С. Р. НАСЫРОВ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ РАЗВЕТВЛЕННЫХ НАКРЫТИЙ РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

КАЗАНЬ
ИЗДАТЕЛЬСТВО «МАГАРИФ»
2008

УДК 517.5(075.8)
ББК 22.1я73
Н31

Научный редактор
доктор физико-математических наук, профессор *Ф. Г. Авхадиев*

Насыров С. Р.

Н31 Геометрические проблемы теории разветвленных накрытий римановых поверхностей / С. Р. Насыров. – Казань: Магариф, 2008. – 276 с.: ил.

ISBN 978-5-7761-1873-9

Монография посвящена изучению геометрических и топологических аспектов теории разветвленных накрытий поверхностей. Основное внимание уделяется вопросам построения римановых поверхностей с краем по заданной проекции границы (задача Левнера-Хопфа), изучению сходимости к ядру по Каратеодори римановых поверхностей.

Книга предназначена для научных работников, аспирантов и студентов, специализирующихся в области теории функций комплексного переменного.

ISBN 978-5-7761-1873-9

Моей матери и первому учителю —
Нужиной Тамаре Семеновне с благодарностью

ВВЕДЕНИЕ

Эта книга посвящена систематическому исследованию следующих двух актуальных направлений в теории римановых поверхностей, разветвленно накрывающих заданную риманову поверхность:

I) Римановы поверхности, ограниченные кривыми. Получение необходимых и достаточных условий того, что заданные кривые ограничивают некоторую риманову поверхность.

II) Сходимость римановых поверхностей к ядру в смысле Каратеодори и связанная с ней сходимость мероморфных функций.

Римановы поверхности, возникнув первоначально как естественная область определения аналитических функций, многозначных в плоских областях (см. [83]), быстро превратились в один из мощнейших инструментов теории функций (см., напр., [30], [34], [36], [88], [90], [98], [104], [126]). В теории римановых поверхностей лежат истоки многих фундаментальных направлений математики: анализа, топологии, алгебры, алгебраической топологии, алгебраической геометрии и др. (см., напр., [11], [25], [29], [47], [64], [97], [102], [203]).

С работы Г. Вейля [205] началось изучение абстрактных римановых поверхностей — одномерных комплексных многообразий — и существенная доля современных публикаций по данной тематике посвящена их исследованию. Тем не менее представление о римановой поверхности как о разветвленном накрытии сферы или в более общем случае другой абстрактной римановой поверхности N, не теряет своей актуальности. Это связано в первую очередь с тем, что большинство задач на плоскости, в которых возникают проблемы с многозначностью аналитических функций, естественно формулируется и решается с использованием разветвленных накрытий. В качестве примера укажем на применение римановых поверхностей в теории распределений значений мероморфных функций [31]–[34], в краевых задачах [62], [67], в теории алгебраических функций [37], [40], [41], [86], в экстремальных задачах теории функций [16]. Большой интерес представляет исследование «внутренних» проблем теории разветвленных накрытий, таких, например, как проблемы Гурвица о существовании и числе различных разветвленных накрытий с заданным типом ветвления (см., напр., [145], [146], [57]–[60]), проблема определения типа римановой поверхности [27].

Особый интерес для приложений представляют римановы поверхности, ограниченные кривыми. Дело в том, что в процессе решения многих задач механики и физики вводятся вспомогательные области D в плоскостях комплексного потенциала, годографа скорости, функции Жуковского и др. Информация об этих областях представлена, как правило, лишь на границе «физической» области: известно, что соответствующий участок границы во вспомогательной области D должен лежать на заданной прямой, окружности и т. п. В отличие от «физической» области, неоднолистность области D не противоречит физической реализуемости решения задачи (см., напр., [11], [44], [45], [81], [89]), а зачастую является даже необходимым условием для его существования.

В связи с этим возникают следующие задачи:

Задача 1. *Пусть $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$ — кривые, ограничивающие некоторую риманову поверхность (разветвленное накрытие) $\sigma = (M, p)$ над N, где M — некоторая абстрактная риманова поверхность, $p : M \to N$ — внутреннее отображение. Определить соотношения, которым удовлетворяют топологические характеристики σ и N.*

Как правило, эти соотношения обобщают классические принцип аргумента и формулу Римана-Гурвица.

Задача 2. *Для заданных кривых $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$ на N определить, существует ли по крайней мере одна риманова поверхность σ над N, ограниченная этими кривыми. Если существует, то описать все римановы поверхности σ, ограниченные кривыми $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$.*

Формулировка задачи 2 допускает различные уточнения. Например, можно потребовать дополнительно, чтобы искомая риманова поверхность σ:

- имела заданный род ρ;
- имела заданное число листов $n = n(a)$ над некоторой фиксированной точкой a поверхности N (для сферы Римана это, как правило, бесконечно удаленная точка);

- имела и фиксированный род, и заданное число листов n над точкой a.

Можно также задать и проекции точек ветвления римановой поверхности σ на N. В этом случае полученные задачи являются обобщением проблем Гурвица, цитированных выше, для разветвленных накрытий с краем.

Опишем основные исторические этапы в исследовании задач 1 и 2.

1) Первым нетривиальным результатом, по-видимому, следует считать формулу Морса и Гейнса [64], связывающую суммарную разветвленность $V(\sigma)$ римановой поверхности $\sigma = (M, p)$ над $\overline{\mathbb{C}}$ рода $\rho_M = 0$, имеющей ν компонент края, с числом листов σ над бесконечно удаленной точкой и суммарным угловым порядком (или, подругому, индексом Уитни) граничных кривых $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$. Ф. Д. Гахов и Ю. М. Крикунов [29] рассмотрели случай наличия у функции p логарифмических особенностей. В работах [28], [48], [78], [79], [94] исследовались различные обобщения и уточнения принципа аргумента и формулы Римана-Гурвица для поверхностей рода нуль над $\overline{\mathbb{C}}$. Ситуация $\rho_M > 0$, $\rho_N = 0$ при $V(\sigma) = 0$ была рассмотрена Хефлигером [140], а Френсис [131] обобщил его результат на случай $V(\sigma) \geq 0$(когда все точки ветвления внутренние, граничные кривые нормальные, т.е. гладкие с конечным числом трансверсальных самопересечений). В работе Ф. Г. Авхадиева и автора [4] изучены римановы поверхности, ограниченные квази- локально простыми кривыми, т. е. кривыми, которые локально просты за исключением конечного числа точек, в окрестности которых кривая является образом простой кривой при степенном отображении; при этом допускались граничные точки ветвления и наличие у функции p логарифмических особенностей. Наконец, Куайн [187]–[188], Эзелль и Маркс [125], а также Френсис [135] получили соотношения для произвольного рода ρ_N(кривые топологически нормальны, точки ветвления внутренние). Отметим также работы [116], [117], [144], [150], [171].

2) Сначала обсудим ситуацию, когда число листов $n(a)$ не фиксируется. Эффектный результат Морса и Гейнса (см. [64]) утверждает, что всегда существует односвязная риманова поверхность над $\overline{\mathbb{C}}$, ограниченная заданной аналитической кривой. Ф. Г. Авхадиев [5] обобщил его на случай, когда σ имеет произвольный наперед заданный род, граничных кривых несколько и они являются квази локально простыми в $\overline{\mathbb{C}}$.

Изучая интегралы Кристоффеля-Шварца, Пикар [176] поставил вопрос о существовании функции, аналитической в единичном круге и непрерывной в его замыкании, отображающей единичную окружность на заданную ломаную в $\mathbb{C}$. Позднее Левнер и Хопф (см. [133]) сформулировали аналогичную задачу для нормальных кривых. Очевидно, что это, по-существу, есть задача 2 при условиях $\rho_M = 0$, $N = \mathbb{C}$ и $n(\infty) = 0$. Первое решение задачи Левнера-Хопфа было дано Титусом [198], который построил алгоритм, позволяющий за конечное число шагов определить, является ли заданная нормальная кривая границей односвязной римановой поверхности над $\mathbb{C}$. Х. Леви [151] предложил свой алгоритм, менее удачный и эффективный. Развивая подход Титуса, М. Маркс с соавторами изучил случаи кольца ($\nu = 2$, $\rho_M = 0$) [159], тора ($\nu = 1$, $\rho_M = 1$) [162], кривых в $\overline{\mathbb{C}}$ [164]. Другой подход к задаче Левнера-Хопфа основан на использовании так называемых слов Бланка-Маркса, впервые введенных в [108]. С использованием определенных комбинаторных структур, связанных со словами Бланка-Маркса, в [108] получена классификация неразветвленных односвязных накрытий плоскости $\mathbb{C}$ с заданной нормальной границей. М. Маркс [165] назвал эти структуры ассемблиджами и рассмотрел с их помощью разветвленные односвязные накрытия плоскости ([165]), Френсис исследовал случай сферы ($n(\infty) \geq 0$), Тройер [201] изучил поверхности, ограниченные несколькими кривыми, Бейли [106] — неразветвленные накрытия плоскости, когда $\rho_M \geq 0$. В работе Френсиса [134] исследован довольно общий случай, когда $\rho_M \geq 0$, $N = \overline{\mathbb{C}}$, $n(\infty) \geq 0$, $\nu \geq 1$ и граничные кривые топологически нормальны. Его подход основан на изучении перестановок листов римановой поверхности в окрестности точек ветвления, которые можно рассматривать как своеобразное обобщение систем Гурвица, используемых при изучении разветвленных накрытий компактными римановыми поверхностями сферы или другой компактной поверхности (см., напр., [145], [146], [57]–[60]). Отметим, что все точки ветвления в [134] считаются внутренними. Кроме того, в [134] дается описание всех римановых поверхностей над $\overline{\mathbb{C}}$ с заданными граничными кривыми и проекциями точек ветвления на $\overline{\mathbb{C}}$.

Случай $\rho_N \geq 0$ рассматривался Френсисом [135], а также Эзеллем и Марксом [125]. В [135] риманова поверхность N представлялась как разветвленное накрытие сферы $\overline{\mathbb{C}}$, в [125] непосредственно на N строились обобщенные ассемблиджи для кривых $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$. Отметим также работы [110]–[112], [117], [119], [122]–[124], [127]–[133], [138], [147], [155], [160], [161], [163], [166], [169], [182]–[186], [193], [199], [200], [203], [204], в которых изучались вопросы, непосредственно связанные с данной тематикой.

В настоящей работе при достаточно общих предположениях относительно граничных кривых и римановой поверхности N получены необходимые и достаточные условия для существования римановой поверхности, ограниченной заданными кривыми. Результаты формулируются с использованием терминологии теории функций, алгебры, дифференциальной и комбинаторной топологии.

Другой важной проблемой в теории разветвленных накрытий является исследование сходимости к ядру последовательностей римановых поверхностей. Изучая сходящиеся последовательности аналитических функций в единичном круге, Каратеодори [114] заметил, что соответствующие им односвязные римановы поверхности $\{\sigma_m\}$ сходятся в некотором смысле к некоторой римановой поверхности, соответствующей предельной функции, которую он назвал ядром последовательности $\{\sigma_m\}$. При некоторых ограничениях справедливо и обратное утверждение. Л. И. Волковыский [26] рассмотрел сходимость произвольных римановых поверхностей, содержащих фиксированный круг, и установил соответствующую теорему в общем случае. Ю. Ю. Трохимчук в [95] заметил, что, в отличие от однолистного случая, последовательность римановых поверхностей может иметь не одно, а несколько и даже бесконечно много существенно различных ядер и получил критерии единственности ядра в терминах поднятия на риманову поверхность определенного вида кривых. В [96] показано, какие точки нужно присоединять к ядру для того, чтобы предельная функция отображала область равномерной сходимости на это ядро, а также исследованы различные виды сходимости.

В книге вводится и исследуется категория разветвленных накрытий с отмеченной точкой над римановой поверхностью N. На пространстве объектов этой категории определены различные виды сходимости, являющиеся модификациями понятия сходимости к ядру по Каратеодори. Исследован вопрос о введении топологии на этом пространстве, о его компактности и метризуемости.

Список литературы ни в коей мере не претендует на полноту и определен научными интересами автора.

ГЛАВА 1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД РИМАНОВЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ (РАЗВЕТВЛЕННЫМИ НАКРЫТИЯМИ)

§1. Категории отмеченных римановых поверхностей над заданной римановой поверхностью N

Пусть N — некоторая абстрактная риманова поверхность, т. е. связное одномерное комплексное многообразие. *Римановой поверхностью над* N будем называть пару $\sigma = (M, p)$, где M — некоторая абстрактная риманова поверхность, $p : M \to N$ — непостоянное голоморфное отображение, называемое проекцией. Таким образом, риманова поверхность над N есть накрытие N некоторой поверхностью M, вообще говоря, разветвленное и небезграничное (см., напр., [88], [90]). Если из контекста ясно, над какой поверхностью N рассматривается σ, то будем говорить, что σ есть просто риманова поверхность. Чтобы при этом различать разветвленные накрытия от абстрактных римановых поверхностей, при упоминании последних будем употреблять слово «абстрактная».

Заметим, что если отображение M является поверхностью, p является внутренним в смысле Стоилова [90], а N — риманова поверхность, то по известной теореме Стоилова [90] проекция p индуцирует на M структуру римановой поверхности. Поэтому при изучении топологических вопросов теории разветвленных накрытий римановых поверхностей можно рассматривать внутренние отображения поверхностей, «забывая» про комплексную структуру.

Приведем ряд примеров.

Пример 1.1 Пусть функция $w = f(z)$ мероморфна в области $D \subset \overline{\mathbb{C}}$. Тогда пара (D, f) определяет риманову поверхность над $\overline{\mathbb{C}}$, которая называется часто римановой поверхностью обратной функции $z = f^{-1}(w)$. Например, $(\overline{\mathbb{C}}, z^n)$ есть риманова поверхность функции $z = \sqrt[n]{w}$, а $(\mathbb{C}, \exp z)$ — риманова поверхность функции $z = \operatorname{Ln} w$.

Пример 1.2 Пусть в области $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}^2$ задана мероморфная функция $\phi : \Omega \to \overline{\mathbb{C}}$ и аналитическое множество

$$\Gamma = \{(z_1, z_2) \in \overline{\mathbb{C}}^2 | \phi(z_1, z_2) = 0\}$$

связно. Тогда проекции $p_j : \Gamma \to \overline{\mathbb{C}}$, $p_j(z_1, z_2) = z_j$, $j = 1,\ 2$, определяют две римановы поверхности $\sigma_j = (\Gamma, p_j)$, $j = 1,\ 2$, над $\overline{\mathbb{C}}$. Если $\phi(z_1, z_2) = \sum\limits_{k,l} a_{kl} z_1^k z_2^l$ — неприводимый полином, то соотношение $\phi = 0$ задает алгебраическую функцию, которая определена на римановой поверхности σ_1 и отображает ее на риманову поверхность σ_2.

Пример 1.2 является обобщением примера 1.1, последний получается из него, если рассмотреть функцию

$$\phi(z_1, z_2) = f(z_1) - z_2.$$

Опишем процесс построения римановых поверхностей над $\overline{\mathbb{C}}$ из плоских кусков, с помощью которого удобно описывать различные примеры, особенно в случае поверхностей, не подобных однолистным.

Пусть $\{D_i\}_{i=1}^L$, $L \le \infty$ — последовательность жордановых областей в $\overline{\mathbb{C}}$, и для любого $i = 1, \dots, L$ ориентированная граница ∂D_i содержит попарно непересекающиеся жордановы дуги $\{\gamma_i^j\}_{j=1}^{K_i}$, $K_i \le \infty$. Пусть множество $G = \{\gamma_i^j,\ j = 1, \dots, K_i,\ i = 1, \dots, L\}$ разбито на две части G_1 и G_2, не пересекающиеся между собой, и существует биекция $\psi : G_1 \to G_2$, такая, что $\psi(\gamma_i^j) = (\gamma_i^j)^-$ для любой дуги $\gamma_i^j \in G_1$. Пусть $D_i' = D_i \cup \left(\bigcup\limits_{j=1}^{K_i} |\gamma_j^i|\right)$. Отождествим в несвязной сумме $\sqcup_{i=1}^L D_i'$ соответственные точки дуг γ_i^j и $\psi(\gamma_i^j)$. На полученном топологическом пространстве M очевидным образом определяется структура абстрактной римановой поверхности. Пусть $f : \sqcup_{i=1}^L D_i' \to M$ — склеивающее отображение. На M определим проекцию p по формуле $p \circ f|_{D_i'} = \mathrm{id}_{D_i'}$. Назовем пару (M, p) *римановой поверхностью над $\overline{\mathbb{C}}$, склеенной из областей D_i вдоль граничных дуг* γ_i^j по правилу ψ.

Пример 1.3 Пусть

$$D_{2j-1} = \{z \in \mathbb{C} |\ \mathrm{Im}\, z > 0\}, \quad D_{2j} = \{z \in \mathbb{C} |\ \mathrm{Im}\, z < 0\},$$

дуги γ_{2j-1}^1, γ_{2j-1}^2, γ_{2j}^1, γ_{2j}^2 задаются представлениями $t \mapsto t/(1-t)$, $t \mapsto (t-1)/t$, $t \mapsto (1-t)/t$, $t \mapsto t/(t-1)$, $0 < t < 1$, соответственно для любого $i \in \mathbb{Z}$. Пусть $\psi(\gamma_{2j-1}^1) = \gamma_{2j-2}^2$, $\psi(\gamma_{2j-1}^1) = \gamma_{2j}^2$, $j \in \mathbb{Z}$. Тогда риманова поверхность (M, p), склеенная из областей D_i вдоль граничных дуг по правилу ψ, является одной из моделей римановой поверхности функции $z = \operatorname{Ln} w$ (см. пример 1.1).

Отметим, что римановы поверхности $(\mathbb{C}, \exp z)$ и (M, p), построенные в примере 1.3, эквивалентны в следующем смысле: существует гомеоморфизм $h : M \to \mathbb{C}$ такой, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "p"'] & & \mathbb{C} \arrow[dl, "\exp"] \\ & \overline{\mathbb{C}} & \end{tikzcd}$$

Отображение h можно задать формулой

$$h(z) = \ln|z| + \sqrt{-1}\ [\arg z + j\pi], \quad z \in D_{2j} \cup D_{2j+1},$$

где ветвь аргумента выбирается в пределах $(-\pi, \pi)$, а на граничные дуги h продолжается по непрерывности.

Две *римановы поверхности* $\sigma_i = (M_i, p_i)$, $i = 1, 2$, над N называются *эквивалентными,* если существует гомеоморфизм $h : M_1 \to M_2$ такой, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "p_1"'] & & M_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & N & \end{tikzcd}$$

Отметим, что h обязано быть голоморфным. В дальнейшем будет удобно не различать эквивалентные римановы поверхности.

Если $\sigma = (M, p)$ — риманова поверхность над N, $P \in M$, $\zeta = g(Q)$ и $z = \phi(T)$ — локальные параметры в окрестности точек P и $p(P)$, причем $\zeta(P) = z(p(P)) = 0$, то функция $\phi \circ p \circ g^{-1}$ аналитична в окрестности точки P и представима рядом Тейлора

$$\phi \circ p \circ g^{-1}(\zeta) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \zeta^n, \quad \text{где } k \in \mathbb{N} \text{ и } \ a_k \neq 0.$$

Число k, как известно, не зависит от выбора локальных параметров. Назовем число $(k-1)$ *порядком ветвления* точки P римановой поверхности σ и обозначим его через $\mathrm{ord}(P, \sigma)$. Если $k = 1$, то будем называть P *простой точкой* σ, в противном случае — *точкой ветвления порядка* $(k - 1)$. (Иногда за порядок ветвления принимают величину k. В литературе встречается также такая терминология: точку P называют точкой разветвления римановой поверхности σ, а ее проекцию — точкой ветвления.)

Риманова поверхность с отмеченной точкой или *пунктированная риманова поверхность* (над N) есть тройка $\sigma = (M, P, p)$, где (M, p) — риманова поверхность над N, P — некоторая фиксированная точка из M.

Римановы поверхности с отмеченными точками образуют категорию $\mathcal{RP}_1(N)$, морфизмами между объектами $\sigma_1 = (M_1, P_1, p_1)$ и $\sigma_2 = (M_2, P_2, p_2)$ в которой служат голоморфные отображения $j : M_1 \to M_2$ такие, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
(M_1, P_1) \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "p_1"'] & & (M_2, P_2) \arrow[dl, "p_2"] \\
& (N, Q) &
\end{tikzcd}$$

$Q = p_1(P_1) = p_2(P_2)$. Если j инъективно, то будем писать $j : \sigma_1 \hookrightarrow \sigma_2$ и говорить, что σ_1 *вложена в* σ_2. Если существует некоторый морфизм $j : \sigma_1 \hookrightarrow \sigma_2$, то будем писать также $\sigma_1 \hookrightarrow \sigma_2$. Если, кроме того, $j(M_1) \subset\subset M_2$, то пишем $j : \sigma_1 \subset \hookrightarrow \sigma_2$ или просто $\sigma_1 \subset \hookrightarrow \sigma_2$ и говорим, что σ_1 *компактно вложена в* σ_2.

Если ограничиться только инъективными морфизмами, то получим подкатегорию $\mathcal{RP}(N)$ категории $\mathcal{RP}_1(N)$. Нетрудно видеть, что объекты σ_1 и σ_2 категории $\mathcal{RP}(N)$ изоморфны тогда и только тогда, когда σ_1 и σ_2 эквивалентны, т. е. существует морфизм $j : \sigma_1 \hookrightarrow \sigma_2$, который гомеоморфно отображает M_1 на M_2. Как и выше, будем отождествлять эквивалентные (изоморфные) объекты в $\mathcal{RP}(N)$. Таким образом, объект категории $\mathcal{RP}(N)$ есть класс эквивалентности $[\sigma]$ изоморфных между собой троек $\sigma = (M, P, p)$. Однако часто мы не будем делать различия между классом эквивалентности $[\sigma]$ и его конкретным представителем σ. Если же такое различие необходимо будет сделать, то будем говорить, что σ является *реализацией* $[\sigma]$.

В случае $N = \overline{\mathbb{C}}$ категории $\mathcal{RP}_1(N)$ и $\mathcal{RP}(N)$ будем обозначать через $\mathcal{RP}_1$ и $\mathcal{RP}$ соответственно.

Пусть N — произвольная абстрактная риманова поверхность и $g : N \to \overline{\mathbb{C}}$ — некоторая непостоянная голоморфная функция. Тогда g индуцирует вложение категорий $\mathcal{RP}_1(N)$ и $\mathcal{RP}(N)$ в $\mathcal{RP}_1$ и $\mathcal{RP}$ по правилу:

$$\sigma = (M, P, p) \mapsto \sigma_g = (M, P, g \circ p),$$

морфизмы остаются без изменений. В силу этого, многие утверждения, справедливые для $N = \overline{\mathbb{C}}$, остаются в силе и для произвольных N. Отметим, что для любой точки $T \in M$ имеем

$$\mathrm{ord}(T, \sigma_g) + 1 = [\mathrm{ord}(T, \sigma) + 1][\mathrm{ord}(p(T), \tau) + 1], \text{ где } \tau = (N, g).$$

Пример 1.4 Пусть $E = \{\zeta : |\zeta| < 1\}$. *Односвязным n-листным кругом над* $\overline{\mathbb{C}}$ с центром в точке $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ радиуса ε с единственной точкой ветвления в центре, если $n > 1$, назовем риманову поверхность $K_n(z_0, \varepsilon) = (E, 0, f)$, где

$$f(\zeta) = \begin{cases} (z(\zeta) + z_0)/(1 - z(\zeta)\overline{z}_0), & \text{если } z_0 \neq \infty, \\ 1/z(\zeta), & \text{если } z_0 = \infty, \end{cases} \tag{1.1}$$

$z(\zeta) = \mathrm{tg}\,\varepsilon \cdot \zeta^n$. Всюду ниже, как правило, будем использовать для $K_n(z_0, \varepsilon)$ реализацию, описанную в этом примере.

Назовем риманову поверхность K над N *обобщенным n-листным кругом* с центром в точке T (и единственной точкой ветвления в центре, если $n > 1$), если существует n-листный круг $K_n(z_0, \varepsilon) = (E, 0, f)$ над $\overline{\mathbb{C}}$ и инъективное голоморфное отображение ϕ круга $\{z \in \overline{\mathbb{C}} | d_{\overline{\mathbb{C}}}(z, z_0) < \varepsilon\}$ в окрестность точки T такие, что $T = \phi(z_0)$ и $K = (E, 0, \phi \circ f)$. Если N снабжена метрикой, то можно говорить о n-листных кругах радиуса ε, если $\phi \circ f(E)$ — круг радиуса ε на поверхности N.

Следующая лемма показывает, что любая риманова поверхность над N устроена локально как n-листный круг.

Лемма 1.1 *Пусть $\sigma = (M, P, p) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{RP})(N))$, $p(P) = T$ и порядок точки P в σ равен $(n-1)$. Тогда существует обобщенный n-листный круг K с единственной точкой ветвления в центре,* *если* $n > 1$, *такой, что* $K \hookrightarrow \sigma$. *В частности, если* $N = \overline{\mathbb{C}}$ *и* $T = z_0$, *то существует такое* $\varepsilon > 0$, *что* $K_n(z_0, \varepsilon) \hookrightarrow \sigma$.

Это утверждение геометрически вполне очевидно, однако приведем формальное доказательство. Очевидно, что можно ограничиться случаем $N = \overline{\mathbb{C}}$. Достаточность следует из того, что морфизм $j : K_n(z_0, \varepsilon) \hookrightarrow \sigma$ определяет локальный параметр в окрестности точки P и $p \circ j = f$. Необходимость следует из того, что в окрестности точки P для любого локального параметра $\zeta = g(Q)$ функция $p \circ g^{-1}$ имеет вид

$$p \circ g^{-1}(\zeta) = \begin{cases} z_0 + (\zeta - \zeta_0)^n \phi(\zeta), & z_0 \neq \infty, \\ (\zeta - \zeta_0)^{-n} \phi(\zeta), & z_0 = \infty, \end{cases}$$

где функция ϕ регулярна и не обращается в нуль в окрестности точки $\zeta_0 = g(P)$. Тогда в малой окрестности V точки ζ_0 определена регулярная ветвь функции

$$\psi(\zeta) = \begin{cases} \left[\phi(\zeta)/(1 + |z_0|^2 + \overline{z}_0(\zeta - \zeta_0)^n \phi(\zeta)\right]^{1/n}, & z_0 \neq \infty, \\ [\phi(\zeta)]^{-1/n}, & z_0 = \infty. \end{cases}$$

Функция $\widetilde{\psi}(\zeta) = (\zeta - \zeta_0)\psi(\zeta)$ однолистна в некоторой окрестности $\widetilde{V}$ точки ζ_0, $\widetilde{V} \subset V$, т. к. $\widetilde{\psi}'(\zeta_0) = \psi(\zeta_0) \neq 0$. Значит, образ $\widetilde{\psi}(\widetilde{V})$ содержит некоторый евклидов круг $\{w \in \mathbb{C} : |w| < r\}$, $r > 0$. Пусть $\varepsilon = \operatorname{arctg}(r^n)$. Тогда функция $j : E \to M$, определенная формулой $j(w) = g^{-1} \circ \widetilde{\psi}^{-1}(rw)$, инъективна и является морфизмом $j : K_n(z_0, \varepsilon) \hookrightarrow \sigma$.

Следствие 1.1 *Если* $j : \sigma_1 \hookrightarrow \sigma_2$ *и* Q — *некоторая точка из* σ_1, *то* $\operatorname{ord}(Q, \sigma_1) = \operatorname{ord}(Q, \sigma_2)$.

Следствие 1.2 *Множество точек ветвления римановой поверхности* σ *над* N *дискретно.*

Пусть $\sigma = (M, P, p)$ — риманова поверхность над N и S — некоторая точка M. Тогда обозначим через $\sigma(S)$ риманову поверхность (M, S, p), получающуюся из σ изменением отмеченной точки. Пусть

$V(\sigma) = \{Q \in M \,|\, \mathrm{ord}(Q,\sigma) \neq 0\}$ — множество точек ветвления поверхности σ, $\check{M}(\sigma) = M \backslash V(\sigma)$. Обозначим через $\check{\sigma}(S)$ риманову поверхность $\left(\check{M}(\sigma), S, p|_{\check{M}(\sigma)}\right)$, где S — некоторая точка из $\check{M}(\sigma)$. Если $P \notin V(\sigma)$, то вместо $\check{\sigma}(P)$ будем писать просто $\check{\sigma}$.

Теперь установим часто используемое в дальнейшем свойство.

Лемма 1.2 *Если $\sigma_i = (M_i, P_i, p_i) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{RP})(N)$, $i = 1, 2$, и порядок $\mathrm{ord}(P_1, \sigma_1) = k - 1$, то существует не более k различных морфизмов из σ_1 в σ_2. В частности, при $k = 1$, если $\sigma_1 \hookrightarrow \sigma_2$, то существует единственный морфизм $j : \sigma_1 \hookrightarrow \sigma_2$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно рассмотреть случай $N = \overline{\mathbb{C}}$.

a) Пусть сначала $n = 1$ и существуют два морфизма $g, h : \sigma_1 \hookrightarrow \sigma_2$. Рассмотрим множество $X = \{P \in \check{M}_1(\sigma_1) \,|\, g(P) = h(P)\}$. Оно непусто, т. к. $P_1 \in X$ и замкнуто в $\check{M}_1(\sigma_1)$ в силу непрерывности функций g и h. Докажем, что X открыто.

Если $P_0 \in X$, то в силу леммы 1.1 существует некоторый морфизм $j : K_1(z_0, \varepsilon) \hookrightarrow \sigma_1(P_0)$, где $z_0 = p_1(P_0)$. Значит, $p_1 \circ j = f$ — отображение, которое определено формулой (1.1). Поскольку число $n = \mathrm{ord}(P_0, \sigma_1) = 1$, отображение f инъективно, поэтому p_1 инъективно на $F = j(E)$. Так как j, g, h — голоморфные отображения, то они открыты. Отсюда следует, что множество $V = g(F) \cap h(F)$ открыто. В силу непрерывности функций g и h открыто также множество $U = g^{-1}(V) \cap h^{-1}(V)$, причем U является окрестностью точки $P_0' = g(P_0) = h(P_0)$ и $f(U) \subset V$, $g(U) \subset V$. Так как $g, h : \sigma_1 \hookrightarrow \sigma_2$, то $p_1 = p_2 \circ f = p_2 \circ g$. Поскольку p_1 инъективно на F, то p_2 инъективно на $g(F)$ и $h(F)$, а, следовательно, и на V. Из равенства $p_2|_V \circ g|_U = p_2|_V \circ h|_U$ следует, что $g|_U = h|_U$. Поэтому $U \subset X$, т. е. X открыто.

Так как $V(\sigma_1)$ дискретно в M_1 (следствие 1.2), то $\check{M}_1(\sigma_1)$ плотно в M_1 и связно. Поскольку X непусто и одновременно открыто и замкнуто в $\check{M}_1(\sigma_1)$, то $X = \check{M}_1(\sigma_1)$ (см., напр., [13]). Пусть теперь $Y = \{P \in M_1 | g(P) = h(P)\}$. Так как f и g непрерывны, множество Y замкнуто в M_1. Имеем $M_1 = \overline{X} \subset \overline{Y} \subset M_1$, откуда следует, что $Y = M_1$, т. е. $f = g$.

b) Пусть теперь $k = n > 1$. В силу леммы 2.1 существует морфизм $j : K_n(z_1, \varepsilon) \hookrightarrow \sigma_1$, где $z_1 = p(P_1)$. Если $h, g : \sigma_1 \hookrightarrow \sigma_2$ — два морфизма, то в силу открытости голоморфных отображений $h \circ j$ и $g \circ j$ множество $W = h \circ j(E) \cap g \circ j(E)$ открыто. Пусть $Z = (h \circ j)^{-1}(W)$. Тогда на Z определена голоморфная функция $\psi = j^{-1} \circ g^{-1} \circ h \circ j|_Z : Z \to E$. Так как $p_2 \circ h \circ j = f = p_2 \circ g \circ j$, то $\psi(\zeta) = j^{-1} \circ g^{-1} \circ h \circ j(\zeta) \in \in j^{-1} \circ g^{-1} \circ (p_2|_W)^{-1} (\{p_2 \circ h \circ j(\zeta)\}) = f^{-1}(\{f(\zeta)\}) = \{\exp(2\pi k\sqrt{-1}/n)\zeta, k = 1, \ldots, n\}$, поскольку в силу (1.1) $f(\zeta_1) = f(\zeta_2) \Leftrightarrow \zeta_1^n = \zeta_2^n$. Значит, $\psi(\zeta) = \exp(2\pi ki/n)\zeta$, где k — некоторое число, $1 \le k \le n$. Так как k непрерывно зависит от ζ и принимает значения из множества натуральных чисел, то k фактически не зависит от ζ. Итак, $g \circ j(\zeta) = h \circ j(\exp(2\pi ki/n)\zeta)$. Отсюда, в частности, следует что $Z = E$.

Предположим теперь, что существует $(n+1)$ попарно различных морфизмов $g_l : \sigma_1 \hookrightarrow \sigma_2$, $l = 1, \ldots, n+1$. Фиксируем точку $\zeta \in E \setminus \{0\}$. Пусть $T_k = j(\exp(2\pi k\sqrt{-1}/n)\zeta)$, $k = 1, \ldots, n$. Как показано выше, для каждого l можно подобрать такое $k = k(l)$, что $g_l(T_1) = h(T_{k(l)})$, где h — некоторый фиксированный морфизм, $h : \sigma_1 \hookrightarrow \sigma_2$. Поскольку $1 \le k(l) \le n$, среди индексов существуют по крайней мере два таких, что $k(i) = k(m)$, $i \ne m$. Отсюда следует, что $S_1 = g_i(T_1) = g_m(T_1)$. Значит g_i, $g_m : \sigma_1(T_1) \hookrightarrow \sigma_2(S_1)$. Поскольку $\mathrm{ord}(T_1, \sigma_1) = 0$, в силу доказанного в п. а) выше $g_i = g_m$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Следствие 1.3 *Если $\sigma_i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{RP})(N)$, $i = 1, 2, 3$, и морфизмы $\phi : \sigma_1 \hookrightarrow \sigma_2$, $f_i : \sigma_2 \hookrightarrow \sigma_3$, $i = 1, 2$, причем $f_1 \circ \phi = f_2 \circ \phi$, то $f_1 = f_2$.*

Доказательство. Пусть $S_1 \in M_1$, $\mathrm{ord}(S_1, \sigma_1) = 0$, $S_2 = \phi(S_1)$, $S_3 = = f_1 \circ \phi(S_1) = f_2 \circ \phi(S_1)$. Тогда $\mathrm{ord}(S_2, \sigma_2) = 0$ и $f_i : \sigma_2(S_2) \hookrightarrow \sigma_3(S_3)$. Поэтому в силу леммы 1.2 $f_1 = f_2$.

