратная матрица всегда существует для невырожденных матриц.

Одним из методов вычислений обратной матрицы являются: метод элементарных преобразований. Для данной квадратной матрицы A порядка n строится прямоугольная матрица $(A \mid E)$ размера $n \times 2n$ приписыванием к A справа единичной матрицы. Далее, с помощью элементарных преобразований над строками, матрица $(A \mid E)$ приводится к виду $(E \mid A^{-1})$, что всегда возможно, если A - невырожденная.

2. Метод обратной матрицы (решение в Excel)

Если дано уравнение:
A*X = B,
где A - квадратная матрица,
X,B - вектора;
причем B - известный вектор (т е столбец чисел),
X - неизвестный вектор, то решение X можно записать в виде:
$X = A^{-1}*B$,
где A^{-1} - обратная от A матрица.

В MS Excel обратная матрица вычисляется функцией МОБР(), а перемножаются матрицы (или матрица на вектор) - функцией МУМНОЖ().

Имеются "тонкости" использования этих матричных действий в Excel. Так, чтобы вычислить обратную матрицу от матрицы A, нужно:

1. Мышкой выделить квадратную область клеток, где будет размещена обратная матрица.
2. Начать вписывать формулу =МОБР()
3. Выделить мышкой матрицу A. При этом правее скобки впишется соответствующий диапазон клеток.
4. Закрыть скобку, нажать комбинацию клавиш: Ctrl+Shift+Enter
5. Должна вы числиться обратная матрица и заполнить предназначенную для неё область

Чтобы умножить матрицу на вектор:

1. Мышкой выделить область клеток, где будет размещён результат умножения
2. Начать вписывать формулу =МУМНОЖ()
3. Выделить мышкой матрицу - первый сомножитель. При этом правее скобки впишется соответствующий диапазон клеток.
4. С клавиатуры ввести разделитель ; (точка с запятой)
5. Выделить мышкой вектор - второй сомножитель. При этом правее скобки впишется соответствующий диапазон клеток.
6. Закрыть скобку, нажать комбинацию клавиш: Ctrl+Shift+Enter
7. Должно вычисляться произведение и заполнить предназначенную для него область

Есть и другой способ, при котором используется кнопка построителя функции Excel.

Пример СЛАУ 4-го порядка

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 11 & 29 \\ 21 & 32 & 24 & 12 \\ 14 & 24 & 17 & 14 \\ 24 & 15 & 19 & 22 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 6 \\ 13 \end{bmatrix}$$

Пример. Найти матрицу, обратную к матрице A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & 4 & 7 \\ -4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

x_1	x_2	x_3	$\mathcal{E}_1$	$\mathcal{E}_2$	$\mathcal{E}_3$
1.000	3.000	-5.000	1	0	0
2.000	4.000	7.000	0	1	0
-4.000	2.000	6.000	0	0	1
1.000	3.000	-5.000	1	0	0
0.000	-2.000	17.000	-2.000	1.000	0.000
0.000	14.000	-14.000	4.000	0.000	1.000
1.000	0.000	20.500	-2.000	1.500	0.000
0.000	1.000	-8.500	1.000	-0.500	0.000
0.000	0.000	105.000	-10.000	7.000	1.000
1.000	0.000	0.000	-0.048	0.133	-0.195
0.000	1.000	0.000	0.190	0.067	0.081
0.000	0.000	1.000	-0.095	0.067	0.010

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -0.048 & 0.133 & -0.195 \\ 0.190 & 0.067 & 0.081 \\ -0.095 & 0.067 & 0.010 \end{pmatrix}$$ обратная матрица

Решение в Mathcad:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & 4 & 7 \\ -4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -0.048 & 0.133 & -0.195 \\ 0.19 & 0.067 & 0.081 \\ -0.095 & 0.067 & 0.01 \end{pmatrix}$$

Варианты заданий к лабораторной работе

№1	$\begin{cases} 1.5x_1 + 1.6x_2 - 5.1x_3 - 7.8x_4 = 11.1 \\ -10x_1 + 1.5x_2 - 20x_3 - 2.4x_4 = 7.5 \\ 2.3x_1 - 1.4x_2 + 8.9x_3 + 4.2x_4 = 1.5 \\ x_1 + 3.4x_2 - 12.1x_3 - 14x_4 = -8.1 \end{cases}$	№16	$\begin{cases} 30.1x_1 - 1.4x_2 + 10x_3 - 1.5x_4 = 10 \\ -17.5x_1 + 11.1x_2 + 1.3x_3 - 7.5x_4 = 1.3 \\ 1.7x_1 - 21.1x_2 + 7.1x_3 - 17.4x_4 = 10 \\ 2.1x_1 + 2.1x_2 + 3.5x_3 + 3.3x_4 = 1.7 \end{cases}$
№2	$\begin{cases} 3.5x_1 + 7.8x_2 - 9.1x_3 - 8.7x_4 = 1 \\ -7x_1 + 1.3x_2 - 2x_3 - 1.4x_4 = 1.5 \\ 2.8x_1 - 1.2x_2 + 4.9x_3 + 4.8x_4 = 1.7 \\ 10x_1 + 1.4x_2 - 2x_3 - x_4 = -1.1 \end{cases}$	№17	$\begin{cases} 7.3x_1 - 8.1x_2 + 12.7x_3 - 6.7x_4 = 8.8 \\ 11.5x_1 + 6.2x_2 - 8.3x_3 + 9.2x_4 = 21.5 \\ 8.2x_1 - 5.4x_2 + 4.3x_3 - 2.5x_4 = 6.2 \\ 2.4x_1 + 11.5x_2 - 3.3x_3 + 14.2x_4 = -6.2 \end{cases}$

