Набережночелнинский институт

ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет

Основы нечеткой логики

Учебно - методическое пособие по дисциплине «Нейронные сети»

Набережные Челны

2018 г.

УДК 510.6
ББК 30
С37

Печатается по решению кафедры «Экономика предприятий и организаций».

Рецензент: канд. экон. наук, доцент Карамышев А.Н.

Основы нечеткой логики: учебно-методическое пособие по дисциплине «Нейронные сети»/ Д.Р. Григорьева, Г.А. Гареева, Р.Р. Басыров - Набережные Челны: Изд-во НЧИ КФУ, 2018. - 39 с.

В учебно-методическом пособии изложены основы теории нечетких множеств, описаны операции над ними, а также методы выполнения арифметических операций над нечеткими числами. Затрагивается вопрос применения инструментальных средств поддержки проектирования и построения нейросетей. Материал содержит примеры решения типовых задач, задания для самостоятельного выполнения и контрольные вопросы.

Оглавление

Введение

Математическая теория нечетких множеств и нечёткая логика является обобщением классической теории множеств и формальной логики. Данные понятия были предложены американским учёным З. Лотфи в 1965 году. Основной причиной появления новой теории стоило наличие нечётких и приближённых рассуждений при описании человеком процессов, систем, объектов.

Спектр приложений нечётких моделей и методов широк и от управления процессом отправления и остановки поезда метрополитена управление грузовыми лифтами и доменной печью до стиральных машин, пылесосов и печей СВЧ.

При этом нечёткие системы позволяют повысить качество продукции при уменьшении ресурса и энергозатрат и обеспечивают более высокую устойчивость к воздействию мешающих факторов.

Математическая теория нечетких множеств позволяет описывать нечеткие понятия и знания, оперируя этими знаниями, и делать нечеткие выводы.

Нечеткая логика обеспечивает эффективные средства отображения, неопределённостей и неточностей реального мира.

Математические основы. Нечеткая алгебра и нечеткие множества

Пусть E – универсальное множество, X-элемент E, а R – некоторое свойство. Обычное (четкое) подмножество A универсального множества E, элементы которого удовлетворяют свойству R, определяется как множество упорядоченных пар $A = \{\mu_A(x)/x\}$, где $\mu_A(x)$ – характеристическая функция принадлежности (или просто функция принадлежности), принимающая значения в некотором вполне упорядоченном множестве M (например, M=[0,1]). Функция принадлежности указывает степень (или уровень) принадлежности элемента x подмножеству A. Множество M называют множеством принадлежностей. Если M={0,1}, то нечеткое подмножество **A** может рассматриваться как обычное или четкое множество.

Нечеткое множество отличается от обычного тем, что для элементов X из подмножества E нет однозначного ответа (да - нет) относительно свойства R.

В связи с этим нечеткое подмножество А универсального множества Е определяется как множество упорядоченных пар.

Функция принадлежности $\mu_A(x)$ указывает степень (уровень) принадлежности элемента Х подмножеству А.

Пример:

Пусть Е= $\{X_{1,}X_{2,}X_{3,}X_{4,}X_5\}$, М=$[0;1]$

А – нечеткое множество, для которого заданы функции принадлежности.

$\mu_A(X_1) = 0{,}3$; $\mu_A(X_2) = 0$; $\mu_A(X_3) = 1$; $\mu_A(X_4) = 0{,}5$; $\mu_A(X_5) = 0{,}9$.

Тогда

$A = \{0{,}3/x_1; 0/x_2; 1/x_3; 0{,}5/x_4; 0{,}9/x_5\}$ или

$A = 0{,}3/x_1 + 0/x_2; 1/x_3; 0{,}5/x_4; 0{,}9/x_5$

Основные характеристики нечетких множеств:

Величина $\sup \mu_A(x)$ называется высотой нечеткого множества А.

Нечеткое множество А – нормально, если его высота равно 1 , т.е. верхняя граница его функции принадлежности равна 1.

При $\sup \mu_A(x) < 1$ – нечеткое множество субнормальное.

Если функция принадлежности = 0, то нечеткое множество пусто.

Если функция принадлежности равна 1, $\mu_A(x) = 1$ только для одного элемента Х, то нечеткое множество унимодально.

Если подмножество содержит функции принадлежности > 0, то оно называется А – носителем нечеткого подмножества.

Если функция принадлежности равна 0, $0 = \mu_A$, то элементы Х, для которого выполняется это условие называется точками перехода.

Логические операции над нечеткими множествами

1) Включение: А содержится в В, если функция принадлежности элементов $\mu_A(x) \le \mu_b(x)$

$A \subset B$ – включение

В доминирует над А

2) Равенство: $A = B$

$A = B$, если $\mu_A(x) = \mu_b(x)$

3) Дополнение

А и В дополняют друг друга, если $\mu_A(x) = 1 - \mu_b(x)$

$B = \bar{A}$ или $A = \bar{B}$

4) Пересечение: $A \cap B$

А пересекает В – нечеткое подмножество, содержащее одновременно в А и в В

$$\mu_{A\cap B}(x) = \min\,(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

5) Объединение (или в А, или в В)

Нечеткое подмножество, включающее как А, так и В

$A \cup B$ - Объединение

$$\mu_{A\cup B}(x) = \max\,(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

6) Разность: $A - B = A \cap \bar{B}$

$$\mu_{A-B}(x) = \mu_{A\cap\bar{B}}(x) = \min\,(\mu_A/x, 1 - \mu_B/x)$$

7) Дезъюнктивная сумма:

$$A + B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$$

Функция принадлежности

$\mu_{A-B}(x) = \max\,(\min\,(\mu_A(x)1 - \mu_B(x));\ \min\,(1 - \mu_A(x), \mu_B(x)))$

Нечеткая и лингвистические переменные. Формы представления функции принадлежности и нечеткий вывод

Для нечетких множителей вводите понятие нечетко лингвистических переменных. Нечеткая переменная описывается набором (α, χ, A), где α - название переменной, χ - универсальное множество (область α), A-нечеткие множества на x,описывающие ограничение ($M_A(x)$ на значение нечеткой переменной α).

Значение нечетной лингвистической переменной могут быть нечеткие переменные, описывается набором (B, T, X, G, P) B- лингвистическое, T-множества ее значений, представляющих собой наименование нечетких переменных- X, областью определения каждой из которых является множество - X. Множество T называется базовым лингвистической переменной. G - синтаксическая процедура, позволяющая оперировать элементами - T (например генерировать новые значения), M - синтаксическая процедура, позволяющая превратить каждое новое значение лингвистической переменной, образующая процедурой G в нечеткого переменного, т.е. сформировать соответствующие нечеткие множество.

Существуют множества типовых форм для задания функций принадлежности. Наиболее распространенное получили Треугольная, Трапецеидальная и Гауссова функция принадлежности.

M функция принадлежности определяется тройкой чисел (a,b,c) и ее значения в точке x вычисляется согласно выражению.

Треугольная функция принадлежности.

$$MF(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{b-x}{b-a}, a \le x \le b \\ 1 - \dfrac{x-b}{c-b}, b \le x \le c \\ 0, \text{в остальных случаях } x \end{cases}$$

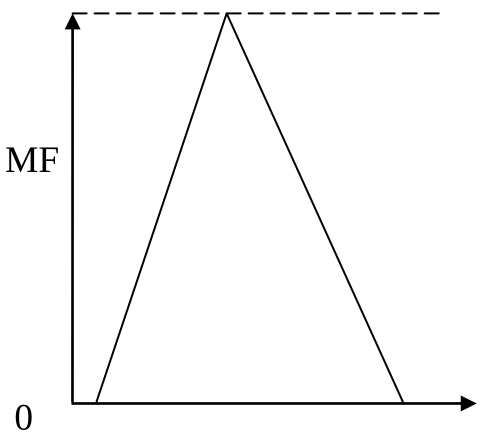
При b-a=c-b имеет случай симметричной треугольной функции принадлежности, может быть однозначно задана двумя параметрами из трех.

Для задания трапецеидальная функции принадлежности наибольшая четверка чисел (a,b,c,d).

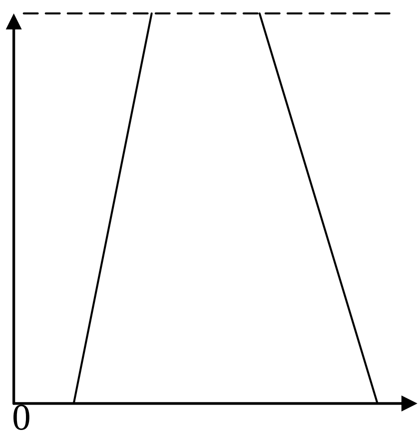
Трапецеидальная функция принадлежности.

$$MF(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{b-x}{b-a}, a \le x \le b \\ 1, b \le x \le c \\ 1 - \dfrac{x-c}{d-c}, c \le x \le d \\ 0, \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

1) Треугольная



2) Трапецеидальная



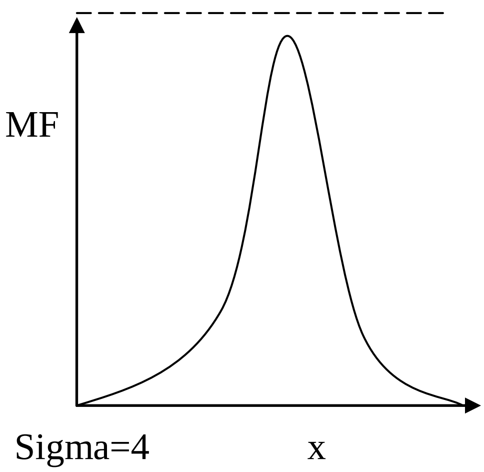
Функция принадлежности Гауссова типа:

$$\mathrm{MF} = \exp\left[-\left(\frac{\mathrm{x}-\mathrm{c}}{\varphi}\right)^2\right]$$

Оперирует двумя параметрами.

Параметр С обозначает центр нечеткого множества, а φ отвечает за функции.

3) Гауссова



Совокупность функции принадлежности для каждого термина базового множества Т обычно изображаются вместе на одном графике. Количество терминов в лингвистической переменной редко превышает.

Нечеткий логический вывод

Основой для проведения операции нечеткого логического вывода является база правил, содержащая нечеткие высказывания в форме «если то» и функция принадлежности для соответствующих лингвистических терминов. При этом должны соблюдаться следующие условия:

1) Существует хотя бы одно правило для каждой лингвистической выходной переменной.

2) Для любого терма выходной переменной имеется хотя бы одно правило, в котором этот термин используется в качестве целевой части правила. В противном случае имеет место база нечетких правил.