Пример 1.5 Пусть

$$M_1 = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta - 1| < 2\}, \quad M_2 = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta - 1| < 4\},$$

$\sigma_i = (M_i, 0, \zeta^n)$, $i = 1, 2$. Тогда $n - 1 = \mathrm{ord}(0, \sigma_1)$ и существует n различных морфизмов $g_l : \sigma_1 \hookrightarrow \sigma_2$, $l = 1, \ldots, n$, определенных по формуле $g_l(\zeta) = \exp(2\pi l\sqrt{-1}/n)\zeta$, $l = 1, \ldots, n$.

В дальнейшем нам будет удобно пополнить категорию $\mathcal{RP}(N)$ до категории $\overline{\mathcal{RP}}(N)$ объектами (X, S, q), где $X = \{S\}$ — одноточечное множество, $q : X \to N$ некоторое отображение. Морфизмы в $\overline{\mathcal{RP}}(N)$ определяются очевидным образом. Объекты вида $(\{S\}, S, q)$ будем называть вырожденными или точками и отождествлять их с точками $T = q(S) \in N$. Если $x = (X, S, p)$ — вырожденный объект в $\overline{\mathcal{RP}}(N)$, то морфизм $j : x \hookrightarrow \sigma = (M, P, p)$ существует тогда и только тогда, когда $q(S) = p(P)$. Он имеет вид $j : X \to M$, $j(S) = P$. Если $x \hookrightarrow \sigma$, то, конечно, $x \subset \hookrightarrow \sigma$. Не существует морфизмов из невырожденных объектов в $\overline{\mathcal{RP}}(N)$ в вырожденные и между различными точками N. Для любой точки $T \in \overline{\mathcal{RP}}(N)$ имеем $T \hookrightarrow T$, $T \subset \hookrightarrow T$.

Теперь определим операции объединения и пересечения семейства римановых поверхностей $\sigma_\alpha = (M_\alpha, P_\alpha, p_\alpha)$, $\alpha \in A$, над N. Пусть для любого $\alpha \in A$ задан морфизм $j_\alpha : \sigma_\alpha \hookrightarrow \sigma = (M, P, p)$. *Объединением римановых поверхностей* $\sigma_\alpha = (M_\alpha, P_\alpha, p_\alpha)$, $\alpha \in A$, относительно морфизмов j_α назовем риманову поверхность над N $\sigma' = (M', P, p|_{M'})$, где $M' = \cup_{\alpha \in A} j_\alpha(M_\alpha)$. Если $\operatorname{ord}(P, \sigma) = 0$, то в силу леммы 1.2 риманова поверхность σ' зависит только от σ_α, $\alpha \in A$, и σ, поскольку морфизмы j_α определяются единственным образом. Будем называть в этом случае σ' объединением римановых поверхностей σ_α, $\alpha \in A$, относительно σ и писать $\sigma' = \cup_{\alpha \in A} \sigma_\alpha$ $(\operatorname{rel} \sigma)$. В случае $A = \{1, 2\}$ пишем $\sigma' = \sigma_1 \cup \sigma_2$ $(\operatorname{rel} \sigma)$. Отметим, что объединение римановых поверхностей зависит, вообще говоря, от объемлющей поверхности σ.

Пример 1.6 Пусть

$$M_1 = \{r\, e^{i\phi} \in \mathbb{C} \mid -\pi/4 < \phi < 5\pi/4\},$$

$$M_2 = \{r\, e^{i\phi} \in \mathbb{C} \mid -5\pi/4 < \phi < \pi/4\},$$

$P_1 = P_2 = 1$, $\sigma_i = (M_i, P_i, p_i)$, где $p_i = \mathrm{id}_{M_i} : M_i \to \overline{\mathbb{C}}$ — отображение, тождественное на M_i, $i = 1, 2$. Пусть $\sigma^{(1)} = (\overline{\mathbb{C}}, 1, \mathrm{id}_{\overline{\mathbb{C}}})$, $\sigma^{(2)} = (\overline{\mathbb{C}}, 1, z^2)$. Тогда $\sigma_1 \cup \sigma_2$ $(\operatorname{rel} \sigma^{(1)}) = (\mathbb{C}^*, 1, \mathrm{id}_{\overline{\mathbb{C}}})$, $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \backslash \{0\}$, а $\sigma_1 \cup \sigma_2$ $(\operatorname{rel} \sigma^{(2)}) = (\Pi, 1, z^{5/2})$, $\Pi = \{z \in \mathbb{C} |\operatorname{Re} z > 0\}$.

Очевидна справедливость следующего утверждения.

Предложение 1.1 *Пусть* $\sigma_\alpha = (M_\alpha, P_\alpha, p_\alpha)$, $\alpha \in A$, *— семейство римановых поверхностей над* N, $\operatorname{ord}(P_\alpha, \sigma_\alpha) = 0$, $\alpha \in A$, *и заданы два семейства морфизмов* $f_\alpha^{(i)} : \sigma_\alpha \hookrightarrow \sigma^{(i)}$, $i = 1, 2$. *Объединения* $\cup_{\alpha \in A} \sigma_\alpha (\operatorname{rel}\ \sigma^{(i)})$, $i = 1, 2$ *совпадают между собой тогда и только тогда, когда для любых* $\alpha, \beta \in A$ *и точек* $S_\alpha \in M_\alpha$, $S_\beta \in M_\beta$ *имеем* $f_\alpha^{(1)}(S_\alpha) = f_\beta^{(1)}(S_\beta) \Longleftrightarrow f_\alpha^{(2)}(S_\alpha) = f_\beta^{(2)}(S_\beta)$.

Аналогично объединению можно определить *пересечение семейства римановых поверхностей* σ_α, $\alpha \in A$, относительно морфизмов $j_\alpha : \sigma_\alpha \hookrightarrow \sigma$, $\alpha \in$A. Если пересечение $\cap_{\alpha\in A} j_\alpha(M_\alpha) = Q$ имеет непустую внутренность, содержащую точку P, то под пересечением семейства σ_α, $\alpha \in A$, относительно морфизмов j_α будем понимать риманову поверхность $\tau = (Q', P, p|_{Q'})$, где Q' — компонента связности внутренности множества Q, содержащая точку P. В противном случае пересечение есть точка $T = p(P) \in \mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})(N)$. Опять-таки, если $\mathrm{ord}(P, \sigma) = 0$, то пересечение зависит разве только от объемлющей римановой поверхности σ. В этом случае будем писать $\tau = \cap_{\alpha\in A}\sigma_\alpha$ $(\mathrm{rel}\,\sigma)$. Если $A = \{1, 2\}$, то пишем $\tau = \sigma_1 \cap \sigma_2$ $(\mathrm{rel}\,\sigma)$.

Интересно, что на самом деле пересечение не зависит от поверхности σ.

Предложение 1.2 *Если* $\mathrm{ord}(P_\alpha, \sigma_\alpha) = 0$, $\alpha \in A$, σ' *и* σ'' — *две римановы поверхности, и* $x^{(1)} = \cap_{\alpha\in A}\sigma_\alpha$ $(\mathrm{rel}\,\sigma')$, $x^{(2)} = \cap_{\alpha\in A}\sigma_\alpha$ $(\mathrm{rel}\,\sigma'')$, *то* $x^{(1)} = x^{(2)}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x^{(i)} = (M^{(i)}, P^{(i)}, p^{(i)})$, $i = 1, 2$, и морфизмы $j'_\alpha : \sigma_\alpha \hookrightarrow \sigma'$, $j''_\alpha : \sigma_\alpha \hookrightarrow \sigma''$. Тогда

$$k_\alpha = (j'_\alpha)^{-1}|_{M^{(1)}} : x^{(1)} \hookrightarrow \sigma_\alpha \quad \text{и} \quad j''_\alpha \circ k_\alpha : x^{(1)} \hookrightarrow \sigma''.$$

Так как $\mathrm{ord}(P^{(1)}, x^{(1)}) = \mathrm{ord}(P_\alpha, \sigma_\alpha) = 0$, то по лемме 1.2 морфизм $g = j''_\alpha \circ k_\alpha$ не зависит от α. Тогда $g(M^{(1)}) = j''_\alpha \circ k_\alpha(M^{(1)}) \subset j''_\alpha(M_\alpha)$, $\alpha \in A$. Поэтому $g(M^{(1)}) \hookrightarrow \cap_{\alpha\in A} j''_\alpha(M_\alpha)$, а так как $g(M^{(1)})$ открыто, связно и содержит точку $P^{(2)}$, то $g(M^{(1)}) \subset\subset M^{(2)}$. Следовательно, $g : x^{(1)} \hookrightarrow x^{(2)}$. Поскольку в этих рассуждениях можно поменять местами $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$, то и $x^{(2)} \hookrightarrow x^{(1)}$. Значит, $x^{(1)} = x^{(2)}$. Аналогичные рассуждения проходят и в случае, когда $x^{(i)}$ вырождены. Предложение 1.2 доказано.

В силу предложения 1.2, если $\mathrm{ord}(P_\alpha, \sigma_\alpha) = 0$, то в обозначении пересечения $\cap_{\alpha\in A}\sigma_\alpha$ можно не указывать объемлющей поверхности σ. Однако пересечение семейства $\sigma_\alpha = (M_\alpha, P_\alpha, p_\alpha)$, $\alpha \in A$, даже если $\mathrm{ord}(P_\alpha, \sigma_\alpha) = 0$, $\alpha \in A$, и $p_\alpha(P_\alpha)$ не зависит от α, может не существовать.

Пример 1.7 Не существует пересечения однолистного круга $\sigma_1 = (E, 1/4, \zeta)$ и двулистного круга $\sigma_2 = (E, 1/2, \zeta^2)$ над $\overline{\mathbb{C}}$. Действительно, иначе существовала бы риманова поверхность $\sigma = (M, P, p)$ и морфизмы $j_1 : \sigma_1 \hookrightarrow \sigma$, $j_2 : \sigma_2 \hookrightarrow \sigma$. Если γ — кривая в $\overline{\mathbb{C}}$ с представлением $z(t) = (1-t)/4$, $t \in [0,1]$, то ее поднятие γ_1 на σ_1 из точки $1/4$ имеет то же представление $z_1(t) = z(t)$, $t \in [0,1]$, а на σ_2 — представление $z_2(t) = \sqrt{1-t}/2$, $t \in [0,1]$. Так как σ_1 однолистна и $j_1 : \sigma_1 \hookrightarrow \sigma$, то $j_1(z_1(t))$ — представление кривой, которая является поднятием на σ кривой γ, причем такое поднятие единственно. Но $j_2(z_2(t))$ также определяет поднятие γ на σ. Поэтому $j_1(z_1(0)) = j_2(z_2(0))$, т. е. $j_1(0) = j_2(0) = S \in M$. В силу следствия 1.1 $0 = \mathrm{ord}(0, \sigma_1) = \mathrm{ord}(0, \sigma_2) = 1$ — противоречие.

§2. Существование пересечений и объединений римановых поверхностей

Ниже в теоремах 2.1 и 2.2 мы установим необходимое и достаточное условие существования пересечения двух римановых поверхностей.

Введем еще одну операцию — *операцию склеивания римановых поверхностей.* Пусть опять $\sigma_\alpha = (M_\alpha, P_\alpha, p_\alpha)$, $\alpha \in A$, — семейство римановых поверхностей над N и $j_\alpha : \sigma_0 \hookrightarrow \sigma_\alpha$, $\alpha \in A$, — семейство морфизмов, где $\sigma_0 = (M_0, P_0, p_0)$ — некоторая фиксированная риманова поверхность над N. Предположим, что при этом выполнено условие, которое назовем *условием граничной склейки:* если для некоторых α, $\beta \in A$, $\alpha \neq \beta$, и последовательности $\{S_n\}$ из M_0 последовательности $j_\alpha(S_n)$ и $j_\beta(S_n)$ сходятся в M_α и M_β соответственно, то последовательность $\{S_n\}$ сходится в M_0.

Точки $T_\alpha \in M_\alpha$ и $T_\beta \in M_\beta$ в несвязной сумме $\sqcup_{\alpha\in A} M_\alpha$ назовем эквивалентными, если для некоторой точки $T_0 \in M_0$ имеем $j_\alpha(T_0) = T_\alpha$, $j_\beta(T_0) = T_\beta$. В факторпространстве $M = \sqcup_{\alpha\in A} M_\alpha / \sim$ несвязной суммы по этому отношению эквивалентности $\sim$ введем фактортопологию. Покажем, что на M можно ввести структуру многообразия.

Пусть $h : \sqcup_{\alpha\in A} M_\alpha \to M$ — факторизующее отображение, $h_\alpha = h|_{M_\alpha}$. Для любого открытого U_α из M_α множество $V_\alpha = h_\alpha(U_\alpha)$ открыто, т. е. h_α открыто для любого $\alpha \in$A. Действительно, для любого β множество $h_\beta^{-1}(V_\alpha) = j_\beta \circ j_\alpha^{-1}(U_\alpha)$, поэтому $h_\beta^{-1}(V_\alpha)$ открыто в силу открытости и непрерывности голоморфных отображений j_α и j_β. Это означает, что j_α открыто. Так как j_α инъективно и непрерывно, то $h_\alpha : M_\alpha \to h_\alpha(M_\alpha)$ — гомеоморфизм. Отсюда, в частности, следует, что любая точка из $M = \cup_{\alpha\in A} h_\alpha(M_\alpha)$ обладает окрестностью, гомеоморфной кругу.

Докажем, что M — хаусдорфово. Так как все $h_\alpha(M_\alpha)$ хаусдорфовы, достаточно установить существование непересекающихся окрестностей у точек S' и S'', которые не лежат одновременно ни в одном из множеств $h_\alpha(M_\alpha)$, $\alpha \in$A. Это может быть только в том случае, когда для некоторых α и β из множества M справедливы условия $S' \in h_\alpha(M_\alpha \backslash j_\alpha(M_0))$, $S'' \in h_\beta(M_\beta \backslash j_\beta(M_0))$. Пусть $S_\alpha = h_\alpha^{-1}(S')$, $S_\beta = h_\beta^{-1}(S'')$. Выберем счетные фундаментальные системы окрестностей $\{U_{\alpha n}\}$ и $\{V_{\alpha n}\}$ точек S_α и S_β в M_α и M_β соответственно. Тогда в силу открытости отображений h_α и h_β множества $U_n = h_\alpha(U_{\alpha n})$ и $V_n = h_\beta(V_{\beta n})$ открыты для любого $n \geq 1$. Если для любого n пересечение $U_n \cap V_n$ непусто, то существуют точки $T_{\alpha n} \in U_{\alpha n}$ и $T_{\beta n} \in U_{\beta n}$, такие, что $h(T_{\alpha n}) = h(T_{\beta n})$, поэтому $T_{\alpha n} = j_\alpha(T_n)$, $T_{\beta n} = j_\beta(T_n)$ для некоторой последовательности $\{T_n\}$ в M_0. Поскольку $T_{\alpha n} \to S_\alpha$, $T_{\beta n} \to S_\beta$ при $n \to \infty$, то в силу условия граничной склейки $T_n \to S_0$, где S_0 — некоторая точка из M_0. Но тогда $S_\alpha = \lim_{n\to\infty} j_\alpha(T_n) = j_\alpha(S_0) \in j_\alpha(M_0)$, что противоречит условию $S' = h_\alpha(S_\alpha) \in h_\alpha(M_\alpha \backslash j_\alpha(M_0)) = h_\alpha(M_\alpha) \backslash h_\alpha(j_\alpha(M_0))$.

Нетрудно видеть, что на M определяется голоморфное отображение $p : M \to N$ такое, что $p \circ h|_{M_\alpha} = p_\alpha$. Пусть точка $P \in M$ соответствует точкам P_α при факторизации. Тогда $\sigma = (M, p, P)$ назовем *римановой поверхностью, получаемой в результате склеивания римановых поверхностей σ_α, относительно морфизмов j_α, $\alpha \in A$.*

Определим понятие прокола римановой поверхности. Обозначим через $\mathcal{K}_n(T)$ множество обобщенных n-листных кругов с центром в точке $T \in N$. Пусть $K \in \mathcal{K}_n(T)$, $K = (E, 0, \psi)$ и точка $S \in K$. Обозначим через $K^*(S)$ обобщенный круг с проколотым центром $K^*(S) = \big(E \backslash \{0\}, S, \psi|_{E\backslash\{0\}}\big)$. Предположим, что $\sigma = (M, P, p)$ — некоторая поверхность над N, S — некоторая точка из σ и существует морфизм $h : K^*(S) \hookrightarrow \sigma(S')$, где $S' \in M$, но отображение $h : E\backslash\{0\} \to M$ нельзя продолжить до непрерывного отображения $h : E \to M$. Два подобных морфизма $h_i : K_i^*(S_i) \hookrightarrow \sigma(S_i')$, $i = 1, 2$, назовем эквивалентными, если существует обобщенный круг $K_3 = (E, 0, \psi_3)$, точки $S, P_1, P_2 \in E\backslash\{0\}$ и морфизмы $g_i : K_3(S) \hookrightarrow K_i^*(P_i)$, такие, что $h_1 \circ g_1|_{E\backslash\{0\}} = h_2 \circ g_2|_{E\backslash\{0\}}$. Класс эквивалентности Z морфизмов относительно определенного таким образом отношения эквивалентности назовем *проколом римановой поверхности* σ, а любой его представитель — *реализацией прокола* Z.

Пусть $h : K^*(S) \hookrightarrow \sigma(S')$ — некоторая реализация прокола Z. Вложение $j : E\backslash\{0\} \to E$ задает морфизм $j : K^*(S) \hookrightarrow K(S)$. Нетрудно видеть, что морфизмы h и j удовлетворяют условию граничной склейки. Пусть σ_1 получается из $\sigma(S')$ и $K(S)$ склеиванием относительно морфизмов h и j, а P_1 — точка, которая соответствует отмеченной точке 0 римановой поверхности $K(S)$ при склеивании. Будем говорить, что $\sigma_1(P_1)$ получена из σ *устранением прокола* Z.

Операция устранения прокола обратна операции выкалывания точки римановой поверхности.

Если g — некоторый морфизм $g : \sigma_1 \hookrightarrow \sigma_2$, Z — прокол в σ_1 с реализацией $j : K^*(S) \hookrightarrow \sigma_1(S'_1)$, $S'_2 = g(S'_1)$, то $g \circ j : K^*(S) \hookrightarrow \sigma_2(S'_2)$. Если $g \circ j$ не продолжается на E до непрерывной функции, то морфизм $g \circ j$ определяет некоторый прокол на σ_2, соответствующий Z. Будем в этом случае говорить, что *прокол Z не устраним* в σ_2, в противном случае назовем Z *устранимым* в σ_2 (относительно g).

Следующая лемма показывает, что компакты на римановых поверхностях без точек ветвления обладают окрестностью, не зависящей в некотором смысле от вида объемлющей поверхности.

Лемма 2.1 (об универсальной окрестности компакта). *Пусть $\sigma_i = (M_i, P_i, p_i)$, $i = 1,\ 2$, — две римановы поверхности без точек ветвления над N, L — связный компакт, точка $A \in L$, отображения $f_i : L \to M_i$ непрерывны, $f_i(A) = P_i$, $i = 1,\ 2$, причем $p_1 \circ f_1 = p_2 \circ f_2$ и выполняется условие: для любых точек A_1, $A_2 \in L$*

$$f_1(A_1) = f_1(A_2) \Longleftrightarrow f_2(A_1) = f_2(A_2).$$

Тогда существует риманова поверхность $\sigma = (M, P, p)$ над N, непрерывное отображение $h : L \to M$ и морфизмы $g_i : \sigma \hookrightarrow \sigma_i$, $i = 1,\ 2$, такие, что $f_i = g_i \circ h$, $i = 1,\ 2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим случай $N = \overline{\mathbb{C}}$. Пусть

$$r_i(S) = \sup\{\varepsilon > 0 : K_1(p_i(S), \varepsilon) \hookrightarrow \sigma_i(S)\}$$

и $\varepsilon_i = \inf_{S \in f_i(L)} r_i(S)$, $i = 1,\ 2$. Нетрудно убедиться, что $r_i(S)$ — непрерывная функция на M_i, $i = 1,\ 2$. Множество $f_i(L)$ компактно как образ компакта L при непрерывном отображении f_i, $i = 1,\ 2$. Отсюда с использованием теоремы Вейерштрасса получаем, что $\varepsilon_i > 0$, $i = 1,\ 2$.

Пусть $\varepsilon_0 = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Тогда для любой точки $S \in f_i(L)$ существует морфизм $j_i^S = j_{i\varepsilon}^S : K(p_i(S), \varepsilon) \hookrightarrow \sigma_i(S)$, причем $f_i(L) \subset \cup_{S \in f_i(L)} j_i^S(E)$. В силу компактности множеств $f_i(L)$ существует конечное число точек $T_1, \ldots, T_m \in L$ таких, что $f_i(L) \subset \subset M_i^\varepsilon = \cup_{i=1}^m M_{il}^\varepsilon$, где $M_{il}^\varepsilon = j_i^S(E)$ для $S = f_i(T_l)$. Покажем, что при достаточно малом ε римановы поверхности $\sigma_i = \left(M_i^\varepsilon, P_i, p_i|_{M_i^\varepsilon}\right)$

совпадают. Для этого установим, что при достаточно малых ε условия $M^\varepsilon_{il} \cap M^\varepsilon_{ik} \neq \emptyset$, $i = 1, 2$, эквивалентны. Предположим противное. Тогда существуют последовательность $\varepsilon_n \to 0$, $n \to \infty$, и две последовательности точек $\{T'_n\}$ и $\{T''_n\}$ такие, что если $M'_{in} = j^S_{i\varepsilon}(E)$, где $S = f_i(T'_n)$, $\varepsilon = \varepsilon_n$; $M''_{1n} = j^S_{i\varepsilon}(E)$, где $S = f_i(T''_n)$, $\varepsilon = \varepsilon_n$, то при фиксированном n одно из множеств $M'_{in} \cap M'_{2n}$, $i = 1, 2$, пусто, а другое — нет. Без ограничения общности можно считать, что $M'_{1n} \cap M'_{2n} \neq \emptyset$, $M'_{2n} \cap M'_{2n} = \emptyset$, $n \geq 1$. Более того, в силу компактности L можно считать, что последовательности $\{T'_n\}$ и $\{T''_n\}$ сходятся к некоторым точкам T' и T'' из L соответственно. Из условия $M'_{1n} \cap M'_{1n} \neq \emptyset$ следует, что расстояние $\rho_{\sigma_1}(f_1(T'_n), f_1(T''_n)) < 2\varepsilon_n$, поэтому $\rho_{\sigma_1}(f_1(T'), f_1(T'')) = 0$, т. е. $f_1(T') = f_1(T'')$. Тогда в силу условия леммы $f_2(T') = f_2(T'')$.

С другой стороны, по выбору ε_0 существуют морфизмы

$$j_i : K(z, \varepsilon_0) \hookrightarrow \sigma_i(f_i(T')), \quad i = 1, 2,$$

где $z = p_1 \circ f_1(T')$. Так как $f_i(T'_n)$, $f_i(T''_n) \to f_i(T') = f_i(T'')$ при $n \to \infty$, а $j_i(E)$ — окрестность точки $f_i(T')$, то $f_i(T'_n), f_i(T''_n) \in j_i(E)$ при достаточно больших n, $i = 1, 2$. Так как M'_{in}, M''_{in} являются кругами в M_i радиуса ε_n и $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$, то M'_{in}, $M''_{in} \subset j_i(E)$ при больших n, $i = 1, 2$. Но отображения $p_i|_{j_i(E)}$, $i = 1, 2$, инъективны и $p_1(M'_{1n}) = p_2(M'_{2n})$, $p_1(M''_{1n}) = p_2(M''_{2n})$, поэтому при больших n

$$M'_{2n} \cap M''_{2n} = \left(p_2|_{j_2(E)}\right)^{-1} \circ p_2(M'_{2n} \cap M''_{2n}) =$$

$$= \left(p_2|_{j_2(E)}\right)^{-1} \circ p_1(M'_{1n} \cap M''_{1n}) \neq \emptyset,$$

что противоречит предположению.

Теперь докажем, что $\sigma^\varepsilon_1 = \sigma^\varepsilon_2$ при малых ε. Определим морфизм $j : \sigma^\varepsilon_1 \hookrightarrow \sigma^\varepsilon_2$, полагая $j|_{M^\varepsilon_{1l}} = j^S_{2\varepsilon} \circ (j^T_{1\varepsilon})^{-1}$, где $S = f_2(T_l)$, $T = f_1(T_l)$, $l = 1, \ldots, m$. Из доказанного выше следует, что при малых ε отображение j определено корректно, непрерывно и инъективно отображает M^ε_1 на M^ε_2. Кроме того, нетрудно видеть, что $p_2 \circ j|_{M^\varepsilon_{1l}} = p_1|M^\varepsilon_{1l}$, $l = 1, \ldots, m$, откуда следует, что $p_2 \circ j = p_1$, т. е. $j : \sigma^\varepsilon_1 \hookrightarrow \sigma^\varepsilon_2$. Аналогично доказывается, что $\sigma^\varepsilon_2 \hookrightarrow \sigma^\varepsilon_1$. Следовательно, $\sigma^\varepsilon_1 = \sigma^\varepsilon_2$.

Докажем, что $j \circ f_1 = f_2$. Действительно, множество

$$M = \{S \in L : j \circ f_1(S) = f_2\}(S)$$

замкнуто, т. к. функции f_1, f_2 и j непрерывны, и непусто, т. к. содержит точки $T_1, \ldots, T_m$. Докажем, что M открыто. Существует l, $1 \le l \le m$, такое, что $f_1(S) \in M^{\varepsilon}_{1l}$. Поскольку $p_2 \circ f_2 = p_1 \circ f_1 = p_2 \circ j \circ f_1$ и существует окрестность U точки S такая, что $f_i(U) \subset M^{\varepsilon}_{il}$, $i = 1$, 2, то

$$f_2(T) = \left(p_2|_{M^{\varepsilon}_{2l}}\right)^{-1} \circ (p_2 \circ j)|_{M^{\varepsilon}_{1l}} \circ f_1(T) = j \circ f_1(T),\ T \in U.$$

Поэтому M открыто и замкнуто в L и непусто. Поскольку L связно, то $M = L$. Итак, $j \circ f_1 = f_2$.

Теперь определим $\sigma = \sigma^{\varepsilon}_1$. Пусть $h = f_1 : L \to M^{\varepsilon}_1$, $g_1 : \sigma \hookrightarrow \sigma_1$ — тождественное отображение, $g_2 = j : \sigma \hookrightarrow \sigma_2$. Тогда $f_i = g_i \circ h_i$, $i = 1$, 2.

Общий случай доказывается аналогично, если использовать вместо кругов над $\overline{\mathbb{C}}$ обобщенные круги над N.

Теперь установим необходимое и достаточное условие существования пересечения двух римановых поверхностей, формулирующееся через их внутренние характеристики. Заметим прежде всего, что операция $\hookrightarrow$ задает отношение порядка на множестве объектов $\mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})(N)$ категории $\overline{\mathcal{RP}}(N)$.

Теорема 2.1 *Пусть $\sigma_i = (M_i, P_i, p_i)$, $i = 1$, 2, — две римановы поверхности из $\mathrm{Ob}(\mathcal{RP})(N)$ и $\mathrm{ord}(P_i, \sigma_i) = 0$, $i = 1$, 2, $p_1(P_1) = = p_2(P_2)$. Следующие условия равносильны:*

(I) *существует пересечение σ_1 и σ_2;*

(II) *для некоторой римановой поверхности σ над N существует объединение $\sigma_1 \cup \sigma_2$ $(\mathrm{rel}\,\sigma)$;*

(III) *множество $\Sigma(\sigma_1, \sigma_2) = \{\sigma' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{RP})(N) : \sigma' \hookrightarrow \sigma_i, i = 1, 2\}$ содержит наибольший элемент $\sigma_0 = (M_0, P_0, p_0)$;*

(IV) *если γ_i — поднятие на σ_i одной и той же кривой γ из точки P_i, $i = 1$, 2, то γ_1 — простая кривая тогда и только тогда, когда простой является кривая γ_2;*

(V) *существует $\sigma_0 = (M_0, P_0, p_0) \in \Sigma(\sigma_1, \sigma_2)$ такая, что если $f_i : \sigma_0 \hookrightarrow \sigma_i$, $i = 1$, 2, — соответствующие морфизмы, то для* *любой точки* $S_0 \in \check{M}_0(\sigma_0)$ *риманова поверхность* $\sigma_0(S_0)$ *является наибольшим элементом в* $\Sigma(\sigma_1', \sigma_2')$, *где* $\sigma_i' = \sigma_i(S_{0i})$, $S_{0i} = f_i(S_0)$, $i = 1,\ 2$;

(VI) *существует риманова поверхность* σ_0 *и морфизмы* $f_i : \sigma_0 \hookrightarrow \sigma_i$, $i = 1,\ 2$, *удовлетворяющие условию граничной склейки.*

Доказательство. Условия (I) и (II) равносильны условию существования римановой поверхности σ, такой, что $\sigma_1 \hookrightarrow \sigma$, $\sigma_2 \hookrightarrow \sigma$. Поэтому они равносильны. Докажем, что условия (I)–(VI) равносильны соответственно условиям (I′)–(VI′), которые получаются из (I)–(VI) заменой σ_i на $\check{\sigma}_i$, $i = 1,\ 2$.

(I)$\Longleftrightarrow$(I′). Если $\sigma_i \hookrightarrow \sigma$, $i = 1,\ 2$, то $\check{\sigma}_i \hookrightarrow \sigma$, $i = 1,\ 2$, поэтому (I)$\Rightarrow$(I′). Обратно, если $\check{\sigma}_i \hookrightarrow \sigma$, $i = 1,\ 2$, то в силу следствия 1.1 $\check{\sigma}_i \hookrightarrow \check{\sigma}$, $i = 1,\ 2$, и каждый прокол на $\check{\sigma}_i$ определяет некоторый прокол на $\check{\sigma}$. Пусть риманова поверхность σ^* получена из $\check{\sigma}$ устранением всех проколов. Тогда $\sigma_i \hookrightarrow \sigma^*$, $i = 1,\ 2$, откуда следует справедливость импликации (I′)$\Rightarrow$(I).

(II)$\Longleftrightarrow$(II′), поскольку (II)$\Longleftrightarrow$(I)$\Longleftrightarrow$(I′)$\Longleftrightarrow$(I′).

(III)$\Longleftrightarrow$(III′). Прежде всего, заметим, что множество $\Sigma(\sigma_1, \sigma_2)$ ограничено сверху элементом σ_1, поэтому по лемме Цорна любой элемент $\tau \in \Sigma(\sigma_1, \sigma_2)$ содержится в некотором максимальном элементе из $\Sigma(\sigma_1, \sigma_2)$ (см. также теорему 3.3). Пусть σ' — наибольший элемент множества $\Sigma(\sigma_1, \sigma_2)$. Тогда $\check{\sigma}'$ — наибольший элемент множества $\Sigma(\check{\sigma}_1, \check{\sigma}_2)$. Действительно, если $\check{\sigma}'$ — не наибольший элемент, то существует риманова поверхность $\sigma'' \in \Sigma(\check{\sigma}_1, \check{\sigma}_2)$ такая, что $\sigma'' \hookrightarrow \sigma'$. Получили противоречие, доказывающее, что (III)$\Longrightarrow$(III′).

Обратно, пусть σ'' — наибольший элемент в $\Sigma(\check{\sigma}_1, \check{\sigma}_2)$, а σ' — максимальный элемент в $\Sigma(\check{\sigma}_1, \check{\sigma}_2)$, содержащий σ''. Если σ' — не наибольший элемент в $\Sigma(\sigma_1, \sigma_2)$, то существует $\sigma''' \in \Sigma(\sigma_1, \sigma_2)$ такая, что $\sigma''' \hookrightarrow \sigma'$. Так как $\check{\sigma}''' \in \Sigma(\check{\sigma}_1, \check{\sigma}_2)$, то $\check{\sigma}''' \hookrightarrow \sigma''$, поскольку σ'' — наибольший элемент $\Sigma(\check{\sigma}_1, \check{\sigma}_2)$. Значит, $\check{\sigma}''' \hookrightarrow \sigma'$. Но $\sigma''' \hookrightarrow \sigma'$, следовательно, существует прокол Z в $\check{\sigma}'''$, устранимый в σ''' и не устранимый в σ'. Так как $\sigma''' \hookrightarrow \sigma_i$, $i = 1,\ 2$, то прокол Z устраним в σ_i, $i = 1,\ 2$. Пусть Z' — прокол в σ', соответствующий проколу Z. Тогда Z' устраним в σ_i, $i = 1,\ 2$. Значит, если σ_0' — риманова поверхность, получающаяся из σ' устранением прокола Z', то $\sigma_0' \hookrightarrow \sigma_i$, $i = 1,\ 2$.

Итак, $\sigma' \hookrightarrow \sigma'_0 \in \Sigma(\sigma_1, \sigma_2)$, $\sigma' \neq \sigma'_0$. Это противоречит максимальности σ' в $\Sigma(\sigma_1, \sigma_2)$, и равносильность условий (III) и (III$'$) доказана.