№3	$\begin{cases} 5x_1+1.2x_2-7.1x_3-7.9x_4=1.5 \\ 6.3x_1+1.5x_2-2.8x_3-1.7x_4=-1.9 \\ 7.8x_1-1.7x_2+2.9x_3+4.6x_4=11.2 \\ 4.5x_1+8.4x_2-2.1x_3-10x_4=-1.1 \end{cases}$	№18	$\begin{cases} 4.8x_1+12.5x_2-6.3x_3-9.7x_4=3.5 \\ 22x_1-31.7x_2+12.4x_3-8.7x_4=4.6 \\ 15x_1+21.1x_2-4.5x_3+14.4x_4=15 \\ 8.6x_1+31.4x_2-2.1x_3-10x_4=10.1 \end{cases}$
№4	$\begin{cases} 8.6x_1+5.6x_2-2.1x_3+7.7x_4=1.1 \\ -5.3x_1+3x_2-2x_3-1.4x_4=1.5 \\ 2.6x_1-1.7x_2+2.8x_3+4.8x_4=1.2 \\ 7.8x_1+3.7x_2-2.1x_3-x_4=-1.1 \end{cases}$	№19	$\begin{cases} 6.4x_1+7.2x_2-8.3x_3+4.2x_4=2.23 \\ 5.8x_1-8.3x_2+14.3x_3-6.2x_4=17.1 \\ 8.6x_1+7.7x_2-18.3x_3+8.8x_4=-5.4 \\ 13.2x_1-5.2x_2-6.5x_3+12.2x_4=6.5 \end{cases}$
№5	$\begin{cases} 8.6x_1+1.8x_2-2.1x_3+4.6x_4=1 \\ -6x_1+1.3x_2-20x_3-1.5x_4=1.8 \\ 2.9x_1-1.7x_2+9.9x_3+4.8x_4=1.8 \\ 12x_1+3.4x_2-8.61x_3-7.1x_4=4.1 \end{cases}$	№20	$\begin{cases} 14.2x_1+3.2x_2-4.2x_3+8.5x_4=1.1 \\ 6.3x_1-4.3x_2-12.7x_3-5.8x_4=4.4 \\ 4.8x_1-22.3x_2+5.2x_3+4.7x_4=1.2 \\ 2.7x_1+13.7x_2-2.7x_3-12x_4=8.5 \end{cases}$
№6	$\begin{cases} 4.9x_1+1.8x_2-8.9x_3-2.3x_4=1.8 \\ -10x_1+1.3x_2-20x_3-1.4x_4=1.9 \\ 2.9x_1-1.7x_2+8.2x_3+4.8x_4=4.6 \\ 5.3x_1+4.74x_2-2.1x_3-7x_4=-3.8 \end{cases}$	№21	$\begin{cases} 7.3x_1+12.4x_2-3.8x_3-14.3x_4=5.8 \\ 10.7x_1-7.7x_2+12.5x_3+6.6x_4=-6.6 \\ 15.6x_1+6.6x_2+14.4x_3-8.7x_4=12.4 \\ 7.5x_1+12.2x_2-8.3x_3+3.7x_4=9.2 \end{cases}$
№7	$\begin{cases} 9.1x_1+1.4x_2-2.1x_3-7.7x_4=7.1 \\ 8.1x_1+1.3x_2-20x_3-1.4x_4=1.5 \\ 2.8x_1-5.9x_2+3.9x_3+4.8x_4=1.2 \\ 10x_1+7.1x_2-2.1x_3-10x_4=-9.5 \end{cases}$	№22	$\begin{cases} 12.2x_1+8.3x_2-4.4x_3+6.2x_4=6.8 \\ -8.3x_1+4.2x_2-5.6x_3+7.7x_4=1.5 \\ 5.8x_1-3.7x_2+12.4x_3+6.2x_4=8.7 \\ 3.5x_1+6.6x_2-13.8x_3-9.3x_4=-10.8 \end{cases}$
№8	$\begin{cases} 4.9x_1+1.8x_2-7.9x_3-7.7x_4=8.2 \\ -10x_1+1.3x_2-20x_3-1.4x_4=1.2 \\ -1.6x_1-1.7x_2+4.9x_3+4.8x_4=8.7 \\ 3x_1+6x_2-2.1x_3-10x_4=-1.1 \end{cases}$	№23	$\begin{cases} 8.1x_1+1.2x_2-9.1x_3+1.7x_4=10 \\ 1.1x_1+1.7x_2+7.2x_3-3.4x_4=1.7 \\ 1.7x_1-1.8x_2+10x_3+2.3x_4=2.1 \\ 1.3x_1+1.7x_2-9.9x_3+3.2x_4=7.1 \end{cases}$
№9	$\begin{cases} 5.5x_1+8.9x_2-2.1x_3-9.9x_4=1.1 \\ 8.2x_1+1.3x_2-2x_3-1.4x_4=1.7 \\ 2.8x_1-1.7x_2+3.9x_3+4.8x_4=4.2 \\ 3.3x_1+3.9x_2-2.1x_3-10x_4=-9.1 \end{cases}$	№24	$\begin{cases} 3.3x_1+2.2x_2-10x_3+1.7x_4=1.2 \\ 1.8x_1+21.1x_2+1.3x_3-2.2x_4=2.2 \\ 2.8x_1-1.7x_2+3.9x_3+4.8x_4=1.2 \\ 7x_1-1.7x_2-2.2x_3+3.3x_4=2.1 \end{cases}$
№10	$\begin{cases} 7x_1+1.8x_2-2.1x_3-7.5x_4=1.1 \\ 5.2x_1+1.3x_2-2x_3-1.4x_4=4.1.5 \\ 2.8x_1-1.7x_2+3.9x_3+4.8x_4=1.2 \\ 8.7x_1+1.4x_2-2.1x_3+9.5x_4=-1.1 \end{cases}$	№25	$\begin{cases} 1.7x_1+9.9x_2-20x_3-1.7x_4=1.7 \\ 20x_1+0.5x_2-30x_3-1.1x_4=2.1 \\ 10x_1-2x_2+3.2x_3+0.5x_4=1.8 \\ 3.3x_1-0.7x_2+3.3x_3+20x_4=-4.7 \end{cases}$
№11	$\begin{cases} 8.5x_1+1.3x_2-7.1x_3-7.7x_4=6.3 \\ -4.3x_1+1.3x_2-7.9x_3-1.4x_4=1.5 \\ 2.8x_1-1.8x_2+3.9x_3+4.8x_4=5.2 \\ 7.8x_1+5.2x_2-2.1x_3-7.5x_4=-1.1 \end{cases}$	№26	$\begin{cases} 1.7x_1+1.3x_2-1.1x_3-1.2x_4=2.2 \\ -10x_1+10x_2-1.3x_3-1.6x_4=1.7 \\ 3.5x_1-3.3x_2+1.2x_3+1.3x_4=1.2 \\ 10x_1+3.4x_2-2.1x_3-10x_4=-1.1 \end{cases}$
№12	$\begin{cases} 1.2x_1+1.9x_2-2.1x_3-7.7x_4=8.1 \\ 1.1x_1+1.3x_2-4.6x_3-1.4x_4=1.8 \\ 2.7x_1-1.9x_2+3.9x_3+4.8x_4=1.2 \\ 10x_1+3.8x_2-2.1x_3-10x_4=-10 \end{cases}$	№27	$\begin{cases} 1.1x_1+11.3x_2-1.7x_3+1.8x_4=1.1 \\ 1.3x_1-11.7x_2+1.8x_3+1.4x_4=1.3 \\ 1.1x_1-10.5x_2-1.7x_3-1.5x_4=1.1 \\ 1.5x_1-0.5x_2+1.8x_3-1.1x_4=10 \end{cases}$
№13	$\begin{cases} 7.8x_1+1.8x_2-2.1x_3-8.1x_4=1.7 \\ 2.8x_1+1.3x_2-20x_3-1.4x_4=3.2 \\ 5.9x_1-1.7x_2+3.9x_3+4.8x_4=1.2 \\ 8.8x_1+1.2x_2-2.1x_3-x_4=-8.4 \end{cases}$	№28	$\begin{cases} 1.4x_1+2.1x_2-3.3x_3-1.1x_4=10 \\ 10x_1-1.7x_2+1.1x_3-1.5x_4=1.7 \\ 2.2x_1-3.7x_2+5.9x_3+7.8x_4=1.9 \\ 1.1x_1+3.4x_2-8.1x_3-9.1x_4=1.7 \end{cases}$

№14 $\begin{cases} 4.9x_1 + 1.8x_2 - 5.1x_3 - 7.7x_4 = 1.1 \\ -2.9x_1 + 1.3x_2 - 4.9x_3 - 1.4x_4 = 8.5 \\ 2.8x_1 - 1.7x_2 + 3.9x_3 + 4.8x_4 = 1.2 \\ 9.1x_1 + 6.7x_2 - 2.1x_3 - x_4 = -1.4 \end{cases}$	№29 $\begin{cases} 1.3x_1 - 1.7x_2 + 3.3x_3 + 1.7x_4 = 1.1 \\ 10x_1 + 5.5x_2 - 1.3x_3 + 3.4x_4 = 1.3 \\ 1.1x_1 + 1.8x_2 - 2.2x_3 - 1.1x_4 = 10 \\ 1.3x_1 - 1.2x_2 + 2.1x_3 + 2.2x_4 = 1.8 \end{cases}$
№15 $\begin{cases} 7.5x_1 + 1.8x_2 - 2.1x_3 - 7.7x_4 = 1.1 \\ -10x_1 + 1.3x_2 - 20x_3 - 1.4x_4 = 1.5 \\ 2.8x_1 - 1.7x_2 + 3.9x_3 + 4.8x_4 = 1.2 \\ 10x_1 + 31.4x_2 - 2.1x_3 - 10x_4 = -1.1 \end{cases}$	№30 $\begin{cases} 1.2x_1 + 1.8x_2 - 2.7x_3 - 7.5x_4 = 1.3 \\ 10x_1 + 5.3x_2 - 2.7x_3 - 5.4x_4 = 2.2 \\ 8.8x_1 - 9.7x_2 + 6.9x_3 + 14.8x_4 = 10 \\ 10x_1 + 3.4x_2 - 3x_3 - 2.2x_4 = 34.1 \end{cases}$

Лабораторная работа № 11
Метод простых итераций

Рассмотрим систему линейных уравнений вида

$$Ax = B \qquad (1)$$

где A – заданная квадратная матрица n – го порядка, $B \in R^n$ - заданный вектор (свободный член).

Для сходимости итерационного процесса достаточно, чтобы модули диагональных коэффициентов для каждого уравнения системы были не меньше сумм модулей всех остальных коэффициентов:

$$|a_{ij}| \geq \sum_{i \neq j} |a_{ij}|, \quad i = 1,2,...,n$$

При этом хотя бы для одного уравнения неравенство должно выполняться строго.

Выразим неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из уравнений системы (1).

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - .... - a_{1n}x_n)$$

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - .... - a_{2n}x_n)$$

....

$$x_2 = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - .... - a_{nn-1}x_{n-1})$$

Т.о. привели систему (1) к виду: $x^k = Cx^{k-1} + D$

Метод простых итераций заключается в следующем. Выбирается произвольный вектор $x^0 \in R^n$ (начальное приближение) и строится итерационная последовательность векторов $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, ..., x_n^{(1)}$. Используя полученные значения, можно провести вторую итерацию и т.д. Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока значения $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)}$ не станут близкими с определенной точностью к значениям $x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, ..., x_n^{(k-1)}$.

Метод Якоби (метод простых итераций)

Для применения метода Якоби (и метода Зейделя) необходимо, чтобы диагональные компоненты матрицы А были больше суммы остальных компонент той же строки. Заданная система не обладает таким свойством, поэтому выполняю предварительные преобразования.

Далее номер в скобках означает номер строки. Новую первую строку получаю сложением старой первой строки с другими строками, умноженными на специально подобранные коэффициенты. Записываю это в виде формулы:

```
(1)’ = (1) + 0,43*(2) - 0,18*(3) – 0,96*(4)
(2)’ = (2) + 0,28*(1) – 1,73*(3) + 0,12*(4)
(3)’ = (3) – 0,27*(1) - 0,75*(2) + 0,08*(4)
(4)’ = (4) + 0,04*(1) – 6,50*(2) + 8,04*(3)
```

Примечание: подбор коэффициентов выполнен на листе "Анализ". Решаются системы уравнений, цель которых - обратить внедиагональные элементы в нуль. Коэффициенты - это округлённые результаты решения таких систем уравнений. Конечно, это не дело.