Пусть 0 в базе правил имеется по правилам вида $\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2$

R_1: Если X_1 это A_{11} ... и ... X_n это $\mathrm{A}_{1\mathrm{n}}$,то y это B_1

R_i: Если x_1 это A_{j1} ... и ... X_n это A_{jn} , то y это B_i

…

R_m : Если x_1 этоA_{m1} … и … X_n это $A_{mn,}$ то у это B_m

…

$x_{k,k=1\dots n}$, где

x_k-входные переменные

у -выходные переменные

A_{j1}-заданные нечеткие множества с функциями принадлежности.

Результатом нечеткого вывода является четкое значение переменной y^* на основе заданных четких значений x_k.

В общем случае механизм нечеткого логического вывода включает следующие этапы:

1) Введение нечеткости.

2) Нечеткий вывод.

3) Композиция.

4) Приведение к четкости

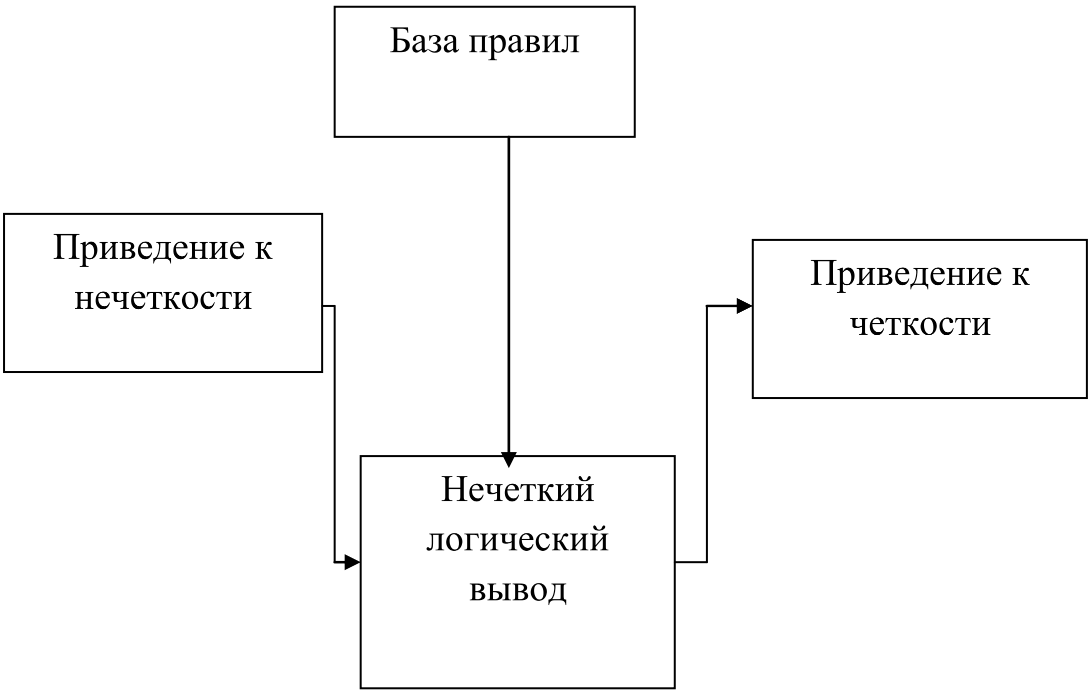


Рисунок 1. Этапы механизма нечеткого логического вывода

Алгоритмы нечеткого вывода различают главным образом видам используемых правил логической операции и разновидностью метода диверсификации. Разработаны модели нечеткого вида: Мамдани, Сугено, Ларсена, Цукамото.

Алгоритмы нечеткого вывода

Обычный, булевый логический вывод базируется на следующих тавтологиях:

модус поненс:; $(A\wedge(A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$;

модус толленс: $(A \Rightarrow B)\wedge B \Rightarrow A$;

силлогизм: $((A \Rightarrow B)\wedge(B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$;

контрапозиция: $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$;

В четком логическом выводе наиболее часто применяется правило модус поненс, которое можно записать так:

Посылка	А есть истинно
Импликация	Если А, то В
Логический вывод	В есть истинно

Модус поненс выводит заключение "В есть истинно", если известно, что "А есть истинно" и существует правило "Если А, то В" (А и В - четкие логические утверждения). Однако, если прецедент отсутствует, то модус поненс не сможет вывести никакого, даже приближенного заключения. Даже в случае, когда известно, что близкое к А утверждение А' является истинным, модус поненс не может быть применен. Одним из возможных способов принятия решений при неопределенной информации является применение нечеткого логического вывода.

Нечетким логическим выводом называется получение заключения в виде нечеткого множества, соответствующего текущим значениях входов, с использованием нечеткой базы знаний и нечетких операций. $B^t = A^t \circ (A \longrightarrow B)$

Основу нечеткого логического вывода составляет композиционное правило Заде.

Композиционное правило вывода Заде формулируется следующим образом: если известно нечеткое отношение между входной (x) и выходной (y) переменными, то при нечетком значении входной переменной $x = \tilde{A}$, нечеткое значение выходной переменной определяется так:

$y = \tilde{A} \circ R$, где $\circ$- максиминная композиция.

Нечеткий логический вывод Мамдани

Нечеткий логический вывод по алгоритму Мамдани выполняется по нечеткой базе знаний:

$$\bigcup_{p=1}^{k_j}\left(\bigcap_{i=1}^{n} x_i = a_{i,jp} \text{ с весом } w_{jp}\right) \rightarrow y = d_j$$

в которой значения входных и выходной переменной заданы нечеткими множествами. Введем следующие обозначения, необходимые для дальнейшего изложения материала:

$\mu_{jp}(x_i)$ - функция принадлежности входа нечеткому терму $a_{i,jp}$, т.е.,. $a_{i,jp=} \int_{\underline{x}_i}^{\overline{x}_i} \mu_{jp\,(x_i\,)\backslash x_i}$,

$x_{i\ e|\underline{x}_i, \overline{x}_i|}$

$\mu_{dj}(y)$ - функция принадлежности выхода к нечеткому терму d_j т.е. $d_j = \int_{\underline{y}}^{\overline{y}} \mu d_j\ (y)\backslash y$

Степени принадлежности входного вектора $x^* = (x_1^*, x_2^* \dots, x_n^*)$ нечетким термам d_j из базы знаний рассчитывается следующим образом:

$$\mu_{dj}(X^*) = \vee_{p=\overline{1,k_j}}\, w_{jp}\ * \wedge_{i=\overline{1,n}} \left[\mu_{jp}(X_i^*)\right]$$

операция из s-нормы (t-нормы), т.е. из множества реализаций логической операций ИЛИ (И). Наиболее часто используются следующие реализации: для операции ИЛИ - нахождение максимума и для операции И - нахождение минимума.

В результате получаем такое нечеткое множество y, соответствующее входному вектору x^*:

$$y = \frac{\mu d_{1\,(X^*)}}{d_1} + \frac{\mu d_{2(X^*)}}{d_2} + \dots + \frac{\mu d_{m(X^*)}}{d_m}$$

Особенностью этого нечеткого множества является то, что универсальным множеством для него является терм-множество выходной переменной y. Такие нечеткие множества называются нечеткими множествами второго порядка.

Для перехода от нечеткого множества, заданного на универсальном множестве нечетких термов $\left\{d_{1,d_{2,\dots d_m}}\right\}$ к нечеткому множеству на интервале $\lfloor y.\bar{y} \rfloor$ необходимо:

1) "срезать" функции принадлежности $\mu^{d_{j(y)}}$ на уровне; $\mu d_{j(X^*)}$

2) объединить (агрегировать) полученные нечеткие множества. Математически это записывается следующим образом:

$$\tilde{y} = agg_{j=\overline{1,m}} \left(\int_{\underline{y}}^{\overline{y}} \min\left(\mu_{dj}\left(X^*\right), \mu_{dj}(y)\right) \right)$$

где - agg агрегирование нечетких множеств, которое наиболее часто реализуется операцией нахождения максимума.

Четкое значение выхода, y соответствующее входному вектору X^*определяется в результате дефаззификации нечеткого множества $\tilde{y}$. Наиболее часто применяется дефаззификация по методу центра тяжести:

$$y = \frac{\int_y^{\bar{y}} y * \mu y(y) dy}{\int_y^{\bar{y}} \mu \bar{y}(y) dy}$$

где ∫- здесь символ интеграла.

Выполнение нечеткого логического вывода при значениях входной переменной $x = 28$ и $x =$ старый показано на рисунке 2. Операция агрегирования осуществлялась нахождением максимума. Дефаззификация проводилась по методу центра тяжести.