Аналогично доказывается, что (V)$\Longleftrightarrow$(V$'$). Равносильность условий (IV) и (IV$'$) очевидна.

(VI)$\Longleftrightarrow$(VI$'$). Условие (VI) эквивалентно существованию римановой поверхности σ, объемлющей σ_1 и σ_2. Поэтому (VI)$\Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow$(I)$\Longleftrightarrow$(I$'$)$\Longleftrightarrow$(VI$'$).

В силу доказанного выше можно считать, что σ_1 и σ_2 — римановы поверхности без точек ветвления. Установим справедливость импликаций (II)$\Longrightarrow$(III)$\Longrightarrow$(IV)$\Longrightarrow$(V)$\Longrightarrow$(II).

(II)$\Longrightarrow$(III). Пусть существует риманова поверхность σ такая, что $\sigma_i \hookrightarrow \sigma$, $i = 1, 2$. Пусть $g_i : \sigma_i \hookrightarrow \sigma$ — соответствующие морфизмы, $i = 1, 2$, и $\sigma' \in \Sigma(\sigma_1, \sigma_2)$. Тогда существуют морфизмы $h_i : \sigma' \hookrightarrow \sigma_i$, $i = 1, 2$. В силу леммы 1.2 морфизмы $g_i \circ h_i : \sigma' \hookrightarrow \sigma$, $i = 1, 2$ совпадают между собой, откуда следует, что $\sigma' \hookrightarrow \sigma_1 \cap \sigma_2$ $(\operatorname{rel} \sigma)$. Значит, $\sigma_1 \cap \sigma_2$ является наибольшим элементом в $\Sigma(\sigma_1, \sigma_2)$.

(III)$\Longleftrightarrow$(IV). Предположим противное. Пусть $\sigma_0 = (M_0, P_0, p_0)$ — наибольший элемент в $\Sigma(\sigma_1, \sigma_2)$ и морфизмы $f_i : \sigma_0 \hookrightarrow \sigma_i$, $i = 1, 2$. Пусть существуют два пути $\omega_i : [0, 1] \to M_i$, $i = 1, 2$, такие, что $p_1 \circ \omega_1 = p_2 \circ \omega_2 = \omega$ и $\omega_1(t_0) = \omega_1(1)$, $\omega_2(t_0) \neq \omega_2(1)$ для некоторого $t_0 \in [0, 1)$. Рассмотрим два множества

$$A = \{t \in [0, 1) \mid \omega_1(t') = \omega_1(t'') \Longleftrightarrow \omega_2(t') = \omega_2(t'')\ \forall t', t'' \in [0, t]\}$$

и

$$B = \{t \in [0, 1) \mid \omega_i([0, t]) \subset f_i(M_0),\ i = 1, 2\}.$$

Очевидно, что $1 \notin A$. Так как $f_i(M_0)$ — открытые множества, а отображения ω_i непрерывны, $i = 1, 2$, то множество B открыто в $[0, 1]$. Пусть $b = \sup B$.

Покажем, что $[0, b] \subset A$. Так как $[0, b] \subset B$, то для любого $x \in (0, b)$ определены пути $f_i^{-1} \circ \omega_i|_{[0,x]}$. Они являются поднятием на σ_0 пути $\omega_{[0,x]}$ из точки P_0. Поэтому в силу единственности поднятия пути на неразветвленное накрытие

$$f_1^{-1} \circ \omega_1(t) = f_2^{-1} \circ \omega_2(t), \quad 0 \leq t \leq x.$$

Так как $\omega_i(t') = \omega_i(t'')$ в $f_i(M_0)$ тогда и только тогда, когда имеет место равенство $f_i^{-1} \circ \omega_i(t') = f_i^{-1} \circ \omega_i(t'')$, $i = 1, 2$, то отсюда следует, что $[0,x] \subset A$, откуда $[0,b) \subset A$. Если $b \in B$, то в силу открытости B в $[0,1]$ точка b совпадает с единицей. Но тогда, как и выше, получаем, что $[0,1] \subset A$, что неверно, т. к. $1 \notin A$. Значит, $b \notin B$ и $B = [0,b)$. Так как $b \notin B$, то $\omega_i(b) \notin f_i(M_0)$ для $i = 1$ или $i = 2$. Пусть для определенности $\omega_1(b) \notin f_1(M_0)$. Докажем, что тогда и $\omega_2(b) \in f_2(M_0)$. Если бы это было не так, то путь $f_1 \circ f_2^{-1} \circ \omega_2|_{[0,b]}$ являлся бы поднятием пути $\omega|_{[0,b]}$ из точки P_1 на σ_2 и обязан был совпадать с $\omega_1|_{[0,b]}$, но тогда бы точка $\omega_1(b) = f_1 \circ f_2^{-1} \circ \omega_2(b)$ должна была принадлежать множеству $f_1(M_0)$, что неверно. Итак, $\omega_i(b) \notin f_i(M_0)$, $i = 1$, 2. Поскольку $\omega_i([0,b)) \subset f_i(M_0)$, $i = 1$, 2, то $\omega_i(t) = \omega_i(b)$ при $t \in [0,b] \iff t = b$, $i = 1$, 2, поэтому $b \in A$. Итак, $[0,b] \subset A$.

В силу леммы 2.1 существует риманова поверхность $\sigma = (M,P,p)$, морфизмы $h_i : \sigma \hookrightarrow \sigma_i$, $i = 1$, 2, и путь $\omega : [0,b] \to M$ такие, что $\omega_i(t) = h_i \circ \omega_0(t)$, $0 \le t \le b$, $i = 1$, 2. Но тогда $\sigma \in \Sigma(\sigma_1,\sigma_2)$. Так как σ_0 — наибольший элемент в $\Sigma(\sigma_1,\sigma_2)$, то существует морфизм $j : \sigma \hookrightarrow \sigma_0$. Пути $f_1 \circ j \circ \omega_0|_{[0,b]}$ и $\omega_1|_{[0,b]}$ являются поднятиями одного и того же пути из точки P_1 на σ_1, т. к. $p_1 \circ f_1 \circ j \circ \omega_0(t) = p_0 \circ j \circ \omega_0(t) = p \circ \omega_0(t) = p_1 \circ h_1 \circ \omega_0(t) = p_1 \circ \omega_1(t)$, $t \in [0,b]$. Значит, они совпадают, и $\omega_1(b) = f_1 \circ j \circ \omega(b) \in f_1(M_0)$ — противоречие. Итак, (III)$\iff$(IV).

(IV)$\Longrightarrow$(V). Пусть имеет место (IV). Рассмотрим множество X путей $\omega : [0,1] \to N$, $\omega(0) = p_1(P_1) = p_2(P_2)$ таких, что существуют поднятия ω_1 и ω_2 пути ω из точек P_1 и P_2 на σ_1 и σ_2 соответственно. Пусть ω', $\omega'' \in X$, ω'_i и ω''_i — их поднятия на σ_i из точки P, $i = 1$, 2. Назовем ω' и ω'' эквивалентными, если концы путей ω'_i и ω''_i совпадают, $i = 1$, 2. В силу (IV) это определение корректно. На множестве $M_0 = X/\sim$ классов эквивалентности вводится обычным образом топология, структура комплексного многообразия и проекция $p_0 : M_0 \to N$, сопоставляющая классу эквивалентности $[\omega]$ пути ω конец этого пути — точку $\omega(1)$. Пусть $P_0 = [\omega_0]$, где ω_0 — постоянный путь. Тогда $\sigma_0 = (M_0,P_0,p_0)$ — риманова поверхность над N. Определим морфизмы $f_i : \sigma_0 \hookrightarrow \sigma_i$, $i = 1$, 2, по правилу $f_i([\omega]) = \omega_i(1)$, $i = 1$, 2. Отсюда следует, что $\sigma_0 \in \Sigma(\sigma_1,\, \sigma_2)$. Пусть $\sigma' = (M',P',p') \in \Sigma(\sigma_1,\sigma_2)$ и $h_i : \sigma' \hookrightarrow \sigma_i$, $i = 1$, 2 — соответствующие морфизмы. Определим морфизм $g : \sigma' \hookrightarrow \sigma_0$ следующим образом. Пусть $S' \in M'$ и ω' — любой путь в M', соединяющий точки P' и S' и $\omega = p'(\omega')$. Путь $\omega \in X$, т. к. пути $\omega_i = h_i \circ \omega'$, $i = 1$, 2, являются поднятиями пути ω на σ_i, $i = 1, 2$. Пусть $g(S') = [\omega]$. Нетрудно видеть, что g определено корректно и является морфизмом из σ' в σ_0.

Итак, σ_0 — наибольший элемент в $\Sigma(\sigma_1, \sigma_2)$. Докажем, что для любой точки $S_0 \in M_0$ риманова поверхность $\sigma_0(S_0)$ — наибольший элемент в множестве $\Sigma(\sigma_1(S_{01}), \sigma_2(S_{02}))$, где $S_{0i} = f_i(S_0)$, $i = 1, 2$. Предположим противное. Тогда существует некоторая риманова поверхность $\sigma = (M, S, p) \in \Sigma(\sigma_1(S_{01}), \sigma_2(S_{02}))$ такая, что $\sigma \not\hookrightarrow \sigma_0(S_0)$. Пусть $\tau_i = \sigma_0(S_0) \cup \sigma \ (\mathrm{rel}\, \sigma_i(S_{0i}))$, $i = 1, 2$. Тогда $\sigma_0(S_0) \hookrightarrow \tau_i$, причем $\sigma_0(S_0) \neq \tau_i$, $i = 1, 2$, т. к. $\sigma \hookrightarrow \sigma_0(S_0)$. Докажем, что $\tau_1 \neq \tau_2$. В противном случае $\tau = \tau_1 = \tau_2$ являлся бы элементом множества $\Sigma(\sigma_1(S_{01}), \sigma_2(S_{02}))$, строго большим, чем $\sigma_0(S_0)$. Если $k : \sigma_0(S_0) \hookrightarrow \tau$ — соответствующий морфизм, $T_0 = k(P_0)$, то $\tau(T_0)$ являлся бы элементом из множества $\Sigma(\sigma_1(S_{01}), \sigma_2(S_{02}))$, строго большим, чем σ_0, а это противоречит тому, что σ_0 — наибольший элемент в $\Sigma(\sigma_1, \sigma_2)$.

Итак, $\sigma_0(S_0) \cup \sigma \ (\mathrm{rel}\, \sigma_1(S_{01})) \neq \sigma_0(S_0) \cup \sigma \ (\mathrm{rel}\, \sigma_2(S_{02}))$. Пусть морфизмы $g_i : \sigma \hookrightarrow \sigma_i$, $i = 1, 2$. В силу предложения 1.1 существуют точки $T \in M$, $T_0 \in M_0$ такие, что с точностью до нумерации σ_i, $i = 1, 2$, имеют место соотношения $g_1(T) = f_1(T_0)$, $g_2(T) \neq f_2(T_0)$. Пусть путь η_1 соединяет в M_0 точки P_0 и T_0, а путь η_2 — точки T_0 и S_0. Пусть путь η_3 соединяет в M точки S и T. Рассмотрим пути $\omega_i = f_i(\eta_1\eta_2)g_i(\eta_3)$ в M_i, $i = 1, 2$. Очевидно, что путь $\omega = p_i(\omega_i) = p_0(\eta_1\eta_2)p(\eta_3)$ не зависит от i, $i = 1, 2$. Если t_0 — точка, соответствующая концу пути η_1, то $\omega_1(t_0) = f_1(T_0) = g_1(T) = \omega_1(1)$, $\omega_2(t_0) = f_2(T_0) \neq g_2(T) = \omega_2(1)$. Это противоречит условию (IV).

(V)$\Longrightarrow$(VI). Пусть имеет место (V). Покажем, что морфизмы $f_i : \sigma_0 \hookrightarrow \sigma_i$, $i = 1, 2$, удовлетворяют условию граничной склейки. Пусть $\{S_n\}$ — последовательность точек в M_0 и $f_i(S_n) \to T_i$, $n \to \infty$, $i = 1, 2$. В силу леммы 1.1 существует обобщенный однолистный круг $K \in \mathcal{K}_1(T)$ такой, что $K \hookrightarrow \sigma_i(T_i)$, $i = 1, 2$. Пусть $h : K \hookrightarrow \sigma_i(T_i)$, $i = 1, 2$ — соответствующие морфизмы. Так как $h_i(E)$ — открытые множества, то существует такое n_0, что $f_i(S_n) \in h_i(E)$ при $n \geq n_0$, $i = 1, 2$. Тогда $h_i : K(\zeta_n) \hookrightarrow \sigma_i(f_i(S_n))$, $i = 1, 2$, где $\zeta_n = h_1^{-1} \circ f_1(S) = h_2^{-1} \circ f_2(S)$, $n \geq n_0$. Значит, $K(\zeta_n) \in \Sigma_{S_n} = \Sigma(\sigma_1(f_1(S_n), \sigma_2(f_2(S_n)),$ $n \geq n_0$. Поскольку в силу (V) элемент $\sigma_0(S_n)$ является наибольшим в Σ_{S_n}, то существует морфизм $g_n : K(\zeta_n) \hookrightarrow \sigma_0(S_n)$, $n \geq n_0$. Морфизмы

$f_i \circ g_n, h_i : K(\zeta_n) \hookrightarrow \sigma_i(f_i(S_n))$ совпадают в силу леммы 2.2, поэтому $g_n = f_i^{-1} \circ h_i$ не зависит от n. Значит, $S_n = g_n(\zeta_n) \to g_n(0) \in M_0$, $n \to \infty$, т. к. $\zeta_n = h_1^{-1} \circ f_1(S_n) \to h_1^{-1} \circ (T_1) = 0$, $n \to \infty$. Итак, морфизмы f_i, $i = 1, 2$, удовлетворяют условию граничной склейки.

(VI)$\Longrightarrow$(I). Это очевидно. Теорема 2.1 доказана.

Отметим, что ограничение $S_0 \in \check{M}_0(\sigma_0)$ в условии (V) теоремы 2.1 является существенным: если σ_0 — наибольший элемент в $\Sigma(\sigma_1, \sigma_2)$ и S_0 — точка ветвления σ_0, то $\sigma_0(S_0)$ может не быть ни наибольшим элементом в $\Sigma(\sigma_1(f_1(S_0)), \sigma_2(f_2(S_0)))$, ни даже максимальным.

Пример 2.1 Пусть

$$L_1 = \{\xi + i\eta \in \mathbb{C} | \xi \geq 1, \eta = 0\}, \quad L_2 = \{\xi + i\eta \in \mathbb{C} | \xi \leq -1, \eta = 0\}.$$

Определим римановы поверхности $\sigma_k = (\mathbb{C} \backslash L_k, i, \zeta^2)$, $k = 1, 2$ над $\mathbb{C}$. Тогда $\sigma_0 = (\mathbb{C} \backslash (L_1 \cup L_2), i, \zeta^2)$ является наибольшим элементом в $\Sigma(\sigma_1, \sigma_2)$ и отображения $f_k(\zeta) = \zeta$, $\zeta \in \mathbb{C} \backslash (L_1 \cup L_2)$ определяют морфизмы $f_k : \sigma_0 \hookrightarrow \sigma_k$, $k = 1, 2$. Пусть $S_0 = 0$. Тогда $f_1(S_0) = f_2(S_0) = 0$. Но $\sigma_0(0)$ не является ни наибольшим, ни даже максимальным элементом в $\Sigma(\sigma_1(0), \sigma_2(0))$, поскольку $\sigma_0(0) \hookrightarrow \sigma_1(0)$, $\sigma_0(0) \neq \sigma_1(0)$ и $\sigma_1(0) \in \Sigma(\sigma_1(0), \sigma_2(0))$, т. к. для $g_1(\zeta) = \zeta$, $g_2(\zeta) = -\zeta$, $\zeta \in \mathbb{C} \backslash L_1$ имеем $g_1 : \sigma_1(\zeta) \hookrightarrow \sigma_1(\zeta), g_2 : \sigma_1(\zeta) \hookrightarrow \sigma_2(\zeta)$. При этом нетрудно видеть, что $\sigma_1(0)$ — наибольший элемент в $\Sigma(\sigma_1(0), \sigma_2(0))$.

Теорема 2.2 *Пусть $\sigma_\alpha = M_\alpha, P_\alpha, p_\alpha)$, $\alpha \in A$, — произвольное семейство римановых поверхностей и* $\operatorname{ord}(P_\alpha, \sigma_\alpha) = 0$, $\alpha \in A$. *Пересечение $\cap_\alpha \sigma_\alpha$ и объединение $\cup_\alpha \sigma_\alpha$* $(\operatorname{rel} \sigma)$ *относительно некоторой римановой поверхности σ существуют тогда и только тогда, когда для любых α, $\beta \in A$ существует пересечение $\sigma_\alpha \cap \sigma_\beta$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость условия теоремы очевидна. Докажем достаточность. Пусть для любых α, $\beta \in A$ существует пересечение $\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_\alpha \cap \sigma_\beta$. Тогда существуют морфизмы $j_{\alpha\beta}^\alpha : \sigma_{\alpha\beta} \hookrightarrow \sigma_\alpha$, $j_{\alpha\beta}^\beta : \sigma_{\alpha\beta} \hookrightarrow \sigma_\beta$, которые в силу теоремы 2.1 , п. (VI), удовлетворяют условию граничной склейки. В несвязной сумме $\sqcup_{\alpha \in A} M_\alpha$ отождествим точки $T_\alpha \in M_\alpha$ и $T_\beta \in M_\beta$, если $j_{\alpha\beta}^\alpha(T_\alpha) = j_{\alpha\beta}^\beta(T_\beta)$. В результате получаем топологическое пространство M, каждая точка которого обладает окрестностью, гомеоморфной кругу в $\mathbb{R}^2$. Пространство M хаусдорфово в силу того, что морфизмы $j^\alpha_{\alpha\beta}$, $j^\beta_{\alpha\beta}$ удовлетворяют условию граничной склейки. Доказательство проводится точно так же, как и выше, когда определялась операция склеивания. Пусть P — точка из M, в которую переходят все точки P_α, $\alpha \in A$, и отображение $p : M \to N$ таково, что $p|_{M_\alpha} = p_\alpha$. Тогда $\sigma = (M, P, p)$ — риманова поверхность над N, объемлющая все σ_α, $\alpha \in A$. Значит, $\cup_{\alpha\in A}\, \sigma_\alpha \ (\operatorname{rel} \sigma)$ существует и теорема доказана.

§3. Отношение порядка на пространстве отмеченных римановых поверхностей

Установим ряд свойств отношения порядка $\hookrightarrow$ на множестве объектов $\mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})(N)$.

Предложение 3.1 *Пусть* $\sigma_i = (M_i, P_i, p_i) \in \mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})(N)$, $i = 1, 2$, *и* $\sigma_1 \hookrightarrow \sigma_2$, $\sigma_1 \neq \sigma_2$. *Тогда* σ_1 *не может быть поверхностью эллиптического типа. Если* σ_1 *— поверхность параболического типа, морфизм* $j : \sigma_1 \hookrightarrow \sigma_2$ *и* $M_2 \backslash j(M_1)$ *содержит более одной точки, то* σ_2 *— поверхность эллиптического типа.*

Доказательство легко следует из свойств абстрактных римановых поверхностей (см., напр., [88], гл. 9).

Следствие 3.1 *Любая риманова поверхность эллиптического типа является максимальным элементом в* $\mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})(N)$.

Напомним, что упорядоченное множество называется индуктивным, если любое его линейно упорядоченное подмножество обладает верхней гранью. Нашей целью будет доказательство того факта, что $\mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})(N)$ индуктивно.

Лемма 3.1 *В категории* $\overline{\mathcal{RP}}(N)$ *существуют пределы прямых и обратных спектров.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{x_\alpha; \phi_\alpha^\beta\}_A$ — прямой спектр в категории $\overline{\mathcal{RP}}(N)$ над направленным множеством A. Тогда для любых α, $\beta \in A$ таких, что $\alpha \prec \beta$ имеем $\phi_\alpha^\beta : x_\alpha \hookrightarrow x_\beta$. Без ограничения общности можно считать, что $x_\alpha = \sigma_\alpha = (M_\alpha, P_\alpha, p_\alpha) \in ObN$ и отмеченные точки поверхностей σ_α не являются точками ветвления, $\alpha \in$A. Ясно, что при $\alpha \prec \beta$ существует пересечение $\sigma_\alpha \cap \sigma_\beta = \sigma_\alpha$. В силу теоремы 2.2 существует риманова поверхность $\sigma = (M, P, p)$ такая, что $\sigma = \cup_{\alpha \in A} \sigma_\alpha$ $(\mathrm{rel}\, \sigma)$. Пусть $\phi_\alpha : \sigma_\alpha \hookrightarrow \sigma$ — соответствующие морфизмы. В силу леммы 1.2 имеем $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^\beta = \phi_\alpha$, $\alpha \prec \beta$. Рассмотрим любую риманову поверхность $\sigma' = (M', P', p')$, такую, что существуют морфизмы $\phi'_\alpha : \sigma_\alpha \hookrightarrow \sigma'$, $\alpha \in A$, удовлетворяющие условию $\phi'_\beta \circ \phi_\alpha^\beta = \phi'_\alpha$, $\alpha \prec \beta$. Определим отображение $j : M \to M'$ таким образом, чтобы $j|_{\phi_\alpha(R_\alpha)} = \phi'_\alpha \circ \phi_\alpha^{-1}$. Так как $\phi'_\beta \circ \phi_\alpha^\beta = \phi'_\alpha$, $\alpha \prec \beta$, то $\phi'_\beta \circ \phi_\beta^{-1}|_{\phi_\alpha(R_\alpha)} = \phi'_\alpha \circ (\phi_\alpha^\beta)^{-1} \circ \phi_\alpha^\beta \circ \phi_\alpha^{-1} = \phi'_\alpha \circ \phi_\alpha^{-1}$, $\alpha \prec \beta$, т. е. j определено корректно. Ясно, что j инъективно и непрерывно, и $p' \circ j = p$, т. е. $j : \sigma \hookrightarrow \sigma'$, причем в силу леммы 1.2 имеем $j \circ \phi_\alpha = \phi'$, $\alpha \in A$. Значит, $\{\sigma; \phi_\alpha\}_A$ — это предел прямого спектра $\{\sigma_\alpha; \phi_\alpha^\beta\}_A$.

Существование предела обратного спектра очевидно.

Лемма 3.2 1) *Если* $\{x; \phi_\alpha\}_A$ *является пределом прямого спектра* $\{x_\alpha; \phi_\alpha^\beta\}_A$ *в* $\overline{\mathcal{RP}}(N)$ *и* $x_\alpha \hookrightarrow x_1$, $\alpha \in A$, *то* $x \hookrightarrow x_1$.

2) *Если* $\{x; \phi_\alpha\}_A$ *— предел обратного спектра* $\{x_\alpha; \phi_\alpha^\beta\}_A$ *в* $\overline{\mathcal{RP}}(N)$ *и* $x_1 \hookrightarrow x_\alpha$, $\alpha \in A$, *то* $x_1 \hookrightarrow x$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем 1), поскольку справедливость 2) устанавливается аналогично. Без ограничения общности можно считать, что $x = \sigma$, $x_\alpha = \sigma_\alpha$, $\alpha \in A$, $x_1 = \sigma_1$ — римановы поверхности над N. Пусть морфизмы $\phi_{\alpha_0}^\alpha : \sigma_{\alpha_0} \hookrightarrow \sigma_\alpha$, $\alpha \prec \alpha_0$, $\psi_\alpha : \sigma_\alpha \hookrightarrow \sigma_1$. В силу леммы 1.2 среди морфизмов $g_\alpha = \psi_\alpha \circ \phi_{\alpha_0}^\alpha : \sigma_{\alpha_0} \hookrightarrow \sigma_1$ есть лишь конечное число различных. Следовательно, существует конфинальная часть B множества A, такая, что $g_\alpha = g : \sigma_{\alpha_0} \hookrightarrow \sigma_1$ не зависит от $\alpha \in B$. Тогда $\psi_\beta \circ \phi_\alpha^\beta \circ \phi_{\alpha_0}^\alpha = \psi_\beta \circ \phi_{\alpha_0}^\beta = g = \psi_\alpha \circ \phi_{\alpha_0}^\alpha$ при $\alpha_0 \prec \alpha \prec \beta$, α, $\beta \in B$. В силу следствия 1.3 имеем $\psi_\beta \circ \phi_\alpha^\beta = \psi_\alpha$, $\alpha_0 \prec \alpha \prec \beta$, α, $\beta \in B$. Поскольку B — конфинальная часть A, то предел прямого спектра $\{\sigma_\alpha; \phi_\alpha^\beta\}_B$ существует и равен $\{\sigma_\alpha; \phi_\alpha\}_B$. В силу универсального свойства предела прямого спектра (см., напр., [22]) существует морфизм $\psi : \sigma \hookrightarrow \sigma_1$ такой, что $\psi \circ \phi_\alpha = \psi_\alpha$, $\alpha \in B$, в частности, $\sigma \hookrightarrow \sigma_1$ и лемма 3.2 доказана.

Введем понятие обобщенного внутреннего радиуса римановой поверхности $\sigma = (M, P, p)$ гиперболического типа над сферой $\mathbb{C}$. Пусть $f : E \to M$ — универсальное накрытие для M, $f(0) = P$. Тогда в окрестности точки 0 функция f обладает обратной, задающей некоторый локальный параметр ζ. Значит, голоморфная функция $p \circ f$ имеет в окрестности нуля разложение

$$p \circ f(\zeta) = \begin{cases} z_0 + \sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k \zeta^k, & z_0 \neq \infty \ (a_n \neq 0), \\ \sum\limits_{k=-n}^{\infty} a_k \zeta^k, & z_0 = \infty \ (a_{-n} \neq 0), \end{cases}$$

где $z_0 = p(P)$, $n = \mathrm{ord}(P, \sigma) + 1$. Пусть

$$r(\sigma) = \begin{cases} |a_n|, & z_0 \neq \infty, \\ |1/a_{-n}|, & z_0 = \infty. \end{cases} \tag{3.1}$$

Назовем число $r(\sigma)$ *обобщенным гиперболическим радиусом* для σ. Если $D \subset \mathbb{C}$ — плоская односвязная область, $z_0 \in D$ и $j : D \to \overline{\mathbb{C}}$ — вложение, то для однолистной $\sigma = (D, z_0, j)$ величина $r(\sigma)$ есть конформный радиус области D в точке z_0 (см., напр., [80]) и обратен к плотности гиперболической метрики области D в точке z_0.

Следующая теорема — обобщение хорошо известного принципа гиперболической метрики.

Теорема 3.1 *Пусть $\sigma_i = (M_i, P_i, p_i)$, $i = 1, 2$, — две римановы поверхности гиперболического типа над $\overline{\mathbb{C}}$, $\mathrm{ord}(P_i, \sigma_i) = n_i$, $p_i(P_i) = z_i$, $r_i = r(\sigma_i)$, $i = 1, 2$. Пусть $g : M_1 \to M_2$ — голоморфное отображение такое, что $g(P_1) = P_2$ и*

$$h(z) = \begin{cases} z_1 + (z - z_1)^{n_1}, & z_1 \neq \infty, \\ z^{n_1}, & z = \infty. \end{cases}$$

Тогда
1) *существует окрестность U точки z_1 и голоморфная инъективная функция $\phi : U \to M_1$ такая, что $\phi(z_1) = P_1$ и $p_1 \circ \phi = h$ в U;*
2) *если функция $\psi = p_2 \circ g \circ \phi$ в окрестности U точки z_1 имеет представление*

$$\psi(z) = \begin{cases} z_2 + a(z - z_1)^l + o((z - z_1)^l), & z_1, z_2 \neq \infty, \\ z_2 + a/z^l + o(z^{-l}), & z_1 = \infty, z_2 \neq \infty, \\ 1/[a(z - z_1)^l] + o((z - z_1)^{-l}), & z_1 \neq \infty, z_2 = \infty, \\ z^l/a, & z_1 = z_2 = \infty, \end{cases} \tag{3.2}$$

$z \to z_1$, где $a \neq 0$, то $|a| r^{l/n_1} \leq r_2$, причем равенство возможно только в случае, когда $g \circ f_1(\zeta) = f_2(e^{i\alpha}\zeta^k)$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, $f_i : E \to M_i$ — универсальные накрытия, $f_i(0) = P_i$, $i = 1, 2$ и $l = kn$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ограничимся рассмотрением случая, когда точки $z_1, z_2 \neq \infty$, остальные случаи разбираются аналогично.

Пусть в окрестности нуля $p_i \circ f_i(\zeta) = z_i + r_i e^{\sqrt{-1}\alpha_i}\zeta^{n_j} + o(\zeta^{n_j})$, $\zeta \to 0$, $i = 1, 2$. Тогда в окрестности нуля определена и однолистна функция

$$z = z(\zeta) = \sqrt[n_1]{p_i \circ f_1(\zeta) - z_1} + z_1 = z_1 + \sqrt[n_1]{r_1 e^{\sqrt{-1}\alpha_1}}\zeta + o(\zeta), \quad (3.3)$$

$\zeta \to 0$, и $p_1 \circ f_1(\zeta) = z_1 + (z - z_1)^{n_1} = h(z)$, откуда следует утверждение 1), где $\phi(z) = \phi(z(\zeta)) = f_1(\zeta)$.

В окрестности нуля в силу (3.1) и (3.3) имеем

$$p_2 \circ g \circ f_1(\zeta) = p_2 \circ g \circ \phi(z) = \psi(z) = z_2 + a(z - z_1)^l +$$

$$+ o((z - z_1)^l) = z_2 + a\left(r_1 e^{\sqrt{-1}\alpha_1}\right)^{l/n_1}\zeta^l + o(\zeta^l), \quad \zeta \to 0. \qquad (3.4)$$

С другой стороны, так как E — односвязно, то в силу теоремы 5.1 из [56], гл. V, существует такое голоморфное отображение $h : E \to E$, что $h(0) = 0$ и коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h"'] & M_1 \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "g"'] & \overline{\mathbb{C}} \arrow[d, "\psi"'] \\ E \arrow[r, "f_2"] & M_2 \arrow[r, "p_2"] & \overline{\mathbb{C}} \end{tikzcd} \qquad (3.5)$$

Поскольку $h(0) = 0$, то $h(\zeta) = c \cdot \zeta^k + o(\zeta^k)$, $\zeta \to 0$, где $c \neq 0$, $k \geq 1$. В силу леммы Шварца $|c| = 1$ тогда и только тогда, когда $\phi(\zeta) = e^{i\alpha}\zeta^k$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Из коммутативности диаграммы (3.5) следует, что

$$p_2 \circ g \circ f_1(\zeta) = p_2 \circ f_2 \circ h(\zeta) = z_2 + r_2 e^{\sqrt{-1}\alpha_2} c^{n_2 k}\zeta^{n_2 k} + o(\zeta^{n_2 k}), \quad (3.6)$$

$\zeta \to 0$. Из (3.4) и (3.6) получаем $l = n_2 k$, $ar_1^{l/n} = |c| r_2 \leq r_2$, причем равенство возможно только в случае, когда $h(\zeta) = e^{\sqrt{-1}\alpha}\zeta^k$. Значит, $g \circ f_1(\zeta) = f_2 \circ h(\zeta) = f_2 \circ (e^{\sqrt{-1}\alpha}\zeta^k)$, $\zeta \in E$. Теорема доказана.

Следствие 3.1 *Если в условиях теоремы 3.1 $p_2 \circ g = p_1$, то $r_1 \leq r_2$, причем равенство $r_1 = r_2$ возможно только в случае, когда $g \circ f_1(\zeta) = f_2(e^{\sqrt{-1}\alpha}\zeta^k)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. В частности, если $\sigma_1 \hookrightarrow \sigma_2$, то*

$r(\sigma_1) \leq r(\sigma_2)$, *причем равенство возможно только в случае, когда* $\sigma_1 = \sigma_2$.

Следующая лемма 3.3 также будет использована при доказательстве индуктивности множества $\mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})(N)$. Отметим, что существует и более короткое доказательство индуктивности этого множества, не использующее леммы 3.3 и приводимое ниже. Однако утверждение леммы 3.3, на наш взгляд, представляет самостоятельный интерес.

Лемма 3.3 *Пусть* A *— линейно упорядоченное множество,* $\{x_\alpha\}$, $\alpha \in A$, *— семейство в* $\mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})(N)$, *причем* $\alpha \prec \beta$ *тогда и только тогда, когда* $x_\alpha \hookrightarrow x_\beta$. *Тогда можно подобрать морфизмы* $\phi_\alpha^\beta : x_\alpha \hookrightarrow x_\beta$ *таким образом, чтобы система* $\{x_\alpha; \phi_\alpha^\beta\}_A$ *образовывала прямой спектр в категории* $\mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})(N)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Без ограничения общности можно считать, что $x_\alpha = \sigma_\alpha = (M, P, p)$ — римановы поверхности над $\overline{\mathbb{C}}$, $\alpha \in A$. Пусть $m = \mathrm{ord}(P_\alpha, \sigma_\alpha)$, это число не зависит от α в силу следствия 1.2. Если $m = 0$, то $\{x_\alpha; \psi_\alpha^\beta\}_A$ — прямой спектр в силу леммы 1.2. Поэтому нетривиальный случай имеет место лишь при $m > 0$. Рассмотрим три ситуации.

a) Если A конечно, то утверждение леммы 3.3 очевидно.

b) Если A счетно, то представим A в виде счетного объединения возрастающей последовательности конечных множеств A_n. В силу a) для любого $n \geq 1$ существуют морфизмы $\phi_{\alpha\beta}^{(n)} : \sigma_\alpha \hookrightarrow \sigma_\beta$, α, $\beta \in A_n$, $\alpha \prec \beta$, такие, что $\phi_{\beta\gamma}^{(n)} \circ \phi_{\alpha\beta}^{(n)} = \phi_{\alpha\gamma}^{(n)}$, $\alpha \prec \beta \prec \gamma$, α, β, $\gamma \in A_n$. Пусть $g : \mathbb{N} \to A_+^2 = \{(\alpha, \beta) | \alpha, \beta \in A, \alpha \prec \beta\}$ — некоторая биекция и $g(n) = (\alpha_n, \beta_n)$, $n \geq 1$. Определим по индукции подпоследовательности $\{i_k\}$ последовательности $\{i_0\} = 1, 2, 3, 4, \ldots$ натуральных чисел следующим образом. Пусть $\{i_{k-1}\}$ уже определена. Тогда $\{i_k\}$ — подпоследовательность последовательности $\{i_{k-1}\}$, обладающая свойством: морфизмы $\phi_{\alpha_k}^{\beta_k} = \phi_{\alpha_k\beta_k}^{(i_k)} : \sigma_{\alpha_k} \hookrightarrow \sigma_{\beta_k}$ не зависят от i_k. Это можно сделать в силу леммы 1.2. Тогда $\{\sigma_\alpha; \phi_\alpha^\beta\}_A$ — прямой спектр в $\overline{\mathcal{RP}}$.

c) Общий случай. В силу предложения 3.1 и теоремы 3.1 можно считать, что все σ_α — римановы поверхности гиперболического типа и $r(\sigma_\alpha) < r(\sigma_\beta)$ при $\alpha \prec \beta$, $\alpha \neq \beta$. Тогда функция $h(\alpha) = r(\sigma_\alpha)$

определяет биекцию множества A на подмножество в $\mathbb{R}_+$, поэтому можно считать, что $A \subset \mathbb{R}_+$. Определим теперь σ_α на замыкании $\overline{A}$ множества A в $\mathbb{R}_+$.