В результате получаю систему уравнений:

$$\begin{cases} -15{,}53x_1 & +0{,}04x_2 & +0{,}02x_3 & -0{,}04x_4 & =-1{,}12 \\ -0{,}06x_1 & -6{,}32x_2 & -0{,}05x_3 & -0{,}14x_4 & =1{,}7 \\ -0{,}1x_1 & -0{,}15x_2 & -2{,}45x_3 & -0{,}19x_4 & =-1{,}39 \\ -0{,}1x_1 & -0{,}16x_2 & -0{,}12x_3 & -68{,}72x_4 & =-9{,}6 \end{cases}$$

Для применения метода Якоби систему уравнений нужно преобразовать к виду: X = B2 + A2*X. Преобразую:

$$\begin{cases} 16x_1 = 0{,}47x_1 + 0{,}04x_2 + 0{,}02x_3 - 0{,}04x_4 + 1{,}12 \\ 7x_2 = -0{,}06x_1 + 0{,}68x_2 - 0{,}05x_3 - 0{,}14x_4 - 1{,}7 \\ 3x_3 = -0{,}1x_1 - 0{,}15x_2 + 0{,}55x_3 - 0{,}19x_4 + 1{,}39 \\ 70x_4 = -0{,}1x_1 - 0{,}16x_2 - 0{,}12x_3 + 1{,}28x_4 + 9{,}6 \end{cases}$$

Далее делю каждую строку на множитель левого столбца, то есть на 16, 7, 3, 70 соответственно. Тогда матрица A2 имеет вид :

$$A2 = \begin{pmatrix} 0{,}47/16 & 0{,}04/16 & 0{,}02/16 & -0{,}04/16 \\ -0{,}06/7 & 0{,}68/7 & -0{,}05/7 & -0{,}14/7 \\ -0{,}1/3 & -0{,}15/3 & 0{,}55/3 & -0{,}19/3 \\ -0{,}1/70 & -0{,}16/70 & -0{,}12/70 & 1{,}28/70 \end{pmatrix}$$

А вектор B2:

$$B2 = \begin{pmatrix} 1{,}12/16 \\ -1{,}7/7 \\ 1{,}39/3 \\ 9{,}6/70 \end{pmatrix}$$

Пример. Решить систему линейных уравнений методом простых итераций с точностью 0,001.

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 16 \\ -2x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 9 \\ 4x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 14 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы:

6.000	3.000	-4.000	16.000
-2.000	7.000	6.000	9.000
4.000	-4.000	6.000	14.000

В данной системе уравнений не выполняется достаточное условие сходимости. Необходимо выполнить преобразования: к первой строке прибавим третью, ко второй строке прибавим первую, третью строку умножим на (-1) и прибавим к первой.

10.000	-1.000	2.000	30.000
4.000	10.000	2.000	25.000
2.000	7.000	-10.000	2.000

0.000	0.100	-0.200	3.000
-0.400	0.000	-0.200	2.500
0.200	0.700	0.000	-0.200

i	X_1	X_2	X_3	ε_1	ε_2	ε_3	ε

0	0.000	0.000	0.000				
1	3.000	2.500	-0.200	3.000	2.500	-0.200	3.000
2	3.290	1.340	2.150	0.290	-1.160	2.350	2.350
3	2.704	0.754	1.396	-0.586	-0.586	-0.754	0.586
4	2.796	1.139	0.869	0.092	0.385	-0.527	0.385
5	2.940	1.208	1.157	0.144	0.069	0.288	0.288
6	2.889	1.093	1.234	-0.051	-0.115	0.077	0.077
7	2.863	1.098	1.143	-0.027	0.005	-0.091	0.005
8	2.881	1.126	1.141	0.019	0.029	-0.002	0.029
9	2.884	1.119	1.165	0.003	-0.007	0.024	0.024
10	2.879	1.113	1.160	-0.006	-0.006	-0.004	0.004
11	2.879	1.116	1.155	0.000	0.003	-0.005	0.003
12	2.881	1.117	1.157	0.001	0.001	0.002	0.002
13	2.880	1.116	1.158	0.000	-0.001	0.001	0.001
14	2.880	1.116	1.157	0.000	0.000	-0.001	0.000

Где $\varepsilon_i^r = X_i^r - X_i^{r-1}$

Решение системы: $x_1 = 2{,}880;\ x_2 = 1{,}116;\ x_3 = 1{,}157$

Варианты заданий к лабораторной работе

№1 $\begin{cases} 2.4x_1 - 0.3x_2 + 0.1x_3 = 9.5 \\ 4.3x_1 + 1.6x_2 + 9.2x_3 = 8.6 \\ 0.4x_1 - 1.9x_2 + 0.5x_3 = 3.1 \end{cases}$	№16 $\begin{cases} -2.1x_1 - 3.5x_2 + 0.1x_3 = 1.5 \\ 5.8x_1 + 1.1x_2 + 3.5x_3 = 8.7 \\ 0.2x_1 - 0.9x_2 - 4.8_3 = -1.8 \end{cases}$
№2 $\begin{cases} 1.1x_1 - 4.3x_2 + 1.1x_3 = 7.5 \\ 5.8x_1 + 1.8x_2 + 2.5x_3 = 2.7 \\ 0.2x_1 + 0.2x_2 - 4.8x_3 = 1.5 \end{cases}$	№17 $\begin{cases} 1.8x_1 - 4.7x_2 + 1.1x_3 = 9.5 \\ 5.9x_1 + 0.8x_2 + 2.1x_3 = 5.7 \\ 1.2x_1 + 0.7x_2 - 5.8x_3 = 2.6 \end{cases}$
№3 $\begin{cases} 2.1x_1 - 3.3x_2 + 0.1x_3 = 5.5 \\ 4.3x_1 + 1.3x_2 + 9.1x_3 = 8.3 \\ 3.4x_1 - 1.9x_2 + 0.5x_3 = 4.3 \end{cases}$	№18 $\begin{cases} 2.1x_1 - 6.3x_2 + 0.1x_3 = 5.8 \\ 2.3x_1 + 1.8x_2 + 9.1x_3 = 4.3 \\ 3.4x_1 - 1.5x_2 + 0.5x_3 = 4.8 \end{cases}$
№4 $\begin{cases} 2.1x_1 - 3.3x_2 + 0.1x_3 = 5.5 \\ 5.8x_1 + 1.2x_2 + 3.5x_3 = 7.7 \\ 0.2x_1 + 0.9x_2 - 4.8x_3 = 1.3 \end{cases}$	№19 $\begin{cases} 3.1x_1 - 6.1x_2 + 0.9x_3 = 6.5 \\ 5.8x_1 + 1.6x_2 + 2.5x_3 = 9.7 \\ 0.2x_1 + 2.9x_2 - 6.8x_3 = 1.8 \end{cases}$
№5 $\begin{cases} 2.3x_1 - 3.2x_2 + 0.1x_3 = 4.5 \\ 0.3x_1 + 1.3x_2 + 5.2x_3 = 5.5 \\ 3.4x_1 - 1.9x_2 + 0.5x_3 = 3.2 \end{cases}$	№20 $\begin{cases} 2.1x_1 - 4.2x_2 + 0.7x_3 = 4.6 \\ 0.8x_1 + 3.3x_2 + 5.6x_3 = 5.8 \\ 5.4x_1 - 1.6x_2 + 0.9x_3 = 3.8 \end{cases}$
№6 $\begin{cases} 1.1x_1 - 3.3x_2 + 0.1x_3 = 5.5 \\ 5.2x_1 + 1.1x_2 + 3.5x_3 = 7.7 \\ 2.2x_1 + 0.9x_2 - 4.9x_3 = 1.8 \end{cases}$	№21 $\begin{cases} 1.7x_1 - 3.9x_2 + 0.1x_3 = 5.1 \\ 5.2x_1 + 1.2x_2 + 3.5x_3 = 7.2 \\ 2.2x_1 + 0.4x_2 - 4.8x_3 = 1.3 \end{cases}$
№7 $\begin{cases} 0.1x_1 - 0.9x_2 + 3.4x_3 = 8.5 \\ 4.3x_1 + 1.3x_2 + 2.2x_3 = 6.4 \\ 2.8x_1 - 8.9x_2 + 1.5x_3 = 3.3 \end{cases}$	№22 $\begin{cases} 0.4x_1 - 0.7x_2 + 3.4x_3 = 2.5 \\ 5.3x_1 + 1.4x_2 + 2.6x_3 = 3.4 \\ 2.8x_1 - 8.9x_2 + 2.5x_3 = 3.5 \end{cases}$
№8 $\begin{cases} 0.1x_1 - 2.2x_2 + 4.4x_3 = 3.2 \\ 3.3x_1 + 1.8x_2 + 0.2x_3 = 4.8 \\ 3.4x_1 - 7.1x_2 + 0.5x_3 = 2.5 \end{cases}$	№23 $\begin{cases} 0.1x_1 - 2.2x_2 + 5.4x_3 = 3.6 \\ 3.3x_1 + 1.6x_2 + 0.1x_3 = 4.5 \\ 3.4x_1 - 8.1x_2 + 0.5x_3 = 2.2 \end{cases}$
№9 $\begin{cases} 2.1x_1 - 3.3x_2 + 0.1x_3 = 5.9 \\ 7.8x_1 + 2.1x_2 + 3.5x_3 = 1.2 \\ 0.1x_1 + 3.6x_2 - 2.8x_3 = 5.8 \end{cases}$	№24 $\begin{cases} 2.1x_1 - 5.3x_2 + 0.1x_3 = 5.8 \\ 9.1x_1 + 2.1x_2 + 2.5x_3 = 1.2 \\ 0.6x_1 + 3.6x_2 - 6.7x_3 = 5.7 \end{cases}$