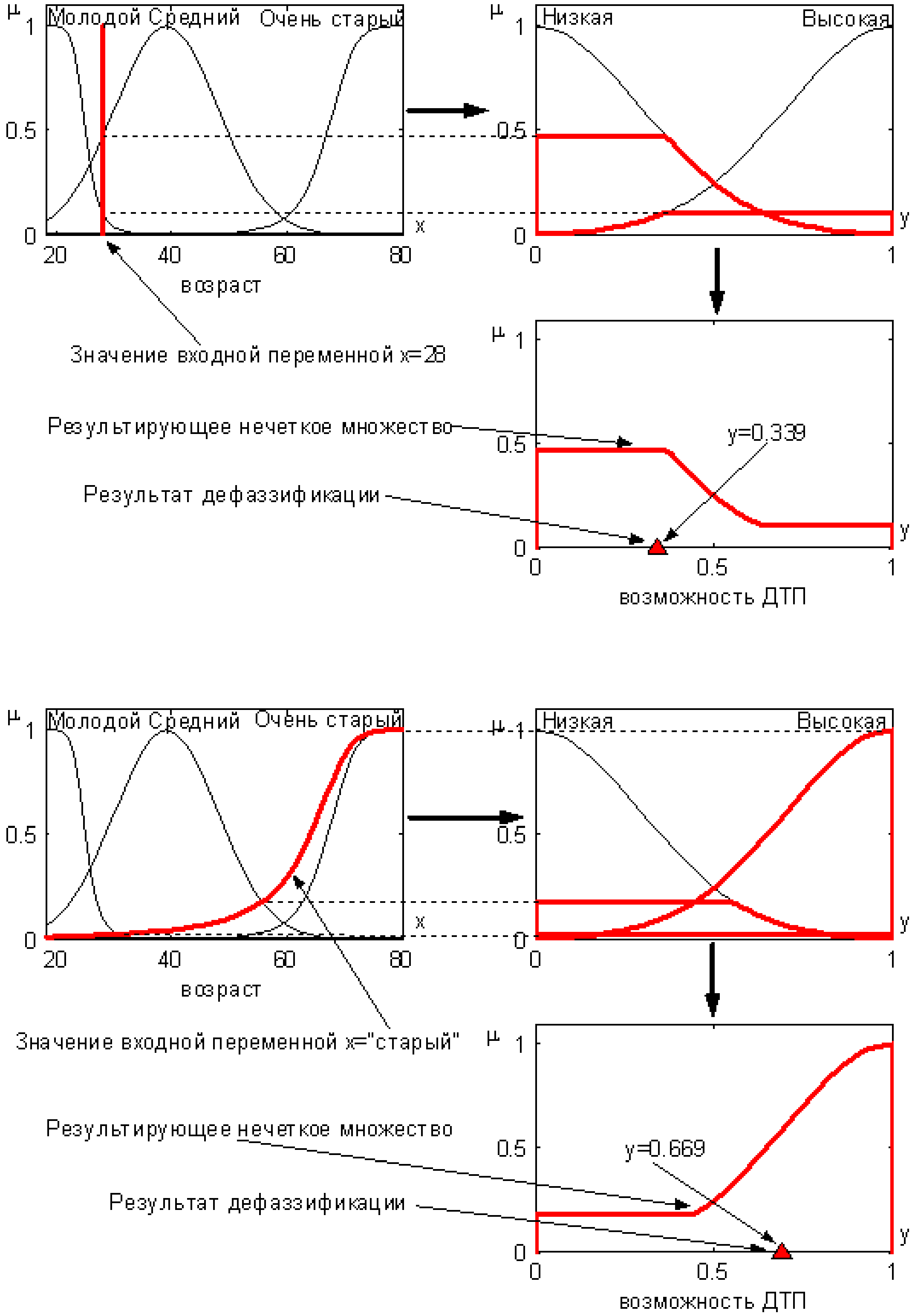


Рисунок 2. Выполнение нечеткого логического вывода

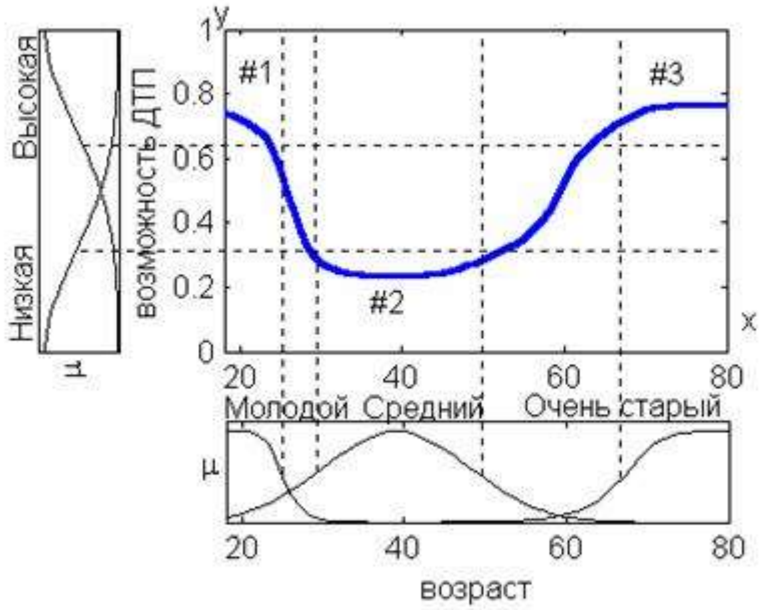


Рисунок 2. Выполнение нечеткого логического вывода

Нечеткий логический вывод Сугено

Нечеткий логический вывод по алгоритму Сугено (алгоритм Такаги-Сугено) выполняется по нечеткой базе знаний:

$$\bigcup_{p=1}^{k_j}\left(\bigcap_{i=1}^{n} x_i = a_{i,jp} \text{ с весом } w_{jp}\right) \to y = d_j, 0 + b_{j,0} + b_{j,1} * x_1 * x_2 + \ldots + b_{j,n} * x_n$$

где d_{ji}- некоторые числа.

База знаний Сугено аналогична базе знаний Мамдани за исключением заключений правил, d_j которые задаются не нечеткими термами, а линейной функцией от входов: $d_j = b_{j,0} + \sum_{i=\overline{1,n}}^{b_{j,i}} b_{j,i} * x_1$.

Правила в базе знаний Сугено являются своего рода переключателями с одного линейного закона "входы - выход" на другой, тоже линейный. Границы подобластей размытые, следовательно, одновременно могут выполняться несколько линейных законов, но с различными степенями. Степени принадлежности входного вектора $x^* = (x_1^*, x_2^* \ldots, x_n^*)$ к значениям $d_j = b_{j,0} + \sum_{i=\overline{1,n}}^{b_{j,i}} b_{j,i} * x_1$ рассчитывается следующим образом:

$$\mu_{dj}(X^*) = \vee_{p=\overline{1,k_j}} w_{jp} \ * \wedge_{i=\overline{1,n}} \left[\mu_{jp}(X_i^*)\right]$$

операция из s-нормы (t-нормы), т.е. из множества реализаций логической операций ИЛИ (И). В нечетком логическом выводе Сугено наиболее часто используются следующие реализации треугольных норм: вероятностное ИЛИ как s-норма и произведение как t-норма.

В результате получаем такое нечеткое множество, $\tilde{y}$ соответствующее входному вектору X^*

$$\tilde{y} = \frac{\mu d_1 \ (X^*)}{d_1} + \frac{\mu d_2 (X^*)}{d_2} + \cdots + \frac{\mu d_m (X^*)}{d_m}$$

В отличие от результата вывода Мамдани, приведенное выше нечеткое множество является обычным нечетким множеством первого порядка. Оно задано на множестве четких чисел. Результирующее значение выхода y определяется как суперпозиция линейных зависимостей, выполняемых в данной точке X^*, $n-$ мерного факторного пространства. Для этого дефаззифицирует нечеткое множество $\tilde{y}$, находя взвешенное среднее

$$\frac{\sum_{j=1,m} \mu_{dj}(X^*) * d_j}{\sum_{j=1,m} \mu_{dj}(X^*)}$$

Известна нечеткая база знаний:

Если x=низкий, то $y = 3x$

Если x=высокий, то $y = 3 - x$

Необходимо выполнить нечеткий логический вывод при значении входной переменной $x = 0{,}4$.

Выполнение нечеткого логического вывода показано на рисунках ниже. Дефаззификация проводилась по методу центра тяжести (взвешенного среднего).

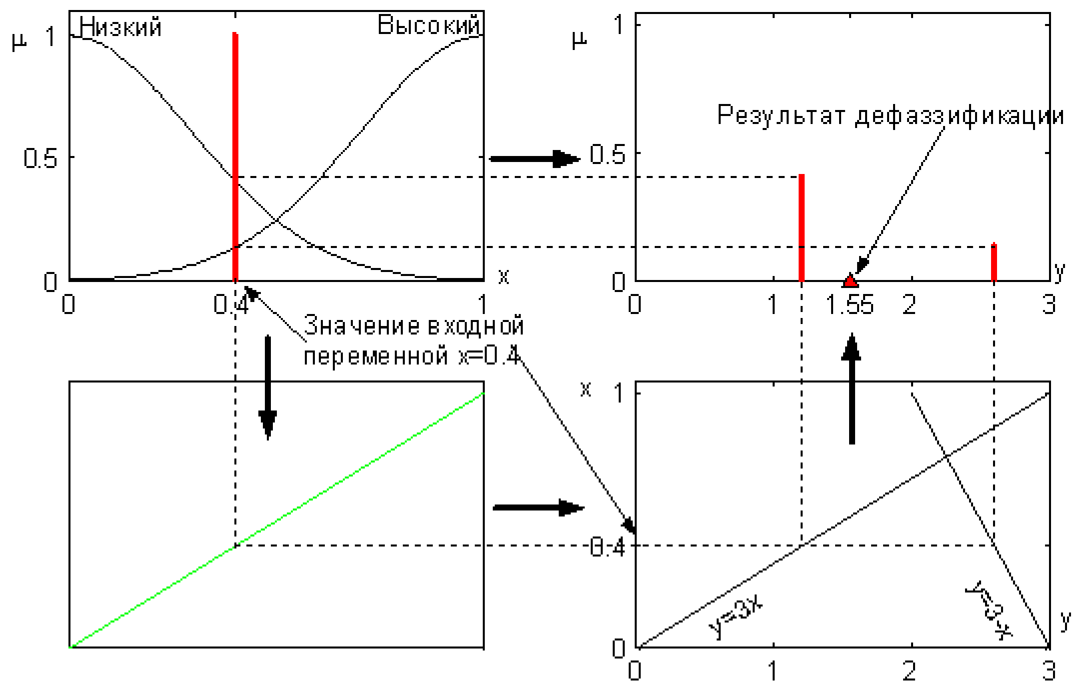


Рисунок 3. Выполнение нечеткого логического вывода Сугено.

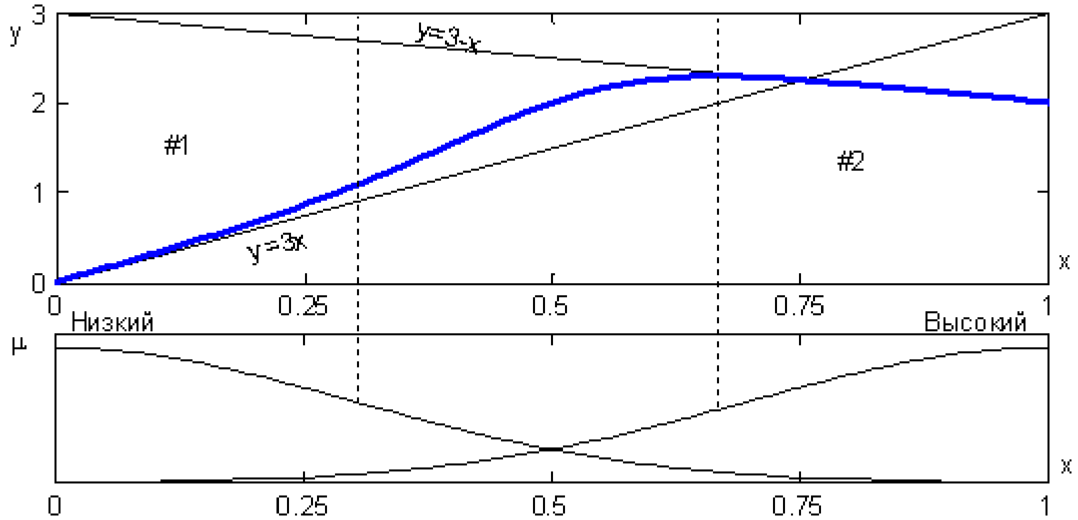


Рисунок 4. Зависимость "вход-выход" для нечеткой базы знаний.