Пусть $\alpha \in \overline{A} \backslash A$ и $\{\alpha_n\}$ — монотонная последовательность, для определенности возрастающая. В силу п. b) существуют морфизмы $\phi_n^m : \sigma_{\alpha_n} \hookrightarrow \sigma_{\alpha_m}$, $n \le m$, такие, что система $\{\sigma_{\alpha_n}; \phi_n^m\}$ образует прямой спектр в категории $\overline{\mathcal{RP}}$. По лемме 3.1 существует предел $\{\sigma; \phi_n\}$ этого спектра. Используя лемму 3.2 получаем, что если положить $\sigma_\alpha = \sigma$, то $\{\sigma_\alpha\}, \alpha \in A,$ — линейно упорядоченное множество. Теперь для любого $\alpha \in \mathbb{R}_+$ пусть $\sigma_\alpha = \sigma_{\beta(\alpha)}$, где $\beta(\alpha) = \max\{\beta \in \overline{A} | \beta \le \alpha\}$. Функция $h(\alpha) = r(\sigma_\alpha)$ монотонна на $\mathbb{R}_+$ по следствию 3.1, следовательно, множество D_0 точек разрыва функции h не более, чем счетно. Множество $D = D_0 \cup \mathbb{Q}$ счетно и плотно в $\mathbb{R}_+$. В силу b) определим $\phi_\alpha^\beta : \sigma_\alpha \hookrightarrow \sigma_\beta$, $\alpha < \beta$, α, $\beta \in D$, таким образом, чтобы система $\{\sigma_\alpha; \phi_\alpha^\beta\}_D$ образовывала прямой спектр в $\overline{\mathcal{RP}}$. Определим теперь ϕ_α^β для любых $0 < \alpha < \beta$. Пусть $\varepsilon \in \mathbb{R}_+ \backslash D$, $D_\varepsilon = \{\alpha \in D | \alpha < \varepsilon\}$, $D'_\varepsilon = \{\alpha \in D | \alpha > \varepsilon\}$, причем порядок в D'_ε противоположен обычному. Тогда в силу леммы 3.1 существует предел $\{\sigma^*_\varepsilon; \phi^*_\alpha\}$ прямого спектра $\{\sigma_\alpha; \phi_\alpha^\beta\}_{D_\varepsilon}$ и предел $\{\sigma_{\varepsilon*}; \phi_{\alpha*}\}$ обратного спектра $\{\sigma_\alpha; \phi_\alpha^\beta\}_{D'_\varepsilon}$.

Нетрудно убедиться с помощью леммы 3.2, что $\sigma^*_\varepsilon \hookrightarrow \sigma_\varepsilon \hookrightarrow \sigma_{\varepsilon*}$. Кроме того, в силу следствия 3.1 и непрерывности функции h в точке ε имеем

$$h(\varepsilon) = \lim_{\alpha \to \varepsilon -} h(\alpha) \le r(\sigma^*_\varepsilon) \le r(\sigma_\varepsilon) \le r(\sigma_{\varepsilon*}) \le \lim_{\alpha \to \varepsilon +} h(\alpha) \le h(\varepsilon),$$

откуда следует, что римановы поверхности $\sigma^*_\varepsilon, \sigma_\varepsilon$ и $\sigma_{\varepsilon*}$ эквивалентны, т. к. $r(\sigma^*_\varepsilon) = r(\sigma_\varepsilon) = r(\sigma_{\varepsilon*})$.

Так как для любых $\alpha \in D_\varepsilon$ и $\beta \in D'_\varepsilon$ существует $\phi_\alpha^\beta : x_\alpha \hookrightarrow x_\beta$, причем при $\alpha_1, \alpha_2 \in D_\varepsilon$ таких, что $\alpha_1 < \alpha_2$, выполняется равенство $\phi_{\alpha_2}^\beta \circ \phi_{\alpha_1}^{\alpha_2} = \phi_\alpha^\beta$, то в силу универсального свойства предела прямого спектра $\{\sigma^*_\varepsilon; \phi^*_\alpha\}$ существует морфизм $\eta_\beta : \sigma^*_\varepsilon \hookrightarrow \sigma_\beta$ такой, что $\phi_\alpha^\beta = \eta_\beta \circ \phi^*_\alpha$. Нетрудно убедиться, что $\eta_{\beta_2} = \phi_{\beta_1}^{\beta_2} \circ \eta_{\beta_1}$ при β_1, $\beta_2 \in D$, $\beta_1 < \beta_2$, поэтому в силу универсального свойства обратного спектра $\{\sigma_{\varepsilon*}; \phi_{\alpha*}\}$ существует морфизм $\eta : \sigma^*_\varepsilon \hookrightarrow \sigma_{\varepsilon*}$ такой, что $\eta_\beta = \phi_{\beta*} \circ \eta$. Пусть $\eta^* : \sigma^*_\varepsilon \hookrightarrow \sigma_\varepsilon$ и $\eta_* : \sigma_\varepsilon \hookrightarrow \sigma_{\varepsilon*}$ такие морфизмы, что $\eta = \eta_* \circ \eta^*$. Для любого $\alpha \in D$ определим морфизмы $\phi_\alpha^\varepsilon = \eta^* \circ \phi^*_\alpha$, $\alpha \in D_\varepsilon$, $\phi_\varepsilon^\alpha = \phi_{\alpha*} \circ \eta_*$, $\alpha \in D'_\varepsilon$. Наконец, для любых ε, $\rho \in \mathbb{R}_+$, $\varepsilon < \rho$, пусть $\phi_\varepsilon^\rho = \phi_\alpha^\rho \circ \phi_\varepsilon^\alpha$, где α — любой элемент множества $D \cap (\varepsilon, \rho)$. Нетрудно проверить, что ϕ_ε^ρ определены корректно и $\{\sigma_\alpha; \phi_\alpha^\beta\}$ — прямой спектр в категории $\overline{\mathcal{RP}}$, что доказывает лемму 3.3.

Теперь можно доказать следующий основной результат.

Теорема 3.2 *Множество* $\mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})(N)$ *индуктивно по отношению порядка* $\hookrightarrow$. *Более того, любое линейно упорядоченное подмножество множества* $\mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})(N)$ *обладает точной верхней гранью.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Дадим два доказательства теоремы 3.2.

1) Если $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — некоторое линейно упорядоченное подмножество в $\mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})(N)$, то в силу леммы 3.3 можно считать, что имеется прямой спектр $\{x_\alpha; \phi_\alpha^\beta\}_A$ в $\overline{\mathcal{RP}}(N)$. Пусть $\{x; \phi_\alpha\}_A$ — предел этого спектра, существующий в силу леммы 3.1. Тогда x — верхняя грань для $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$, причем точная верхняя грань в силу леммы 3.2.

2) Можно считать, что $x_\alpha = \sigma_\alpha$ — римановы поверхности гиперболического типа над $\overline{\mathbb{C}}$, $\alpha \in$A. Пусть $r = \sup_{\alpha\in A} r(\sigma_\alpha)$. Если $r = r(\sigma_\alpha)$ для некоторого $\alpha \in A$, то $x = \sigma_\alpha$ — искомый элемент. В противном случае существует возрастающая последовательность $\{\alpha_n\}$ в A такая, что $\lim_{n\to\infty} r\,(\sigma_{\alpha_n}) = r$. Если $\psi_n : \sigma_{\alpha_n} \hookrightarrow \sigma_{\alpha_{n+1}}$ — некоторые морфизмы, $n \geq 1$, то пусть при $m > n$

$$\phi_n^m = \psi_{m-1} \circ \psi_{m-2} \circ \ldots \circ \psi_n : \sigma_{\alpha_n} \hookrightarrow \sigma_{\alpha_m}.$$

Тогда $\{\sigma_{\alpha_n}; \phi_n^m\}$ — прямой спектр в категории $\overline{\mathcal{RP}}(N)$. Если $\{\sigma; \phi_n\}$ — предел этого спектра, то $\phi_n : \sigma_{\alpha_n} \hookrightarrow \sigma$. Для любого $\alpha \in A$ существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $r\,(\sigma_{\alpha_n}) > r(\sigma_\alpha)$, поэтому в силу следствия 3.1 $\sigma_\alpha \hookrightarrow \sigma_{\alpha_n}$. Следовательно, $\sigma_\alpha \hookrightarrow \sigma$, т. е. σ — верхняя грань для $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha\in A}$. В силу леммы 3.2 σ является точной верхней гранью для $\{\sigma_{\alpha_n}\}_{\alpha\in A}$, а следовательно, и для $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Теорема доказана.

В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение, которое, по-существу, есть лемма Цорна в $\mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})(N)$.

Теорема 3.3 *Любое индуктивное множество в* $\mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})(N)$ *обладает по крайней мере одним максимальным элементом.*

Приведем доказательство этого утверждения, не использующее аксиому выбора.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{A}$ — некоторое индуктивное множество, содержащееся в $\mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})(N)$. Без ограничения общности можно считать, что все элементы $\mathcal{A}$ — римановы поверхности над $\overline{\mathbb{C}}$. Если $\mathcal{A}$ содержит римановы поверхности параболического типа, то существование максимального элемента в $\mathcal{A}$ следует из предложения 3.1. Поэтому будем считать, что все $\sigma \in \mathcal{A}$ имеют гиперболический тип. Фиксируем $\sigma_1 \in \mathcal{A}$ и пусть $\mathcal{A}_1 = \{\sigma \in \mathcal{A} \mid \sigma_1 \hookrightarrow \sigma\}$,

$$r_1 = \sup_{\sigma \in \mathcal{A}_1} r(\sigma)/(1 + r(\sigma)).$$

Выберем $\sigma_2 \in \mathcal{A}_1$ таким образом, чтобы

$$h_1 = r(\sigma_2)/(1 + r(\sigma_2)) < r_1 - 1.$$

Пусть теперь построены римановы поверхности $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$, $n \geq 2$. Пусть $\mathcal{A}_{n-1} = \{\sigma \in \mathcal{A} \mid \sigma_{n-1} \hookrightarrow \sigma\}$,

$$r_n = \sup_{\sigma \in \mathcal{A}_{n-1}} r(\sigma)/(1 + r(\sigma)).$$

Выберем $\sigma_n \in \mathcal{A}_{n-1}$ таким образом, чтобы

$$h_n = r(\sigma_n)/(1 + r(\sigma_n)) < r_n - 1/n.$$

В результате получаем последовательность $\{\sigma_n\}$, обладающую свойством: $\sigma_1 \hookrightarrow \sigma_2 \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \sigma_n \hookrightarrow \cdots$. Тогда $\mathcal{A}_1 \supset \mathcal{A}_2 \supset \cdots \supset \mathcal{A}_n \supset \cdots$ и $r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r_n \geq \cdots$. Кроме того, $h_1 \leq h_2 \leq \cdots \leq h_n \leq \cdots$.

Монотонные последовательности положительных чисел $\{r_n\}$ и $\{h_n\}$ ограничены, значит, сходятся. Так как $r_n - 1/n \leq h_n \leq r_n$, то $h = \lim_{n\to\infty} h_n = \lim_{n\to\infty} r_n = r$. Поскольку множество $\mathcal{A}$ индуктивно и $\{\sigma_n\}$ — линейно упорядоченное подмножество в $\mathcal{A}$, то существует $\sigma \in \mathcal{A}$ такое, что $\sigma_n \hookrightarrow \sigma$ для любого $n \geq 1$. Покажем, что σ — максимальный элемент множества $\mathcal{A}$. Предположим противное. Тогда существует элемент $\tau \in \mathcal{A}$ такой, что $\sigma \hookrightarrow \tau$, $\sigma \neq \tau$. Поскольку $\sigma_n \hookrightarrow \sigma$ для любого $n \geq 1$, то $\tau \in \mathcal{A}_n$, $n \geq 1$, поэтому $r(\tau)/(1 + r(\tau)) \leq r_n$, $n \geq 1$. Значит, $r(\tau)/(1 + r(\tau)) \leq r$. С другой стороны, $\sigma_n \hookrightarrow \sigma \hookrightarrow \tau$, поэтому

$$h_n = r(\sigma_n)/(1 + r(\sigma_n)) \leq r(\sigma)/(1 + r(\sigma)) \leq r(\tau)/(1 + r(\tau))$$

в силу следствия 3.1, откуда $r(\tau)/(1+r(\tau)) \geq h = r$. Следовательно, $r(\tau)/(1+r(\tau)) = h = r$, а это возможно, если только имеет место равенство $r(\sigma)/(1+r(\sigma)) = r(\tau)/(1+r(\tau))$, откуда $r(\sigma) = r(\tau)$. Из следствия 3.1 получаем, что $\sigma = \tau$ — противоречие. Теорема 3.3 доказана.

Из теорем 3.2 и 3.3 следует результат, который, по-существу, установлен Бохнером [109].

Теорема 3.4 *Для любой римановой поверхности* $\sigma \in \mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})(N)$ *существует максимальный элемент* σ_1 *в* $\mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})(N)$ *такой, что* $\sigma \hookrightarrow \sigma_1$.

Опишем максимальные элементы в $\mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})(N)$. Максимальность римановой поверхности $\sigma = (M, P, p)$ может иметь место по двум причинам: из-за непродолжаемости абстрактной римановой поверхности M или из-за непродолжаемости проекции.

Напомним (см., напр., [203]), что абстрактная *риманова поверхность* M называется *продолжаемой*, если существует абстрактная риманова поверхность M_1 и инъективное голоморфное отображение $g : M \to M_1$ такое, что $g(M) \neq M_1$. При этом M_1 называется *продолжением* M. Если M не имеет продолжений, то она называется *непродолжаемой*.

Назовем *область* Q в M *вырезанной*, если Q подобна однолистной и существует замкнутая кривая γ в M или не более, чем счетное число дуг $\{\gamma_n\}$ с концами на идеальной границе, разбивающие M на две части, одной из которой является Q. Назовем вырезанную область Q в M *правильно вырезанной*, если Q вырезана одной кривой или дугой γ_1.

Будем говорить, что вырезанная (правильно вырезанная) часть Q в M имеет *сплошную внутреннюю границу*, если Q односвязна и для любого конформного отображения φ области Q на единичный круг E дополнение множества $\mathcal{B}$ точек из ∂E, соответствующих точкам $|\gamma_1|$, имеет линейную меру ноль. Аналогично будем говорить, что Q имеет *плотную внутреннюю границу*, если множество $\mathcal{B}$ всюду плотно на ∂E.

В этих терминах можно сформулировать теорему, утверждение которой, по-существу, принадлежит Гейнсу [143] (см. также [109], [179]–[181], [189], [202], [203]).

Теорема 3.5 *Абстрактная риманова поверхность непродолжаема тогда и только тогда, когда любая правильно вырезанная область Q в M имеет сплошную внутреннюю границу.*

Непрерывное отображение $\varphi : Q \to N$ назовем квазистепенным, если φ представимо в виде $\varphi(P) = [\psi(P)]^n + a$, где $\psi : Q \to \overline{\mathbb{C}}$ — инъективное непрерывное отображение, сохраняющее ориентацию, константы $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{C}$.

Для $N = \mathbb{C}$ справедлива

Теорема 3.6 1) *Если риманова поверхность $\sigma = (M, P, p)$ максимальна в $\mathrm{Ob}(\mathcal{RP})$, то проекция p не является квазистепенной ни в какой вырезанной части, которая не имеет плотную внутреннюю границу.*

2) *Если σ не максимальна, то существует по крайней мере одна односвязная вырезанная часть, не имеющая сплошную внутреннюю границу, в которой p — квазистепенное отображение.*

Доказательство. 1) Пусть σ максимальна в $\mathrm{Ob}(\mathcal{RP})$ и Q — вырезанная часть в M, которая не имеет плотную внутреннюю границу. Требуется доказать, что $\varphi = p|_Q$ не является квазистепенным отображением. Предположим противное. Тогда $\varphi(P) = [\psi(P)]^n + a$, где $\psi : Q \to \overline{\mathbb{C}}$ — инъективное непрерывное отображение. Рассмотрим два случая.

a) Пусть сначала Q неодносвязна. Тогда $\psi(Q)$ также неодносвязна. Пусть Γ — компонента связности границы области $\psi(Q)$ и G — односвязная область в $\overline{\mathbb{C}}$, содержащая $\psi(Q)$, граница которой совпадает с Γ. Рассмотрим риманову поверхность $\tau = (G, S, h)$, где $S = \psi(P)$, $h(z) = z^n + a$, $z \in$G. Пусть $\tau_1 = (\psi(Q), S, h|_{\psi(Q)}$. Тогда морфизмы $j : \tau_1 \hookrightarrow \tau$, $\psi^{-1} : \tau_1 \hookrightarrow \sigma$, где $j(z) = z$, $z \in \psi(Q)$, удовлетворяют условию граничной склейки. Если σ_1 получается из σ и τ_1 склеиванием относительно морфизмов j и ψ^{-1}, то $\sigma \hookrightarrow \sigma_1$. Но $\sigma \neq \sigma_1$, так как $\tau_1 \hookrightarrow \sigma_1$, но $\tau_1 \hookrightarrow \sigma$. Следовательно, σ не максимальна в $\mathrm{Ob}(\mathcal{RP})$.

b) Рассмотрим теперь случай, когда Q односвязна. Тогда для любого конформного отображения g области Q на единичный круг E существует дуга $\xi = \{e^{\sqrt{-1}\,\theta} : |\theta - \theta_0| < \delta\} \subset \partial E \backslash \mathcal{B}$, где $\delta > 0$. Значит, функция $g_1 = \psi \circ g^{-1}$ осуществляет конформное отображение единичного круга E на область $G = \psi(Q)$. Пусть $h(\exp(\sqrt{-1}\,\theta_0))$ — простой конец области G, соответствующий $\exp(\sqrt{-1}\,\theta_0)$ при отображении h. В силу [46], теорема 9.3, можно считать, что цепь сечений (разрезов) $\{\delta_m\}$ области G, определяющих $h(\exp(\sqrt{-1}\,\theta_0))$, лежит на концентрических сферических окружностях $\{z|d_{\overline{\mathbb{C}}}(z,z_0) = r_m\}$, радиусы которых стремятся к нулю. При достаточно больших m, скажем, при $m \geq m_0$, сечение области G имеет концы в достижимых граничных точках границы ∂G, соответствующих точкам $\exp(i\alpha_m)$ и $\exp(i\beta_m) \in \xi$.

Фиксируем $m \geq m_0$. Пусть d_m — та из подобластей, на которые разбивает область G дуга δ_m, которая содержит дуги δ_k, $k \geq m$. Можно считать, что $S = h(P) \in d_m$. Определим римановы поверхности $\tau = (K, S, h)$, где $K = \{z|d_{\overline{\mathbb{C}}}(z,z_0) < r_m\}$, $h(z) = z^n + a$, $z \in G$, и $\tau_1 = (d_n, S, h|_{d_n})$. Тогда морфизмы $j : \tau_1 \hookrightarrow \tau$, $\psi^{-1} : \tau_1 \hookrightarrow \sigma$, где $j(z) = z$, $z \in \psi(Q)$, удовлетворяют условию граничной склейки, причем $\tau \hookrightarrow \sigma$. Как и в случае a), это противоречит максимальности σ в $\mathrm{Ob}(\mathcal{RP})$. Следовательно, ψ не квазистепенная в Q, и утверждение 1) доказано.

2) Если σ не максимальна, то пусть $\sigma' = (M', P', p') \neq \sigma$ — такая риманова поверхность, что существует морфизм $j : \sigma \hookrightarrow \sigma'$. Фиксируем точку $P_0 \in \partial j(M)$. Если $n = \mathrm{ord}(P_0, \sigma')$, то в силу леммы 1.1 существует $\varepsilon > 0$ и морфизм i такие, что $i : K_n(z_0, \varepsilon) \hookrightarrow \sigma'$. Рассмотрим любую компоненту связности множества $D = i(E) \cap j(M)$. Если граница D не связна, то существует представление ∂D в виде объединения непересекающихся замкнутых множеств A_1 и A_2. Пусть γ — простая кривая, разделяющая A_1 и A_2. Тогда γ разбивает D на две части, одна из которых $Q_1 \subset i(E)$ является правильно вырезанной частью в M. При этом отображение p квазистепенное в Q_1.

Если же граница D связна, то D односвязна. Докажем, что $Q = j^{-1}(D)$ не имеет сплошную внутреннюю границу. Предположим противное. Граница Q в M состоит из не более, чем счетного числа дуг $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots$, которые переходят в дуги $\beta_1, \ldots, \beta_k, \ldots$ единичной окружности ∂E при отображении $i^{-1} \circ j$. Так как $i(E) \to j(M)$, то $D_1 = i^{-1}(D)$ — односвязная область в E, не совпадающая с E. Пусть $\zeta_0 \in E$ — достижимая граничная точка области D_1. Отобразим конформно D_1 на единичный круг E функцией g. Так как Q по предположению имеет сплошную внутреннюю границу, то дугам

$\alpha_1, \dots, \alpha_k, \dots$ при отображении $g \circ i^{-1} \circ j$ соответствует множество точек $\mathcal{B}$, дополнение которого имеет линейную меру ноль. Продолжая отображение g по принципу симметрии через дуги $\beta_1, \dots, \beta_k, \dots$, получаем однолистное отображение g_1. Применяя к функции $(g_1)^{-1}$ теорему Пенлеве (см., напр., [46]), убеждаемся в том, что она продолжается до мероморфной функции h в $\overline{\mathbb{C}}$. Нетрудно доказать, что h однолистно и, следовательно, является дробно-линейным отображением. Значит, $(g_1)^{-1}(E) = E$, что противоречит тому, что точка $\zeta_0 \in E \cap \partial(g_1)^{-1}(E)$. Теорема 3.6 доказана.

ГЛАВА 2. РИМАНОВЫ ПОВЕРХНОСТИ, ОГРАНИЧЕННЫЕ КРИВЫМИ

§4. Обобщенный принцип аргумента. Квази- локально простые кривые.

Пусть $\overline{M} = M \cup \partial M$ — компактное двумерное многообразие с непустым краем ∂M, отображение $\overline{p} : \overline{M} \to N$, где N — абстрактная риманова поверхность, является внутренним (в смысле Стоилова), т.е. открытым и изолированным. Тогда, как известно, отображение $p = \overline{p}|_M$ индуцирует на M комплексную структуру, относительно которой p является голоморфным отображением и $\sigma = (M, p)$ есть риманова поверхность над N. Пусть $\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ — простые замкнутые кривые, обходящие компоненты края ∂M в положительном направлении и $\beta_1 = \overline{p}(\alpha_1), \ldots, \beta_\nu = \overline{p}(\alpha_\nu)$ — их проекции. Тогда, допуская вольность речи, будем говорить,что *риманова поверхность σ ограничена кривыми* $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$. Пару $\overline{\sigma} = (\overline{M}, \overline{p})$ будем называть каноническим расширением σ, вызванным присоединением края. Очевидно, что $\overline{\sigma}$ определяется единственным образом с точностью до эквивалентности: если $\overline{\sigma}_i = (\overline{M}_i, \overline{p}_i)$, $i = 1, 2,$ — два таких расширения, то существует гомеоморфизм $h : \overline{M}_1 \to \overline{M}_2$ такой, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} \overline{M}_1 \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\overline{p}_1"'] & & \overline{M}_2 \arrow[dl, "\overline{p}_2"] \\ & N & \end{tikzcd}$$

причем $h|_M = \mathrm{id}_M$. Будем говорить, что пара $\overline{\sigma} = (\overline{M}, \overline{p})$ есть *риманова поверхность с краем* над N, *ограниченная кривыми* $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$.

При рассмотрении римановых поверхностей, ограниченных кривыми, естественно возникают следующие задачи.

Задача 4.1 *Предположим, что риманова поверхность σ ограничена кривыми $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$. Найти связь между топологическими характеристиками поверхности σ и кривых $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$.*

Задача 4.2 *Пусть заданы кривые $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$ на N. Существует ли риманова поверхность σ, ограниченная кривыми $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$?*

В этом параграфе мы исследуем задачу 4.1. Сначала установим теорему о связи числа листов поверхности σ над двумя произвольными точками a, $b \in N \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{\nu} |\beta_j|$, которая является своеобразным обобщением классического принципа аргумента. Предварительно введем необходимые понятия.

Пусть точка $a \in N$. Тогда *число листов σ над точкой a* есть

$$n_\sigma(a) = \sum_{p(P)=a} [\operatorname{ord}(P, \sigma) + 1]. \tag{4.1}$$

Пусть кривые ω_1, ω_2 на N находятся в общем положении, т.е. концы кривой ω_i, если ω_i не замкнута, не лежат на ω_j при $i \neq$j. Тогда через $\kappa(\omega_1, \omega_2)$ обозначим индекс пересечения кривых ω_1 и ω_2 (см. [43], §73). Справедлива

Теорема 4.1 *Пусть $\sigma = (M, p)$ — риманова поверхность над N, ограниченная кривыми β_j, $j = 1, \ldots, \nu$, а точки a, $b \in N \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{\nu} |\beta_j|$. Тогда величины $n_\sigma(b)$ и $n_\sigma(a)$ конечны и*

$$n_\sigma(b) - n_\sigma(a) = \sum_{j=1}^{\nu} \kappa(\beta_j, \omega) \tag{4.2}$$

где ω — любая кривая в N, соединяющая точки a и b.

Отметим, что теорема 4.1 обобщает один результат Эзелля и Маркса [125] на случай произвольных поверхности N и граничных кривых $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Установим, что функция $n_\sigma(a)$, определенная формулой (4.1), конечна и локально постоянна в $N \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{\nu} |\beta_j|$ (см. также [4]). Пусть $\overline{\sigma} = (\overline{M}, \overline{p})$ — каноническое расширение σ, вызванное присоединением края. Так как отображение p аналитично, прообраз $p^{-1}(a)$ — дискретное множество для любой точки $a \in N$. Если $a \in N \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{\nu} |\beta_j|$, то $p^{-1}(a)$ компактно, так как совпадает с замкнутым подмножеством компакта $\overline{M}$. Следовательно, множество $p^{-1}(a) = \{a_1, \ldots, a_k\}$ конечно.

Из леммы 1.1 следует, что существуют обобщенные n_i-листные круги $K_i = (E, 0, g_i)$ и морфизмы $\psi_i : K_i \hookrightarrow \sigma(a_i)$, $i = 1, \ldots, k$. Без ограничения общности можно считать, что $p \circ g_i(E) = G$ не зависит от i, $i = 1, \ldots, k$. Для любой точки $b \in G \backslash \{a\}$ множество $p^{-1}(b)$ содержит множество $\bigcup_{i=1}^{k} \left(p|_{g_i(E)}\right)^{-1}(b)$. Так как $\bigcup_{i=1}^{k} \left(p|_{g_i(E)}\right)^{-1}(b)$ содержит ровно n_i точек, то $n_\sigma(b) \geq \operatorname{card} p^{-1}(b) \geq \sum\limits_{i=1}^{k} n_i = n_\sigma(a)$.

Докажем, что $n_\sigma(b) = n_\sigma(a)$ в некоторой окрестности точки a. В противном случае существует последовательность $\{b_n\}$ в G такая, что $b_n \to a$, $n \to \infty$, и $n_\sigma(b_n) > n_\sigma(a)$. Отсюда вытекает существование последовательности $\{b'_n\}$ в $M \backslash \bigcup_{i=1}^{k} \psi_i(E)$ такой, что $p(b'_n) = b_n$, $n \geq 1$. Так как $\overline{M}$ компактно, то существует подпоследовательность $\{b'_{n_k}\}$, сходящаяся к некоторой точке $a' \in \overline{M}$. Но тогда $b_{n_k} = p(b'_{n_k}) \to a$, откуда следует, что $\overline{p}(a') = a$. Значит, $a' \in \bigcup_{i=1}^{k} g_i(E)$, и так как это множество открыто, то $b'_{n_k} \in \bigcup_{i=1}^{k} g_i(E)$ при достаточно больших k.

Итак, мы показали, что $n_\sigma(a)$ есть локально постоянная функция в $N \backslash \bigcup_{j=1}^{\nu} |\beta_j|$. Одновременно из доказательства следует, что проекция $p(V)$ множества точек ветвления V римановой поверхности σ дискретно в N, поэтому в дальнейшем будем считать, что $a, b \notin p(V)$.

Теперь покажем, что кривые $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$ можно считать аналитическими и локально простыми. По теореме о воротнике (см., напр., [56], с. 319) у каждой компоненты края $|\alpha_i|$ поверхности $\overline{M}$ существует окрестность V_i, гомеоморфная кольцу $\{z \in \mathbb{C} | \, r \leq |z| \leq R\}$, $0 < r < R < \infty$. Пусть $\widetilde{\alpha}_i$ — простая замкнутая аналитическая кривая в $\overset{\circ}{V}_i \backslash V$, свободно гомотопная кривой α_i в V_i, а W_i является частью V_i, ограниченной кривыми α_i и $(\widetilde{\alpha})^{-}$. Можно считать, что W_i настолько малой, что $W_i \cap p^{-1}(\{a, b\}) = \emptyset$, $i = 1, \ldots, \nu$. Тогда, удаляя из $\overline{M}$ воротники W_i, $i = 1, \ldots, \nu$, получаем риманову поверхность σ' над N, ограниченную аналитическими локально простыми кривыми $\widetilde{\beta}_i = p(\widetilde{\alpha}_i)$, $i = 1, \ldots, \nu$. Ясно, что кривые $\widetilde{\beta}_i$ можно считать попарно различными. Из (4.1) следует, что

$$n_\sigma(a) = n_{\sigma'}(a), \quad n_\sigma(b) = n_{\sigma'}(b), \tag{4.3}$$

а так как α_i свободно гомотопна $\widetilde{\alpha}_i$, то $\beta_i = \overline{p}(\alpha_i)$ свободно гомотопна $\widetilde{\beta}_i = p(\widetilde{\alpha}_i)$, $i = 1, \ldots, \nu$. Из свойств индекса пересечения кривых следует, что

$$\kappa(\beta_i, \omega) = \kappa(\widetilde{\beta}_i, \omega), \quad i = 1, \ldots, \nu. \tag{4.4}$$

Поэтому достаточно доказать формулу (4.2) для случая аналитических граничных кривых.

3) Итак, считаем, что β_i аналитичны, локально просты и попарно различны. Проводя еще раз рассуждения п.2, найдем кривые $\widetilde{\beta}_i$, которые аналитичны, локально просты, попарно различны и ограничивают риманову поверхность $\sigma' = (M', p')$, причем имеют место соотношения (4.3) и (4.4). Осталось доказать, что

$$n_{\sigma'}(b) - n_{\sigma'}(a) = \sum_{j=1}^{\nu} \kappa(\widetilde{\beta}_j, \omega).$$

Отметим, что кривые β_i и $\widetilde{\beta}_j$ можно считать различными для любых i, j. Тогда в силу известного свойства аналитических кривых множество Λ точек пересечения и самопересечения кривых $\beta_i, \widetilde{\beta}_i$, $i = 1, \ldots, \nu$, не более, чем конечно.

Теперь заметим, что сумма $\sum\limits_{j=1}^{\nu} \kappa(\widetilde{\beta}_j, \omega)$ не зависит от выбора кривой ω. Действительно, цикл $\sum\limits_{j=1}^{\nu} \widetilde{\beta}_j$ гомологичен нулю, так как является образом границы $\sum\limits_{j=1}^{\nu} \alpha_j$ в $\overline{M}$ при отображении $\overline{p}$. Если ω_1 и ω_2 — две кривые, соединяющие точки a и b, то $\omega_1 \omega_2^-$ есть цикл, а поскольку индекс пересечения циклов зависит только от их гомологических классов, то

$$0 = \kappa(0, \omega_1, \omega_2^-) = \kappa(\sum_{j=1}^{\nu} \widetilde{\beta}_j, \omega_1, \omega_2^-) = \sum_{j=1}^{\nu} [\kappa(\widetilde{\beta}_j, \omega_1) - \kappa(\widetilde{\beta}_j, \omega_2)],$$

что и требовалось доказать.

Так как множество Λ конечно и $p(V)$ дискретно, то можно найти простую кривую ω, соединяющую в N точки a и b, пересекающую кривые $\widetilde{\beta}_1, \ldots, \widetilde{\beta}_\nu$ трансверсально в конечном числе точек $b_1, \ldots, b_m$ принадлежащих множеству $N \backslash \left(\bigcup_{j=1}^{\nu} |\beta_j| \cup p(V) \cup \Lambda \right)$. Используя рассуждения п. 1), найдем у точек b_i связные окрестности U_i, такие, что $p^{-1}(U_i)$ есть дизъюнктное объединение окрестностей $U_i^{(j)}$ точек $b_i^{(j)}$, где $\{b_i^{(j)}, j = 1, \dots, k_i\} = p^{-1}(U_i)$, причем $p|_{U_I^{(j)}}$ гомеоморфно отображает $U_i^{(j)}$ на U_i, $j = 1, \dots, k_i$, т. к. $b_j \notin p(V)$.