№10 $\begin{cases} 3.1x_1 - 3.3x_2 + 0.1x_3 = 2.5 \\ 5.8x_1 + 0.1x_2 + 3.5x_3 = 6.8 \\ 3.1x_1 + 0.9x_2 - 4.8x_3 = 2.5 \end{cases}$	№25 $\begin{cases} 3.5x_1 - 3.3x_2 + 0.1x_3 = 3.5 \\ 6.8x_1 + 0.3x_2 + 3.5x_3 = 6.3 \\ 2.1x_1 + 0.8x_2 - 4.8x_3 = 2.5 \end{cases}$
№11 $\begin{cases} 1.1x_1 - 4.3x_2 + 2.1x_3 = 3.5 \\ 4.3x_1 + 2.3x_2 + 6.2x_3 = 8.5 \\ 3.4x_1 - 1.9x_2 + 0.7x_3 = 9.3 \end{cases}$	№26 $\begin{cases} 1.6x_1 - 4.3x_2 + 1.1x_3 = 3.4 \\ 3.3x_1 + 2.4x_2 + 7.2x_3 = 8.5 \\ 3.4x_1 - 1.8x_2 + 0.5x_3 = 9.1 \end{cases}$
№12 $\begin{cases} 9.1x_1 - 3.3x_2 + 0.1x_3 = 5.5 \\ -8.8x_1 + 7.1x_2 + 3.5x_3 = 9.7 \\ 0.2x_1 + 0.9x_2 - 4.8x_3 = 11.8 \end{cases}$	№27 $\begin{cases} 6.1x_1 - 3.5x_2 + 0.1x_3 = 5.8 \\ -5.8x_1 + 7.1x_2 + 0.5x_3 = 9.3 \\ 0.2x_1 + 0.7x_2 - 4.8x_3 = 1.5 \end{cases}$
№13 $\begin{cases} 2.1x_1 - 3.3x_2 + 0.1x_3 = 5.1 \\ 4.3x_1 + 1.3x_2 + 9.2x_3 = 8.2 \\ 3.4x_1 - 1.9x_2 + 0.5x_3 = -7.3 \end{cases}$	№28 $\begin{cases} 8.1x_1 - 3.5x_2 + 0.6x_3 = 5.3 \\ -6.1x_1 + 7.1x_2 + 0.5x_3 = 9.7 \\ 0.2x_1 + 0.9x_2 - 4.8x_3 = 11.8 \end{cases}$
№14 $\begin{cases} 12.1x_1 - 3.3x_2 + 0.1x_3 = 8.5 \\ 0.8x_1 + 1.1x_2 + 3.5x_3 = 7.7 \\ 0.2x_1 + 9.9x_2 - 4.8x_3 = -1.8 \end{cases}$	№29 $\begin{cases} 6.1x_1 + 3.1x_2 + 0.6x_3 = 5.5 \\ -8.8x_1 + 7.1x_2 + 3.5x_3 = 9.7 \\ 0.7x_1 + 0.5x_2 - 4.8x_3 = 1.8 \end{cases}$
№15 $\begin{cases} 2.1x_1 - 3.3x_2 + 0.1x_3 = 5.5 \\ 4.3x_1 + 1.3x_2 + 9.2x_3 = 18.5 \\ 3.4x_1 - 1.9x_2 + 0.5x_3 = 3.3 \end{cases}$	№30 $\begin{cases} 3.1x_1 - 3.3x_2 + 0.1x_3 = 6.5 \\ 6.3x_1 + 1.3x_2 + 9.2x_3 = 1.5 \\ 5.4x_1 - 1.8x_2 + 0.9x_3 = 3.7 \end{cases}$

Тема 4. Интерполирование функций
Лабораторная работа № 12.
Метод Лагранжа

В результате экспериментальных исследований часто получают таблицу значений некоторой функции $f(x)$ при фиксированных значениях аргумента x_i, т.е. $f(x_i)$ *(i=0,1,…,n).* Аналитическая зависимость между x_i и $f(x_i)$ неизвестна, что не позволяет вычислить значения функции $f(x)$ в промежуточных точках, отличающихся от экспериментальных точек x_i *(i=0,1,…,n).* Для отыскания этих значений строят аппроксимирующую (приближающую) функцию $\varphi(x)$. Построение функции $\varphi(x)$ называется *интерполированием.*

Наиболее часто в качестве интерполирующих функций $\varphi(x)$ применяют алгебраические многочлены. Алгебраическое интерполирование функции $f(x)$, заданной своими значениями $f(x_0)$, $f(x_1)$,. ..., $f(x_n)$ в точках x_0, x_1, ..., x_n, называемых *узлами интерполяции,* состоит в приближенной замене этой функции многочленом степени *n,* который в точках x_i принимает те же значения, что и функция $f(x)$ *:*

Многочленом степени *n,* принимающим в точках x_i, отрезка $[a,b]$ значения $f(x_i)$ (*i*=0,1,...,*n),* является интерполяционный многочлен Лагранжа:

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}f(x_i)$$

В остальных точках отрезка $[a,b]$ разность $N(x)=f(x)-L_n(x)$, которая называется *остаточным членом интерполяции,* представляет погрешность метода.

<u>*Пример*</u>. Найти приближенное значение функции при данном значении аргумента x=0,521 с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа, если функция задана в неравноотстоящих узлах таблицы.

x	y
0,05	1,68456
0,47	1,78456
0,54	1,89456
0,64	2,01578
0,71	2,24879
0,78	2,25781

$$R_i=(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)$$

$$D_i=(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)$$

i	$x-x_i$	x_0-x_i	x_1-x_i	x_2-x_i	x_3-x_i	x_4-x_i	x_5-x_i	R_i	R_i*y_i/D_i
0	0,471	1,000	0,420	0,490	0,590	0,660	0,730	0,00001	-0,00016
1	0,051	-0,420	1,000	0,070	0,170	0,240	0,310	0,00005	0,25018
2	-0,019	-0,490	-0,070	1,000	0,100	0,170	0,240	-0,00014	1,89432
3	-0,119	-0,590	-0,170	-0,100	1,000	0,070	0,140	-0,00002	-0,45817
4	-0,189	-0,660	-0,240	-0,170	-0,070	1,000	0,070	-0,00001	0,23974
5	-0,259	-0,730	-0,310	-0,240	-0,140	-0,070	1,000	-0,00001	-0,04354
	D_i	-0,059	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001		**1,882**
									сумма

Следовательно, $f(0{,}521) = \sum_{i=0}^{5} \frac{R_i}{D_i} y_i \approx 1{,}882366$

Варианты заданий к лабораторной работе

x	y	№вар	x
0,48	1,52597	**1**	0,563
0,52	1,77734	**7**	0,518
0,57	1,89986	**13**	0,684
0,66	2,03045	**19**	0,752
0,71	2,22867	**25**	0,648
0,77	2,97373		

x	y	№вар	x
0,03	1,08923	**2**	0,155
0,11	1,10956	**8**	0,044
0,16	1,17565	**14**	0,175
0,18	1,24896	**20**	0,248
0,27	1,37834	**26**	0,345
0,38	1,97566		

x	y	№вар	x
0,22	2,56781	**3**	0,376
0,45	2,15630	**9**	0,473
0,49	1,87347	**15**	0,582
0,58	1,73456	**21**	0,602
0,61	1,49658	**27**	0,636
0,71	1,27895		

x	y	№вар	x
0,39	2,78918	**4**	0,627
0,44	2,25613	**10**	0,424
0,53	2,078925	**16**	0,668
0,64	1,76203	**22**	0,517
0,67	1,65726	**28**	0,773
0,78	1,523478		

x	y	№вар	x
0,66	0,70866	**5**	0,854
0,74	0,87252	**11**	0,809
0,82	1,01997	**17**	0,774
0,89	1,22578	**23**	0,975
0,91	1,37896	**29**	0,711
0,98	1,49876		

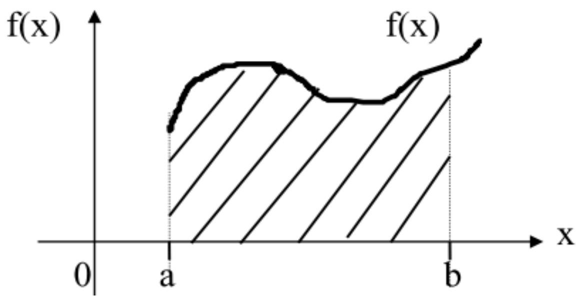
x	y	№вар	x
0,09	8,04789	**6**	0,114
0,18	6,78969	**12**	0,235
0,24	4,58972	**18**	0,352
0,32	3,48932	**24**	0,285
0,37	2,69456	**30**	0,436
0,48	2,35789		

Тема 5. Приближенное интегрирование
Лабораторная работа №13.
Приближенное интегрирование с заданным шагом

Цель работы: изучение способов приближенного интегрирования в таблицах EXCEL.
Постановка задачи.