Решение типовых задач

Пример 1. Построить функции принадлежности термов "низкий", "средний", "высокий", используемых для лингвистической оценки переменной "рост мужчины". Результаты опроса пяти экспертов приведены в табл.1.

Справочный материал для решения задачи

Практическое использование теории нечетких множеств предполагает наличие функций принадлежностей, которыми описываются лингвистические термы "низкий", "средний", "высокий" и т.п. Задача построения функций принадлежности ставится следующим образом: даны два множества: множество термов $L=\{l_1,l_2,...,l_m\}$ и универсальное множество $U=\{u_1,u_2,...,u_n\}$. Нечеткое множество $\tilde{l}_j$, которым описывается лингвистический терм l_j, $j=\overline{1,m}$, на универсальном множестве U представляется в виде: $\tilde{l}_j=\left(\frac{\mu_{l_j}(u_1)}{u_1},\frac{\mu_{\tilde{l}_j}(u_2)}{u_2},...,\frac{\mu_{l_j}(u_n)}{u_n}\right)$. Необходимо определить степени принадлежностей элементов множества U к элементам из множества L, т.е. найти $\mu_{l_j}(u_i)$ для всех $j=\overline{1,m}$ и $i=\overline{1,n}$.

Рассматриваются два метода построения функций принадлежности. Первый метод основан на статистической обработке мнений группы экспертов. Второй метод базируется на парных сравнениях, выполняемых одним экспертом.

Метод статистической обработки экспертной информации

Каждый эксперт заполняет опросник, в котором указывает свое мнение о наличии у элементов u_i, $i=\overline{1,n}$ свойств нечеткого множества $\tilde{l}_j$ ($j=\overline{1,m}$). Опросник имеет следующий вид:

	u_1	u_2	…	u_n
$\tilde{l}_1$				

$\tilde{l}_2$				
…				
$\tilde{l}_m$				

Введем следующие обозначения: K - количество экспертов; $b_{j,i}^k$ - мнение k-го эксперта о наличии у элемента u_i свойств нечеткого множества $\tilde{l}_j$, $k=\overline{1,K}$, $j=\overline{1,m}$ и $i=\overline{1,n}$. Будем считать, что экспертные оценки бинарные, т.е.: $b_{j,i}^k \in \{0,1\}$, где 1 (0) указывает на наличие (отсутствие) у элемента u_i свойств нечеткого множества $\tilde{l}_j$. По результатам опроса экспертов, степени принадлежности нечеткому множеству $\tilde{l}_j$ ($j=\overline{1,m}$) рассчитываются следующим образом:

$$\mu_{l_j}(u_i) = \frac{1}{K}\sum_{k=\overline{1,K}} b_{j,i}^k,\ i=\overline{1,n}. \qquad (1)$$

Решение:

Таблица 1. - Результаты опроса экспертов

k	**термы**	**[160, 165)**	**[165, 170)**	**[170, 175)**	**[175, 180)**	**[180, 185)**	**[185, 190)**	**[190, 195)**	**[195, 200)**
Эксперт 1	низкий	1	1	1	0	0	0	0	0
	средний	0	0	1	1	1	0	0	0
	высокий	0	0	0	0	0	1	1	1
Эксперт 2	низкий	1	1	1	0	0	0	0	0
	средний	0	0	1	1	0	0	0	0
	высокий	0	0	0	0	1	1	1	1
Эксперт 3	низкий	1	0	0	0	0	0	0	0
	средний	0	1	1	1	1	1	0	0
	высокий	0	0	0	0	0	1	1	1
Эксперт 4	низкий	1	1	1	0	0	0	0	0
	средний	0	0	0	1	1	1	0	0

	высокий	0	0	0	0	0	0	1	1
Эксперт 5	низкий	1	1	0	0	0	0	0	0
	средний	0	1	1	1	0	0	0	0
	высокий	0	0	0	1	1	1	1	1

Результаты обработки экспертных мнений представлены в таблице 2. Числа над линией - это количество голосов, отданных экспертами за принадлежность нечеткому множеству соответствующего элемента универсального множества. Числа под линией - степени принадлежности, рассчитанные по формуле (1). Графики функций принадлежностей показаны на рис. 1.

Таблица 2 - Результаты обработки мнений экспертов

термы	**[160, 165)**	**[165, 170)**	**[170, 175)**	**[175, 180)**	**[180, 185)**	**[185, 190)**	**[190, 195)**	**[195, 200)**
низкий	5	4	3	0	0	0	0	0
	1	0.8	0.6	0	0	0	0	0
средний	0	2	4	5	3	2	0	0
	0	0.4	0.8	1	0.6	0.4	0	0
высокий	0	0	0	1	2	4	5	5
	0	0	0	0.2	0.4	0.8	1	1

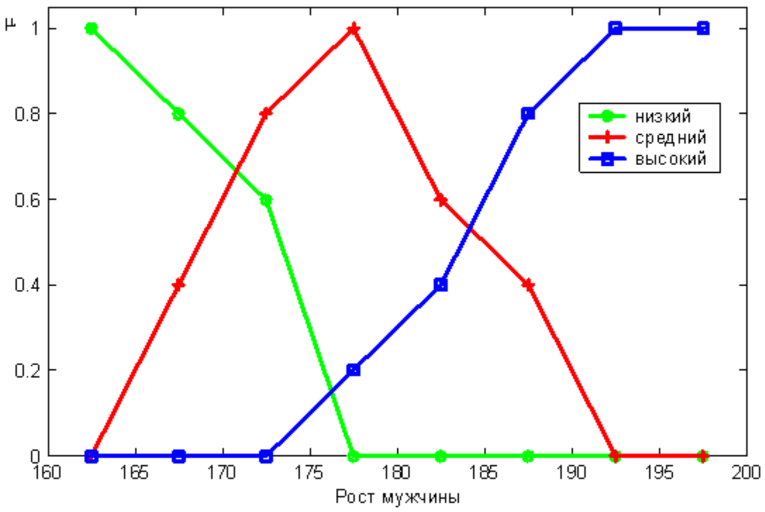


Рисунок 5. Функции принадлежности нечетких множеств

Пример 2. Построить функции принадлежности на основе парных сравнений термов "низкий", "средний", "высокий", используемых для лингвистической оценки переменной "рост мужчины". Результаты опроса пяти экспертов приведены в табл.1.

Справочный материал для решения задачи

Исходной информацией для построения функций принадлежности являются экспертные парные сравнения. Для каждой пары элементов универсального множества эксперт оценивает преимущество одного элемента над другим по отношению к свойству нечеткого множества. Парные сравнения удобно представлять следующей матрицей:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

где a_{ij} - уровень преимущества элемента u_i над u_j $(i, j = \overline{1, n})$, определяемый по девятибальной шкале Саати:

1 - если *отсутствует преимущество* элемента u_i над элементом u_j;

3 - если имеется *слабое преимущество* u_i над u_j;

5 - если имеется *существенное преимущество* u_i над u_j;

7 - если имеется *явное преимущество* u_i над u_j;

9 - если имеется *абсолютное преимущество* u_i над u_j;

2,4,6,8 - *промежуточные* сравнительные оценки.

Матрица парных сравнений является диагональной ($a_{ii} = 1, i = \overline{1, n}$) и обратно симметричной ($a_{ij} = \dfrac{1}{a_{ji}}, i, j = \overline{1, n}$).

Степени принадлежности принимаются равными соответствующим координатам собственного вектора $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ матрицы парных сравнений:

$$\mu(u_i) = w_i, \ i = \overline{1, n}. \qquad (2)$$

Собственный вектор находится из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} A \cdot W = \lambda_{\max} \cdot W \\ w_1 + w_2 + \ldots + w_n = 1 \end{cases}, \qquad (3)$$

где $\lambda_{\max}$ - максимальное собственное значение матрицы A.

Решение:

Парные сравнения зададим следующей матрицей:

$$A = \begin{array}{c} \\ 170 \\ 175 \\ 180 \\ 185 \\ 190 \\ 195 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 170 & 175 & 180 & 185 & 190 & 195 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 & 1/6 & 1/8 & 1/9 \\ 2 & 1 & 1/3 & 1/5 & 1/7 & 1/8 \\ 4 & 3 & 1 & 1/4 & 1/4 & 1/5 \\ 6 & 5 & 4 & 1 & 1/3 & 1/3 \\ 8 & 7 & 4 & 3 & 1 & 1 \\ 9 & 8 & 5 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Собственные значения этой матрицы парных сравнений равны:

6.2494;

0.0318 + 1.2230i;

0.0318 - 1.2230i;

- 0.1567 + 0.2392i;

- 0.1567 - 0.2392i;

0.0004.

Следовательно, $\lambda_{\max} = 6.2494$. Степени принадлежности, найденные по формулам (3) и (2), приведены в табл. 3. Нечеткое множество получилось субнормальным. Для нормализации разделим все степени принадлежности на максимальное значение, т.е. на 0.3494. Графики функций принадлежности субнормального и нормального нечеткого множества "высокий мужчина" приведены на рис. 2.

Таблица 3 - Функции принадлежности нечеткого множества "высокий мужчина"

u_i	170	175	180	185	190	195
$\mu_{высокий мужчина}(u_i)$ (субнормальное нечеткое множество)	0.0284	0.0399	0.0816	0.1754	0.3254	0.3494
$\mu_{высокий мужчина}(u_i)$ (нормальное нечеткое множество)	0.0813	0.1141	0.2335	0.5021	0.9314	1.0000

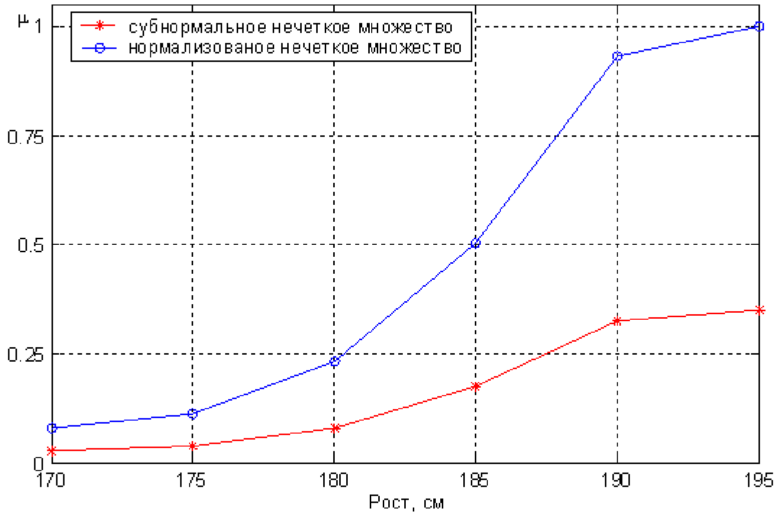


Рисунок 6. Функции принадлежности нечеткого множества "высокий мужчина"

Отклонение $\lambda_{\max}$ от n может служить мерой несогласованности парных сравнений эксперта. В примере 2 $\lambda_{\max} = 6.2494$, а $n = 6$. Следовательно, мера несогласованности равна 0.2494. При согласованных парных сравнениях процедура построения функций принадлежности значительно упрощается.