Так как $b_j \notin \Lambda$, то среди точек $b_i^{(j)}$, $j = 1, \dots, k_i$, ровно одна точка, скажем $b_i^{(1)}$, лежит на $\partial M' = \bigcup\limits_{j=1}^{\nu} |\widetilde{\alpha}_j|$. Пусть $b_i^{(1)} \in |\widetilde{\alpha}_{l(i)}|$, тогда $b_i \in |\widetilde{\beta}_{l(i)}|$. Уменьшая в случае необходимости U_i, можно добиться того, чтобы U_i не содержала точек кривых $\widetilde{\beta}_j$ при $j \neq l(i)$, а кривая $\widetilde{\beta}_{l(i)}$ разбивала U_i на две части U_i' и U_i'' , причем U_i' лежит «слева» от $\widetilde{\beta}_{l(i)}$. Тогда ясно, что $\bigcup_{j=2}^{k_i} U_i^{(j)} \subset M'$ и кривая $\alpha_{l(i)}$ разбивает $U_i^{(1)}$ на две части $\widetilde{U}_i'$ и $\widetilde{U}_i''$, причем $p(\widetilde{U}_i') = U_i'$, $p(\widetilde{U}_i'') = U_i''$. Значит, $(p')^{-1}(U) = \widetilde{U}_i' \bigcup \left(\bigcup_{j=2}^{k_i} U_i^{(j)}\right)$, откуда следует, что для любых двух точек $a' \in U_i'$, $a'' \in U_i''$ справедливы равенства $n_{\sigma'}(a') = k_i + 1$, $n_{\sigma'}(a'') = k_i$, откуда

$$n_{\sigma'}(a') - n_{\sigma'}(a'') = 1, \quad a' \in U_i', \ a'' \in U_i''. \tag{4.5}$$

Представим, наконец, ω в виде $\omega = \omega_1\omega_1'\omega_2\omega_2' \dots \omega_m\omega_m'\omega_{m+1}$, где ω_i не пересекается с кривыми $\widetilde{\beta}_j$, а ω_i' лежит в U_i и пересекает $\bigcup_{j=1}^{\nu} |\widetilde{\beta}_j|$ в единственной точке b_i, $i = 1, \dots, m$. Пусть концы кривой ω_i есть a_i и b_i, $a_1 = a$, $b_{m+1} = b$. Очевидно, что $\kappa(\widetilde{\beta}_j, \omega_i) = 0$, $j = 1, \dots, \nu$, $i = 1, \dots, m$. Поскольку, как показано в п. 1) функция $n_{\sigma'}(a)$ локально постоянна вне носителей кривых $\widetilde{\beta}_j$, $j = 1, \dots, \nu$, то $n_{\sigma'}(a_i) = n_{\sigma'}(b_i)$, $i = 1, \dots, m+1$. Нетрудно видеть в силу (4.5), что

$$n_{\sigma'}(a_{i+1}) - n_{\sigma'}(b_i) = \kappa(\widetilde{\beta}_{l(i)}, \omega_i') = \sum_{j=1}^{\nu} \kappa(\widetilde{\beta}_j, \omega_i').$$

Следовательно,

$$n_{\sigma'}(b) - n_{\sigma'}(a) = n_{\sigma'}(b_{m+1}) - n_{\sigma'}(a_1) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m+1} [n_{\sigma'}(b_i) - n_{\sigma'}(a_i)] + \sum_{i=1}^{m} [n_{\sigma'}(a_{i+1}) - n_{\sigma'}(b_i)] =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}[n_{\sigma'}(a_{i+1}) - n_{\sigma'}(b_i)] = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{\nu}\kappa(\widetilde{\beta}_j, \omega_i') =$$

$$= \sum_{j=1}^{\nu}\left(\sum_{i=1}^{m}\kappa(\widetilde{\beta}_j, \omega_i') + \sum_{i=1}^{m+1}\kappa(\widetilde{\beta}_j, \omega_i)\right) = \sum_{j=1}^{\nu}\kappa(\widetilde{\beta}_j, \omega).$$

Теорема 4.1 доказана.

Ниже мы установим связь между суммарной кратностью точек σ и характеристиками граничных кривых (§ 5). Введем понятие граничной точки ветвления. Пусть $\sigma = (M, p)$ ограничена кривыми $\beta_1, \dots, \beta_\nu$ и $\overline{\sigma} = (\overline{M}, \overline{p})$ — расширение σ, вызванное присоединением края. ***Кратностью ветвления*** σ в точке $P \in \overline{M}$ назовем число $\operatorname{ord}(P, \sigma) = \inf(A \cup \{\infty\})$, где $A = \{n \in \mathbb{N} |$ существует окрестность U точки P в $\overline{M}$, в которой $\overline{p}$ топологически эквивалентно $(n+1)$-й степени непрерывного инъективного отображения $f : U \to \mathbb{C}\}$. Если $n = \operatorname{ord}(P, \sigma) > 0$, то назовем P ***точкой ветвления*** поверхности σ ***порядка*** n, ***внутренней***, если $P \in M$, и ***граничной***, если $P \in \partial$M. Ясно, что для внутренних точек определение $\operatorname{ord}(P, \sigma)$ совпадает с введенным ранее.

Пусть $V(\sigma) = \sum\limits_{P \in \overline{M}} \operatorname{ord}(P, \sigma)$ — суммарная кратность точек ветвления $\overline{\sigma}$, внутренних и граничных. Представляет интерес описание классов граничных кривых $\beta_1, \dots, \beta_\nu$, для которых $V(\sigma) < \infty$, какова бы ни была риманова поверхность, ограниченная этими кривыми. Одним из таких классов, причем достаточно широким, является класс квази- локально простых кривых, который в случае $N = \overline{\mathbb{C}}$ был введен в [4].

Пусть β — кривая в N с представлением $z : [0, 1] \to N$. Назовем β ***квази- локально простой***, если для любой точки $t \in [0, 1]$ существует ее окрестность W такая, что $z|_W$ топологически эквивалентно $(n+1)$-й степени некоторого инъективного непрерывного отображения $h : W \to \mathbb{C}$, где $n \in \mathbb{N}$ — некоторое число. Если β замкнута, то аналогичному условию должно удовлетворять периодическое продолжение $\widetilde{z} : [0, 1] \to N$ отображения z.

Пусть β — замкнутая квази- локально простая кривая в N. Для любого $t \in [0, 1]$ рассмотрим множество $A_t = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists$ окрестность W точки t в $\mathbb{R}$ такая, что $z|_W$ эквивалентно $(n+1)$-й степени некоторого инъективного непрерывного отображения $h : W \to \mathbb{C}\}$. Пусть

$n_t = \min A_t$. Назовем точку кривой β, соответствующую параметру t, *точкой порядка* n_t, причем *особой*, если $n_t > 0$, и *простой*, если $n_t = 0$. Так как степенное отображение $z \mapsto z^n$ является локально гомеоморфным в $\mathbb{C}$ за исключением, быть может, точки $z = 0$, то справедливо

Утверждение 4.1 *Множество особых точек квази- локально простой кривой в N не более, чем конечно.*

Определим индекс Уитни $w(\beta)$ замкнутой квази- локально простой кривой β в $\overline{\mathbb{C}}$ (см. [4], [5]).

Для этого введем операцию вдавливания для квази- локально простой кривой β на сфере $\overline{\mathbb{C}}$. Пусть точка P принадлежит замкнутой дуге кривой β, причем:

а) все точки дуги α являются простыми, за исключением, быть может, точки P индекса $n \geq 0$;

б) концы дуги α являются простыми точками β.

Тогда существует простая дуга γ в $\mathbb{C}$, проходящая через начало координат и гомеоморфизм $f : U \to \overline{\mathbb{C}}$, где U — окрестность нуля в $\mathbb{C}$ такие, что $\alpha = f \circ h(\gamma)$, где $h(z) = z^{n+1}$, $z \in \mathbb{C}$. Пусть γ_1 — простая замкнутая дуга в $\mathbb{C}$, имеющая те же начальную и конечную точки, что и γ, такая, что

1) кривая $\gamma(\gamma_1)^-$ является границей жордановой области G в $\mathbb{C}$, причем $h(\overline{G}) \subset U$,

2) существует дуга α' кривой β, содержащая внутри себя дугу α такая, что $f \circ h(\overline{G}) \cap (|\alpha'| \backslash |\alpha|) = \emptyset$.

Обозначим $\alpha_1 = f \circ h(\gamma_1)$. Будем говорить, что кривая β_1, полученная из β заменой дуги α на дугу α_1, является результатом *вдавливания кривой β вдоль дуги α.*

Если точка P является начальной точкой замкнутой кривой β, то вдавливание определяется аналогичным образом, следует только сместить начало кривой β, произвести вдавливание, а затем перенести начальную точку в одну из точек дуги α_1.

Если в условии 1) вместо кривой $\gamma(\gamma_1)^-$ поставить $\gamma_1\gamma^-$, то соответствующую операцию назовем операцией *выдавливания кривой β вдоль дуги α.* Соответствующую область $f \circ h(G)$ будем называть *областью вдавливания (выдавливания).*

Теперь определим индекс Уитни $w(\beta)$. Для гладкой кривой β, не проходящей через точку ∞, характеристика $w(\beta)$ есть число оборотов касательной при обходе кривой. Для локально простой кривой $w(\beta)$ — число оборотов достаточно малой хорды (см. [64]). В случае квази- локально простой кривой β осуществим конечное число выдавливаний в окрестности особых точек кривой β. В результате получаем локально простую кривую $\widetilde{\beta}$, и по определению полагаем $w(\beta) = w(\widetilde{\beta})$. Нетрудно показать, что это определение корректно.

Дадим конструктивную характеристику замкнутых квази- локально простых кривых. Пусть множество $A \subset \mathbb{Z}$. Обозначим через $d(A)$ множество натуральных n таких, что n является делителем некоторого $m \in A$. Пусть $k+A = \{k+m \mid m \in A\}$. Введем множество $QLP(N)$ замкнутых кривых γ в N, удовлетворяющих следующим условиям:

a) γ определяется отображением $z : [0,1] \to N$, 1-периодическое продолжение которого $\widetilde{z}$ локально инъективно за исключением, быть может, конечного множества точек $F(\gamma) = \{t_1, \dots, t_n\} \in [0,1)$.

b) Для каждой точки $t \in F(\gamma)$ существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что $\widetilde{z}(\tau) \neq \neq \widetilde{z}(t)$ при $0 < |\tau - t| < \varepsilon_0$.

c) Пусть $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и настолько мало, что $\widetilde{z}([t-\varepsilon, t+\varepsilon])$ лежит в односвязной открытой окрестности U точки $\widetilde{z}(t)$ и

$$\phi_j(\tau) = \mathrm{Arg}[h \circ \widetilde{z}(\tau)], \quad j = 1, 2, \tag{4.6}$$

где $h : U \to \mathbb{C}$ — некоторое непрерывное инъективное отображение, сохраняющее ориентацию, такое, что $h(\widetilde{z}(t)) = 0$, а ветви функции Arg выбраны при $j = 1$, 2, непрерывными на участках $T_1 = [t-\varepsilon, t)$ и $T_2 = (t, t+\varepsilon]$ соответственно. Определим множества

$$\begin{aligned} L_{kj}(\varepsilon) = \{l \in \mathbb{Z} \mid \exists \tau_1 \in T_k, \tau_2 \in T_j, \tau_1 \neq \tau_2 : \\ \widetilde{z}(\tau_1) \neq \widetilde{z}(\tau_2);\ \phi(\tau_2) - \phi(\tau_1) = 2\pi l\}, \end{aligned} \tag{4.7}$$

$k, j = 1$, 2, и

$$L(m) = \mathbb{N} \setminus \bigcap_{\varepsilon > 0} d\left(L_{11}(\varepsilon) \cap L_{22}(\varepsilon) \cap (m + L_{12}(\varepsilon))\right), \tag{4.8}$$

где $m \in \mathbb{Z}$. Требуется, чтобы существовало такое m, чтобы множество $L(m)$ было непусто.

Теорема 4.2 *Класс QLP(N) совпадает с классом замкнутых квази- локально простых кривых в N. Если $z : [0,1] \to N$ — представление квази- локально простой кривой γ, то индекс особой точки кривой γ, соответствующей значению параметра t, определяется по формуле $n_t = -1 + \min \cup_{m\in\mathbb{Z}} L(m)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть γ — квази- локально простая кривая в N, $z : [0,1] \to N$ — ее представление с периодическим продолжением $\widetilde{z} : \mathbb{R} \to N$ и t — некоторая особая точка кривой γ. Тогда существует непрерывное инъективное отображение h малой окрестности точки $\widetilde{z}(t)$ в $\mathbb{C}$ такое, что $h(\widetilde{z}(t)) = 0$, причем

$$h(\widetilde{z}(\tau)) = (g(\tau))^n, \tag{4.9}$$

где $g : W \to \mathbb{C}$ — непрерывное инъективное отображение окрестности $W = (t-\varepsilon, t+\varepsilon)$ точки t в $\mathbb{C}$. Пусть U — достаточно малая открытая окрестность точки $w = 0$ и $\mathbb{C}$ такая, что $U \cap g(W)$ связно. Тогда $g(W)$ разбивает U на две части U_1 и U_2. Так как U_1 не содержит начала координат, то в U_1 определена однозначная ветвь функции $\omega = \operatorname{Ln}\zeta$. Пусть β_1 и β_2 — дуги на ∂U_1, определяемые отображениями $g|_{T_1}$ и $g|_{T_2}$ соответственно. Так как $|\beta_1| \cap |\beta_2| = \emptyset$, то в плоскости $\omega = \operatorname{Ln}\zeta$ дугам β_1 и β_2 соответствуют две простые непересекающиеся дуги γ_1 и γ_2, причем на $|\gamma_1| \cap |\gamma_2|$ нет точек, отличающихся друг от друга на $2\pi q\sqrt{-1}$, $q \in \mathbb{Z}$. В плоскости $w = n\omega = n\operatorname{Ln}\zeta$ дугам γ_1 и γ_2 соответствуют дуги δ_1 и δ_2, которые определяются отображениями $w = n\operatorname{Ln} g|_{T_j}$, $j = 1, 2$. Пусть функции ϕ_j определены по формуле (4.6). Тогда в силу (4.9) имеем $\phi_j(\tau) = \operatorname{Im}\{n\operatorname{Ln} g(\tau)\} = \operatorname{Im} w_j(\tau) + {}$ ${}+2\pi l_j$, $\tau \in T_j$, для некоторых чисел $l_j \in \mathbb{Z}$, $j = 1, 2$, поскольку ветвь аргумента определена с точностью до числа, кратного 2π.

Из (4.7) и того факта, что на $|\delta_1| \cup |\delta_2|$ нет точек, отличающихся на $2\pi qn\sqrt{-1}$, $q \in \mathbb{Z}$, следует, что

$$n \neq d(L_{11}(\varepsilon)), \quad n \neq d(L_{22}(\varepsilon)) \ \text{ и } \ n \neq d(m + L_{12}(\varepsilon)), \tag{4.10}$$

где $m = l_1 - l_2$. Так как множества $L_{kj}(\varepsilon)$ увеличиваются при уменьшении ε, то из (4.8) следует, что $n = n_t \in L(m)$. Значит, $L(m) \neq \infty$. Поскольку это верно для любой точки t, то $\gamma \in QLP(N)$. При этом доказано, что $n_t \geq -1 + \min \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} L(m)$, $t \in [0, 1)$.

Обратно, пусть $\gamma \in QLP(N)$ и $n = \min \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} L(m)$. Предположим, что существует m такое, что $n \in L(m)$. Учитывая монотонность множеств $L_{kj}(\varepsilon)$ по ε, заключаем, что для некоторого $\varepsilon > 0$ имеет место (4.10). Пусть δ_1 и δ_2 — дуги в плоскости w с представлениями

$$w_j = \mathrm{Ln}(h \circ \widetilde{z})|_{T_j} = (\ln|h \circ \widetilde{z}| + \sqrt{-1}\,\phi_j)|_{T_j}, \quad i = 1, 2.$$

Тогда $|\delta_1| \bigcup |\delta_2|$ не содержит точек, отличающихся на $2\pi qn\sqrt{-1}$, $q \in \mathbb{Z}$. Значит, кривая β с представлением $\zeta(\tau) = \exp(w_j(\tau)/n)$, $\tau \in T_j$, $\zeta(\tau) = 0$, является простой. Поэтому γ — квази- локально простая кривая и индекс $n_t \le n - 1 = -1 + \min \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} L(m)$. Значит, $n_t = -1 + \min \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} L(m)$ и теорема 4.2 доказана.

Приведем теперь утверждения, часто используемые в дальнейшем.

Лемма 4.1 *Пусть D — область в $\mathbb{C}$ и L — жорданова дуга в D, разбивающая D на две части D_1 и D_2. Если отображение $f : D \to \overline{\mathbb{C}}$ непрерывно в D, не переводит никакой континуум на L в точку, является внутренним в каждой из областей D_i и сохраняющим ориентацию, то отображение f — внутреннее в D.*

Это конкретизация теоремы Ю. Ю. Трохимчука ([97], с. 84). Для локально однолистных отображений аналогичный результат сформулирован Ф. Г. Авхадиевым [1].

Применим лемму 4.1 к склеиванию римановых поверхностей над римановой поверхностью N.

Теорема 4.3 *Пусть $\overline{\sigma}_i = (\overline{M}_i, \overline{p}_i)$ — римановы поверхности над N с краями ∂M_i, $i = 1, 2$, причем на $\overline{\sigma}_i$ существует кривая α_i, обходящая одну из компонент края ∂M_i в положительном направлении, $i = 1, 2$, и выполнено условие $\overline{p}_1(\alpha_1) = \overline{p}_2(\alpha_2^-) = \beta$. Если $\overline{M}$ получается из несвязной суммы $\overline{M}_1 \sqcup \overline{M}_2$ отождествлением точек края, которым соответствует одна и та же точка кривой β, и отображение $\overline{p} : \overline{M} \to N$ совпадает с $\overline{p}_i$ на $\overline{M}_i$, то $(\overline{M}, \overline{p})$ — риманова поверхность с краем над N.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $P_i \in |\alpha_i|$, $i = 1, 2,$ — такие точки, которые проектируются в одну и ту же точку Q кривой β. Пусть $D_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \operatorname{Im} z \ge 0\}$, $D_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \operatorname{Im} z \le 0\}$ и

$h_i : D_i \to \overline{M}_i$, $i = 1, 2$, — непрерывные инъективные отображения, такие, что $h_i(0) = P_i$, $h_i((-1,1)) \subset \partial M_i$, $i = 1, 2$. Тогда $g_i = h_i|_{(-1,1)}$ есть представление кривой α_i, $i = 1, 2$, поэтому $\overline{p}_1 \circ \overline{g}_1$ и $\overline{p}_2 \circ \overline{g}_2$ являются представлениями кривой β, т. е. отличаются на некоторый гомеоморфизм в малых окрестностях нуля. Таким образом, без ограничения общности можно считать, что $\overline{p}_1 \circ \overline{g}_1(t) = \overline{p}_2 \circ \overline{g}_2 \circ h(t)$, $-1 < t < 1$, причем $h((-1,1)) = (-1,1)$. Определим отображение $H(x,y) = (h(x), y)$, $|x| < 1$, $y \in \mathbb{R}$. Пусть $\widetilde{D}_1 = H(D_1)$. Тогда в области $D = \widetilde{D}_1 \cup D_2$ определено отображение $\widetilde{h} : D \to M$, которое задает некоторый локальный параметр в окрестности точки $P \in \overline{M}$, в которую переходят точки P_1 и P_2. Отображение $\overline{p}$ в терминах этого локального параметра имеет вид $\overline{p} \circ \widetilde{h}$ и удовлетворяет условиям леммы 4.1. Значит, отображение $\overline{p} \circ \widetilde{h}$ является внутренним, поэтому и $\overline{p}$ — внутреннее. Наконец, $\overline{p}$ индуцирует на $\overline{M}$ комплексную структуру с римановой поверхности N, что и доказывает теорему.

Теорема 4.4 ([5]). *Пусть ρ — целое неотрицательное число, $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$ — замкнутые квази- локально простые кривые в $\overline{\mathbb{C}}$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Существует риманова поверхность $\sigma = (M, p)$ над $\overline{\mathbb{C}}$ рода ρ, ограниченная кривыми $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$.*

(2) *Более того, можно построить такую риманову поверхность σ без внутренних точек ветвления.*

(3) *Если кривые $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$ являются локально простыми, то можно построить такую риманову поверхность без граничных точек ветвления.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждения (1) и (3) доказаны в [5] Ф. Г. Авхадиевым. Приведем несколько измененные их доказательства, а также установим справедливость (2).

Предварительно установим следующую лемму.

Лемма 4.2. *Пусть β — замкнутая квази- простая кривая в $\overline{\mathbb{C}}$. Тогда существует двусвязная риманова поверхность $\sigma = (M, p)$ над $\overline{\mathbb{C}}$ рода нуль и простая замкнутая кривая α на M, разделяющая M, такая, что $p(\alpha) = \beta$. Если β локально проста, то можно построить такую поверхность без точек ветвления.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем уравнение β в виде

$$z = h(e^{\sqrt{-1}\, t}), \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Докажем, что существует продолжение функции h с единичной окружности до внутреннего по Стоилову отображения $\widetilde{h}$ кругового кольца $\{1-\delta < |\zeta| < 1+\delta\}$, которое является локально однолистным кроме точек единичной окружности, соответствующих особым точкам кривой β. Тогда $\widetilde{h}$ будет индуцировать в кольце комплексную структуру с плоскости, превращая его в искомую риманову поверхность. Ясно, что вместо продолжения функции, заданной на окружности, можно искать 2π-периодическое продолжение 2π-периодической функции $f(t) = h(e^{\sqrt{-1}\, t})$, заданной на прямой $\mathbb{R}$.

Рассмотрим гомеоморфизм $f : A \to f(A) \subset \mathbb{R}^2$ замкнутого множества $A \subset \mathbb{R}^2$ на свой образ. В дальнейшем для краткости слова «на свой образ» будем опускать.

В силу известных результатов о продолжении гомеоморфизмов (см., напр., [52], с. 527) в случае, если A — замкнутая дуга, любой гомеоморфизм A может быть продолжен до гомеоморфизма всей плоскости на себя. Применяя этот факт, последовательно установим справедливость следующих утверждений.

1) *Любой гомеоморфизм отрезка $[a, b]$ может быть продолжен до гомеоморфизма всей плоскости, сохраняющего ориентацию.*

2) *Пусть $Q = [a, b] \times [0, 1]$ и S — часть границы Q, состоящая из нижнего основания и вертикальных сторон. Тогда любой гомеоморфизм S может быть продолжен до гомеоморфизма Q, сохраняющего ориентацию.* Действительно, S гомеоморфно отрезку.

3) *Любой локальный гомеоморфизм f отрезка $[a, b]$ может быть продолжен до локального гомеоморфизма Q, сохраняющего ориентацию.* Для доказательства этого заметим, что для любого $\tau \in [a, b]$ существует число $\varepsilon = \varepsilon(\tau) > 0$ такое, что f является гомеоморфизмом на $A \cap B_\varepsilon(\tau)$, где $B_\varepsilon(\tau) = (\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon)$. Пусть δ — число Лебега покрытия $[a, b] \subset \cup_{\tau \in [a,b]} B_\varepsilon(\tau)$. Фиксируем разбиение

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$$

отрезка $[a, b]$ с диаметром меньшим, чем $\delta/2$ так, чтобы

$$f(t_{k-1}) \ne f(t_k), \quad 1 \le k \le n. \tag{4.11}$$

Положим для удобства $t_{-1} = a$, $t_{n+1} = b$. Тогда для любого k, $0 \le k \le n$, в силу 1) существует продолжение на всю плоскость гомеоморфизма $f|_{[t_{k-1}, t_{k+1}]}$ до гомеоморфизма g_k, сохраняющего ориентацию.

Для любого фиксированного $s > 0$ пусть множество $A = A_s$ есть «гребенка», получающаяся объединением отрезка $[a, b]$ и вертикальных отрезков V_k длины s, нижние концы которых совпадают с точками t_k, $0 \le k \le n$. Определим на A непрерывное отображение g так, чтобы на $[a, b]$ оно совпадало с f, а на V_k — с g_k, $0 \le k \le n$. Используя (4.11), можем, уменьшая в случае необходимости s, считать, что множества $g(V_{k-1})$ и $g(V_k)$ не пересекаются, $1 \le k \le n$. Тогда g является гомеоморфизмом на каждом из множеств $[t_{k-1}, t_k] \cup V_{k-1} \cup V_k$. В силу 2) g можно продолжить на $[a, b] \times [0, s]$ так, что на каждом $[t_{k-1}, t_k] \times [0, s]$ это продолжение гомеоморфно и сохраняет ориентацию. В силу леммы 4.1 это продолжение $\widetilde{g}$ оно является локальным гомеоморфизмом на $[a, b] \times [0, s]$, за исключением, быть может, точек t_k, $1 \le k \le n - 1$.

Для доказательства того, что $\widetilde{g}$ локально гомеоморфно в точках t_k, заметим, что если мы ориентируем кривую C с представлением

$$f(t), \quad a \le t \le b, \tag{4.12}$$

считая положительным направление, соответствующее возрастанию параметра t, то кривые C_k с представлениями $g(t_k + \sqrt{-1}\, t)$, $0 \le t \le s$ подходят к ней слева в точках $f(t_k)$. Следовательно, точки из прямоугольников $(t_{k-1}, t_k) \times (0, s)$ и $(t_k, t_{k+1}) \times (0, s)$, достаточно близкие к t_k, отображаются функцией $\widetilde{g}$ в точки, лежащие по разные стороны от кривой C_k. Отсюда следует локальная однолистность $\widetilde{g}$ в точках t_k.

Суперпозиция $\widetilde{g}$ с растяжением вдоль оси ординат дает нужное отображение.

4) *Рассмотрим теперь отображение f отрезка $[a, b]$, которое локально однолистно за исключением конечного числа внутренних точек τ_j отрезка $[a, b]$, в окрестности которых оно является суперпозицией некоторого гомеоморфизма ϕ_j и степенного отображения*

$$w_j(z) = f(\tau_j) + (z - \phi_j(\tau_j))^{n_j}, \quad n_j > 1. \tag{4.13}$$

Тогда f можно продолжить до отображения $\widetilde{f}$ прямоугольника Q, *которое локально однолистно за исключением, быть может, точек τ_j, в окрестности которых $\widetilde{f}$ является суперпозицией гомеоморфизма и отображения* (4.13).

Как и при доказательстве п. 3), выберем ε настолько малым, чтобы в ε-окрестности любой точки отрезка $[a, b]$ отображение f было либо однолистным, либо (в случае точек τ_j) суперпозицией гомеоморфизма и отображения (4.13). Выберем разбиение

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$$

отрезка $[a, b]$ с диаметром, меньшим ε, так, чтобы точки τ_j не являлись точками разбиения, образы $f(t_k)$ не совпадали с точками $f(\tau_j)$ и выполнялось условие (4.11). Как и в п. 3), продолжим f на «гребенку» A_s до отображения g, локально гомеоморфного на A_s за исключением точек τ_j. Можно считать, что g однолистно на зубьях «гребенки» и соответствующие зубьям кривые подходят «слева» к кривой C с уравнением (4.12). Если $[t_{k-1}, t_k] \ni \tau_j$, то на $[t_{k-1}, t_k] \cup V_{k-1} \cup V_k$ определен гомеоморфизм ψ_j такой, что $(\psi_j)^{n_j} = g$ этом множестве. Продолжим ψ_j до гомеоморфизма Φ_j на $[t_{k-1}, t_k] \times [0, s]$, тогда $(\Psi_j)^{n_j}$ дает продолжение функции g в этот прямоугольник. Если же $[t_{k-1}, t_k]$ не содержит точек t_j, то продолжим g в $[t_{k-1}, t_k] \times [0, s]$ до гомеоморфизма F_k, как и в п. 3). В результате получим искомое отображение $\widetilde{f}$ в Q, которое равно $(\Psi_j)^{n_j}$ в $[t_{k-1}, t_k] \times [0, s]$, если $[t_{k-1}, t_k] \ni \tau_j$ для некоторого τ_j и F_k в противном случае.

Вернемся к доказательству леммы 4.2. Рассмотрим 2π-периодическое отображение f отрезка $[0, 2\pi]$, которое локально однолистно на любом отрезке прямой за исключением конечного числа точек τ_j, окрестности которых f является суперпозицией некоторого гомеоморфизма и отображения (4.13). Можно считать, что f локально однолистно в точке 0. Осуществим как в п. 4) продолжение f с отрезка $[-\varepsilon, 2\pi + \varepsilon]$ до отображения $\widetilde{f}$, включив в точки разбиения точки 0 и 2π. Можно считать, что функция $\widetilde{f}$ на зубьях решетки, исходящих из этих точек удовлетворяет условию $g(iy) = g(2\pi + iy)$, $0 \le y \le s$. Сужая отображение $\widetilde{f}$ на прямоугольник $[0, 2\pi] \times [0, s]$ и беря его 2π-периодическое продолжение, получаем продолжение отображения f в полосу $\mathbb{R} \times [0, s]$.

Аналогично можно продолжить f в полосу $\mathbb{R} \times [-s, 0]$. Объединяя оба продолжения, получаем 2π-периодическое отображение полосы, локально однолистное за исключением особых точек τ_j, которое является искомым. Лемма 4.2 доказана.

Доказательство (1) и (3). Сначала рассмотрим случай одной кривой β и $\rho = 0$. Из леммы 4.2 и ее доказательства следует, что можно построить риманову поверхность σ, ограниченную кривой β и некоторой аналитической кривой β_1, которая не имеет внутренних точек ветвления и имеет граничные точки ветвления разве лишь в особых точках кривой β. По теореме Морса-Гейнса ([64], с. 95) существует риманова поверхность σ_1, ограниченная кривой β_1^-. Склеивая σ и σ_1 вдоль компонент края, соответствующих кривым β_1 и β_1^-, получим искомую риманову поверхность.

Если же кривых $\beta_1, \dots, \beta_\nu$ несколько, то выберем простые дуги $\alpha_2, \dots, \alpha_\nu$ таким образом, чтобы они имели общую точку z_1 на $|\beta_1|$, концевая точка z_j кривой α_j лежала на $|\beta_j|$, кривая β_j проходила только один раз через z_j, эта точка являлась точкой локальной простоты для β_j, кривая α_j подходила к β_1 и β_j слева в соответствующих точках и кривая $\gamma_0 = g_i \prod_{j=2}^{\nu} \alpha_j \gamma_j \alpha_j^-$ являлась квази- локально простой. Строя соответствующую риманову поверхность, ограниченную γ, и отождествляя граничные дуги, соответствующие α_j и α_j^-, получаем нужную риманову поверхность, ограниченную $\beta_1, \dots, \beta_\nu$ рода нуль. Род поверхности можно увеличить до заданного подклеиванием полных листов расширенной комплексной плоскости вдоль некоторых разрезов, склеивая берега разреза «крест-накрест».

Доказательство (2). Установим, что всегда можно построить риманову поверхность $\sigma = (M, p)$ над $\overline{\mathbb{C}}$ рода ρ, ограниченную кривыми $\beta_1, \dots, \beta_\nu$, без внутренних точек ветвления.

Пусть $\sigma = (M, p)$ — некоторая риманова поверхность над $\overline{\mathbb{C}}$ рода ρ, ограниченная кривыми $\beta_1, \dots, \beta_\nu$. В силу теоремы 2 из [4] число точек ветвления поверхности σ конечно (см. также теорему 5.2 ниже). Если внутренних точек ветвления нет, то доказывать нечего. Если же такие точки $P_1, \dots, P_n$ есть, то без ограничения общности можно считать, что $\operatorname{ord}(P_i, \sigma) = 1$, $i = 1, \dots, n$.

Действительно, если $\operatorname{ord}(P_i, \sigma) = k - 1 > 1$, то из леммы 1.1 следует, что существуют k-листный круг $K_k(z_0, \varepsilon), z_0 = p(P_i)$ и морфизм $j : K_k(z_0, \varepsilon) \subset \hookrightarrow \sigma(P_i)$. Рассмотрим произвольную точку $a \in (0, 1)$.

Пусть

$$f_1(\zeta) = \begin{cases} \dfrac{z(\zeta) + z_0}{1 - z(\zeta)\overline{z}_0}, & z_0 \neq \infty; \\ 1/z(\zeta), & z_0 = \infty, \end{cases}$$

где

$$z(\zeta) = \operatorname{tg} \varepsilon \frac{\zeta(\zeta^{k-1} - a)}{1 - \overline{a}\zeta^{k-1}}.$$

Риманова поверхность $K^{(1)} = (E, f_1)$ ограничена, как и $K_k(z_0, \varepsilon)$, k-кратно обходимой сферической окружностью $\{d_{\overline{\mathbb{C}}}(z, z_0) = \varepsilon\}$, поэтому, вырезая из σ образ $K_k(z_0, \varepsilon)$ при отображении j и приклеивая вместо него $\overline{K^{(1)}}$, с учетом теоремы 4.3, получаем риманову поверхность, ограниченную теми же кривыми $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$, но у которой вместо одной точки ветвления порядка $(k-1)$ имеется $(k-1)$ точка ветвления порядка 1. Проделывая подобную операцию со всеми точками ветвления, получаем риманову поверхность с внутренними точками ветвления порядка 1.