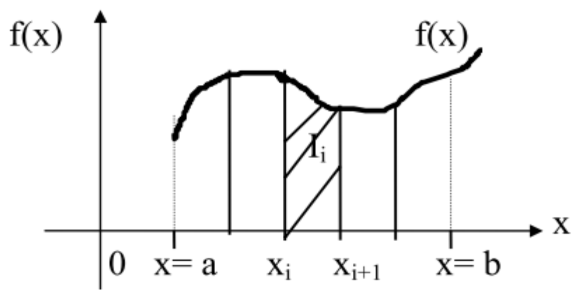
Пусть необходимо вычислить определенный интеграл $I = \int_a^b f(x)dx$

Методы приближенного интегрирования основаны на использовании геометрической интерпретации значения определенного интеграла, как площади криволинейной трапеции, ограниченной осью абсцисс и прямыми x=a, x=b и кривой f(x).



Для вычисления интересующей нас площади разобьем область интегрирования на n равных частей точками:

$x_1=a, x_2, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n=b$



Тогда $I = \sum_{i=1}^{n} I_i$, где $I_i = \int_x^{x+1} f(x)dx$

Значит для вычисления интеграла необходимо вычислить n площадей фигур криволинейных трапеций.

Интегрирование экспериментальных данных.

Как правило, в результате эксперимента получают дискретные данные, т.е. в узлах x_i производят измерения значений некоторой функции y_i.

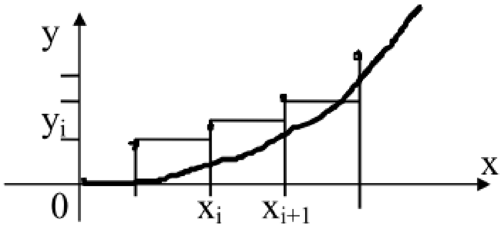
интегрирование дискретных данных включает в себя предварительную аппроксимацию и интерполяцию этих данных известной функции с последующим ее интегрированием. В большинстве случаев не удается подобрать одну функцию для аппроксимации на всем интервале, поэтому область интегрирования подразделяется на большое количество подинтегралов, на каждом из которых используется простая функция типа линейной, квадратичной или кубической. После чего результаты аппроксимации для отдельных подинтервалов складываются вместе для получения полного интеграла.

Типы формул для интегрирования.

Наиболее часто при численном интегрировании используется правило прямоугольников, правило трапеций, интегрирование по Ромбергу, правило Симпсона и квадратура Гаусса. Каждый из этих методов является более точным чем предыдущий, поскольку производит аппроксимацию данных более сложной кривой.

Правило прямоугольников.

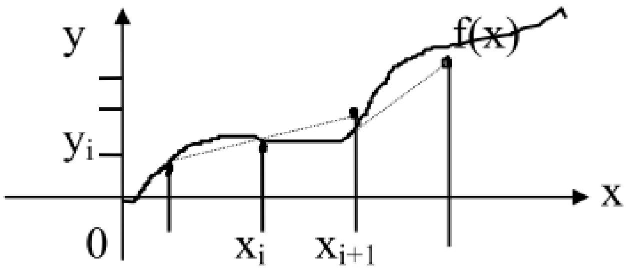
Согласно правилу прямоугольников, область между точками разбиения интервала интегрирования [a;b] заменяется прямоугольником, высота которого соответствует координате Y одной из точек, а ширина равна расстоянию между точками. значение интеграла определяется по следующей формуле $I = \sum_{i=1}^{n-1} y_i(x_{i+1} - x_i)$



Такое приближение может показаться грубым, например, для случая указанного на рисунке, однако при малой ширине интервала и гладкой функции результаты получаются достаточно сложными. Кроме того, такой метод очень просто реализовать, поскольку достаточно просто вычисляется площадь прямоугольника – перемножается значение Y в каждой точке на ширину интервала и результаты складываются.

Правило трапеций.

Согласно этому правилу, каждая пара соседних точек соединяется прямой линией, образуя последовательность трапеций.

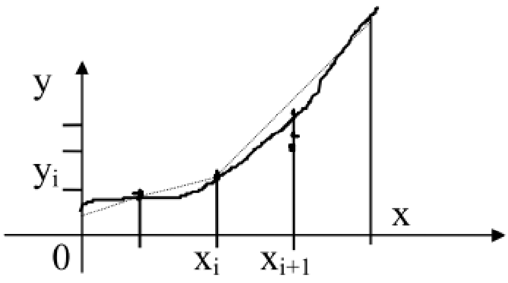


Площадь трапеций равняется полусумме оснований, умноженной на высоту, которая в данном случае равна расстоянию между точками по оси X. Интеграл равен сумме площадей всех трапеций.

$$I = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(y_i + y_{i+1})}{2}(x_{i+1} - x_i)$$

Интегрирование по Ромбергу.

Правило трапеций можно улучшить с помощью интегрирования по Ромбергу, использующее две различные оценки для экстраполяции значения интеграла. При вычислении первой оценки используется правило трапеций для каждой точки, а при вычислении второй оценки – правило трапеций для каждой второй точки.



$$I_1 = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(y_i + y_{i+1})}{2}(x_{i+1} - x_i)$$

$$I_2 = \sum_{i=1,3,5...}^{n-2} \frac{(y_i + y_{i+2})}{2}(x_{i+2} - x_i)$$

Полученные оценки соответствуют различным интервалам между точками. Согласно методу Ромберга ошибка при вычислении интеграла пропорциональна квадрату расстояния между точками.

$I=I_1+Ch^2$

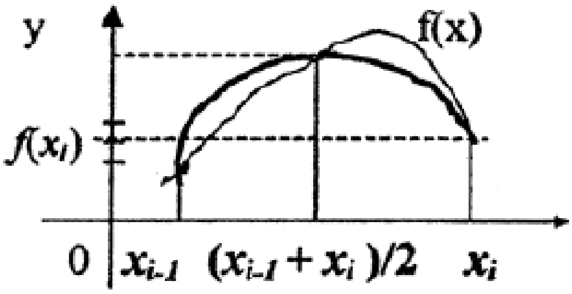
$I=I_2+C(2h)^2$

где C – постоянная величина, h=(b-a)/n. Решение этих уравнений дает выражение для вычисления интеграла:

$I=I_1+1/3(I_1-I_2)$

Правило Симпсона.

Согласно правила Симпсона для аппроксимации данных используется уравнение параболы, построенное по трем точкам (правило 1/3) или по четырем точкам (правило 3/8).



$$I = \sum_{i=1,3,5...}^{n-2} \frac{1}{3}(y_i + 4y_{i+1} + y_{i+2})h$$

$$I = \sum_{i=1,4,7...}^{n-3} \frac{3}{8}(y_i + 3y_{i+1} + 3y_{i+2} + y_{i+3})h$$

Использование методов интегрирования.

Методы интегрирования достаточно просто могут быть использованы при работе с Excel. Значения интеграла на элементарных участках, на которые разбит заданный интервал интегрирования, вычисляются в соответствующих ячейках, после чего результаты в них суммируются.

Рассмотрим интегрирование Гамма-функции, которая принадлежит к так называемым специальным функциям науки и техники. Она возникает в физических задачах, например, при вычислении вероятностей в статистической механике или при нормировке волновых функций в кулоновском поле. Гамма-функция определяется следующим интегралом

$$\Gamma(x) = \int_{0}^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$
,

не имеющим аналитического выражения. Значения Гама-функции обычно задают таблично.

Выполнение работы.

Задание 1. Вычислить Гамма-функцию с помощью метода прямоугольников и трапеций, с числом шагов равным 10. Сравнить результаты вычислений двумя методами. (Истинное значение Гамма-функции в точке x=1,5 равно $\sqrt{\pi}/2$).

Задание 2. Повторить вычисления с числом шагов равным 20.

Задание 3. Вычислить интеграл для индивидуального задания.

Задание 4. Схематически построить графики функций. Найти площадь фигуры, ограниченной этими графиками (с точностью 10^{-4}). Расчет точек пересечения заданных функций и расчет интегралов (любыми методами) оформить отдельными вычислениями.