При согласованных мнениях эксперта матрица парных сравнений обладает следующими свойствами:

- она диагональная, т. е. $a_{ii}=1$, $i=1..n$;
- она обратно симметрична, т. е. элементы, симметричные относительно главной диагонали, связаны зависимостью $a_{ij}=1/a_{ji}$, $i,j=1..n$;
- она транзитивна, т. е. $a_{ik}a_{kj}=a_{ij}$, $i,j, k=1..n$.

Наличие этих свойств позволяет определить все элементы матрицы парных сравнений, если известны (n-1) недиагональных элементов. Например, если известна k-тая строка, т. е. элементы a_{kj} , $i,j=1..n$, то произвольный элемент a_{ij} определяется так:

$$a_{ij} = \frac{a_{kj}}{a_{ki}},\ i,j,k = \overline{1,n} \qquad (4)$$

После определения всех элементов матрицы парных сравнений степени принадлежности, нечеткого множества вычисляются по формуле:

$$\mu(u_i) = \frac{1}{a_{1i} + a_{2i} + \ldots + a_{ni}} \qquad (5)$$

Формула (5), в отличие от формул (2) - (3) не требует выполнения трудоемких вычислительных процедур, связанных с нахождением собственного вектора матрицы А.

Пример 3. Построить функцию принадлежности нечеткого множества "высокий мужчина" на универсальном множестве {170, 175, 180, 185, 190, 195}, если известны такие экспертные парные сравнения:

- *абсолютное преимущество 195 над 170;*
- *явное преимущество 195 над 175;*
- *существенное преимущество 195 над 180;*
- *слабое преимущество 195 над 185;*
- *отсутствует преимущество 195 над 190.*

Решение:

Приведенным экспертным высказываниям соответствует такая матрица парных сравнений:

$$A = \begin{array}{c} \\ 170 \\ 175 \\ 180 \\ 185 \\ 190 \\ 195 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 170 & 175 & 180 & 185 & 190 & 195 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 7/9 & 5/9 & 1/3 & 1/9 & 1/9 \\ 9/7 & 1 & 5/7 & 3/7 & 1/7 & 1/7 \\ 9/5 & 7/5 & 1 & 3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 3 & 7/3 & 5/3 & 1 & 1/3 & 1/3 \\ 9 & 7 & 5 & 3 & 1 & 1 \\ \mathbf{9} & \mathbf{7} & \mathbf{5} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Полужирным шрифтом выделенные элементы, соответствующие парным сравнениям из условия примера. Остальные элементы найдены по формуле (4). Применяя формулы (5) находим степени принадлежности (табл. 4). Для нормализации нечеткого множества разделим все степени принадлежности на максимальное значение, т.е. на 0.3588. Графики функций принадлежности субнормального и нормального нечеткого множества "высокий мужчина" приведены на рис. 3.

Таблица 4 - Функции принадлежности нечеткого множества "высокий мужчина"

u_i	**170**	**175**	**180**	**185**	**190**	**195**
μ высокий мужчина (u_i)	0.0399	0.0513	0.0718	0.1196	0.3588	0.3588

(субнормальное нечеткое множество)						
μ высокий мужчина (u_i) ((нормальное нечеткое множество)	0.1111	0.1429	0.2000	0.3333	1.0000	1.0000

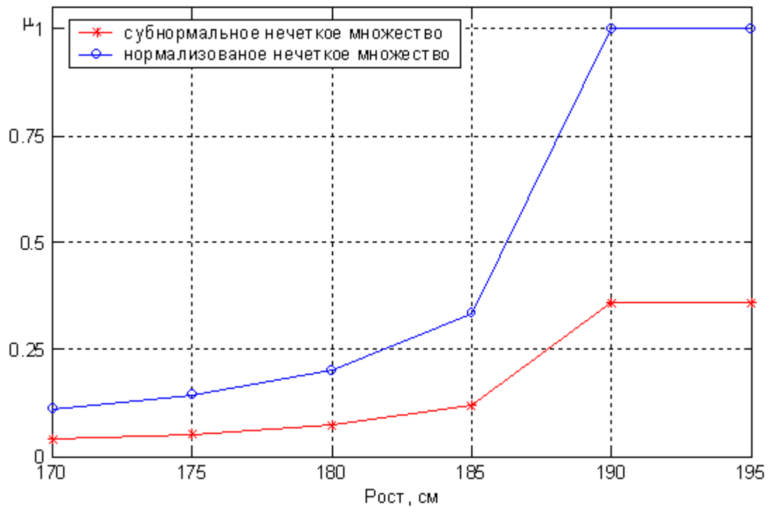


Рисунок 7. Функции принадлежности нечеткого множества "высокий мужчина"

Задания для самостоятельного выполнения

1. Пусть ***U***={понедельник, вторник, среда, четверг, пятница, суббота, воскресенье}. Выступая в роли эксперта, запишите в форме $A=\sum_{i=1}^{n}\mu_A(u_i)/u_i$ ($u_i \in U$) следующие нечеткие множества: **A** – начало недели, ***B*** – середина недели, ***C*** – конец недели, ***D*** – не начало, но и не конец недели. Есть ли среди определенных вами функций принадлежности унимодальные?

2. Пусть ***U***={0,1,2,…120} – возможный возраст человека. Выступая в роли эксперта, постройте графики функций принадлежности следующих нечетких множеств с помощью метода парных сравнений: ***A*** - молодой, ***B*** – старый, ***C*** – очень молодой, ***D*** – не старый. Запишите эти множества в стандартной форме.

3. Решить задачу 2 с помощью метода статистической обработки экспертной информации, в качестве экспертов использовать своих одногруппников.

Пример 4. Пусть $A = 0.1/1 + 0.3/2 + 0.4/5 + 0.7/6 + 0.8/9 + 1/10$ и $\alpha \in \{0.1; 0.3; 0.5; 0.7; 0.9\}$. Составить множества α - уровня для всех возможных значений α.

Справочный материал для решения задачи

Ядром нечеткого множества $\tilde{A}$ называется четкое подмножество универсального множества U, элементы которого имеют степени принадлежности равные единице: $core(\tilde{A}) = \{u : \mu_A = 1\}$. Ядро субнормального нечеткого множества пустое.

α-*сечением (или множеством* **α** *-уровня)* нечеткого множества $\tilde{A}$ называется четкое подмножество универсального множества U, элементы которого имеют степени принадлежности большие или равные **α**: $A^{\alpha} = \{u : \mu_A(u) \geq \alpha\}$, $\alpha \in [0,1]$. Значение α называют α - *уровнем*. Носитель (ядро) можно рассматривать как сечение нечеткого множества на нулевом (единичном) α - уровне.

Рисунок иллюстрирует определения носителя, ядра, α - сечения и **α**-уровня нечеткого множества.

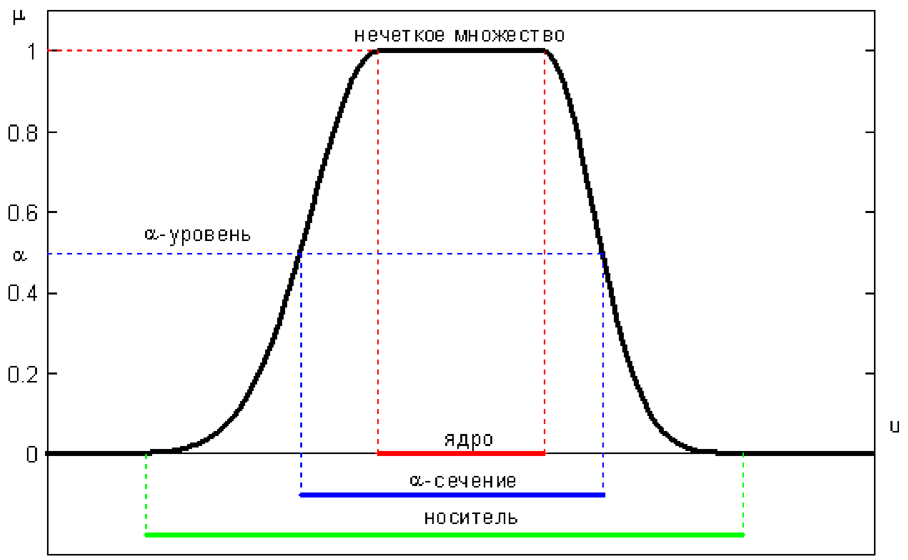


Рисунок 8. Иллюстрирация определения носителя, ядра, α - сечения и **α**-уровня нечеткого множества

Решение:

$A^{0.1} = \{1,2,5,6,9,10\}$

$A^{0.3} = \{2,5,6,9,10\}$

$A^{0.5} = \{6,9,10\}$

$A^{0.7} = \{6,9,10\}$

$A^{0.9} = \{10\}$

Пример 5. Носителем нечеткого множества A является отрезок [1,3], а функция принадлежности имеет вид $\mu_A(x) = \frac{1}{2}(1+\cos(\pi x))$. Записать разложение по множествам α - уровня.