Теперь покажем, что любую внутреннюю точку ветвления римановой поверхности σ можно вывести на границу, не меняя род поверхности. Пусть P_0 — внутренняя точка ветвления поверхности σ и $j : K_2(z_0, \varepsilon) \hookrightarrow \sigma(P_0)$ — некоторый морфизм. Так как двулистный круг $K_2(z_0, \varepsilon) = (E, 0, f)$, где f имеет вид (1.1) и $n = 2$, то $f(-\zeta) = f(\zeta)$, $\zeta \in E$. Пусть $V = \{P \in M \mid \operatorname{ord}(P, \sigma) > 0\}$ — множество внутренних точек ветвления σ и $V_1 = p^{-1}(p(V))$. В силу конечности множества V и теоремы 4.1 множество V_1 конечно. Значит, конечно множество $f^{-1}(V_1) \subset E$, и без ограничения общности можно считать, что оно не содержит точек вещественной оси. Выберем на ∂M точку $Q \notin V_1$ и соединим точки $Q_1 = f(1/2)$ и Q кривой δ_1, лежащей в $M \backslash V_1$, за исключением точки Q. Пусть $z : [0,1] \to \overline{\mathbb{C}}$ — представление кривой $\overline{p}(\alpha)$. Рассмотрим множество $\Omega = \{t \in (0,1] \mid$ существует поднятие w_t пути $z : [0,t] \to \overline{\mathbb{C}}$ на σ из точки $Q_2 = f(-1/2)\}$. Так как p локально инъективно в малой окрестности точки Q_2, то $t_0 = \sup(\Omega) > 0$. При этом возможно несколько случаев.

а) $t_0 < 1$. Так как множество Ω открыто в $[0,1]$, то $t_0 \notin \Omega$. Пусть

$$C(w_{t_0}, t_0) = \{P \in \overline{M} \mid \exists\{t_n\} \nearrow t_0 : \lim_{n\to\infty} w_{t_0}(t_n) = P\}.$$

Используя аналог теоремы 1.1 из [46] для двумерных многообразий, заключаем, что $C(w_{t_0}, t_0)$ есть континуум или точка. Но

$$\overline{p}(C(w_{t_0}, t_0)) = \{z \in \overline{\mathbb{C}} \mid \exists\{t_n\} \nearrow t_0 : \lim_{n\to\infty} z(t_n) = z\} = \{z(t_0)\}$$

есть одноточечное множество. Поскольку отображение $\overline{p}$ является изолированным, т. е. никакой континуум не переводит в точку, то множество $C(w_{t_0}, t_0)$ состоит из одной точки S. Ясно, что $S \in \partial M$, иначе бы существовало такое поднятие пути $z : [t_0, t_0 + \varepsilon] \to \overline{\mathbb{C}}$ из точки S для некоторого малого $\varepsilon > 0$, а это противоречит тому, что $t_0 = \sup(\Omega)$. Пусть $\eta : [0,1] \to \overline{\mathbb{C}}$ — представление кривой α такое, что $\overline{p}(\eta) = z$. Рассмотрим кривые α_{t_0} и γ_{t_0} с представлениями $\eta|_{[0,t_0]}$ и w_{t_0}. Пусть ω_1 и ω_2 — кривые с представлениями $t \to f(t)$ и $t \to f(-t)$, $0 \le t \le 1/2$, соответственно. Тогда кривые $\omega_1\alpha_{t_0}$ и $\omega_2\gamma_{t_0}$ соединяют в $\overline{M}$ точку P_0 с точкой $\eta(t_0) \in M$ и $S \in \partial M$ соответственно, причем $\overline{p}(\omega_1\alpha_{t_0}) = \overline{p}(\omega_2\gamma_{t_0})$. Разрезая σ вдоль этих кривых и склеивая берега разрезов «крест-накрест», получаем риманову поверхность σ', ограниченную теми же кривыми $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$, но у которой вместо внутренней точки ветвления P_0 имеется граничная точка ветвления, соответствующая точке S.

б) $t_0 = 1$, $t_0 \notin \Omega$. В этом случае кривая $\omega_{t_0} = \omega_1$ оканчивается в точке $S \in \partial M$ и $\alpha_{t_0} = \alpha_1$ — также в точке края $Q \in \partial M$. Покажем, как свести дело к случаю а), т. е. к случаю, когда $\eta(t_0)$ является внутренней точкой $\overline{M}$. Поскольку $Q \notin V_1$, то кривая α_j, которая обходит компоненту края, содержащую точку Q, в положительном направлении, содержит дугу $\widetilde{\alpha}_j$ такую, что $p \circ \widetilde{\alpha}_j = \widetilde{\beta}_j$ — простая дуга в $\overline{\mathbb{C}}$. Пусть $D = \overline{\mathbb{C}} \backslash |\widetilde{\beta}_j|$, $\mathrm{id}_D : D \to \overline{\mathbb{C}}$ — отображение, тождественное на D. Тогда $\tau = (D, \mathrm{id}_D)$ есть однолистная поверхность над $\overline{\mathbb{C}}$, ограниченная кривой $\widetilde{\beta}_j(\widetilde{\beta}_j)^-$. Склеивая $\overline{\sigma}$ и $\overline{\tau}$ вдоль $\widetilde{\alpha}_j$ и $(\widetilde{\beta}_j)^-$, получаем риманову поверхность $\overline{\sigma}'$, обладающую нужными свойствами.

в) $t_0 = 1$, $t_0 \in \Omega$. Тогда поступаем так же, как и в пункте а), беря в качестве α кривую α_1.

Теорема доказана.

Следствие 4.1 *Пусть* ρ_1, ρ_2 *— целые неотрицательные числа, кривые* $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$ *— замкнутые квази- локально простые в* $\overline{\mathbb{C}}$. *Тогда существует компактная риманова поверхность* $\sigma = (M, p)$ *над* $\overline{\mathbb{C}}$ *рода* $\rho_1 + \rho_2 + \nu - 1$ *над* $\overline{\mathbb{C}}$ *и система кривых* $\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu$ *таких, что* $p(\alpha_i) = \beta_i$, $i = 1, \ldots, \nu$, *и цикл* $\sum\limits_{i=1}^{\nu} \alpha_i$ *разбивает* σ *на две римановы поверхности, одна из которых ограничена кривыми* $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$ *и имеет род* ρ_1, *а другая ограничена кривыми* $(\beta_1)^-, \ldots, (\beta_\nu)^-$ *и имеет род* ρ_2. *Обратно, если выполнено это условие, то кривые* $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$ *квази- локально просты.*

§5. Существование римановой поверхности, ограниченной квази- локально простыми кривыми. Обобщенная формула Римана-Гурвица.

Начнем с обобщения теоремы 4.4 на случай римановой поверхности над компактной римановой поверхностью N.

Теорема 5.1 1) *Пусть $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$ — замкнутые квази- локально простые кривые на компактной римановой поверхности N. Для того чтобы существовала риманова поверхность σ над N, ограниченная кривыми $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$, необходимо и достаточно, чтобы цикл $\sum\limits_{i=1}^{\nu} \beta_i$ был гомологичен нулю на N.*

2) *Если цикл $\sum\limits_{i=1}^{\nu} \beta_i$ гомологичен нулю, то:*
а) *существует такое число $\rho_0 \geq 0$, что для любого целого $\rho \geq \rho_0$ можно построить риманову поверхность σ, ограниченную кривыми $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$, рода ρ;*
б) *если $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$ локально просты, то такую поверхность σ можно построить без граничных точек ветвления;*
в) *существует такое $\rho_1 \geq \rho_0$, что для любого целого $\rho \geq \rho_1$ можно построить риманову поверхность, ограниченную $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$, без внутренних точек ветвления рода ρ.*

Отметим, что для гладких кривых $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$ с конечным числом трансверсальных самопересечений и взаимных пересечений утверждение 1), по-существу, доказано в [125] (см. также теорему 17.10).

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Необходимость условия теоремы очевидна. Докажем достаточность. Пусть $g : N \to \overline{\mathbb{C}}$ — некоторое голоморфное отображение, B — множество точек ветвления римановой поверхности (N, g) над $\overline{\mathbb{C}}$. Можно считать, что $g(B) \bigcap g\,(\bigcup_{i=1}^{\nu} |\beta_i|) = \emptyset$, так как $g(\beta_i)$ — квази- локально простая кривая в $\overline{\mathbb{C}}$ и множество $\bigcup_{i=1}^{\nu} |\beta_i|$ нигде не плотно в $\overline{\mathbb{C}}$, а множество B конечно в силу компактности N.

В силу леммы 4.2 существует кольцо $Q = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 1 + \varepsilon\}$ и голоморфное отображение $h_i : Q \to \overline{\mathbb{C}}$ такое, что $h_i(\alpha_i) = g(\beta_i)$, где α_i — простая замкнутая кривая, гомотопная в Q кривой, однократно обходящей единичную окружность в положительном направлении. При малых $\varepsilon > 0$ имеем $h_i(Q) \subset \mathbb{C}\backslash g(B)$, $i = 1, \ldots, \nu$. Пусть $\widetilde{B} = g^{-1}(g(B))$, $g_1 = g|_{N\backslash\widetilde{B}} : N\backslash\widetilde{B} \to \overline{\mathbb{C}}\backslash g(B)$ — накрытие (неразветвленное и безграничное). Так как фундаментальная группа кольца Q обладает единственным образующим $[\alpha]$ и поднятие кривой $h_i(\alpha_i)$ на N относительно g_1 есть замкнутая кривая β_i, то существует поднятие $\widetilde{h}_i : Q \to N$ отображения h_i относительно g_1 такое, что $\widetilde{h}_i(\alpha_i) = \beta_i$, $i = 1, \ldots, \nu$.

Пусть γ_i — кривая в Q, однократно обходящая в положительном направлении окружность $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r_i\}$, $1 < r_i < 1 + \varepsilon$. Выберем r_i настолько близким к единице, что $|\gamma_i| \cap |\alpha_i| = \emptyset$. Можно считать, что γ_i не проходит через точки ветвления римановой поверхности $(Q, \widetilde{h}_i)$ над N. Тогда $\widetilde{h}_i(\gamma_i)$ — аналитическая кривая в N, имеющая конечное число трансверсальных самопересечений. Так как кривая $\widetilde{h}_i(\gamma_i)$ гомотопна кривой $\widetilde{h}_i(\alpha_i) = \beta_i$, а цикл $\sum\limits_{i=1}^{\nu} \beta_i$ гомологичен нулю, то и цикл $\sum\limits_{i=1}^{\nu} \widetilde{h}_i(\gamma_i)$ гомологичен нулю. В силу теорем 3.1 и 3.4 из [125] (см. также теорему 17.10) существует риманова поверхность σ_1 над N, ограниченная кривыми $\widetilde{h}_i(\gamma_i)$, $i = 1, \ldots, \nu$. Пусть σ_{2i} есть риманова поверхность $(R_i, \widetilde{h}_i|_{R_i})$, где R_i есть часть Q, ограниченная кривыми α_i и $(\gamma_i)^-$. Тогда σ_{2i} ограничена кривыми β_i и $\left(\widetilde{h}_i(\gamma_i)\right)^-$. Склеивая $\overline{\sigma}_1$ и $\overline{\sigma}_{2i}$ вдоль участков границы, соответствующих $\left(\widetilde{h}_i(\gamma_i)\right)^{\pm}$, получаем каноническое расширение $\overline{\sigma}$ поверхности $\sigma = (M, p)$, ограниченной кривыми $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$.

2a) Построим некоторую риманову поверхность σ, ограниченную $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$. Покажем, что без ограничения общности можно считать, что некоторая точка $a \in N' = N\backslash\bigcup_{i=1}^{\nu}|\beta_i|$ покрывается по крайней мере дважды римановой поверхностью σ. Если это не так, то пусть δ — любая простая дуга в компоненте связности N'_a множества N', содержащей точку a, не проходящая через точки ветвления римановой поверхности σ с началом в точке b. Тогда $n_\sigma(b) = n_\sigma(a) = 1$, $b \in N'_a$, и существует поднятие δ' кривой δ на σ из любой точки, лежащей над точкой b. Рассмотрим римановы поверхности $\sigma' = \left(M\backslash|\delta'|, p|_{M\backslash|\delta'|}\right)$ и $\sigma'' = \left(N\backslash|\delta|, \mathrm{id}_{N\backslash|\delta|}\right)$ над N. Первая из них ограничена кривыми $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$, $\delta\delta^-$, вторая — кривой $\delta\delta^-$. Склеивая у $\overline{\sigma'}$ и $\overline{\sigma''}$ участки края, соответствующие берегам разрезов вдоль δ «крест-накрест» и отбрасывая затем край, получаем риманову поверхность $\widetilde{\sigma}$, ограниченную кривыми $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$, для которой точка a покрывается два раза. Отметим, что род $\widetilde{\sigma}$ больше рода σ на величину ρ_N.

Пусть теперь $\sigma = (M, p)$ — такая риманова поверхность рода ρ_0, что точка $a \in N'$ покрывается по крайней мере дважды. Докажем, что число ρ_0 является искомым. Для этого достаточно доказать, что если есть подобная риманова поверхность, то можно увеличить род на единицу, не изменяя граничных кривых $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$. Пусть N'_a — компонента связности множества N', содержащая точку a, V — множество точек ветвления σ, $\widetilde{V} = p^{-1}(p(V))$, $M_a = p^{-1}(N'_a \backslash p(V))$. Нетрудно убедиться, что отображение $p|_{M_a} : M_a \to N'_a \setminus p(V)$ является накрытием N'_a (неразветвленным и безграничным). Это посуществу, установлено при доказательстве теоремы 4.1, п. 1). Пусть опять δ — любая простая дуга в N'_a с начальной точкой b. Так как по теореме 4.1 $n_\sigma(b) = n_\sigma(a) > 1$, то существуют по крайней мере две различные точки b_1, $b_2 \in M_a$ такие, что $p(b_1) = p(b_2) = b$. Пусть δ_1 и δ_2 — поднятия кривой δ на M_a относительно отображения $p|_{M_a}$ из точек b_1, b_2. Тогда $|\delta_1| \cap |\delta_2| \neq \emptyset$. Разрежем M вдоль δ_1 и δ_2 и склеим берега разреза «крест-накрест». В результате получаем риманову поверхность σ', ограниченную кривыми $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$. При этом эйлерова характеристика $\overline{\sigma}'$ меньше, чем эйлерова характеристика $\overline{\sigma}$ на 2, поэтому род σ' больше, чем у σ, на единицу.

2б) Если $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$ — локально просты, то в силу леммы 1 из [5] отображения $h_i : Q \to \overline{\mathbb{C}}$, построенные при доказательстве п. 1) теоремы, можно выбрать локально инъективными, $i = 1, \ldots, \nu$. Так как $g \circ \widetilde{h}_i = h_i$, то $\widetilde{h}_i$ локально инъективны, $i = 1, \ldots, \nu$. Значит, римановы поверхности $\sigma_{2i} = \left(R_i, \widetilde{h}_i|_{R_i}\right)$, $i = 1, \ldots, \nu$, не содержат граничных точек ветвления, поэтому таких точек не содержит и σ.

2в) Существование римановой поверхности $\sigma' = (M', p')$ над N, ограниченной кривыми $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$ без внутренних точек ветвления устанавливается точно так же, как при доказательстве теоремы 4.4 (случай $N = \overline{\mathbb{C}}$). Пусть род σ' равен ρ' и $\rho \geq \rho_1 = \rho' + \rho_N$. Докажем, что существует риманова поверхность σ над N рода ρ без внутренних точек ветвления. Пусть $k = \rho - \rho' - \rho_N + 1 \geq 1$. Рассмотрим $\overline{\sigma}' = (\overline{M}', \overline{p}')$ и пусть α — кривая, обходящая одну из компонент края $\partial M'$ в положительном направлении. Поскольку число точек ветвления у σ' конечно (см. теорему 5.2 ниже), то существует k точек $P_1, \dots, P_k$ на $|\alpha|$, которые имеют попарно различные проекции на N и не являются точками ветвления σ'. Тогда можно выбрать окрестности $\overline{U}_1, \dots, \overline{U}_k$ точек $P_1, \dots, P_k$ в $\overline{M}'$ соответственно, которые имеют попарно непересекающиеся проекции, причем отображения $p'|_{\overline{U}_j}$ инъективны, $j = 1, \dots, k$. Пусть $\widetilde{\delta}_1, \dots, \widetilde{\delta}_k$ — простые кривые в $\overline{U}_1, \dots, \overline{U}_k$ соответственно, причем $\widetilde{\delta}_j$ лежит на $\partial M'$, $j = 1, \dots, k$. Тогда $\delta_j = p'(\widetilde{\delta}_j)$, $j = 1, \dots, k$ — простые попарно непересекающиеся кривые в N. Пусть $\sigma'' = (N, \mathrm{id}_N)$. Разрезая σ'' вдоль кривых δ_j, $j = 1, \dots, k$, и присоединяя край, получаем риманову поверхность $\overline{\sigma}_1$, ограниченную кривыми $\delta_j(\delta_j)^-$, $j = 1, \dots, k$, рода ρ_N. Склеивая $\overline{\sigma}_1$ и $\overline{\sigma}'$ вдоль соответствующих участков их краев, получаем риманову поверхность $\overline{\sigma}$ с краем над N без внутренних точек ветвления рода $\rho' + \rho_N + k - 1 = \rho$. Таким образом, число $\rho_1 = \rho' + \rho_N$ является искомым. Теорема доказана.

Следствие 5.1 *Пусть $\beta_1, \dots, \beta_\nu$ — квази- локально простые кривые на компактной римановой поверхности N такие, что цикл $\sum\limits_{i=1}^{\nu} \beta_i$ гомологичен нулю. Существуют целые числа ρ_{10} и ρ_{20}, обладающие свойством: для любых целых неотрицательных чисел $\rho_1 \geq \rho_{10}$, $\rho_2 \geq \rho_{20}$ существует компактная риманова поверхность $\sigma = (M, p)$ рода $\rho_1 + \rho_2 + \nu - 1$ над N и система из ν простых замкнутых кривых $\alpha_1, \dots, \alpha_\nu$ таких, что $p(\alpha_i) = \beta_i$, $i = 1, \dots, \nu$, цикл $\sum\limits_{i=1}^{\nu} \alpha_i$ разбивает σ на две римановы поверхности, одна из которых ограничена кривыми $\beta_1, \dots, \beta_\nu$, имеет род ρ_1, а другая ограничена кривыми $(\beta_1)^-, \dots, (\beta_\nu)^-$ и имеет род ρ_2.*

Обратно, если цикл $\sum\limits_{i=1}^{\nu} \alpha_i$, составленный из простых замкнутых непересекающихся кривых на компактной римановой поверхности M, разбивает M на две части, то кривые $p(\alpha_i) = \beta_i$ квазилокально просты, $i = 1, \dots, \nu$.

В силу этого утверждение следствия 5.1 неулучшаемо.

Следствие 5.2 *Пусть $\sigma = (M, p)$ — риманова поверхность над римановой поверхностью N (не обязательно компактной!), ограниченная квази- локально простыми кривыми $\beta_1, \dots, \beta_\nu$. Тогда для любой точки $a \in N$ величина $n_\sigma(a)$, определенная по формуле (4.1),* *равномерно ограничена константой, зависящей только от σ. Более того, если $\overline{\sigma} = (\overline{M}, \overline{p})$ — каноническое расширение σ, вызванное присоединением края, и*

$$n_{\overline{\sigma}}(a) = \sum_{P \in \overline{p}^{-1}(a)} [\mathrm{ord}(P, \sigma) + 1],$$

то величина $n_{\overline{\sigma}}(a)$ также равномерно ограничена.

Действительно, утверждение будет доказано, если $\overline{\sigma}$ удастся вложить в некоторую компактную риманову поверхность. В случае, когда N компактна, это следует из теоремы 5.1, примененной к системе кривых $(\beta_1)^-, \ldots, (\beta_\nu)^-$, и теоремы 4.3 о склейке. Если N не компактна, то в силу компактности $\overline{p}(\overline{M})$ существует часть N_0 поверхности N конечного типа, содержащая $\overline{p}(\overline{M})$. Вложим N_0 в компактную риманову поверхность N_1. Тогда σ определяет риманову поверхность σ_1 над N_1 с теми же характеристиками, что и σ, и дело сводится к компактному случаю.

Пусть

$$V(\sigma) = \sum_{P \in \overline{M}} \mathrm{ord}(P, \sigma) \tag{5.1}$$

есть суммарная кратность точек ветвления поверхности σ, внутренних и граничных. В следующей теореме обобщаются результаты работ [4], [29], [48], [64], [116], [125], [135], [141], [187] и др..

Теорема 5.2 *Пусть $\sigma = (M, p)$ — риманова поверхность над N, ограниченная квази- локально простыми кривыми $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$. Тогда суммарная кратность точек ветвления $V(\sigma)$, определенная формулой (5.1), конечна. Более того, если N компактна и точка $a \in N$, то*

$$V(\sigma) = n_\sigma(a)\chi_N - \chi_{\overline{M}} + C, \tag{5.2}$$

где $\chi_N = 2 - 2\rho_N$, $\chi_{\overline{M}} = 2 - 2\rho_M - \nu$ — эйлеровы характеристики N и $\overline{M}$ соответственно, а константа C зависит только от кривых $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$ и выбора точки a. Если N не компактна, то

$$V(\sigma) = -\chi_{\overline{M}} + C, \tag{5.3}$$

где C зависит только от кривых $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если N компактная поверхность, $\rho_N > 0$, то представим N в виде разветвленного накрытия сферы $\overline{\mathbb{C}}$, чтобы свести дело к теореме из [4]. Опишем конкретное накрытие $h : N \to \overline{\mathbb{C}}$, которое понадобится в дальнейшем для описания констант C в (5.2) и (5.3).

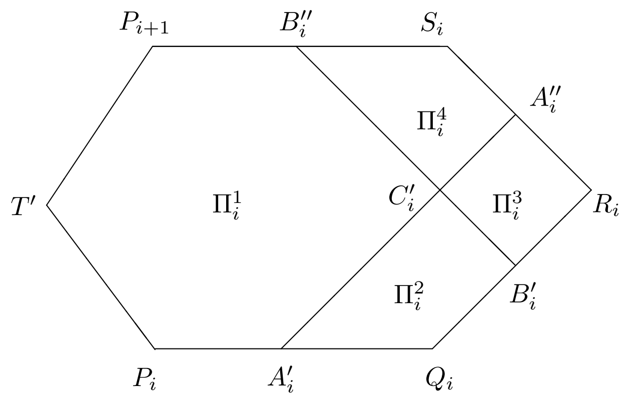

Рис. 5.1

Пусть Π — замкнутый выпуклый (4ρ)-угольник на плоскости $\mathbb{C}$ $(\rho = \rho_N)$ с вершинами P_1, Q_1, R_1, $S_1, \ldots, P_\rho$, Q_ρ, R_ρ, S_ρ, последовательно обходимыми при положительном обходе $\partial\Pi$, а функции $f_i : [P_i, Q_i] \to [S_i, R_i]$ и $g_i : [Q_i, R_i] \to [S_i, P_{i+1}]$ осуществляют гомеоморфное соответствие между сторонами многоугольника Π,

$$f_i(P_i) = g_i(Q_i) = S_i, \quad i = 1, \ldots, \rho \quad (P_{\rho+1} = P_1).$$

Назовем точки T_1 и T_2 на $\partial\Pi$ эквивалентными, если они соответствуют друг другу при некотором гомеоморфизме f_i или g_i. Тогда факторпространство $\Pi/\sim$ по этому отношению эквивалентности является римановой поверхностью рода $\rho = \rho_N$. Обозначим склеивающее отображение через $F : \Pi \to \Pi/\sim$. Поскольку $\Pi/\sim$ гомеоморфно N, то без ограничения общности можно считать, что $N = \Pi/\sim$ и $F(P_i) = F(Q_i) = F(R_i) = F(S_i) = a$, $i = 1, \ldots, \rho$.

Выберем на сторонах $[P_i, Q_i]$ и $[Q_i, R_i]$ точки A'_i и B'_i, не совпадающие с вершинами Π, и пусть $A''_i = f_i(A'_i)$, $B''_i = f_i(B'_i)$, $i = 1, \ldots, \rho$. Тогда отрезки $[A'_i, A''_i]$ и $[B'_i, B''_i]$ пересекаются в единственной точке C'_i. Отметим, что многоугольник

$$P_1 A'_1 C'_1 B''_1 P_2 A'_2 C'_2 B2'' \ldots P_\rho A'_\rho C'_\rho B''_\rho$$

является выпуклым. Фиксируем точку T' во внутренности этого многоугольника. Отрезки $[A'_i, A''_i]$, $[B'_i, B''_i]$, $[T', P_i]$, $i = 1, \ldots, \rho$, определяют разбиение Π на конечное число замкнутых многоугольников $\Pi_i^1 = P_i A'_i C'_i B''_i P_{i+1} T'$, $\Pi_i^2 = Q_i B'_i C'_i A'_i$, $\Pi_i^3 = R_i A''_i C'_i B'_i$ и $\Pi_i^4 = S_i B''_i C'_i A''_i$, $i = 1, \ldots, \rho$ (рис. 5.1).

Пусть $H_+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$, $H_- = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z < 0\}$, $\overline{H}_+$ и $\overline{H}_-$ — их замыкания в $\overline{\mathbb{C}}$, $\widetilde{H}_+ = H_+ \backslash \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = 0, \operatorname{Im} z \geq 1\}$. Определим внутренние отображения $h_i^1 : \Pi_i^1 \to \overline{H}_+$, которые преобразуют гомеоморфно внутренность Π_i^1 на $\widetilde{H}_+$, причем $h_i^1(P_i) = \infty$, $h_i^1(A'_i) = -1$, $h_i^1(C'_i) = 0$, $h_i^1(B''_i) = 1$, $h_i^1(P_{i+1}) = \infty$, $h_i^1(T') = \sqrt{-1}$. Определим аналогично отображения $h_i^2 : \Pi_i^2 \to \overline{H}_-$, $h_i^3 : \Pi_i^3 \to \overline{H}_+$, $h_i^4 : \Pi_i^4 \to \overline{H}_-$, гомеоморфные во внутренностях соответствующих многоугольников, с соответствием точек $h_i^2(Q_i) = \infty$, $h_i^2(B'_i) = 1$, $h_i^2(C'_i) = 0$, $h_i^2(A'_i) = -1$, $h_i^3(R_i) = \infty$, $h_i^3(A''_i) = -1$, $h_i^3(C'_i) = 0$, $h_i^3(B'_i) = 1$, $h_i^4(S_i) = \infty$, $h_i^4(B''_i) = 1$, $h_i^4(C'_i) = 0$, $h_i^4(A''_i) = -1$.

Поскольку все h_i^j гомеоморфны на сторонах соответствующих многоугольников, то без ограничения общности можно считать, что, $h_i^1 = h_i^2$ на $[A'_i, C'_i]$, $h_i^1 = h_i^2 \circ g_i$ на $[Q_i, B_i]$, $h_i^1 = h_i^4 \circ f_i$ на $[P_i, A'_i]$, $h_i^1 = h_i^4$ на $[C'_i, B''_i]$, $h_i^2 = h_i^3$ на $[B'_i, C_i]$, $h_i^2 = h_i^3 \circ f_i$ на $[A'_i, Q_i]$, $h_i^3 = h_i^4$ на $[C'_i, A''_i]$, $h_i^3 = h_i^4 \circ g_i$ на $[B'_i, R_i]$, $h_i^1 = h_{i+1}^1$ на $[T, P_{i+1}]$, $i = 1, \ldots, \rho$ ($h_1^1 = h_{\rho+1}^1$). Используя лемму 4.1, получаем, что отображения h_i^j определяют внутреннее отображение $h : N \to \overline{\mathbb{C}}$ такое, что $h \circ F|_{\Pi_i^j} = h_i^j$, $1 \leq j \leq 4$, $1 \leq i \leq \rho$. По теореме Стоилова [90] отображение h индуцирует на N комплексную структуру, относительно которой h является аналитическим. Поскольку характеристики, входящие в формулу (5.2), не зависят от выбора комплексной структуры на N, то можно сказать, что индуцированная отображением h комплексная структура совпадает с исходной.

Пара $\xi = (N, h)$ является (2ρ)-листной компактной римановой поверхностью над $\overline{\mathbb{C}}$. Множество точек ветвления поверхности ξ состоит из точек a, $T = F(T')$, $A_i = F(A'_i)$, $B_i = F(B'_i)$ и $C_i = F(C'_i)$,

$i = 1, \ldots, \rho$, причем

$$\begin{gathered}\operatorname{ord}(a, \xi) = 2\rho - 1,\ \operatorname{ord}(T, \xi) = \rho - 1,\\ \operatorname{ord}(A_i, \xi) = \operatorname{ord}(B_i, \xi) = \operatorname{ord}(C_i, \xi) = 1,\ i = 1, \ldots, \rho.\end{gathered} \tag{5.4}$$

Рассмотрим сначала случай, когда $a \notin B = \bigcup_{i=1}^{\nu} |\beta_j|$. Тогда точки A_i', B_i' можно выбрать настолько близкими к вершинам Q_i и R_i многоугольника Π соответственно, а точку T' — к точке P_1, что точки A_i, B_i, C_i, $i = 1, \ldots, \rho$, и T лежат в одной компоненте связности с точкой a в множестве $N \backslash B$. По теореме 4.1

$$n_\sigma(A_i) = n_\sigma(B_i) = n_\sigma(C_i) = n_\sigma(T) = n_\sigma(a),\ i = 1, \ldots, \rho, \tag{5.5}$$

для любой римановой поверхности, ограниченной $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$. Пара $\tau = (M, h \circ p)$ есть риманова поверхность над $\overline{\mathbb{C}}$, ограниченная квазилокально простыми кривыми $h(\beta_1), \ldots, h(\beta_\nu)$. Применяя к τ теорему 2 из [4], получаем, что

$$V(\tau) = 2n_\tau(\infty) - (2 - 2\rho_M) + \nu + C, \quad \text{где } C = -\sum_{j=1}^{\nu} w(h(\beta_j)^-), \tag{5.6}$$

где $w(\gamma)$ — индекс Уитни квази- локально простой кривой γ в $\overline{\mathbb{C}}$. Отметим, что величина C зависит лишь от кривых $h(\beta_j)$, $j = 1, \ldots, \nu$, но не от σ.

Так как ξ определяет (2ρ)-листное накрытие сферы, то

$$n_\tau(\infty) = n_\sigma(a) n_\xi(\infty) = 2\rho n_\sigma(a), \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned}V(\tau) = \sum_{P \in \overline{M}} \operatorname{ord}(P, \tau) &= \sum_{P \in \overline{M}} [(\operatorname{ord}(P, \sigma) + 1))(\operatorname{ord}(\overline{p}(P), \xi) + 1) - 1] =\\ &= \sum_{P \in \overline{M}} \operatorname{ord}(P, \sigma) + \sum_{P \in \overline{M}} (\operatorname{ord}(P, \sigma) + 1) \operatorname{ord}(\overline{p}(P), \xi) =\\ &= V(\sigma) + \sum_{Q \in \overline{p}(M)} \operatorname{ord}(Q, \xi) \sum_{\overline{p}(P) = Q} (\operatorname{ord}(P, \sigma) + 1).\end{aligned} \tag{5.8}$$

Так как $\mathrm{ord}(Q,\xi) \neq 0$ только если

$$Q \in \{a, T, A_1, \ldots, A_\rho, B_1, \ldots, B_\rho, C_1, \ldots, C_\rho\} \subset U \subset N \backslash B,$$

то $\overline{p}^{\,-1}(Q) = p^{-1}(Q)$, если $\mathrm{ord}(Q,\xi) \neq 0$, и в этом случае в силу (5.5) имеем

$$\sum_{\overline{p}(P)=Q} (\mathrm{ord}(P,\sigma) + 1) = n_\sigma(Q) = n_\sigma(a).$$

Таким образом, из (5.8) следует, что

$$V(\tau) = V(\sigma) + n_\sigma(a) \sum_{Q \in \overline{p}(M)} \mathrm{ord}(Q,\xi) = V(\sigma) + n_\sigma(a) V(\xi). \tag{5.9}$$

Используя (5.4) или применяя классическую формулу Римана-Гурвица (см., напр., [36]), получаем, что $V(\xi) = 6\rho - 2$. Отсюда и соотношений (5.9) и (5.6) следует (5.3), где константа C та же, что и в (5.6), т. е. не зависит от σ.

Если же $a \in B$, то выберем точку $a_1 \notin h^{-1}(h(B))$, и установим, что справедливо соотношение (5.2), где вместо точки a фигурирует точка a_1. Покажем, что величина $n_\sigma(a) - n_\sigma(a_1)$ зависит только от кривых $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$ и точек a и a_1, но не от поверхности σ.

Пусть $\xi = (N, h)$, $\tau = (M, h \circ p)$ — те же, что и выше, точка $a_0 \in \overline{\mathbb{C}} \backslash h(B)$ и $h^{-1}(a_0) = \{x_1, \ldots, x_k\}$. Тогда

$$n_\tau(a_0) = \sum_{i=1}^{k} n_\sigma(x_i)[\mathrm{ord}(x_i,\xi) + 1] =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} n_\sigma(a_1)[\mathrm{ord}(x_i,\xi) + 1] + \sum_{i=1}^{k} [n_\sigma(x_i) - n_\sigma(a_1)][\mathrm{ord}(x_i,\xi) + 1] =$$

$$= 2\rho\, n_\sigma(a_1) + \sum_{i=1}^{k} [n_\sigma(x_i) - n_\sigma(a_1)][\mathrm{ord}(x_i,\xi) + 1].$$

Обозначим последнюю сумму через S. Из теоремы 4.1 следует, что S не зависит от σ. Используя соотношение (5.7), справедливое и для точек $a \in B$, получаем, что

$$n_\sigma(a) - n_\sigma(a_1) = [n_\tau(\infty) - n_\tau(a_0) + S]/(2\rho).$$

Поскольку τ ограничена кривыми $h(\beta_1), \ldots, h(\beta_\nu)$, то в силу теоремы 4.1 разность $n_\tau(\infty) - n_\tau(a_0)$ не зависит от σ и (5.2) справедливо и для точек $a \in B$.