Постройте таблицу для вычислений по образцу:

	A	B	C	D	E
1	**Лабораторная работа №7**				
2	**Приближенное интегрирование с заданной точностью**				
3					
4	Вычислить Гамма-функцию с помрщью метода прямоугольников и трапеций с числом шагов 10				
5					
6			Интегрирование с заданным шагом		
7				*Гамма-функция exp(-t)*t^(x-1)*	
8		x=	1,5	шаг dt	0,1
9					
10				**Прямоугольников**	**Метод трапеций**
11			Интеграл=	0,353905328	0,3722993
12				Истинное значение интеграла=	0,886226925
13			Ошибка интегрирования=	0,532321597	0,513927625
14					
15	№ интеграла	Левые границы интеграпов t	Значения функции f(x; t)		
16	1	0	0,000000	0	0,014306736
17	2	0,1	0,286135	0,028613472	0,032614112
18	3	0,2	0,366148	0,036614752	0,038595519
19	4	0,3	0,405763	0,040576285	0,041485524
20	5	0,4	0,423948	0,042394762	0,042641478
21	6	0,5	0,428882	0,042888194	0,04269948
22	7	0,6	0,425108	0,042510767	0,042029037
23	8	0,7	0,415473	0,041547307	0,040868256
24	9	0,8	0,401892	0,040189204	0,039379894
25	10	0,9	0,385706	0,038570585	0,037679264
26	11	1	0,367879		
27					

5					
5			Интегрирование с заданным шагом		
7				*Гамма-функция exp(-t)*t^(x-1)*	
3		x=	1,5	шаг dt	0,1
9					
0				**Прямоугольников**	**Метод трапеций**
1			Интеграл=	=СУММ(D16:D26)	=СУММ(E16:E26)
2				Истинное значение интеграла=	=КОРЕНЬ(ПИ())/2
3			Ошибка интегрирования=	=$E$12-D11	=$E$12-E11
4					
5	№ интеграла	Левые границы интеграпов t	Значения функции f(x; t)		
6	1	0	=EXP(-B16)*B16^($C$8-1)	=C16*$E$8	=$E$8*(C16+C17)/2
7	2	=B16+$E$8	=EXP(-B17)*B17^($C$8-1)	=C17*$E$8	=$E$8*(C17+C18)/2
8	3	=B17+$E$8	=EXP(-B18)*B18^($C$8-1)	=C18*$E$8	=$E$8*(C18+C19)/2
9	4	=B18+$E$8	=EXP(-B19)*B19^($C$8-1)	=C19*$E$8	=$E$8*(C19+C20)/2
0	5	=B19+$E$8	=EXP(-B20)*B20^($C$8-1)	=C20*$E$8	=$E$8*(C20+C21)/2
1	6	=B20+$E$8	=EXP(-B21)*B21^($C$8-1)	=C21*$E$8	=$E$8*(C21+C22)/2
2	7	=B21+$E$8	=EXP(-B22)*B22^($C$8-1)	=C22*$E$8	=$E$8*(C22+C23)/2
3	8	=B22+$E$8	=EXP(-B23)*B23^($C$8-1)	=C23*$E$8	=$E$8*(C23+C24)/2
4	9	=B23+$E$8	=EXP(-B24)*B24^($C$8-1)	=C24*$E$8	=$E$8*(C24+C25)/2
5	10	=B24+$E$8	=EXP(-B25)*B25^($C$8-1)	=C25*$E$8	=$E$8*(C25+C26)/2
6	11	=B25+$E$8	=EXP(-B26)*B26^($C$8-1)		
7					

Индивидуальное задание.

1) Вычислить интеграл по формулам прямоугольников, трапеций с тремя десятичными знаками

№ варианта	Задания	№ варианта	Задания
1.	$\int_{0.8}^{1.6} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+1}}$ $\quad \int_{1.2}^{2} \frac{\lg(x+2)\,dx}{x}$	16.	$\int_{1.6}^{2.2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2.5}}$ $\quad \int_{1.3}^{2.5} \frac{dx}{\sqrt{0.2x^2+1}}$
2.	$\int_{1.2}^{2.7} \frac{dx}{x^2+3.2}$ $\quad \int_{0.6}^{1.4} \frac{cosxdx}{x+1}$	17.	$\int_{0.6}^{1.6} \frac{dx}{\sqrt{x^2+0.8}}$ $\quad \int_{1.2}^{2.8} \frac{\left(\frac{x}{2}+1\right)\sin x}{2} dx$
3.	$\int_{0.2}^{1.2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ $\quad \int_{0.2}^{1} \frac{tg(x^2)dx}{x^2+1}$	18.	$\int_{1.2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1.2}}$ $\quad \int_{0.8}^{1.2} \frac{cosxdx}{x^2+1}$
4.	$\int_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+1.3}}$ $\quad \int_{1.6}^{2.4} (x+1)sinxdx$	19.	$\int_{1.4}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+0.7}}$ $\quad \int_{0.6}^{0.72} (\sqrt{x}+1)tg2xdx$
5.	$\int_{0.8}^{1.4} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+3}}$ $\quad \int_{0.4}^{1.2} \sqrt{x}\cos(x^2)dx$	20.	$\int_{3.2}^{4} \frac{dx}{\sqrt{0.5x^2+1}}$ $\quad \int_{0.32}^{0,66} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2,3}}$
6.	$\int_{0.4}^{1.2} \frac{dx}{\sqrt{2+0.5x^2}}$ $\quad \int_{0.8}^{1.2} \frac{\sin(2x)\,dx}{x^2}$	21.	$\int_{0.8}^{1.7} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+0.3}}$ $\quad \int_{1.6}^{3.2} \frac{x}{2}\lg\left(\frac{x^2}{2}\right)dx$
7.	$\int_{1.4}^{2.1} -\frac{dx}{\sqrt{3x^2-1}}$ $\quad \int_{0.8}^{1.6} \frac{\lg(x^2+1)\,dx}{x}$	22.	$\int_{1.2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{0.5x^2+1.5}}$ $\quad \int_{1.2}^{2.8} \frac{\lg(1+x^2)\,dx}{2x-1}$
8.	$\int_{1.2}^{2.4} \frac{dx}{\sqrt{0.5+x^2}}$ $\quad \int_{0.4}^{1.2} \frac{cosxdx}{x+2}$	23.	$\int_{2.1}^{3.6} \frac{dx}{\sqrt{x^2-3}}$ $\quad \int_{0.8}^{1.6} \frac{\lg(x^2+1)\,dx}{x+1}$
9.	$\int_{0.4}^{1.2} \frac{dx}{\sqrt{3+x^2}}$ $\quad \int_{0.4}^{1.2} (2x+0.5)sinxdx$	24.	$\int_{0.6}^{1.4} \frac{dx}{\sqrt{12x^2+0.5}}$ $\quad \int_{1.4}^{3} x^2 lgxdx$
10.	$\int_{0.6}^{1.5} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+1}}$ $\quad \int_{0.4}^{0.8} \frac{tg(x^2+0.5)dx}{1+2x^2}$	25.	$\int_{0.8}^{1.6} (x^2+1)\sin(x-0.5)dx$ $\quad \int_{0.4}^{1.2} \frac{\cos(x^2)\,dx}{x+1}$
11.	$\int_{2}^{3.5} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$ $\quad \int_{0.18}^{0.98} \frac{sinxdx}{\sqrt{x+1}}$	26.	$\int_{1.2}^{2} \frac{\lg(x^2+3)\,dx}{2x}$ $\quad \int_{0.15}^{0.63} \sqrt{x+1}\cos(x^2)dx$
12.	$\int_{0.5}^{1.3} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$ $\quad \int_{0.2}^{1.8} \sqrt{x+1}\cos(x^2)dx$	27.	$\int_{2.5}^{3.3} \frac{\lg(x^2+0.8)\,dx}{x-1}$ $\quad \int_{2,3}^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$
13.	$\int_{1,2}^{2,6} \frac{dx}{\sqrt{x^2+0,6}}$ $\quad \int_{1.4}^{2.2} \frac{\lg(x^2+2)\,dx}{x+1}$	28.	$\int_{1,3}^{2,1} \frac{dx}{\sqrt{3x^2-0,4}}$ $\quad \int_{0.8}^{1.2} \frac{\sin(x^2-0.4)\,dx}{x+2}$
14.	$\int_{1.4}^{2,2} \frac{dx}{\sqrt{3x^2+1}}$ $\quad \int_{0.6}^{1.4} x^2cosxdx$	29.	$\int_{1.4}^{2.6} \frac{dx}{\sqrt{1,5x^2+0,7}}$ $\quad \int_{0.2}^{1} (x+1)\cos(x^2)dx$
15.	$\int_{0.8}^{1.8} \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$ $\quad \int_{0.5}^{1.2} \frac{Tg(x^2)dx}{x+1}$	30.	$\int_{0.15}^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+1,6}}$ $\quad \int_{1.3}^{2.1} \frac{Sin(x^2-1)dx}{2\sqrt{x}}$

2) Вычислить интеграл по формуле Симпсона при n=8: оценить погрешность результата, составив таблицу конечных разностей.