Решение:

Множеством α - уровня является отрезок $[x_1, x_2]$, концы которого определяются из уравнения $\mu_A(x) = \frac{1}{2}(1+\cos(\pi x)) = \alpha$, $x \in [1,3]$. Решением такого уравнения будут 2 числа:

$$x_1 = 2 - \frac{1}{\pi}\arccos(2\alpha - 1) \text{ и } x_2 = 2 + \frac{1}{\pi}\arccos(2\alpha - 1).$$

Разложение множества A по множествам уровня имеет вид:

$$A = \int_0^1 \alpha \left[\left(2 - \frac{1}{\pi}\arccos(2\alpha - 1)\right), \left(2 + \frac{1}{\pi}\arccos(2\alpha - 1)\right)\right].$$

Разобьем отрезок [0,1] на десять частей, получим дискретный набор значений $\alpha \in \{0;0.1;0.2;\ldots;1\} = \frac{n}{10}$, (n=0,1,2,…,10). Тогда приближенное разложение множества A по множествам уровня примет следующий вид:

$$A \approx \sum_{n=0}^{10} \frac{n}{10}\left[\left(2 - \frac{1}{\pi}\arccos\left(\frac{n-5}{10}\right)\right), \left(2 + \frac{1}{\pi}\arccos\left(\frac{n-5}{10}\right)\right)\right].$$

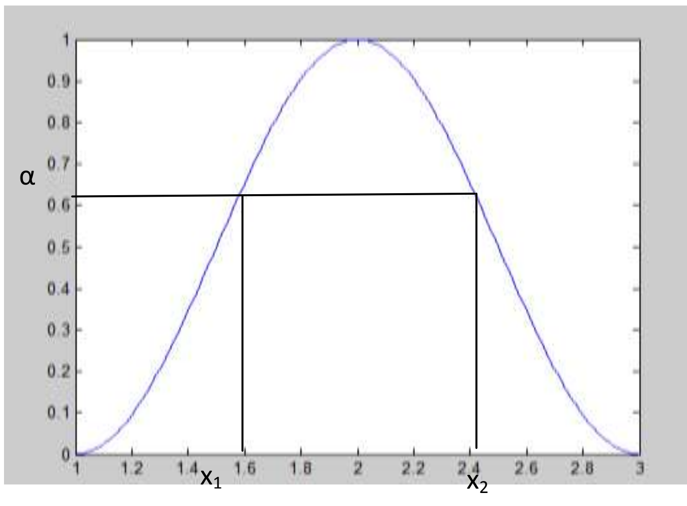


Рисунок 9. Разложение множества A по множествам уровня

Задания для самостоятельного выполнения

1. Пусть ***U*** – множество дисциплин, изучаемых в текущем семестре. Присвойте номер каждой дисциплине и, выступая в роли эксперта, запишите нечеткие множества:

A – мне нравится эта дисциплина

B – я не понимаю эту дисциплину

C – мне не нравится эта дисциплина

D – Я хотел бы изучать эту дисциплину глубже

Представьте разложения каждого из нечетких множеств по множествам уровня.

2. U – множество неотрицательных действительных чисел. Заданы функции принадлежности нечетких множеств:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \le x \le 5; \\ 0, & \text{если } x > 5; \end{cases}$$

$$\mu_B(x) = \begin{cases} e^{-\frac{x-5}{5}}, & \text{если } 5 \le x \le 10; \\ 0, & \text{если } 0 \le x < 5 \text{ или x} > 5; \end{cases}$$

$$\mu_C(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \le x < a_1; \\ \dfrac{x-a_1}{a_2-a_1}, & \text{если } a_1 \le x \le a_2; \\ 1, & \text{если } \mathrm{x} > \mathrm{a}_2; \end{cases}$$

$$\mu_D(x) = \frac{1}{1+2x^2}, \quad 0 \le x < \infty .$$

Для каждого нечеткого множества:

- ✓ Построить график функции принадлежности;
- ✓ Записать разложение по множествам уровня;
- ✓ Записать приближенное дискретное разложение, разбив отрезок [0;1] на пять частей.

3. Пусть U – цены автомобилей, $4 \le u \le 5000$ (усл.ед.). Выступая в роли эксперта, постройте графики функций принадлежности следующих нечетких множеств:

A – цены автомобилей для среднего класса

B – цены автомобилей для богатых людей

C - цены автомобилей для небогатых людей

Для каждой кривой найдите подходящую формулу и запишите функции принадлежности аналитически.

Запишите разложение по множествам уровня каждого из нечетких множеств.

Запишите приближенное дискретное разложение, разбив отрезок [0;1] на десять равных частей.

4. Даны нечеткие множества:

$A = 0{,}4/5 + 0{,}7/6 + 1/7 + 0{,}8/8 + 0{,}6/9$ и $B = 0{,}8/1 + 0{,}8/3 + 0{,}5/4$

Требуется:

Записать множества ***CON(A)***, ***DIL(A)***, ***CON(B)***, ***DIL(B)***.

Сделать два чертежа: на одном изобразить множества ***A***, ***CON(A)***, ***DIL(A)***, на втором – множества ***B***, ***CON(B)***, ***DIL(B)***.

5. А – нечеткое множество, заданное на множестве неотрицательных действительных чисел, с функцией принадлежности

$$\mu(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right), & \text{если } x \le 2 \\ 0, & \text{если } 2 < x \end{cases}.$$

Записать множества ***CON(A)***, ***DIL(A)***. Построить графики функций принадлежности множеств ***A***, ***CON(A)***, ***DIL(A)***.

6. На универсальном множестве $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ заданы нечеткие множества:

$$A = 0.3/b + 0.7/c + 1/d + 0.2/f + 0.6/g$$

$$B = 0.3/a + 1/b + 0.5/c + 0.8/d + 1/e + 0.5/f + 0.6/g$$

$$C = 1/a + 0.5/b + 0.2/d + 0.2/f + 0.9/g$$

Найти множества $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap \overline{B}$, $(A \cup \overline{B}) \cap C$, $(\overline{A \cap B}) \cap \overline{C}$, и дать геометрическую интерпретацию выполненных операций. Найти множества: $0.8A^2 \cup 0.5B^2 \cup 0.3C^2$, $0.6(A \cdot B) \cap C^2$.

7. На универсальном множестве $\boldsymbol{U}$=[0;3] заданы нечеткие множества $A=\int_U \frac{u^2}{9}/u$ и $B=\int_U \frac{(u-3)^2}{9}/u$. Требуется построить графики функций принадлежности множеств $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$. Записать множества $A\cap B$, $A\cup B$, $A\cap\overline{B}$, $A\cup\overline{B}$, $\overline{A\cap B}$, $(A\cap\overline{A})\cdot(B\cap\overline{B})$ и построить графики их функций принадлежности.

8. Пусть $U=\{a,b,c,d,e\}$ - множество молодых людей. На $\boldsymbol{U}$ задано нечеткое множество $\boldsymbol{A}$: $\boldsymbol{A}$=молодой человек хорошо владеет компьютером, $\boldsymbol{A}$=0,8/a+0.6/c+0.9/d+1/e. Используя операции концентрирования и растяжения, записать множества:

B=CON(A)=молодой человек очень хорошо владеет компьютером

C=DIL(A)=молодой человек не слишком хорошо владеет компьютером.

9. Даны нечеткие числа***:*** ***a***= «немного больше 3» и ***b***= «примерно 3», если ***A***=1/4+0,5/5+0,2/6 и ***B***=0,3/1+0,8/2+1/3+0,8/4+0,3/5. Выполнить арифметические операции и сравнить нечеткие числа с дискретными носителями.

10. Пусть ***U***={0,1,2,…,25} является носителем следующих нечетких чисел:

a **-** «в городе N проезд на метро стоит приблизительно 8 руб.»

b – «проезд на маршрутке в этом городе стоит не менее 15 руб.»

c – «мне надо проехать на метро раз пять»

d – «мне надо проехать на маршрутке по крайней мере раза три»

Выступая в роли эксперта, запишите нечеткие числа ***a, b, c*** и ***d*** в форме объединения точечных нечетких множеств. Найти ***x***= «примерная сумма расходов на транспорт в городе N». Разложить нечеткие числа ***a***, ***b***, ***c***, ***d*** и x по множествам α - уровня, если α∊{0;0.2;0.4;0.6;0.8;1}. Построить графики функций принадлежности чисел ***a***, ***b***, ***c***, ***d*** и ***x***.

Пример 6. Нечеткие числа $\tilde{x}_1$ и $\tilde{x}_2$ заданы следующими трапециевидными функциями принадлежности:

$$\mu_{\tilde{x}_1}(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x<1 \text{ или } x>4\\ x-1, \quad \text{если } x\in[1,2]\\ 1, \quad \text{если } x\in(2,3)\\ 4-x, \quad \text{если } x\in[3,4]\end{cases} \text{ и } \quad \mu_{\tilde{x}_2}(x)=\begin{cases}0, \quad \text{если } x<2 \text{ или } x>8\\ x-2, \quad \text{если } x\in[2,3]\\ 1, \quad \text{если } x\in(3,4)\\ 2-0.25x, \quad \text{если } x\in[4,8]\end{cases}.$$

Необходимо найти нечеткое число $\tilde{y}=\tilde{x}_1\cdot\tilde{x}_2$ с использованием принципа обобщения.

Справочный материал для решения задачи

Нечетким числом называется выпуклое нормальное нечеткое множество с кусочно-непрерывной функцией принадлежности, заданное на множестве действительных чисел. Например, нечеткое число "около 10" можно задать следующей функцией принадлежности: $\mu(u)=\dfrac{1}{1+(u-10)^2}$.

Нечеткое число $\tilde{A}$ называется *положительным (отрицательным)* если $\mu_A(u)=0$, $\forall u<0$ ($\forall u<0$).

Принцип обобщения Заде. Если $y=f(x_1,x_2,...,x_n)$ - функция от n независимых переменных и аргументы $x_1,x_2,...,x_n$ заданы нечеткими числами $\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,...,\tilde{x}_n$, соответственно, то значением функции $\tilde{y}=f(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,...,\tilde{x}_n)$ называется нечеткое число $\tilde{y}$ с функцией принадлежности:

$$\mu_{\tilde{y}}(y^*)=\sup_{\substack{y^*=f(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*)\\ x_i^*\in U_{\tilde{x}_i},\, i=\overline{1,n}}}\min_{i=\overline{1,n}}\left(\mu_{\tilde{x}_i}(x_i^*)\right).$$

Принцип обобщения позволяет найти функцию принадлежности нечеткого числа, соответствующего значения четкой функции от нечетких аргументов.

Решение:

Зададим нечеткие аргументы на четырех точках (дискретах): {1, 2, 3 4} для $\tilde{x}_1$ и {2, 3, 4 8} для $\tilde{x}_2$. Тогда: $\tilde{x}_1=\frac{0}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{0}{4}$ и $\tilde{x}_2=\frac{0}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{0}{8}$. Процесс выполнения умножения над нечеткими числами сведен в табл. 4. Каждый столбец таблицы соответствует одной итерации алгоритма нечеткого обобщения. Результирующее нечеткое множество задано первой и последней строчками таблицы. В первой строке записаны элементы универсального множества, а в последней строке - степени их принадлежности к значению

выражения $\tilde{x}_1 \cdot \tilde{x}_2$. В результате получаем: $\tilde{y} = \frac{0}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{0}{32}$. Предположим, что тип функция принадлежности $\tilde{y}$ будет таким же, как и аргументов $\tilde{x}_1$ и $\tilde{x}_2$, т. е. трапециевидной. В этом случае функция принадлежности задается выражением:
$$\mu_{\tilde{y}}(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y < 2 \text{ или } y > 32 \\ (y-2)/3, & \text{если } y \in [1,2] \\ 1, & \text{если } y \in (6,9) \\ (32-y)/23, & \text{если } y \in [3,4] \end{cases}.$$

На рис. 4 показаны результаты выполнения операции $\tilde{y} = \tilde{x}_1 \cdot \tilde{x}_2$ с представлением нечетких множителей на 4-х дискретах. Красными звездочками показаны элементы нечеткого множества $\tilde{y}$ из табл. 4, а тонкой красной линией - трапециевидная функция принадлежности.