Разберем теперь случай, когда N не компактна. Рассмотрим две римановы поверхности $\sigma_1 = (M_1, p_1)$ и $\sigma_2 = (M_2, p_2)$ над N, ограниченные кривыми $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$. Пусть $\overline{\sigma}_1 = (\overline{M}_1, \overline{p}_1)$ и $\overline{\sigma}_2 = (\overline{M}_2, \overline{p}_2)$ — их канонические расширения, вызванные присоединением края. Так как множество $K = \overline{p}_1(\overline{M}_1) \cup \overline{p}_2(\overline{M}_2)$ — компакт в N, то существует подобласть N_1 в N конечного рода, ограниченная конечным числом жордановых кривых и такая, что $K \subset N_1$. Вложим N_1 в некоторую риманову поверхность N^*. Так как $p_i(M_i) \subset N^*$, $i = 1, 2$, то σ_1 и σ_2 можно рассматривать как римановы поверхности над N^*. Фиксируем точку $a \in N^* \backslash N_1$. Тогда $n_{\sigma_1}(a) = n_{\sigma_2}(a) = 0$ и в силу (5.2) $V(\sigma_1) = -\chi_{\overline{M}_1} + C$, $V(\sigma_2) = -\chi_{\overline{M}_2} + C$, где константа C одна и та же как для σ_1, так и для σ_2. Значит, справедливо (5.3), и теорема 5.2 полностью доказана.

§6. Индекс вращения

Константа C в теореме 5.2 зависит лишь от кривых $\beta_1, \dots, \beta_\nu$ и, если N компактна, то и от фиксации точки $a \in N$.

Если $N = \overline{\mathbb{C}}$, $a = \infty$, кривые $\beta_1, \dots, \beta_\nu$ гладкие, не проходящие через ∞, то $C = \sum\limits_{j=1}^{\nu} w(\beta_j)$, где $w(\beta_j)$ — число оборотов касательной к контуру β_j при его обходе (см. [4]). Как показал Уитни [207], число $w(\beta_j)$ может быть вычислено в этом случае и другим образом, с использованием информации о характере самопересечений кривой β_j.

По аналогии с этим случаем будем называть константу C из теоремы 5.2 *индексом вращения множества кривых* $\beta_1, \dots, \beta_\nu$. На практике важно знать значение индекса вращения (см., напр., гл. 5, теорема 17.2). Для гладких кривых $\beta_1, \dots, \beta_\nu$ на компактной римановой поверхности, не проходящих через точку a, константа C может быть вычислена через суммарное вращение любого гладкого векторного поля на N, обращающегося в нуль лишь в малой окрестности точки a, вдоль кривых $\beta_1, \dots, \beta_\nu$ (см. [125]).

Приведем способы определения константы C в случае квази- локально простых кривых $\beta_1, \dots, \beta_\nu$.

Рассмотрим сначала случай, когда N — компактная риманова поверхность рода $\rho = \rho_N > 0$, кривые $\beta_1, \dots, \beta_\nu$ локально просты и не проходят через точку a. Используем построения и обозначения, сделанные при доказательстве теоремы 5.2. Представим N в виде $N = \Pi/\sim$, где Π — замкнутый (4ρ)-угольник. Границе $\partial\Pi$ при склеивании соответствует букет D, состоящий из (2ρ) окружностей. Пусть α_{ik}, $i = 1, 2$, $k = 1, \dots, \rho$, — система простых петель в точке a, каждая из которых обходит одну из окружностей букета D. Без ограничения общности можно считать, что кривые β_j пересекают кривые α_{ik} трансверсально не более, чем в конечном числе точек, одна из которых совпадает с началом кривой β_j, если $|\beta_j| \cap (\cup_{i,k}|\alpha_{ik}|) \neq \emptyset$; через любую точку пересечения кривая β_j проходит не более одного раза, $j = 1, \dots, \nu$.

Можно считать для удобства обозначений, что кривые $\beta_1, \dots, \beta_\mu$ пересекаются с множеством D, а кривые $\beta_{\mu+1}, \dots, \beta_\nu$ — нет. Каждая из кривых $\beta_1, \dots, \beta_\mu$ разбивается точками пересечения с D на конечное число дуг: $\beta_i = \prod_{k=1}^{r_i} \beta_i^k$, $i = 1, \dots, \mu$. Пусть P'_{jk} и P''_{jk} — начальная и конечная точки дуги γ_i^k в Π, которая соответствует дуге

β_i^k в N, $k=1,\dots,r_j$, $j=1,\dots,\mu$. Обход границы $\partial\Pi$ в положительном направлении из точки P_1 индуцирует на $\partial\Pi$ отношение порядка. Пусть n_1 — число дуг β_i^k, для которых $P'_{jk} < P''_{jk}$, а n_2 — соответственно число дуг, для которых $P'_{jk} > P''_{jk}$. При $j=\mu+1,\dots,\nu$ кривая β_j не пересекается с $\partial\Pi$. Поскольку β_j — замкнутая кривая, то можно выбрать начало c_j кривой β_j таким образом, чтобы c_j можно было соединить с одной из вершин многоугольника Π кривой δ_j, лежащей в $(\Pi\backslash|\beta_j|)\cup\{c_i\}$. Пусть m_1 — число кривых β_j, для которых δ_j подходит «справа» к β_j в точке c_j, а m_2 — соответственно число кривых, для которых δ_j подходит «слева».

Введем также *индекс самопересечения* $\kappa(\alpha)$ локально простой кривой α на N. Представим α в виде $\alpha=\alpha_1\cdots\alpha_k$, где все α_j просты, причем
1) α_j пересекается с α_{j+1} не более, чем в одной точке, $j=1,\dots,k$ $(\alpha_{k+1}=\alpha_1)$;
2) для любого $i\neq j-1,\ j,\ j+1$ концы α_i не лежат на α_j, а концы α_j — на α_i, $j=1,\dots,k$ $(\alpha_0=\alpha_k)$.
Тогда полагаем $\kappa(\alpha)=\sum\limits_{1\le i<j-1\le k-1}\kappa(\alpha_j,\alpha_i)$, где $\kappa(\alpha_j,\alpha_i)$ есть индекс пересечения кривых α_j и α_i; при этом $\kappa(\alpha_k,\alpha_1)$ полагаем равным нулю. (Отметим, что для замкнутых кривых индекс самопересечения, вообще говоря, зависит от выбора начальной точки.) Используя введенные выше обозначения, сформулируем следующее утверждение.

Теорема 6.1 *Индекс вращения множества локально простых кривых $\beta_1,\dots,\beta_\nu$ на компактной римановой поверхности N, не проходящих через точку a, может быть вычислен по формуле*

$$C=(n_2-n_1)/2+m_1-m_2+\sum_{j=1}^{\mu}\sum_{k=1}^{r_j}\kappa(\beta_j^k)+\sum_{j=\mu+1}^{\nu}\kappa(\beta_j). \qquad (6.1)$$

Доказательство. Рассмотрим отображения

$$h: N\to\overline{\mathbb{C}} \quad \text{и} \quad g=h\circ F:\Pi\to\overline{\mathbb{C}}$$

(h и F введены при доказательстве теоремы 5.2). Без ограничения общности можно считать, что h локально инъективно в точках множества $\bigcup_{j=1}^{\mu}|\beta_j|$. Более того, можно считать, что все точки ветвления римановой поверхности (N, h) лежат в той же компоненте связности множества $N \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{\nu} |\beta_j|\right)$, что и точка a. Так как кривые β_j локально просты, то $h(\beta_j)$ также локально просты, $j = 1, \dots, \nu$, и не проходят через точку ∞. В силу (5.6) имеем $C = -\sum\limits_{j=1}^{\nu} w(h(\beta_j)^-)$. Поскольку для локально простых кривых α в $\mathbb{C}$ справедливо равенство $w(\alpha^-) = w(\alpha)$, то

$$C = \sum_{j=1}^{\nu} w(h(\beta_j)). \tag{6.2}$$

Отображения h и g индуцируют на N и Π соответственно комплексные структуры со сферы $\overline{\mathbb{C}}$. В дальнейшем, говоря о гладкости и аналитичности в N и Π, мы будем иметь в виду гладкость и аналитичность относительно этих структур.

Применяя в случае необходимости несколько раз лемму Морса о изотопии [64], лемма 4.1, стр.180, можно добиться того, чтобы кривые β_j перешли в гладкие кусочно аналитические кривые β'_j, которые пересекают кривые α_{ij} под прямыми углами, при этом кривые $h(\beta'_j)$ являются прямолинейными в окрестности образов точек пересечения, а характеристики кривых β_j, входящие в правые части (6.1) и (6.2), совпадают с аналогичными характеристиками кривых β'_j, поскольку они инвариантны при «малых» изотопиях. Поэтому без ограничения общности можно считать, что кривые β_j удовлетворяют всем свойствам кривых β'_j, описанным выше.

Для дальнейшего доказательства теоремы 6.1 нам понадобятся три леммы.

Лемма 6.1 *Пусть γ_1 и γ_2 — две гладкие кривые в $\mathbb{C}$ с представлениями $\omega_1, \omega_2 : [0,1] \to \mathbb{C}$, причем $\omega'_j(t) \neq 0$, $0 \le t \le 1$, $j = 1, 2$, и*

$$\begin{gathered} \omega_1(0) = \omega_2(1), \quad \omega_1(1) = \omega_2(0), \\ \mathrm{Re}[\omega'_2(0)/\omega'_1(1)] = \mathrm{Re}[\omega'_1(0)/\omega'_2(1)], \\ \mathrm{Im}[\omega'_2(0)/\omega'_1(1)] > 0, \quad \mathrm{Im}[\omega'_1(0)/\omega'_2(1)] > 0. \end{gathered} \tag{6.3}$$

Тогда индекс Уитни произведения кривых $w(\gamma_1\gamma_2) = w_1 + w_2 + 1/2$, где $w_i = (1/2\pi)\int\limits_0^1 d\{\arg[\omega'_i(t)]\}$, $i = 1, 2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. С помощью изотопии, не изменяющей индексов Уитни и характеристик w_i, $i = 1, 2$ ([64], лемма 4.1, с. 180), можно добиться того, чтобы γ_1 и γ_2 стали прямолинейными в окрестности концов. Тогда $\gamma_i = \alpha_i \gamma_i' \alpha_i'$, где α_i, α_i', — кривые, обходящие отрезки прямых, $i = 1, 2$. Очевидно, что $w(\gamma_1\gamma_2) = w(\alpha_1\gamma_1'\alpha_1'\alpha_2\gamma_2'\alpha_2') = w(\gamma_1'\alpha_1'\alpha_2\gamma_2'\alpha_2'\alpha_1) = w_1' + w(\alpha_1'\alpha_2) + w_2' + w(\alpha_2'\alpha_1)$, где w_i' — величины, аналогичные w_i для кривых γ_i', $i = 1, 2$. Поскольку прямолинейные концевые участки не изменяют величин w_i, $i = 1, 2$, то $w_i' = w_i$, $i = 1, 2$. Из (6.3) следует, что $w(\alpha_1'\alpha_2) = w(\alpha_2'\alpha_1) = 1/4$. Следовательно, $w(\gamma_1\gamma_2) = w_1 + w_2 + 1/2$ и лемма 6.1 доказана.

Лемма 6.2 *Пусть D — жорданова область в $\mathbb{C}$, $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ — локально гомеоморфное отображение и замкнутая кривая γ в $\overline{D}$ квази- локально проста. Тогда $w(f(\gamma)) = w(\gamma)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме Ф. Г. Авхадиева [5] f можно продолжить до внутреннего отображения $\widetilde{f} : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$. Пусть $\sigma = (R, \pi)$ — односвязная риманова поверхность над $\overline{\mathbb{C}}$, ограниченная γ^-, существование которой следует из [5]. Тогда $\tau = (R, \widetilde{f}\circ\pi)$ — риманова поверхность над $\overline{\mathbb{C}}$, ограниченная кривой $(f(\gamma))^-$. Из [4], теорема 2, следует, что $V(\sigma) = n_\sigma(\infty) - 1 - w(\gamma)$, $V(\tau) = n_\tau(\infty) - 1 - w(f(\gamma))$. Значит,

$$w(f(\gamma)) = w(\gamma) + 2(n_\tau(\infty) - n_\sigma(\infty)) + V(\sigma) - V(\tau). \tag{6.4}$$

Имеем

$$n_\tau(\infty) = \sum_{P:\widetilde{f}\circ\pi(P)=\infty} [\mathrm{ord}(P,\tau)+1] = \sum_{P:\widetilde{f}\circ\pi(P)=\infty} [\mathrm{ord}(P,\sigma)+1][\mathrm{ord}(\pi(P),\delta)+1] =$$

$$= \sum_{\widetilde{f}(z)=\infty} [\mathrm{ord}(z,\delta)+1] \sum_{\pi(P)=z} [\mathrm{ord}(P,\sigma)+1] =$$

$$= \sum_{z:\widetilde{f}(z)=\infty} n_\sigma(z)[\mathrm{ord}(z,\delta)+1]. \tag{6.5}$$

Кроме того,

$$V(\tau) = \sum_{P\in\overline{R}} \operatorname{ord}(P,\tau) = \sum_{P\in\overline{R}} \{[\operatorname{ord}(P,\sigma)+1][\operatorname{ord}(\overline{\pi}(P),\delta)+1]-1\} =$$

$$= \sum_{P\in\overline{R}} \operatorname{ord}(P,\sigma) + \sum_{P\in\overline{R}} [\operatorname{ord}(P,\sigma)+1] \operatorname{ord}(\overline{\pi}(P),\delta) =$$

$$= V(\sigma) + \sum_{z\in\overline{\pi}(\overline{R})} \operatorname{ord}(z,\delta) \sum_{P\in(\overline{\pi})^{-1}(z)} [\operatorname{ord}(P,\sigma)+1] =$$

$$= V(\sigma) + \sum_{z\in\overline{\pi}(\overline{P})} \operatorname{ord}(z,\delta) n_\sigma(z). \tag{6.6}$$

Из (6.4)–(6.6) получаем

$$w(f(\gamma)) = w(\gamma) + 2\sum_{z:f(z)=\infty} n_\sigma(z)[\operatorname{ord}(z,\delta)+1] -$$

$$-2n_\sigma(\infty) - \sum_{z\in\overline{\pi}(\overline{R})} \operatorname{ord}(z,\delta) n_\sigma(z). \tag{6.7}$$

Поскольку $\widetilde{f}|_{\overline{D}} = f$, а f — локально гомеоморфное отображение, принимающее конечные значения, то $\widetilde{f}(z) = \infty \Rightarrow z \in \overline{\mathbb{C}}\backslash\overline{D}$, $\operatorname{ord}(z,\delta) \neq 0$. Если $\operatorname{ord}(z,\delta) \neq 0$, то в силу жордановости области $\overline{D}$ существует кривая ω, соединяющая точки z и ∞, целиком лежащая вне $\overline{D}$, следовательно, не пересекающаяся с кривой γ. По теореме 4.1 имеем $n_\sigma(\infty) - n_\sigma(z) = \kappa(\gamma^-,\omega) = 0$. Следовательно, $n_\sigma(z) = n_\sigma(\infty)$, $z \notin \overline{D}$, и (6.7) можно переписать в виде

$$w(f(\gamma)) = w(\gamma) + 2n_\sigma(\infty) \sum_{z:f(z)=\infty} [\operatorname{ord}(z,\delta)+1] - 2n_\sigma(\infty) -$$

$$-n_\sigma(\infty) \sum_{z\in\overline{\pi}(\overline{R})} \operatorname{ord}(z,\delta) = w(\gamma) + 2n_\sigma(\infty)[2n(\infty) - 2 - V(\delta)] = w(\gamma),$$

поскольку в силу формулы Римана-Гурвица для разветвленного накрытия $\widetilde{f} : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ имеем $V(\delta) = 2 - 2n_\delta(\infty)$. Лемма 6.2 доказана.

Лемма 6.3 *Пусть γ — замкнутая локально простая кривая в $\overline{\mathbb{C}}$ и начало z_0 кривой γ можно соединить с бесконечно удаленной точкой кривой ω, лежащей в $(\overline{\mathbb{C}}\backslash|\gamma|) \cup \{z_0\}$. Тогда индекс Уитни $w(\gamma)$ кривой γ равен $\varepsilon + \kappa(\gamma)$, где $\kappa(\gamma)$ — индекс самопересечения кривой γ, $\varepsilon = +1$, если ω подходит «справа» к кривой γ в точке z_0, и $\varepsilon = -1$, если — «слева».*

Доказательство. Для гладких кривых это, по существу, результат Уитни [207]. Общий случай сводится к гладкому путем конечного числа «малых» изотопий, которые не изменяют величин $w(\gamma)$ и $\kappa(\gamma)$.

Вернемся к доказательству теоремы 6.1. Пусть $\mu + 1 \leq j \leq \nu$. Тогда, используя леммы 6.2 и 6.3, получаем, что

$$w(h(\beta_j)) = w(h \circ F(\gamma_j)) = w(\gamma_j) = \varepsilon_j + \kappa(\gamma_j) = \varepsilon_j + \kappa(\beta_j),$$

где γ_j — такая кривая в $\overset{\circ}{\Pi}$, что $F(\gamma_j) = \beta_j$, $\varepsilon_j = \pm 1$ и знак ε_j выбирается для γ_j так же, как выбирался знак ε для γ в лемме 6.4. Тогда

$$\sum_{j=\mu+1}^{\nu} w(h(\beta_j)) = \sum_{j=\mu+1}^{\nu} \varepsilon_j + \sum_{j=\mu+1}^{\nu} \kappa(\beta_j) = m_1 - m_2 + \sum_{j=\mu+1}^{\nu} \kappa(\beta_j). \quad (6.8)$$

Пусть теперь $1 \leq j \leq \mu$. Обозначим вершины $P_1, Q_1, R_1, S_1, \ldots, P_\rho$, Q_ρ, R_ρ, S_ρ, многоугольника Π через $V_1, V_2, \ldots, V_{4\rho}$ соответственно. Пусть C_j — сторона Π с вершинами V_j, V_{j+1} ($V_{4\rho+1} = V_1$), $j = 1, \ldots, 4\rho$. Дуга γ_j^k имеет начало и конец в точках P'_{jk} и P''_{jk} соответственно. Пусть $P'_{jk} \in C_{s(k,j)}$, $P''_{jk} \in C_{t(k,j)}$. Для любого i, $1 \leq i \leq 4\rho$, построим дуги окружностей δ_i радиуса ε с центром в V_i, соединяющие в Π стороны C_{i-1} и C_i ($C_0 = C_{4\rho}$). Начало и конец дуги δ_j, обходимой против часовой стрелки, обозначим через E'_j и E''_j соответственно.

Выберем радиусы ε окружностей настолько малыми, чтобы круги радиуса ε с центрами в V_i попарно не пересекались и не содержали точек кривых β_j, $j = 1, \ldots, \nu$. Поскольку определяемые величины не зависят от выбора отображения h, в частности, точек A'_i, A''_i, B'_i, B''_i, C_i, $i = 1, \ldots, \rho$, и T, то можно считать, что

$$\varepsilon > \max\{|A'_i Q_i|, |A''_i R'_i|, |B'_i R_i|, |B''_i S_i|, |C_i R_i|,\ i = 1, \ldots, \rho,\ |P_1 T|\}.$$

Обозначим для гладкой дуги γ с представлением $z:[0,1]\to\mathbb{C}$ $(z'(t)\neq 0,\ t\in[0,1])$ через $w^*(\gamma)$ величину $(1/2\pi)\int\limits_0^1 d\{\arg[z'(t)]\}$. Нетрудно проверить, что

$$w^*(h(F(\delta_j)))=\begin{cases} 1/2, & j=4k+1, k\neq 0,\\ -3/2, & j=4k+3,\\ 0, & j=4k+2, 4k+4,\\ -\rho+3/2, & j=1.\end{cases} \tag{6.9}$$

Если $P'_{jk}<P''_{jk}$, то пусть

$$\widetilde{\gamma}_j^k=(\gamma_j^k)^-\cdot\overline{P'_{jk}E''_{s(k,j)+1}}\cdot\delta_{s(k,j)+1}\cdot\overline{E'_{s(k,j)+1}E''_{s(k,j)+2}}\times$$
$$\times\delta_{s(k,j)+2}\cdot\ldots\cdot\delta_{t(k,j)}\cdot\overline{E'_{t(k,j)+1}P''_{jk}}.$$

Тогда

$$w^*(h\circ F(\widetilde{\gamma}_j^k))=-w^*(h\circ F(\gamma_j^k))+\sum_{i=s(k,j)+1}^{t(k,j)}w_i+1/2,$$

где

$$w_i=w^*(h\circ F(\delta_i))+1/2.$$

В силу лемм 6.2 и 6.3

$$\kappa(\gamma_j^k)=-\kappa(\widetilde{\gamma}_j^k)=1-w^*(\widetilde{\gamma}_j^k)=1-w^*(h\circ F(\widetilde{\gamma}_j^k))=$$
$$=1/2+w^*(h\circ F(\gamma_j^k))-\sum_{i=s(k,j)+1}^{t(k,j)}w_i,$$

откуда

$$w^*(h\circ F(\widetilde{\gamma}_j^k))=-1/2+\kappa(\gamma_j^k)+\sum_{i=s(k,j)+1}^{t(k,j)}w_i. \tag{6.10}$$

Если $P'_{jk}>P''_{jk}$, то пусть

$$\widetilde{\gamma}_j^k=(\gamma_j^k)^-\cdot\overline{P'_{jk}E''_{s(k,j)+1}}\cdot\delta_{s(k,j)+1}\cdot\overline{E'_{s(k,j)+1}E''_{s(k,j)+2}}\cdot$$
$$\delta_{s(k,j)+2}\cdot\ldots\delta_{4\rho}\cdot\overline{E'_{4\rho 1}E''_1}\cdot\delta_1\cdot\overline{E'_1E''_2}\cdot\delta_2\cdot\ldots\cdot\delta_{t(k,j)}\cdot\overline{E'_{t(k,j)}P''_{jk}}.$$

Тогда аналогично предыдущему случаю

$$\kappa(\gamma_j^k) = 1 - w^*(h \circ F(\widetilde{\gamma}_j^k)) = 1/2 + w^*(h \circ F(\gamma_j^k)) -$$

$$- \sum_{i=s(k,j)+1}^{4\rho} w_i + \sum_{i=1}^{t(k,j)} w_i,$$

и

$$w^*(h \circ F(\widetilde{\gamma}_j^k)) = -1/2 + \kappa(\gamma_j^k) +$$

$$+ \sum_{i=s(k,j)+1}^{4\rho} w_i + \sum_{i=1}^{t(k,j)} w_i. \tag{6.11}$$

Перепишем соотношения (6.10) и (6.11) в другом виде. Для этого отметим, что из (6.9) следует соотношение

$$\sum_{i=1}^{4\rho} w_i = 1. \tag{6.12}$$

Пусть

$$\sum_{k=i}^{j}{}^{*} a_k = \begin{cases} \sum_{k=i}^{j} a_k & i \le j, \\ \qquad 0, & i = j+1, \\ \sum_{k=j+1}^{i-1} a_k, & i > j+1. \end{cases}$$

Для подобного суммирования $\sum^*$ справедливы правила, верные и для обычного суммирования, в частности, $\sum\limits_{k=i}^{j}{}^{*} a_k + \sum\limits_{k=j+1}^{l}{}^{*} a_k = \sum\limits_{k=i}^{l}{}^{*} a_k$ для любых целых i, j и l.

Пусть $\varepsilon_j^k = -1$, если $P'_{jk} < P''_{jk}$ и $\varepsilon_j^k = 1$, если $P'_{jk} > P''_{jk}$. Тогда равенства (6.10) и (6.11) могут быть записаны с учетом (6.12) в единообразной форме

$$w^*(h \circ F(\widetilde{\gamma}_j^k)) = \varepsilon_j^k/2 + \kappa(\gamma_j^k) + w_j^k, \tag{6.13}$$

где $w_j^k = \sum\limits_{i=s(k,j)+1}^{t(k,j)} w_i$. Докажем, что

$$\sum_{j=1}^{\mu}\sum_{k=1}^{r_j} w_j^k = 0. \tag{6.14}$$

Действительно, поскольку цикл $Z = \sum\limits_{j=1}^{\nu} \beta_j$ гомологичен нулю, то индекс пересечения Z с любой окружностью букета $D = F(\partial\Pi)$ равен нулю (см. [43], §73). Так как кривые $\beta_{\mu+1}, \ldots, \beta_\nu$ не пересекаются с D, то это же утверждение справедливо и для цикла $\sum\limits_{j=1}^{\mu} \beta_j$. Отсюда, в частности, следует, что на множестве пар

$$\mathcal{P} = \{(k,j) \mid 1 \le k \le r_j, \quad 1 \le j \le \mu\}$$

существует перестановка $\phi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ такая, что $s(\phi(k,j)) = t(k,j)$ для любой пары $(k,j) \in \mathcal{P}$. Рассмотрим любой цикл $((k_1,j_1), \ldots, (k_m,j_m))$ этой перестановки. Пусть (k_{m+1}, j_{m+1})=(k_1, j_1). Тогда

$$\sum_{l=1}^{m} w_{j_l}^{k_l} = \sum_{l=1}^{m} \sum_{i=s(k_l,j_l)+1}^{t(k_l,j_l)} w_i = \sum_{l=1}^{m} \sum_{i=s(k_l,j_l)+1}^{s(\Phi(k_l,j_l))}{}^{*} w_i =$$

$$\sum_{l=1}^{m} \sum_{i=s(k_l,j_l)+1}^{s(k_{l+1},j_{l+1})}{}^{*} w_i = \sum_{i=s(k_1,j_1)+1}^{s(k_1,j_1)}{}^{*} w_i = 0.$$

Поскольку это верно для любого цикла, то имеет место (6.14).

Так как $\sum \varepsilon_j^k = n_2 - n_1$, то из (6.13), (6.14) следует, что

$$\sum_{j=1}^{\mu} w(h(\beta_j)) = \sum_{j=1}^{\mu}\sum_{k=1}^{r_j} w^*(h \circ F(\gamma_j^k)) =$$

$$= (n_2 - n_1)/2 + \sum_{j=1}^{\mu}\sum_{k=1}^{r_j} \kappa(\gamma_j^k). \tag{6.15}$$

Индекс самопересечения инвариантен при сохраняющих ориентацию гомеоморфизмах, поэтому $\kappa(\gamma_j^k) = \kappa(\beta_j^k)$, $1 \le k \le r_j$, $1 \le j \le \mu$. Из последнего равенства, а также (6.15), (6.8) и (6.2) следует утверждение теоремы 6.1.

Теперь укажем, как можно подсчитать индекс вращения множества кривых $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$ на компактной поверхности N, если кривые $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$ квази- локально просты и могут проходить через точку a. Для этого введем операцию вдавливания для квази- локально простой кривой на N, обобщающую соответствующую операцию для кривых на сфере $\overline{\mathbb{C}}$.

Пусть β — квази- локально простая кривая в N, точка P принадлежит замкнутой дуге кривой β, причем:

а) все точки дуги α являются простыми, за исключением, быть может, точки P индекса $n \geq 0$;

б) концы дуги α являются простыми точками β.

Тогда существует простая дуга γ в $\mathbb{C}$, проходящая через начало координат и гомеоморфизм $f : U \to N$, где U — окрестность нуля в $\mathbb{C}$ такие, что $\alpha = f \circ h(\gamma)$, где $h(z) = z^{n+1}$, $z \in \mathbb{C}$. Пусть γ_1 — простая замкнутая дуга в $\mathbb{C}$, имеющая те же начальную и конечную точки, что и γ, такая, что

1) кривая $\gamma(\gamma_1)^-$ является границей жордановой области G в $\mathbb{C}$, причем $h(\overline{G}) \subset U$,

2) существует дуга α' кривой β, содержащая внутри себя дугу α такую, что $f \circ h(\overline{G}) \cap (|\alpha'| \backslash |\alpha|) = \emptyset$.

Обозначим $\alpha_1 = f \circ h(\gamma_1)$. Будем говорить, что кривая β_1, полученная из β заменой дуги α на дугу α_1, является результатом *вдавливания кривой β вдоль дуги α*.

Если точка P является начальной точкой замкнутой кривой β, то вдавливание определяется аналогичным образом, следует только сместить начало кривой β, произвести вдавливание, а затем перенести начальную точку в одну из точек дуги α_1.

Если в условии 1) вместо кривой $\gamma(\gamma_1)^-$ поставить $\gamma_1\gamma^-$, то соответствующую операцию назовем операцией *выдавливания кривой β вдоль дуги α*. Соответствующую область $f \circ h(G)$ будем называть *областью вдавливания (выдавливания)*.

Теорема 6.2 *Пусть $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$ — квази- локально простые кривые на компактной римановой поверхности N. Пусть кривая β_j проходит k_j раз через точку a и кривая β_j'' получена из кривой β_j за конечное число последовательных выдавливаний в окрестности особых точек кривой β_j и точек, которые соответствуют прохождению β_j через точку a. Предположим, что области выдавливания* *не содержат точку a. Тогда индекс вращения C кривых $\beta_1, \dots, \beta_\nu$ может быть вычислен по формуле*

$$C = C' + \sum_{j=1}^{\nu} k_j \ \chi_N, \tag{6.16}$$

где *C' — индекс вращения кривых $\beta'_1, \dots, \beta'_\nu$.*

Доказательство. При выдавливании происходит расширение поверхности $\overline{\sigma} = (\overline{M}, \overline{p})$ за счет односвязных римановых поверхностей $(\overline{G}_j, f_j \circ h_j)$, где G_j, f_j и h_j — те же, что и G, f и h в определении операции вдавливания (выдавливания), а индекс j означает, что они соответствуют j-му выдавливанию. В результате получаем риманову поверхность $\overline{\sigma'} = (\overline{M}', \overline{p}\,')$, ограниченную кривыми $\beta'_1, \dots, \beta'_\nu$, причем $n_\sigma(a) = n_{\sigma'}(a) + \sum\limits_{j=1}^{\nu} k_j$, а $\chi_{\overline{M}'} = \chi_{\overline{M}}$. Для обоснования (6.16) осталось показать, что $V(\sigma') = V(\sigma)$.

Существует взаимно-однозначное соответствие между точками ветвления поверхности σ, соответствующими особым точкам кривых $\beta_1, \dots, \beta_\nu$ и внутренними точками ветвления поверхности σ', образующимися из них в результате выдавливания. Достаточно установить, что порядок граничной точки ветвления римановой поверхности σ и порядок соответствующей ей внутренней точки σ' совпадают.

Пусть Q — граничная точка ветвления σ, α — дуга кривой β_i, содержащая ее проекцию $P = \overline{p}(Q)$ и

$$n = \mathrm{ord}(P, \sigma) + 1, \quad n' = \mathrm{ord}(P, \sigma') + 1.$$

Из определения сразу вытекает, что $n \leq n'$, поскольку окрестность точки Q в $\overline{\sigma}$ может быть вложена в n'-листный обобщенный круг над N (окрестность точки Q в σ'). Докажем, что $n' \leq n$. Предположим противное, т. е. что $n < n'$. Так как $n = \mathrm{ord}(P, \sigma)$, то существует обобщенный n-листный односвязный круг $K = (R, \pi)$ над N с единственной точкой ветвления и простая кривая ω в K такая, что
1) ее проекция на N есть дуга α кривой β_i, содержащая точку P;
2) ω разбивает K на две части, причем та часть K_1, которая лежит «слева» от ω вложена в σ, т. е. существует непрерывное инъективное отображение $j : R \to M$ такое, что $p \circ j = \pi$ и $Q \in |j(\omega)|$.

Выберем аналогично n'-листный односвязный круг $K' = (R', \pi')$ над N с единственной точкой ветвления, который содержится в σ', причем точка ветвления переходит при вложении j' в точку Q. Без ограничения общности можно считать, что поверхность K ограничена кривой η^n, а K' — кривой $\eta^{n'}$, где η — некоторая простая замкнутая кривая в N. В K' также существует кривая ω', которая разбивает K' на две части, причем та из них, которая лежит «слева» от нее, совпадает с K_1. Рассмотрим часть K_2 круга K и часть K_2', которые лежат «справа» от $j(\omega)$ и ω' соответственно. Поскольку $n < n'$, то существуют точки N, над которыми число листов у K_2' больше числа листов поверхности K_2. Наконец, пусть n'' есть число, которое на единицу превышает индекс точки P квази- локально простой кривой β_i. Построим обобщенный односвязный n''-листный круг K'', ограниченный кривой $\eta^{n''}$, с единственной точкой ветвления, на котором существует простая кривая ω'', проекция которой на N есть α, разбивающая K'' на две части, одна из которых K_2'', лежащая «справа» от нее, совпадает с K_2' (последнее следует из определения конструкции выдавливания). Пусть K_1'' — часть K'', лежащая «слева» от ω''. Склеивая $\overline{K}_1''$ с $\overline{K}_2$, получаем односвязный обобщенный $\widetilde{n}$-листный круг (с краем) над N, содержащий простую кривую, проектирующуюся в α, причем $\widetilde{n} < n''$. Отсюда следует, что индекс особой точки P кривой β_j не превосходит числа $\widetilde{n} - 1 < n'' - 1$, что противоречит тому, что этот индекс равен $n'' - 1$. Итак, $n = n'$, что завершает доказательство теоремы 6.2.

Для некомпактных римановых поверхностей N индекс вращения может быть подсчитан следующим образом. Следует выбрать подобласть N_1 в N конечного рода, ограниченную кривыми, такую, что $\sum_{j=1}^{\nu} |\beta_j| \subset N_1$ и для любых точек b_1, $b_2 \in N \backslash \overline{N}_1$ и кривой ω, соединяющей эти точки, $\sum\limits_{j=1}^{\nu} \kappa(\omega, \beta_j) = 0$, а затем вложить N_1 в компактную риманову поверхность N_2. В качестве точки a можно выбрать любую точку из множества $N_2 \backslash \overline{N}_1$. Далее вычисляем индекс вращения C кривых $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$ в N_2 (относительно точки a). Полученная константа является искомой.

§7. Существование римановой поверхности, ограниченной кривой β, с заданным числом листов над точкой a

Пусть кривая β является замкнутой квази- локально простой кривой в N, допускающей разве лишь конечное число самопересечений и повторяющихся участков. Это означает следующее: если $z : [0,1] \to N$ есть представление кривой β, то существует конечное число точек $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_l = 1$ таких, что для любых $1 \le i, j \le l$ пути $z|_{(t_{i-1},t_i)}$ и $z|_{(t_{j-1},t_j)}$ являются простыми и их носители либо не пересекаются, либо совпадают.