Вариант	Заданные функции		
1	$y_1 = \ln(x+1)$	$y_2 = x^2$	$x = 0,8$

Вариант	Заданные функции		
2	$y_1 = \ln(x+2)$	$y_2 = -\ln(2x)$	$y_3 = -1$
3	$y_1 = -\ln x$	$x^2 + y^2 = 9$	$x^2 + y^2 = 4$
4	$y_1 = -\ln(0{,}5x)$	$y_2 = -3 + x^2 / 3$	$y_3 = -1 + 0{,}5x$
5	$y_1 = x^2 - 4$	$y_2 = -x^2 / 2$	$y_3 = -2x \quad x = -1{,}2$
6	$y_1 = \lvert 2x \rvert$	$y_2 = 2x^2 + 5x - 0{,}5$	
7	$y_1 = \exp(-2x)$	$y_2 = \exp x$	$y_3 = 0{,}1x^2$
8	$y_1 = \exp\lvert x \rvert$	$y_2 = 1{,}3$	$x^2 + y^2 = 25$
9	$y_1 = \exp x$	$y_2 = -x^2 + 4$	$x = -1$
10	$y_1 = \ln(x+4)$	$y_2 = \exp x - 2$	$x^2 + y^2 = 9$
11	$y_1 = -\ln 0{,}5x$	$y_2 = \ln 0{,}2x$	$x^2 + y^2 = 4$
12	$y_1 = 0{,}5tgx$	$y_2 = 2arctgx$	$x^2 + y^2 = 1$
13	$y_1 = 4arctgx$	$y_2 = 2x^2 - 0{,}5$	$y_3 = \exp(\sin x)$
14	$y_1 = \lvert x \rvert$	$y_2 = -1 / x$	$(x+2)^2 + y^2 = 9$
15	$y_1 = 1 / x$	$y_2 = -2 / x + 2$	$x^2 + y^2 = 25$
16	$y_1 = x^2$	$y_2 = 2x^2$	$y_3 = \exp(\sin x) + 1$
17	$y_1 = 2x^2$	$y_2 = \exp(\sin x) + 1$	
18	$y_1 = \ln(x+4)$	$y_2 = 1 / x$	$x^2 + y^2 = 16$
19	$y_1 = tgx$	$y_2 = 1 / x$	$y_3 = \exp(\cos x)$
20	$y_1 = \ln(x+2)$	$y_2 = -2$	$x^2 + y^2 = 9$
21	$y_1 = \ln(x+3)$	$x^2 + y^2 = 4$	$(x+1)^2 + y^2 = 4$
22	$y_1 = 2x + 1$	$y_2 = \exp(\sin x)$	$y_3 = \exp(\cos x)$ $x = 1{,}5$
23	$y_1 = \exp(3x)$	$y_2 = 2\ln(x+2) + 2$	$x = 0{,}5$
24	$y_1 = \cos x$	$y_2 = tgx$	$y_3 = 0{,}03$

Вариант	Заданные функции		
25	$y_1 = \cos x$	$y_2 = \exp(\sin x)$	$y_3 = x$

Тема 6. Численное дифференцирование
Лабораторная работа №14.
Применение интерполирования

Некорректность операции численного дифференцирования

Задача численного дифференцирования состоит в приближенном вычислении производных функции $u(x)$ по заданным в конечном числе точек значениям этой функции. Разобьем отрезок $[a,b]$ на n одинаковых частей $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b,$ где $x_i = a + ih, i = 0,1,...,n, h = \frac{b-a}{n}$. Пусть определены значения $u_i = u(x_i)$ функции $u(x)$. В качестве приближенного значения $u'(x_i)$ можно взять любое из следующих разностных отношений

$$u_{\bar{x},i} = \frac{u_i - u_{i-1}}{h}, u_{x,i} = \frac{u_{i+1} - u_i}{h}, u_{\overset{\circ}{x},i} = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h},$$

называемых, соответственно, левой, правой и центральной разностными производными. Возникающая в результате такой замены погрешность, называемая погрешностью аппроксимации, характеризуется оценками

$$\left|u_{\bar{x},i} - u'(x_i)\right| \le \frac{M_2 h}{2}, \quad \left|u_{x,i} - u'(x_i)\right| \le \frac{M_2 h}{2}, \quad \left|u_{\overset{\circ}{x},i} - u'(x_i)\right| \le \frac{M_3 h^2}{6},$$

где $M_2 = \max\limits_{x\in[a,b]}\left|u''(x)\right|, M_3 = \max\limits_{x\in[a,b]}\left|u'''(x)\right|.$ Таким образом, погрешность аппроксимации $u'(x_i)$ левой и правой разностными производными является величиной $O(h)$ при $h \to 0.$ В этом случае говорят, что имеет место аппроксимация первого порядка. Центральная разностная производная аппроксимирует $u'(x_i)$ со вторым порядком и, следовательно, является более точным приближением к $u'(x_i)$, чем левая или правая разностные производные. Вторую производную в точке x_i можно заменить второй разностной производной $u_{\bar{x}x,i} = \frac{1}{h}(u_{x,i} - u_{\bar{x},i}) = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$, при этом $\left|u_{\bar{x}x,i} - u''(x_i)\right| \le \frac{M_4 h^2}{12}$, где $M_4 = \max\limits_{x\in[a,b]}\left|u^{(4)}(x)\right|$, т.е. имеет место аппроксимация второго порядка.

Как правило, значения функции $u(x)$ в точках $x_i, i = 0,1,...,n$ вычисляются не точно, а с каким-то приближением. Например, элементарные трансцендентные функции вычисляются с помощью рядов, причем ряды заменяются конечными суммами. Другим источником погрешностей являются погрешности округления. Оказывается, что погрешность, возникающая при вычислении разностных отношений, намного превосходит погрешность в задании значений функции $u(x)$ и даже может неограниченно возрастать при стремлении шага h к нулю. Поэтому операцию вычисления разностных отношений называют некорректной. Поясним причину некорректности на примере вычисления разностного отношения $u_{\bar{x},i} = \dfrac{u_i - u_{i-1}}{h}$.

Разностное отношение $u_{\bar{x},i}$ хорошо приближает $u'(x_i)$ только в том случае, когда шаг h достаточно мал. Требование малости величины h, находящейся в знаменателе разностного отношения, как раз и является причиной некорректности операции численного дифференцирования. Действительно, пусть вместо точного значения u_i, u_{i-1} вычислены приближенные значения $\tilde{u}_i = u_i + \delta_i$, $\tilde{u}_{i-1} = u_{i-1} + \delta_{i-1}$. Тогда вместо $u_{\bar{x},i}$ будет вычислена величина $u_{\bar{x},i} + (\delta_i - \delta_{i-1})/h$. Следовательно, погрешность в вычислении первой разностной производной окажется равной $\delta_{\bar{x},i} + (\delta_i - \delta_{i-1})/h$. Пусть $|\delta_i| \le \delta, |\delta_{i-1}| \le \delta,$ тогда $|\delta_{\bar{x},i}| \le 2\delta/h,$ причем эта оценка достигается при $\delta_i = -\delta_{i-1} = \delta$. Из этой оценки видно, что вследствие малости h погрешность, возникающая при вычислении первой разностной производной, значительно превосходит погрешность вычисления самой функции $u(x)$. Если δ не зависит от h, то погрешность $\delta_{\bar{x},i}$ неограниченно возрастает при $h \to 0$. Далее погрешность такого рода будем называть погрешностью округления.

Сказанное не означает, что нельзя пользоваться формулами численного дифференцирования. Чтобы не происходило существенного понижения точности, надо следить за тем, чтобы погрешность округления имела тот же порядок, что и погрешность аппроксимации. Например, погрешность аппроксимации при замене $u'(x_i)$ отношением $u_{\bar{x},i}$ не превосходит величины $0{,}5hM_2$, где $M_2 = \max\limits_{x\in[a,b]} |u''(x)|$. Естественно потребовать, чтобы и погрешность округления $\delta_{\bar{x},i}$ была бы сравнима с погрешностью аппроксимации, например, $2\delta/h \le M_2 h/2$, где M_2 не зависит от h. Это означает, что погрешность δ при вычислении значений функции $u(x_i)$ должна быть величиной $O(h^2)$. С другой стороны, это неравенство показывает, что если величина δ задана, и мы не можем ее менять, то вычисления надо проводить не с произвольно малым шагом h, а с шагом, удовлетворяющим условию $h \ge 2\sqrt{\delta/M_2}$. Например, если $\delta \approx 10^{-4}$, то шаг h надо брать примерно равным 0,01. При этом погрешность аппроксимации и погрешность округления будут примерно равными 10^{-2}.

Вычисление производной $u'(x)$ по заданной функции $u(x)$ также является некорректной операцией в том смысле, что для ограниченной функции $u(x)$ производная $u'(x)$ может быть сколь угодно большой. Например, для $u(x) = \sin \omega x$ имеем $\max\limits_{x\in[a,b]} |u(x)| \le 1$ и $\max\limits_{x\in[a,b]} |u'(x)| = |\omega| \to \infty$ при $\omega \to \infty$.

Применение интерполирования

Многие формулы численного дифференцирования можно получить как следствие интерполяционных формул. Для этого достаточно заменить функцию $u(x)$ ее интерполяционным многочленом $L_n(x)$ и вычислить производные многочлена $L_n(x)$, используя его явное представление. Рассмотрим разбиение отрезка $[a,b]$ на N частей: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N = b$ и обозначим через $h_i = x_i - x_{i-1}, i = 1,2,\ldots,N,$ шаги этого разбиения.

В качестве примера получим формулы численного дифференцирования, основанные на использовании многочлена Лагранжа $L_{2,i}(x)$, построенного для функции $u(x)$ по трем точкам x_{i-1}, x_i, x_{i+1}. Многочлен $L_{2,i}(x)$ имеет вид

$$L_{2,i}(x) = \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{h_i(h_i+h_{i+1})}u_{i-1} - \frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{h_i h_{i+1}}u_i + \frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{h_{i+1}(h_i+h_{i+1})}u_{i+1}.$$

Отсюда получим

$$L'_{2,i}(x) = \frac{2x-x_i-x_{i+1}}{h_i(h_i+h_{i+1})}u_{i-1} - \frac{2x-x_{i-1}-x_{i+1}}{h_i h_{i+1}}u_i + \frac{2x-x_{i-1}-x_i}{h_{i+1}(h_i+h_{i+1})}u_{i+1}.$$

Это выражение можно принять за приближенное значение $u'(x)$ в любой точке $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$. Его удобнее записать в виде

$$L'_{2,i}(x) = \frac{2}{h_i+h_{i+1}}\left((x-x_{i-1/2})\frac{u_{i+1}-u_i}{h_{i+1}} + (x_{i+1/2}-x)\frac{u_i-u_{i-1}}{h_i}\right),$$

где $x_{i-1/2} = x_i - 0{,}5h_i$. В частности, при $x = x_i$ получим

$$L'_{2,i}(x) = \frac{1}{h_i+h_{i+1}}\left(\frac{h_i}{h_{i+1}}(u_{i+1}-u_i) + \frac{h_{i+1}}{h_i}(u_i-u_{i-1})\right),$$

и если разбиение равномерное, $h_{i+1} = h_i = h$, то приходим к центральной разностной производной, $L'_{2,i}(x_i) = u_{\overset{\circ}{x},i}$.