Исследуем, как изменится результат нечеткого обобщения при увеличении числа дискрет, на которых задаются аргументы. Нечеткое число $\tilde{y}$ при задании аргументов $\tilde{x}_1$ и $\tilde{x}_2$ на 30 дискретах приведено на рис. 4. Синими точками показаны элементы нечеткого множества $\tilde{y}$, найденные по принципу обобщения, а зеленой линией - верхняя огибающая этих точек - функция принадлежности $\tilde{y}$. Функция принадлежности результата имеет форму криволинейной трапеции, немного выгнутой влево.

Таблица 4 – К примеру 6

$y^* = x_1^* \cdot x_2^*$	**2**	**3**	**4**		**6**		**8**			**9**	**12**		**16**		**24**	**32**
x_1^*	1	1	1	2	2	3	1	2	4	3	3	4	2	4	3	4
x_2^*	2	3	4	2	3	2	8	4	2	3	4	3	8	4	8	8
$\mu_{\tilde{x}_1}(x_1^*)$	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0
$\mu_{\tilde{x}_2}(x_2^*)$	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0
$\min(\mu_{\tilde{x}_1}(x_1^*), \mu_{\tilde{x}_2}(x_2^*))$	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0
$\mu_{\tilde{y}}(y^*)$	**0**	**0**	**0**		**1**		**1**			**1**	**1**		**0**		**0**	**0**

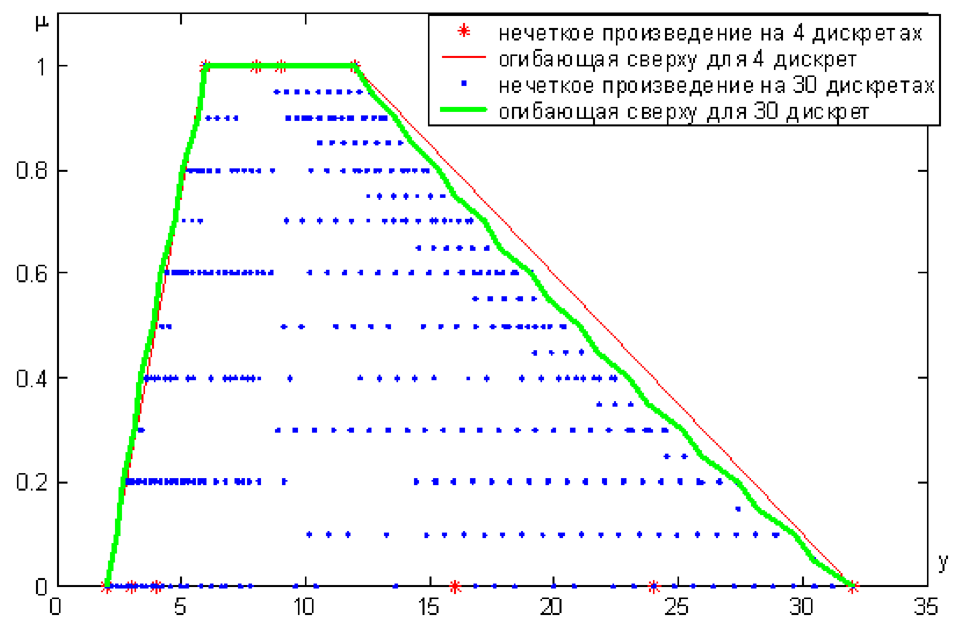


Рисунок 4 - К примеру 6

Применение принципа обобщения Заде сопряжено с двумя трудностями:

1. большой объем вычислений;
2. необходимость построения верхней огибающей элементов результирующего нечеткого множества.

Пример 7. Решить задачу из примера 6, применяя α - уровневый принцип обобщения.

Справочный материал для решения задачи

Более практичным является применение α - уровневого принципа обобщения. В этом случае нечеткие числа представляются в виде разложений по **α** - уровневым множествам: $\tilde{x} = \bigcup\limits_{\alpha\in[0;1]} \left(\underline{x}_\alpha, \overline{x}_\alpha\right)$, где $\underline{x}_\alpha \left(\overline{x}_\alpha\right)$ - минимальное (максимальное) значение $\tilde{x}$ на **α** - уровне.

***α** - уровневый принцип обобщения.* Если $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ - функция от n независимых переменных и аргументы x_i заданы нечеткими числами $\tilde{x} = \bigcup\limits_{\alpha\in[0;1]} \left(\underline{x}_\alpha, \overline{x}_\alpha\right)$, $i = \overline{1, n}$, то значением функции $\tilde{y} = f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)$ называется нечеткое число $\tilde{y} = \bigcup_{\alpha\in[0;1]} \left(\underline{y}_\alpha, \overline{y}_\alpha\right)$, где $\underline{y}_\alpha = \inf_{\substack{x_{i,\alpha}\in[\underline{x}_{i,\alpha}, \overline{x}_{i,\alpha}] \\ i=\overline{1,n}}} \left(f(x_{1,\alpha}, x_{2,\alpha}, \ldots, x_{n,\alpha})\right)$ и

$\overline{y}_\alpha = \sup_{\substack{x_{i,\alpha}\in[\underline{x}_{i,\alpha}, \overline{x}_{i,\alpha}] \\ i=\overline{1,n}}} \left(f(x_{1,\alpha}, x_{2,\alpha}, \ldots, x_{n,\alpha})\right)$.

Применение **α** - уровневого принципа обобщения сводится к решению для каждого **α** - уровня следующей задачи оптимизации: найти максимальное и минимальное значения функции $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при условии, что аргументы могут принимать значения из соответствующих **α** - уровневых множеств. Количество **α** - уровней выбирают так, чтобы обеспечить необходимую точность вычислений.

Решение:

Будем использовать 2 следующих **α** - уровня: $\{0, 1\}$. Тогда нечеткие аргументы задаются так: $\tilde{x}_1 = (1,4)_0 \cup (2,3)_1$ и $\tilde{x}_2 = (2,8)_0 \cup (3,4)_1$. По **α** - уровневому принципу обобщения получаем: $\tilde{y} = (2,32)_0 \cup (6,12)_1$. На рис. 2 показан результат умножения двух нечетких чисел $\tilde{y} = \tilde{x}_1 \cdot \tilde{x}_2$: красными горизонтальными линиями изображены **α** - сечения, а тонкой красной линией - кусочно-линейная аппроксимация функции принадлежности нечеткого числа $\tilde{y}$.

Исследуем, как измениться результат нечеткого обобщения при увеличении числа **α** - уровней. Нечеткое число $\tilde{y}$ при задании аргументов $\tilde{x}_1$ и $\tilde{x}_2$ на 41 **α** - уровне показано на рис. 5. Синими горизонтальными линиями изображены **α** - сечения нечеткого множества, а жирной синей линией - кусочно-линейная аппроксимация функции принадлежности нечеткого числа $\tilde{y}$ для 41 **α**-уровня. Сравнивая рис. 4 и 5, видим, что результаты обобщения по определениям 27 и 28 близки.

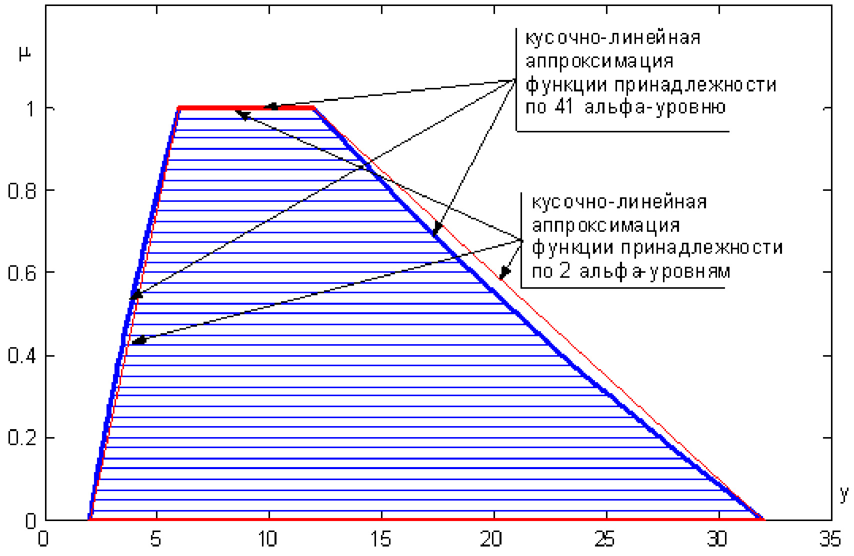


Рисунок 5 - К примеру 7.

Применение α - уровневого принципа обобщения позволяет получить правила выполнения арифметических операций над нечеткими числами. Правила выполнения арифметических операций для положительных нечетких чисел приведены в табл. 5. Эти правила необходимо применять для каждого α - уровня.

Таблица 5 - Правила выполнения арифметических операций для положительных нечетких чисел (для каждого α-уровня)

Арифметическая операция	$\underline{y}$	$\overline{y}$
$\tilde{y}=\tilde{x}_1+\tilde{x}_2$	$\underline{x}_1+\underline{x}_2$	$\overline{x}_1+\overline{x}_2$
$\tilde{y}=\tilde{x}_1-\tilde{x}_2$	$\underline{x}_1-\overline{x}_2$	$\overline{x}_1-\underline{x}_2$
$\tilde{y}=\tilde{x}_1\cdot\tilde{x}_2$	$\underline{x}_1\cdot\underline{x}_2$	$\overline{x}_1\cdot\overline{x}_2$
$\tilde{y}=\dfrac{\tilde{x}_1}{\tilde{x}_2}$	$\dfrac{\underline{x}_1}{\overline{x}_2}$	$\dfrac{\overline{x}_1}{\underline{x}_2}$

Пример 8. Даны нечеткие числа A= «примерно 7», B= «примерно 10»:

$$A=\int\limits_{x\in[4;7]}\frac{x-4}{3}/x+\int\limits_{x\in(7;9]}\frac{9-x}{2}/x,$$

$$B=\int\limits_{x\in[6;10]}\frac{x-6}{4}/x+\int\limits_{x\in(10;15]}\frac{15-x}{5}/x.$$

Выполнить арифметические операции над этими числами.

Решение:

Носителями нечетких множеств чисел A и B являются отрезки: $U_A = [4;9]$, $U_B = [6;15]$.

Множеством α - уровня числа A является отрезок $[a_1;a_2]$ ($4 \le a_1, a_2 \le 9$), $a_1 = 4 + 3\alpha$, $a_2 = 9 - 2\alpha$.

Множеством α-уровня числа B является отрезок $[b_1;b_2]$ ($6 \le a_1, a_2 \le 15$), $b_1 = 6 + 4\alpha$, $b_2 = 15 - 5\alpha$.

$$A + B = \bigcup_{\alpha\in[0;1]}\left[4 + 3\alpha + 6 + 4\alpha, 9 - 2\alpha + 15 - 5\alpha\right] = \bigcup_{\alpha\in[0;1]}\left[10 + 7\alpha, 24 - 7\alpha\right];$$

$$A - B = \bigcup_{\alpha\in[0;1]}\left[4 + 3\alpha - 15 + 5\alpha, 9 - 2\alpha - 6 - 4\alpha\right] = \bigcup_{\alpha\in[0;1]}\left[-11 + 8\alpha, 3 - 6\alpha\right];$$

$$A \cdot B = \bigcup_{\alpha\in[0;1]}\left[(4 + 3\alpha)\cdot(6 + 4\alpha), (9 - 2\alpha)\cdot(15 - 5\alpha)\right] =$$

$$= \bigcup_{\alpha\in[0;1]}\left[24 + 34\alpha + 12\alpha^2, 135 - 75\alpha + 10\alpha^2\right]$$

$$\frac{A}{B} = \bigcup_{\alpha\in[0;1]}\left[\frac{4 + 3\alpha}{15 - 5\alpha}, \frac{9 - 2\alpha}{6 + 4\alpha}\right].$$

Множества уровней нечетких чисел

	α=0	**α=0,2**	**α=0,4**	**α=0,6**	**α=0,8**	**α=1**
$A + B$	[10,24]	[11.4;22.6]	[12.8;21.2]	[14.2;19.8]	[15.6;18.4]	[17]
$A - B$	[-11;3]	[-9.4;1.8]	[-7.8;0.6]	[-6.2;-0.6]	[-4.6;-1.8]	[-3]
$A \cdot B$	[24;135]	[31.28;120.4]	[39.52;106.6]	[48.72;93.6]	[58.88;81.4]	[70]
$\frac{A}{B}$	$\left[\frac{4}{15};\frac{9}{16}\right]$	≈[0.31;1.26]	≈[0.4;1.08]	≈[0.48;0.93]	≈[0.58;0.78]	[0.7]

Пример 9. Пусть множество U=[1;10] отображается во множество V=[0;1] по закону v=lgu. Множество U явлется носителем нечеткого множества A: $A = \int_{x\in[1,10]} \frac{x - 1}{9} / x$. Найти образ множесвта A при данном отображении.

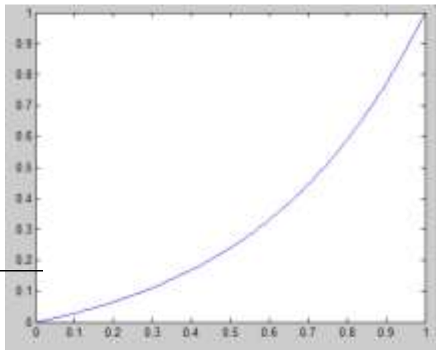
Решение:

$$A = \bigcup_{\alpha\in[0;1]}[9\alpha + 1, 10]$$

$$\mathbf{lg}\, A = \bigcup_{\alpha\in[0;1]}[\mathbf{lg}(9\alpha + 1); \mathbf{lg}10] = \bigcup_{\alpha\in[0;1]}[\mathbf{lg}(9\alpha + 1;1] = \bigcup_{\substack{\alpha\in[0;1] \\ v=\mathbf{lg}(9\alpha+1)}}[v;1]$$

Из равенства $v = \mathbf{lg}(9\alpha + 1)$ получаем $\alpha = \frac{10^v - 1}{9}$, $v \in [0;1]$.

Таким образом, $\mathbf{lg}\,A = \int_{v\in[0;1]} \frac{10^v - 1}{9} / v$.



Пример 10. Пусть A и B – нечеткие числа с функциями принадлежности

$$\mu_A = \begin{cases} \frac{x-4}{3}, 4 \le x \le 7 \\ \frac{9-x}{4}, 7 < x \le 9 \end{cases}, \quad \mu_B = \begin{cases} \frac{x-6}{4}, 6 \le x \le 10 \\ \frac{15-x}{5}, 10 < x \le 15 \end{cases}$$

Показать, что эти числа являются нечеткими числами L-R-типа.

Справочный материал для решения задачи

Нечеткое число A называется числом L-R-типа, если оно является нормальным унимодальным множеством, функция принадлежности которого имеет виж

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L\left(\frac{a-x}{\alpha}\right), \text{если } x \le a; \\ R\left(\frac{x-a}{\beta}\right), \text{если } x \ge a, \end{cases}$$

причем функции L(t) и R(t) обладают следующими свойствами:

$$L\left(\frac{a-x}{\alpha}\right) = L\left(\frac{x-a}{\alpha}\right),\ R\left(\frac{a-x}{\beta}\right) = R\left(\frac{x-a}{\beta}\right).$$

L(0)=R(0)=1

$L\left(\frac{a-x}{\alpha}\right)$ неубывающая функция слева от точки x= α

$R\left(\frac{x-a}{\beta}\right)$- невозрастающая функция справа от точки x=α.

Любое число L-R-типа определяется тройкой параметров $A = (a, \alpha, \beta)$, где a – мода числа, т.е. действительное число, доставляющее функции принадлежности максимум, равный единице: $\mu_A(a)=1$; α и β (α>0, β>0) – левый и правый коэффициенты нечеткости, задаваемые экспертом.

Пусть $A_{LR}=(a_1,\alpha_1,\beta_1)$, $B_{LR}=(a_2,\alpha_2,\beta_2)$ арифметические действия для чисел L-R-типа выполняются по следующим правилам:

$$(a_1,\alpha_1,\beta_1)_{LR}+(a_2,\alpha_2,\beta_2)_{LR}=(a_1+a_2,\alpha_1+\alpha_2,\beta_1+\beta_2)_{LR}$$

$$(a_1,\alpha_1,\beta_1)_{LR}-(a_2,\alpha_2,\beta_2)_{LR}=(a_1-a_2,\alpha_1+\beta_2,\beta_1+\alpha_2)_{LR}$$

$$(a_1,\alpha_1,\beta_1)_{LR}\cdot(a_2,\alpha_2,\beta_2)_{LR}\approx(a_1\cdot a_2,a_1\cdot\alpha_2+a_2\cdot\alpha_1,a_1\cdot\beta_2+a_2\cdot\beta_1)_{LR}$$ (если A<0,B>0)

$$(a_1,\alpha_1,\beta_1)_{LR}\cdot(a_2,\alpha_2,\beta_2)_{LR}\approx(a_1\cdot a_2,a_2\cdot\alpha_1-a_1\cdot\beta_2,a_2\cdot\beta_1-a_1\cdot\alpha_2)_{LR}$$ (если A>0,B>0)

$$(a_1,\alpha_1,\beta_1)_{LR}\cdot(a_2,\alpha_2,\beta_2)_{LR}\approx(a_1\cdot a_2,(-a_2\cdot\beta_1-a_1\cdot\beta_2),(-a_2\cdot\alpha_1-a_1\cdot\alpha_2)_{LR}$$ (если A<0,B<0)

Решение:

$$L_A\left(\frac{a-x}{\alpha}\right)=1-\frac{|7-x|}{3}$$ (x<7).

$$L_A\left(\frac{x-a}{\beta}\right)=1-\frac{|x-7|}{2}\ (x\geq 7),\ a=7,\alpha=3,\beta=2$$

Свойства:

$$L\left(\frac{a-x}{\alpha}\right)=1-\frac{|7-x|}{3}=1-\frac{|x-7|}{3}=L\left(\frac{x-a}{\alpha}\right)$$

$$R\left(\frac{a-x}{\beta}\right)=1-\frac{|7-x|}{2}=1-\frac{|x-7|}{2}=R\left(\frac{x-a}{\beta}\right)$$

L(0)=1-0=1, R(0)=1-0=1

$L_A\left(\frac{a-x}{\alpha}\right)=\frac{x-4}{3}$ - неубывающая функция слева от точки x=7 ($L_A^{'}=\left(\frac{x-4}{3}\right)^{'}=\frac{1}{3}>0$).

$R_A\left(\frac{a-x}{\beta}\right)=\frac{9-x}{2}$ - невозрастающая функция справа от точки x=7.

Итак, число А является числом L-R-типа.

По аналогии можно показать, что $B_{LR}=(10,4,5)$.

Арифметические операции над А и В:

1. (7,3,2)+(10,4,5)=(17,7,7)
2. (7,3,2)-(10,4,5)=(-3,8,6)
3. (7,3,2)*(10,4,5)=(7*10,7*4+10*3,7*5+10*2)=(70,58,55)

Задания для самостоятельного выполнения

1. Пусть **а**= «немного больше 3» и ***b***= «примерно 5», причем

$$A = \int_{x\in(3;6]} \frac{6-x}{3}/x,\ B = \int_{x\in[3;5]} \frac{x-3}{2}/x + \int_{x\in(5;7]} \frac{7-x}{2}/x.$$

Разложить нечеткие числа ***a*** и ***b*** по множествам α-уровня, если α∈{0;0.2;0.4;0.6;0.8;1}. Построить график функций принадлежности этих чисел, используя полученные разложения. Записать функции принадлежности и построить их графики для чисел ***a+b***, ***a-b***, ***a*b***, ***a:b***.

2. Доказать, что нечеткие числа ***a*** и ***b*** являются числами (L-R)-типа, если

$$A = \int_{x\in[0;4]} \frac{x}{4}/x + \int_{x\in(4;6]} \frac{6-x}{2}/x,\ B = \int_{x\in[3;5]} \frac{x-3}{2}/x + \int_{x\in(5;10]} \frac{10-x}{5}/x.$$

Выполнить над ***a*** и ***b*** все арифметические операции.

3. Множество ***U***=[-1;1] является носителем нечеткого множества $A = \int_U \frac{4-x}{8}/x$. Множество ***U*** отображается во множество ***V***=[0;1].

Применяя принцип обобщения, найдите образы следующих нечетких множеств:

(1) $A_1 = 1 - A^2$

(2) $A_2 = 2^{|A|-1}$

(3) $A_3 = \mathbf{sin}\frac{\pi|A|}{2}$

Постройте графики функций принадлежности множеств A_1, A_2, A_3.

Подписано в печать 3.09.2018г.
Формат 60x84/16 Бумага офсетная Печать ризографическая
Усл.-печ. л.3 Тираж 50 экз
Заказ 323
Издательско-полиграфический центр
Набережночелнинского института «Казанского (Приволжского) федерального университета»

423810, Набережные Челны, проспект Мира, 68/19
Тел. / факс (8552) 39-65-99 e-mail: ic-nchi-kpfu@mail.ru