При использовании интерполяционного многочлена первой степени точно таким же образом можно получить односторонние разностные производные $u_{\bar{x},i}, u_{x,i}$.

Далее, вычисляя вторую производную многочлена $L'_{2,i}(x_i)$, получим приближенное выражение для $u''(x)$ при $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$

$$u''(x) \approx L''_{2,i}(x) = \frac{2}{h_i+h_{i+1}}\left(\frac{u_{i+1}-u_i}{h_{i+1}} - \frac{u_i-u_{i-1}}{h_i}\right).$$

При равномерном разбиении это выражение совпадает со второй разностной производной $u_{\bar{x}x,i}$. Для приближенного вычисления дальнейших производных уже недостаточно многочлена $L_{2,i}(x)$, надо привлекать многочлены более высокого порядка и тем самым увеличивать число узлов, участвующих в аппроксимации.

Порядок погрешности аппроксимации зависит как от порядка интерполяционного многочлена, так и от расположения узлов интерполяции. Приведем выражение для погрешности аппроксимации, возникающей при замене $u'(x)$ выражением $L'_{2,i}(x)$:

$$L'_{2,i}(x) = u'(x) - \left(\frac{(x-x_i)^2}{2} - \frac{(h_{i+1}-h_i)(x-x_i)}{3} - \frac{h_i h_{i+1}}{6}\right)u'''(x) + O(h^3),$$

где $x \in (x_{i-1}, x_{i+1}), h = \max\{h_i, h_{i+1}\}$.

Отсюда видно, что $L'_{2,i}(x)$ аппроксимирует $u'(x)$ со вторым порядком. Хуже обстоит дело с аппроксимацией второй производной:

$$L''_{2,i}(x) = u''(x) + \left(x_i - x + \frac{h_{i+1}-h_i}{3}\right)u'''(x) + O(h^2).$$

Здесь даже при равномерном разбиении второй порядок аппроксимации имеет место лишь в точке $x = x_i$, а относительно других точек (например, точек $x = x_{i-1}$ и $x = x_{i+1}$) выполняется аппроксимация только первого порядка.

Контрольные вопросы

1. Что называется левой, правой и центральной разностными производными? Какой

порядок аппроксимации обеспечивают разностные производные?

2. Почему операцию вычисления разностных отношений называют некорректной?

3. Как строятся формулы численного дифференцирования, основанные на применении интерполяционного многочлена?

4. Какой порядок аппроксимации обеспечивают эти формулы численного дифференцирования?

Задание к лабораторной работе №14

1. Вычислить на ЭВМ производную заданной функции на отрезке $[a,b]$ с точностью 10^{-4} . Сравнить точность полученных результатов с точными значениями производной .

2.Вычислить производную заданной функции используя интерполяционный многочлен. Сравнить с точными значениями производной.

Номер варианта	***Функция***	***Отрезок*** $[a,b]$
1.	$f(x)=x^2\cos x$	$[0;1]$
2.	$f(x)=e^x\sin x$	$[1;2]$
3.	$f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$	$[0;1]$
4.	$f(x)=x\sqrt{1+x^2}$	$[-1;0]$
5.	$f(x)=\sin(x+x^2)$	$[0;1]$
6.	$f(x)=\arcsin^2 x$	$\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$
7.	$f(x)=\dfrac{1}{1+\sin x}$	$\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$
8.	$f(x)=\sin 2x\cos x$	$\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$
9.	$f(x)=\sqrt{4-x^2}$	$[0;1]$
10.	$f(x)=\ln(x+1)$	$[1;2]$
11.	$f(x)=x^3\ln x$	$[2;3]$
12.	$f(x)=x arctgx$	$[0;1]$
13.	$f(x)=(x^2+1)e^x$	$[1;2]$
14.	$f(x)=\cos 2x+\sin 3x$	$\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$
15.	$f(x)=\dfrac{x^2}{x^4+2}$	$[0;1]$
16.	$f(x)=\left\|x^2-1\right\|$	$\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$
17.	$f(x)=5\cos(x^3+1)$	$[-1;0]$
18.	$f(x)=\dfrac{\sin^4 x}{\cos^6 x}$	$\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$

Номер варианта	***Функция***	***Отрезок*** $[a,b]$
19.	$f(x)=\dfrac{1}{2x^2+3x+1}$	$[1;2]$
20.	$f(x)=\dfrac{arctgx}{x^2+1}$	$[0;1]$
21.	$f(x)=\dfrac{\sqrt{3+x}}{3-x}$	$[1;2]$
22.	$f(x)=x\arccos 2x$	$\left[-\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{4}\right]$
23.	$f(x)=1+tgx^2$	$\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$
24.	$f(x)=\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right]$
25.	$f(x)=x^2\sqrt{1-x^2}$	$\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$

Список литературы

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы: учебное пособие для вузов. – М.: Наука, 1987.
2. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. В 2-х ч. – М.: Физматизд, 1962.
3. Волков Е.А. Численные методы. – М.: Наука, 1982.
4. Заварыкин В.М., Житомирский В.Г., Лапчик М.П. Численные методы. – М.: Просвещение, 1991.
5. Калиткин Н.П. Численные методы. – М.: Наука, 1978.
6. Лапчик М.П., Рагулина М.И., Стукалов В.А. Численные методы: Учеб. пособие для пед. вузов. – М.: Академия, 2001.
7. Марчук Г.И. методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1989.
8. Самарский А.А., Гулякин А.В. Численные методы. – М.: Наука, 1989.

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ

105037 г. Москва, а/я 47,
Академия Естествознания
Тел. (499) 7041341, (8412) 304108,
Тел/Факс: (8452) 477677
E-mail: stukova@rae.ru

№____ от ____10.06.2014 г.______

на №____ от ____________________

Еремина И.И., Савицкий С.К., Хаустов С.Л., Савицкая Н.Н.

Решение о присвоении грифа Учебно-методического объединения по классическому университетскому и техническому образованию Российской Академии естествознания

Учитывая положительное заключение экспертизы, УМО РАЕ по классическому университетскому и техническому образованию приняло решение (Протокол № 463 от «10» июня 2014 г.) о присвоении учебному пособию **«Вычислительная математика. Лабораторный практикум для студентов»** Еремина И.И., Савицкий С.К., Хаустов С.Л., Савицкая Н.Н. грифа УМО РАЕ:

«Рекомендовано УМО РАЕ по классическому университетскому и техническому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям подготовки: 230100.62 – «Информатика и вычислительная техника», 210700.62 – «Инфокоммуникационные технологии и системы связи», 230700.62 – «Прикладная информатика (по отраслям)».

____

Текст грифа УМО размещается на левой стороне титульного листа подзаголовочных данных.

Председатель УМО РАЕ
Д.м.н., профессор, академик РАЕ М.Ю. Ледванов

Ученый секретарь
К.м.н. М.Н. Бизенкова

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ
МОСКВА

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ

ЗОЛОТОЙ ФОНД ОТЕЧЕСТВЕННОЙ НАУКИ

ЛУЧШЕЕ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ИЗДАНИЕ В ОТРАСЛИ

ДИПЛОМ

ЛАУРЕАТА
ВСЕРОССИЙСКОЙ ВЫСТАВКИ

Москва, 2014

Еремина И.И., Савицкий С.К., Хаустов С.Л., Савицкая Н.Н.

Учебное пособие

«ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА. ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ДЛЯ СТУДЕНТОВ»

Набережные Челны: Издательство Набережночелнинского института КФУ (филиала), 2014

ПРЕЗИДЕНТ *М.Ю.ЛЕДВАНОВ*

http://www.rae.ru/ru/DIPLOM/

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ

ЗОЛОТОЙ ФОНД ОТЕЧЕСТВЕННОЙ НАУКИ

СЕРТИФИКАТ

УЧАСТНИКА МЕЖДУНАРОДНОЙ ВЫСТАВКИ-ПРЕЗЕНТАЦИИ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИХ ИЗДАНИЙ

(Москва, 2014)

Еремина И.И., Савицкий С.К., Хаустов С.Л., Савицкая Н.Н.

Учебное пособие

«ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА. ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ДЛЯ СТУДЕНТОВ»

Набережные Челны: Издательство Набережночелнинского института КФУ (филиала), 2014

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ * МОСКВА *
ДЛЯ ДИПЛОМОВ

ПРЕЗИДЕНТ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ

академик РАЕ М.Ю.Ледванов **WWW.RAE.RU**

Ирина Ильинична Еремина

Наталья Николаевна Савицкая

Сергей Константинович Савицкий

Хаустов Сергей Леонидович

Вычислительная математика. Практикум для студентов.

Учебное пособие

Методическая копилка.