Пусть N — компактная риманова поверхность, кривая β не проходит через точку a. В этом случае носитель $|\beta|$ кривой β разбивает N на конечное число областей $D_1, \ldots, D_n$. Если β гомологична нулю, то для любой точки $b \in D_j$ и любой кривой ω, соединяющей точку a с точкой b, индекс пересечения $n_j = \kappa(\beta, \omega)$ не зависит от выбора точки b и кривой ω.

Назовем *вершинами кривой* β точки P носителя $|\beta|$, обладающие свойством: либо $|\beta|$ ни в какой малой окрестности точки P не является носителем простой кривой, либо $P = z(t)$, где t — точка интервала $[0,1]$, ни в какой окрестности которой периодическое продолжение $\widetilde{z}$ отображения z не является инъективным (в этом случае P — конец некоторого разреза).

Для любой вершины P кривой β существует достаточно малая окрестность U, ограниченная жордановой кривой, такая, что

1) U не содержит других вершин кривой β, кроме точки P;

2) $U \cap |\beta|$ состоит из конечного числа простых дуг $|\eta_1|, \ldots, |\eta_u|$ таких, что $|\eta_i| \cap |\eta_j| = P$, $i \neq j$.

В этом случае $U \backslash |\beta|$ является дизъюнктным объединением криволинейных жордановых секторов $S_1, \ldots, S_u$ с вершиной в точке P, либо $U \backslash |\beta| = S_1$ получается из U проведением разреза по дуге $|\eta_1|$, оканчивающейся в точке P. Для любого $1 \le k \le u$ определим число $m(P, S_k)$ следующим образом. Существует конечное число дуг γ_j кривой β, лежащих в U и проходящих ровно один раз через точку P, концы которых находятся на ∂U. Если γ_j — разрез окрестности U из точки P, то пусть $m_j = 1$. Если γ_j — не разрез, то полагаем $m_j = 1$, если S_k лежит в части множества $U \backslash |\gamma_j|$, остающейся «слева» от γ_j, и $m_j = 0$, если — «справа». Наконец, пусть

$$m(P, S_k) = \sum_j m_j.$$

Сектор S_k лежит в одной из областей D_j. Определим число

$$m(P) = n_j - m(P, S_k).$$

Нетрудно видеть, что число $m(P)$ не зависит от k, $1 \leq k \leq u$. Действительно, пусть сектор S_{k+1} лежит в области D_i и кривая β проходит участок $|\eta_k|$ их общей границы с S_k всего $(p+q)$ раз, причем в p раз случаях сектор S_{k+1} остается «слева» от β, и в q случаях — «справа». Тогда из определения чисел $m(P, S_k)$ и $m(P, S_{k+1})$ следует, что

$$m(P, S_{k+1}) - m(P, S_k) = p - q. \tag{7.1}$$

С другой стороны, пусть кривая ω соединяет точку a с точкой $b_1 \in S_k \subset D_j$, точка $b_2 \in S_{k+1} \subset D_i$ и простая кривая ω_1 соединяет точки b_1 и b_2 в U, однократно пересекая $|\beta|$ в точке, принадлежащей $|\eta_k|$. Тогда

$$n_i = \kappa(\beta, \omega \cdot \omega_1) = \kappa(\beta, \omega) + \kappa(\beta, \omega_1) = n_j + (p - q),$$

откуда с учетом равенства (7.1) следует, что

$$n_j - m(P, S_k) = n_i - m(P, S_{k+1}).$$

Итак, величина $m(P)$ определена корректно. Аналогично можно определить величину $m(P)$ для любой точки $P \in |\beta|$, а не только для вершин кривой β. Очевидна

Лемма 7.1 *Пусть α — простая дуга в $|\beta|$, оканчивающаяся в вершине P кривой β и не содержащая других вершин. Пусть Q_1, Q_2 — две точки из $|\alpha|$, не совпадающие с P. Тогда*

$$m(Q_1) = m(Q_2) \geq m(P).$$

Справедлива

Теорема 7.1 *Для того чтобы существовала риманова поверхность $\sigma = (M, p)$ над N, ограниченная кривой β, накрывающая n раз точку a (с учетом кратности ветвления), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $m(P) \geq -n$ для любой вершины P кривой β.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\sigma = (M, p)$ — риманова поверхность над N, ограниченная кривой β, причем $n_\sigma(a) = n$, и $\overline{\sigma} = (\overline{M}, \overline{p})$ — каноническое расширение σ, вызванное присоединением края. Рассмотрим любую вершину P кривой β. Пусть окрестность U точки P выбрана так же, как и выше, при определении величины $m(P)$. Фиксируем некоторый сектор S_k. Пусть $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ — те из дуг кривой β, которые проходят через точку P и либо являются разрезами, либо таковы, что сектор S_k остается «слева» от них при обходе в положительном направлении. Тогда множество $\overline{p}^{-1}(P)$ содержит по крайней мере r точек $P_1, \dots, P_r$ на ∂M, обладающих свойством: для любой точки P_j существует дуга α_j, содержащая точку P_j и проходящая часть некоторой компоненты края ∂M в положительном направлении, причем $\overline{p}(\alpha_j) = \gamma_j$. Пусть V_j — окрестность точки P_j в $\overline{M}$, причем $V_i \cap V_j = \emptyset$, $i \neq j$. Ясно, что $\cap_{j=1}^{r} p(V_j)$ не пусто и содержит некоторую окрестность V точки P в $\overline{S}_k$. Отсюда следует, что для любой точки $Q \in V \cap S_k$ существует по крайней мере по одному ее прообразу Q_j в V_j, $1 \leq j \leq r$, причем, поскольку $Q \notin |\beta|$, точки $Q_j \notin \partial M$, т. е. $Q_j \in M$, $1 \leq j \leq \nu$. Следовательно,

$$n_\sigma(Q) \geq r = m(P, S_k). \tag{7.2}$$

Пусть теперь кривая ω соединяет точку a с точкой Q. По теореме 4.1 имеем $n_\sigma(Q) - n = n_\sigma(Q) - n_\sigma(a) = \kappa(\beta, \omega) = n_j$, где j таково, что сектор S_k содержится в D_j. Следовательно,

$$m(P) = n_j - m(P, S_k) = n_j(Q) - n - r \geq -n$$

в силу (7.2).

Достаточность. Рассмотрим сначала случай $n = 0$. Вершины β разбивают носитель $|\beta|$ на части, которые назовем сторонами β. Построим достаточно мелкую триангуляцию Δ римановой поверхности N, удовлетворяющую свойствам:

1) множество вершин триангуляции Δ содержит все вершины β;

2) каждый треугольник из Δ содержит на границе не более одной из вершин β и пересекается не более, чем с одной стороной β (треугольники Δ, т. е. сингулярные 2-симплексы мы отождествляем с их носителями. Нам будет удобно считать эти треугольники замкнутыми);

3) пересечение любого треугольника из Δ с $|\beta|$ есть либо пустое множество, либо вершина, либо сторона этого треугольника;

4) если пересечение двух треугольников триангуляции не имеет общих точек с $|\beta|$, то по крайней мере один из этих треугольников не пересекается с $|\beta|$.

Вершины триангуляции Δ разбивают кривую β на жордановы дуги $\alpha_1, \ldots, \alpha_v$. Будем считать, что дуги α_j занумерованы таким образом, что $\beta = \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_v$. Пусть $\alpha_{v+1} = \alpha_1$.

Рассмотрим вершину V_j триангуляции Δ, которая является концом дуги α_j и началом дуги α_{j+1}. Тогда существует конечное число попарно различных треугольников $t_j^1, \ldots, t_j^{L(j)}$ триангуляции Δ, удовлетворяющих свойствам:

1) одна из сторон у треугольника t_j^1 есть $|\alpha_j|$, а у треугольника $t_j^{L(j)}$ — $|\alpha_{j+1}|$, причем t_j^1 и $t_j^{L(j)}$ лежат «слева» от α_j и α_{j+1} соответственно;

2) все треугольники $t_j^l, 1 \leq l \leq L(j)$, содержат на границе вершину V_j, причем треугольник t_j^l имеет общую сторону с треугольником t_j^{l+1}, $1 \leq l \leq L(j) - 1$;

3) общая сторона треугольников t_j^1 и t_j^2 отлична от $|\alpha_j|$.

Теперь будем рассматривать треугольники t_j^l триангуляции Δ как однолистные римановы поверхности с краем над N (проекция $p_j^l : t_j^l \to N$ есть вложение t_j^l в N). В конечной последовательности треугольников $t_1^1,\ t_1^2, \ldots, t_1^{L(1)-1},\ t_1^{L(1)} = t_2^1,\ t_2^2, \ldots, t_2^{L(2)-1}$, $t_2^{L(2)} = t_3^1, \ldots, t_{v-1}^{L(v-1)-1} = t_v^1,\ t_v^2, \ldots, t_v^{L(v)-1}$ склеим любые два треугольника, стоящих рядом, вдоль их общей стороны, а также треугольники $t_v^{L(v)-1}$ и $t_1^1 = t_v^{L(v)-1}$ вдоль их общей стороны. В результате получаем риманову поверхность с краем $\overline{\sigma}_1 = (\overline{M}_1, \overline{p}_1)$ над N, ограниченную кривыми, одной из которых является β.

В дальнейшем треугольники триангуляции Δ будем обозначать также через $\overline{D}_k^j$, где нижний индекс указывает на принадлежность треугольника $\overline{D}_k^j$ области D_k; таким образом, $\cup_j \overline{D}_k^j = \overline{D}_k$. Стороны триангуляции Δ (замкнутые 1-симплексы) будем обозначать через $|\widetilde{\gamma}_1|, \ldots, |\widetilde{\gamma}_w|$. Из построения $\overline{\sigma}_1$ следует, что над каждым треугольником $\overline{D}_k^j$ в N лежит $m(j,k)$ треугольников $\overline{D}_{ks}^j$, $1 \leq s \leq m(j,k)$, римановой поверхности $\overline{\sigma}_1$, где $m(j,k) = m(P, S_i) = n_k - m(P)$, P — единственная вершина β на границе $\overline{D}_k^j$, если таковая имеется, и любая фиксированная точка из $|\beta| \cap \partial D_k^j$ в противном случае, S_i — достаточно малый сектор с вершиной в точке P, пересекающийся с D_k^j.

Так как по условию $m(P) \geq -n = 0$ для любой вершины β и в силу леммы 7.1 минимум величины $m(P)$ достигается в случае, когда P является вершиной кривой β, то $m(P) \geq 0$ для любой точки $P \in |\beta|$. Значит,

$$m(j,k) \leq n_k \quad \text{для любых } j \text{ и } k. \tag{7.3}$$

Так как для области D_j, содержащей точку a, величина $n_j = 0$, то $n_{\sigma_1}(a) = 0$. Отсюда следует, что если $\overline{\sigma}_1$ содержит только одну граничную компоненту, то риманова поверхность $\sigma_1 = (M_1, p_1)$ является искомой. В противном случае σ_1 ограничена кривой β и некоторой кривой β_1. Пусть $\widetilde{\beta}_1$ — кривая в $\overline{M}_1$, обходящая одну из компонент ∂M_1 и проектирующаяся в β_1. Обозначим носитель $|\widetilde{\beta}_1|$ кривой $\widetilde{\beta}_1$ через B_1.

Пусть сторона $|\widetilde{\Gamma}_q|$ некоторого треугольника $\overline{D}_{li}^p$ в $\overline{\sigma}_1$ лежит на B_1 и $\overline{D}_s^r$ — треугольник в N, смежный с $\overline{D}_l^p = \overline{p}_1(D_{li}^p)$ вдоль стороны $|\widetilde{\gamma}_q| = \overline{p}_1(|\widetilde{\Gamma}_q)$. Утверждается, что либо

I) $\overline{\sigma}_1$ содержит некоторый треугольник $\overline{D}_{sj}^r$, лежащий над $\overline{D}_s^r$ и такой, что одна из его сторон $|\widetilde{\Gamma}'_q|$ лежит на B_1, и $\overline{p}_1(|\widetilde{\Gamma}_q|) = |\widetilde{\gamma}_q|$, либо

II) $m(r,s) < n_s$.

Предположим противное, т. е. что $m(r,s) = n_s$ и ни один из треугольников $\overline{D}_{s1}^r, \overline{D}_{s2}^r, \ldots, \overline{D}_{s,m(r,s)}^r$ не имеет стороны, проектирующейся в $|\widetilde{\gamma}_q|$ и лежащей на B_1. Обозначим через x число треугольников в $\overline{\sigma}_1$, лежащих над $\overline{D}_l^p$ и имеющих сторону на B_1, проектирующуюся на $|\widetilde{\gamma}_q|$. По предположению, $x \geq 1$. Тогда кривая β_1 проходит участок $|\widetilde{\gamma}_q|$ ровно x раз, причем каждый раз треугольник D_l^p остается «слева» от β_1. Так как цикл $\beta + \beta_1$ является образом границы $\overline{\sigma}_1$, он гомологичен нулю, а так как β гомологична нулю по условию, то и

β_1 гомологична нулю. Пусть z_1 и z_2 — некоторые точки из D_s^r и D_l^p соответственно, кривая ω соединяет точку a с точкой z_1, а кривая ω' простая, соединяет z_1 и z_2 и пересекает $\partial D_s^r \cup \partial D_l^p$ трансверсально один раз в точке стороны $|\widetilde{\gamma}_q|$, не совпадающей с вершиной. Тогда

$$\kappa(\beta_1, \omega \cdot \omega') = \kappa(\beta_1, \omega) + \kappa(\beta_1, \omega') = \kappa(\beta_1, \omega) + x > \kappa(\beta_1, \omega). \tag{7.4}$$

Так как $m(p,l) = n_{\sigma_1}(z_2)$, $m(r,s) = n_{\sigma_1}(z_1)$, то из теоремы 4.1 и (7.4) следует, что

$$m(r,s) = \kappa(\beta, \omega) + \kappa(\beta_1, \omega) = n_s + \kappa(\beta_1, \omega), \tag{7.5}$$

$$m(p,l) = \kappa(\beta, \omega\omega') + \kappa(\beta_1, \omega\omega') = n_l + \kappa(\beta_1, \omega') > n_l + \kappa(\beta_1, \omega). \tag{7.6}$$

По предположению, $m(r,s) = n_s$, поэтому из соотношения (7.5) следует, что $\kappa(\beta_1, \omega) = 0$, а из (7.6), с учетом последнего равенства, — неравенство $m(p,l) > n_l$, которое противоречит (7.3).

Итак, справедливо либо I), либо II). В случае I) склеиваем стороны $|\widetilde{\Gamma}_q|$ и $|\widetilde{\Gamma}'_q|$ треугольников $\overline{D}_{sj}^r$ и $\overline{D}_{li}^p$, в случае II) берем еще один экземпляр $\overline{D}_{s,m(r,s)+1}^r$ треугольника $\overline{D}_s^r$ и приклеиваем его к $\overline{\sigma}_1$ вдоль стороны $|\widetilde{\Gamma}_q|$. Если возможны оба случая, то осуществляем приклеивание любым из двух указанных выше способов. В результате склеивания получаем риманову поверхность $\overline{\sigma}_2$, к которой применяем те же рассуждения, что и к $\overline{\sigma}_1$ (число граничных кривых у $\overline{\sigma}_2$ может быть больше двух, но это не усложняет рассуждения). Продолжая этот процесс, получим последовательность римановых поверхностей $\overline{\sigma}_1, \overline{\sigma}_2, \dots, \overline{\sigma}_n, \dots$, каждая из которых ограничена кривой β и некоторыми кривыми $\beta_1, \dots, \beta_\nu$, склеена из треугольников $\overline{D}_{ki}^j$, лежащих над $\overline{D}_k^j$, число которых не превосходит n_k, и $n_{\sigma_i}(a) = 0$, $i \in \mathbb{N}$. Так как величины n_k зависят только от кривой β, то число таких римановых поверхностей конечно. Следовательно, процесс склеивания на какой-то римановой поверхности σ_j оборвется. Последнее же возможно только в случае, когда других граничных кривых, кроме β, у римановой поверхности σ_j нет. Следовательно, σ_j является искомой.

Если $n > 0$, то можно свести дело к предыдущему случаю следующим образом. Пусть β_0 — жорданова кривая, ограничивающая окрестность W точки a в N такую, что $\overline{W} \cap |\beta| = \emptyset$. Соединим простой кривой β_1 начало P кривой β_0 с некоторой точкой Q носителя

$|\beta|$ таким образом, чтобы β_1 не пересекалась с $|\beta_0| \cup |\beta|$ ни в одной точке, за исключением концевых. Так как β — замкнутая кривая, то без ограничения общности можно считать, что точка Q является началом кривой β. Рассмотрим кривую $\widetilde{\beta} = \beta\beta_1(\beta_0^-)^n\beta_1^-$. Для любой точки $S \in |\beta|$ величина $m(S) = m\widetilde{\beta}(S)$, вычисленная относительно кривой $\widetilde{\beta}$, на n больше аналогичной величины $m_\beta(S)$, вычисленной относительно β. Поэтому $m_{\widetilde{\beta}}(S) \geq 0$, $S \in |\beta|$. Кривая $\widetilde{\beta}$ имеет ровно одну вершину, лежащую вне $\widetilde{\beta}$, — это точка P. Для нее $m_{\widetilde{\beta}}(P) = 0$, поэтому в силу доказанного выше существует риманова поверхность $\widetilde{\sigma}$, ограниченная кривой $\widetilde{\beta}$, для которой $n_{\widetilde{\sigma}}(a) = 0$. Склеим у римановой поверхности $\overline{\widetilde{\sigma}}$ участки края, соответствующие кривым β_1 и β_1^-, а затем приклеим обобщенный n-листный круг над W, ограниченный кривой $(\beta_0)^n$. В результате получаем риманову поверхность $\overline{\sigma}$ с краем, ограниченную кривой β. Тогда σ является искомой. Теорема 7.1 доказана.

Теорема 7.1 может быть обобщена на случай нескольких граничных кривых. Пусть кривые $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$ в N квази- локально просты, замкнутые, не проходят через точку a и допускают разве лишь конечное число взаимных пересечений, самопересечений и повторяющихся участков, т. е.: если $z_i : [0,1] \to N$, $j = 1, \ldots, \nu$, суть представления кривых $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$, то существуют разбиения

$$0 = t_{0i} < t_{1i} < t_{2i} < \ldots < t_{r(i),i} = 1$$

отрезка $[0,1]$ такие, что для любых i, j, k и l пути $z_i|_{(t_{k-1},t_k)}$ и $z_j|_{(t_{l-1},t_l)}$ являются простыми и их носители либо не пересекаются, либо совпадают.

Пусть цикл $\sum\limits_{i=1}^{\nu} \beta_i$ гомологичен нулю, $B = \bigcup_{i=1}^{\nu} |\beta_i|$ разбивает N на конечное число областей $D_1, \ldots, D_n$. Назовем вершиной любую точку P из B такую, что либо ни в какой ее окрестности B не является носителем простой дуги, либо существует i, $1 \leq i \leq \nu$ такое, что $z_i(t) = P$, где t — некоторая точка отрезка $[0,1]$, ни в какой окрестности которой периодическое продолжение $\widetilde{z}_i$ отображения z_i не является инъективным.

Для любой вершины P определим характеристику $m(P)$ аналогично тому, как это делалось для случая одной кривой.

Теорема 7.2 *Пусть N — компактная поверхность.*
1) *Если существует риманова поверхность $\sigma = (M, p)$ над N, ограниченная кривыми $\beta_1, \dots, \beta_\nu$, n раз накрывающая точку a (с учетом кратности ветвления), то для любой вершины P выполнено неравенство*

$$m(P) \geq -n. \tag{7.7}$$

2) *Обратно, если выполняется* (7.7) *для любой вершины P, то существует риманова поверхность σ, ограниченная кривыми $\beta_1, \dots, \beta_\nu$, для которой $n_\sigma(a) = n + 1$.*
3) *Если же, кроме того, существует j, $1 \leq j \leq \nu$ такое, что для любого i, $1 \leq i \leq \nu$, пересечение $|\beta_i| \cap |\beta_j| \neq \emptyset$ и для некоторой точки Q этого пересечения существует кривая α_i, подходящая «слева» в точке Q как к кривой β_i, так и β_j, то можно построить такую риманову поверхность σ, для которой $n_\sigma(a) = n$.*

Доказательство проводится точно так же, как и для случая одной кривой. Если полученная в результате склеивания поверхность оказывается несвязной, то следует взять поверхность $\sigma_N = (N, \mathrm{id}_N)$, где $\mathrm{id}_N : M \to N$ — тождественное отображение, и подклеить к ней компоненты полученной поверхности, разрезая их и σ_N вдоль одинаковых жордановых дуг и склеивая берега разрезов «крест-накрест» (см. §§ 4, 5). Если выполняются условия п. 3) теоремы, то такое склеивание можно осуществлять без участия σ_N, склеивая попарно компоненты, разрезанные вдоль жордановых дуг, лежащих над дугами кривых α_i (подходящих «слева» как к β_i, так и β_j), не выходящих на границу. При этом не происходит, конечно, увеличения на единицу величины $n_\sigma(a)$.

Отметим, что для некомпактных поверхностей N справедлив аналог теоремы 7.2.

В заключение установим три леммы о римановых поверхностях, ограниченных кривыми, необходимые в главе 3.

Лемма 7.2 *Пусть $\beta_1, \dots, \beta_\nu$ — заданные замкнутые локально простые кривые на римановой поверхности N.*

Если N не компактна или род N равен нулю, то множество римановых поверхностей σ над N без точек ветвления (внутренних и граничных), ограниченных кривыми $\beta_1, \dots, \beta_\nu$, не более, чем конечно.

Если N — компактная риманова поверхность и род N больше единицы, то множество поверхностей σ над N без точек ветвления, ограниченных кривыми $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$, не более, чем конечно.

Аналогичное утверждение справедливо, если род N не равен нулю и вместо ρ_0 фиксируется число листов n_0 над фиксированной точкой $a \in N$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда N — компактная риманова поверхность и $\rho_N \neq 1$. Будем считать, что цикл $\sum\limits_{i=1}^{\nu} \beta_i$ гомологичен нулю, иначе, по теореме 5.1, ни одной римановой поверхности над N, ограниченной кривыми $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$, не существует. Тогда цикл $\sum\limits_{i=1}^{\nu} \beta_i^-$ также гомологичен нулю, и по той же теореме существует риманова поверхность σ_0 без граничных точек ветвления, ограниченная кривыми $\beta_1^-, \ldots, \beta_\nu^-$. Склеивая $\overline{\sigma}$ и $\overline{\sigma}_0$ вдоль соответствующих компонент края, получаем компактную риманову поверхность $\sigma' = (M', P', p')$, где отмеченная точка P' соответствует точке P при склеивании. Ясно, что различным римановым поверхностям σ соответствуют различные поверхности σ'.

Пусть $a \in N \setminus \bigcup_{i=1}^{\nu} |\beta_i|$ — некоторая фиксированная точка. По формуле (5.2) число листов римановой поверхности σ над точкой a равно $n_\sigma(a) = (\chi_{\overline{M}} - C)/\chi_N$, где C — индекс вращения кривых $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$ (относительно точки a). Если $\rho_N = 0$, то

$$n_\sigma(a) = (2 - 2\rho_M - \nu - C)/2 \leq 1 - C/2,$$

где C зависит только от $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$ (и фиксации точки a). Если $\rho_N \geq 2$ и фиксирован род ρ_0 поверхности M, то

$$n_\sigma(a) = (2\rho_0 + \nu + C - 2)/(2\rho_N - 2),$$

причем последнее выражение зависит только от кривых $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$ (и выбора точки a). Наконец, если $\rho_N \geq 1$ и фиксировано число $\widetilde{n}_0$, то $n_\sigma(a) = \widetilde{n}_0$.

Поскольку число листов $n_{\sigma_0}(a)$ не зависит от σ, то число листов $n_{\sigma'}(a)$ ограничено сверху величиной, которая не зависит от σ. Пусть $a_1, \ldots, a_l$ — проекции точек ветвления римановой поверхности σ_0

на N. Тогда проекции точек ветвления римановой поверхности σ' на N суть также $a_1, \dots, a_l$. Поскольку число не более, чем n_0-листных компактных римановых поверхностей σ' над N, точки ветвления которых проектируются в множество $a_1, \dots, a_l$ не более, чем конечно, то число римановых поверхностей σ с требуемыми свойствами не более, чем конечно.

Если N не компактна, то рассмотрим множество A всех точек b, которые лежат в компонентах связности дополнения $N \setminus \cup_{i=1}^{\nu} |\beta_i|$, не обладающих компактным замыканием в N. Нетрудно убедиться, что $n_\sigma(a) = 0$ при $b \in A$, поэтому для любой римановой поверхности $\sigma = (M, p)$, ограниченной кривыми $\beta_1, \dots, \beta_\nu$, образ $p(M)$ лежит в $N \setminus A$. Пусть N_1 — область в N, ограниченная жордановыми кривыми, содержащая $N \setminus A$. Вложим N_1 в некоторую компактную риманову поверхность N_2. Тогда любая риманова поверхность σ над N, ограниченная $\beta_1, \dots, \beta_\nu$, может рассматриваться как риманова поверхность над N_2. Далее рассуждаем так же, как и в случае, когда N — компактна. В качестве a берем любую точку из $N_1 \cap A$, проекция которой лежит вне $\cup_{i=1}^{\nu} |\beta_i|$. Число листов римановой поверхности σ' над точкой a есть $n_{\sigma'}(a) = n_\sigma(a) + n_{\sigma_0}(a) = n_{\sigma_0}(a)$, что не зависит от σ. Остальное доказывается полностью аналогично случаю компактной поверхности N. Лемма 7.2 доказана.

Следствие 7.1 *Существует не более, чем конечное число односвязных римановых поверхностей без точек ветвления (внутренних и граничных) над компактной римановой поверхностью N рода 1, ограниченных заданной локально простой кривой β.*

Действительно, если $\sigma = (M, p)$ — риманова поверхность над N, ограниченная кривой β, $\overline{\sigma} = (\overline{M}, \overline{p})$ — ее каноническое расширение, вызванное присоединением края, и $f : \mathbb{C} \to N$ — универсальное накрытие, причем $f(z_0) = T_0 \in \overline{p}(P_0)$, где P_0 — начальная точка кривой β, то в силу теоремы 5.1 гл. 5 и односвязности $\overline{M}$ существует риманова поверхность с краем $\overline{\sigma}' = (\overline{M}', \overline{p}')$ над $\overline{\mathbb{C}}$ такая, что $f \circ \overline{p}' = \overline{p}$. Пусть β' — поднятие кривой из точки z_0 на $\mathbb{C}$. Тогда σ' ограничена кривой β'. Отметим, что соответствие $\sigma \mapsto \sigma'$ сюръективно. По лемме 7.2 существует не более, чем конечное число римановых поверхностей σ' над $\overline{\mathbb{C}}$, ограниченных кривой β'. Отсюда следует утверждение следствия.

Лемма 7.3 *Пусть σ_1 и σ_2 — две римановы поверхности над N с отмеченными точками, ограниченные аналитическими кривыми. Тогда существует не более, чем конечное число объединений поверхностей σ_1 и σ_2 относительно всевозможных римановых поверхностей σ.*

Доказательство. Пусть риманова поверхность $\sigma_j = (M_j, P_j, p_j)$ ограничена кривыми $\beta_1^{(j)}, \ldots, \beta_{L(j)}^{(j)}$, $j = 1, 2$. Так как носители аналитических кривых либо совпадают, либо пересекаются разве лишь в конечном числе точек, то риманова поверхность N разбивается множеством $B = \bigcup_{j=1}^{2} \bigcup_{l=1}^{N(j)} |\beta_l^{(i)}|$ на конечное число компонент связности. В силу следствия 5.2 и теоремы 5.2 число листов поверхности σ_j над любой точкой $a \in N$ равномерно ограничено, и число точек ветвления σ_j конечно. Следовательно, множество $p_j^{-1}(B)$ состоит из конечного числа аналитических дуг, пересекающихся разве лишь в концевых точках, поэтому оно разбивает M_j на конечное число компонент связности.

Если $\sigma = (M, P, p)$ — риманова поверхность над N, такая, что существуют морфизмы $\varphi_j : \sigma_j \hookrightarrow \sigma$, $j = 1, 2$, $M = \varphi_1(M_1) \cup \varphi_2(M_2)$ и для некоторых точек $S \in M$ и $S_j \in M_j$ таких, что $p_j(S_j) \in N \backslash B$, $j = 1, 2$, справедливо равенство $\varphi_1(S_1) = \varphi_2(S_2) = S$, то $\varphi_1(C_1) = \varphi_2(C_2) = C$, где C_j — компонента связности множества $M_j \backslash p_j^{-1}(B)$, содержащая точку $S_j, j = 1, 2$, а C — компонента связности множества $M \backslash p^{-1}(B)$, содержащая точку S. Действительно, для $j = 1, 2$ включение $\varphi_j(C_j) \subset C$ очевидно. Докажем, что $C \subset \varphi_j(C_j)$. Пусть T_j — любая точка в C_j, не являющаяся точкой ветвления поверхности σ_j и $T = \varphi_j(T_j)$. Тогда по следствию 1.1 T не является точкой ветвления σ. Пусть V_j — подмножество в N, состоящее из проекций точек ветвления σ_j на N; оно содержит не более, чем конечное число точек. Множество $p^{-1}(V_j)$ не более, чем конечно, так как $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ $(\mathrm{rel}\, \sigma)$ и σ_i конечнолистны, $i = 1, 2$. Пусть $Q \in C \backslash p^{-1}(V_j)$. Соединим в $C \backslash p^{-1}(V_j)$ точки T и Q дугой α. Тогда $p(\alpha)$ — дуга в $N \backslash (V_j \cup B)$. Нетрудно доказать, что существует поднятие α_j дуги $p(\alpha)$ на σ, не проходящее через точки ветвления. Значит, они совпадают и совпадают их концевые точки, т. е. $T = \varphi(T) \in \varphi_j(C_j)$. Аналогичные рассуждения справедливы и в случае, когда T является точкой ветвления σ, при этом следует выбирать дугу α, лежащую в $C \backslash p^{-1}(V_j)$, за исключением концевой точки T.

Итак, $\varphi_1(C_1) = \varphi_2(C_2)$, поэтому морфизмы φ_j индуцируют гомеоморфизм $\psi = \varphi_2^{-1}|_C \circ \varphi_1 : C_1 \to C_2$, сохраняющий проекции: $p_2 \circ \psi = p_1$. Так как C_1, C_2 конечнолистны, то отображений ψ, удовлетворяющих этим условиям, существует не более, чем конечное число в силу леммы 1.2.

Любое объединение σ римановых поверхностей σ_1 и σ_2 получается в результате следующей операции. Римановы поверхности σ_1 и σ_2 разбиваются на конечное число компонент связности множествами $p_1^{-1}(B)$ и $p_2^{-1}(B)$ соответственно. Далее некоторые из компонент связности попарно группируются и склеиваются между собой посредством отображений $\psi : C_1 \to C_2$. Кроме того, отождествляются также и некоторые дуги множеств $p_1^{-1}(B)$ и $p_2^{-1}(B)$. Это отождествление полностью определяется условием граничной склейки (см. §2): если $T_j \in \partial C_j$ и существует последовательность T_{jn} в C_j, которая сходится к T_j, $j = 1, 2$, причем $\psi(T_{1n}) = \psi(T_{2n})$, $n \geq 1$, то точки T_1 и T_2 отождествляются.

Таким образом, склеивание полностью определяется набором отображений $\{\psi\}$. Поскольку таких наборов существует не более, чем конечное число, то лемма 7.3 доказана.

Лемма 7.4 *Пусть $\sigma = (M, P, p)$ — ограниченная аналитическими кривыми $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$ риманова поверхность над N. Существует не более, чем конечное число поверхностей $\sigma_1 = (M_1, P_1, p_1)$, удовлетворяющих условиям: существует непрерывная сюръекция $j : \sigma \to \sigma_1$ такая, что $p \circ j = p_1$.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 7.3. Пусть B — множество, состоящее из конечного числа аналитических дуг, пересекающихся между собой разве лишь в конечном числе точек, содержащее носители граничных кривых $|\beta_j|$, $j = 1, \ldots, \nu$, проекции точек ветвления σ, и разбивающее N на конечное число односвязных областей. Множество $p^{-1}(B)$ разбивает σ на конечное число компонент связности и σ_1 получается из σ отождествлением некоторых из этих компонент и их граничных точек согласно условию граничной склейки.

ГЛАВА 3. ПРОСТРАНСТВА РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ, СВЯЗАННЫЕ СО СХОДИМОСТЬЮ К ЯДРУ

§8. Топологическое пространство римановых поверхностей без точек ветвления

Сходимость к ядру последовательностей римановых поверхностей дает геометрическую интерпретацию сходимости последовательностей аналитических функций; она изучалась в работах [26], [95], [96], [114]. В этом параграфе мы даем определение сходимости к ядру последовательности римановых поверхностей с отмеченной точкой над N без точек ветвления. На пространстве всех таких поверхностей вводится топология, согласованная с этой сходимостью, и изучаются ее свойства.

Пусть N — некоторая абстрактная риманова поверхность, не обязательно компактная. Будем говорить, что некоторое свойство или *условие*, зависящее от натурального m, выполняется (m-as), если оно выполняется при достаточно больших m (*асимптотически по* m). Фиксируем точку $z_0 \in N$. Пусть

$$RP(z_0) = RP_N(z_0) = \{x \in \mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})(N) |\ \text{либо} \quad x = z_0 \quad \text{либо}$$

$$x = \sigma = (M, P, p) \in \mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})(N), \quad \text{причем} \quad \sigma = \check{\sigma} \text{ и } p(P) = z_0\}.$$

Рассмотрим любую последовательность $\{x_m\}$ из $RP(z_0)$. Будем говорить, что *последовательность* $\{x_m\}$ *имеет невырожденное ядро*, если существует элемент $x \in RP(z_0)$, отличный от z_0 и такой, что $x \subset\!\!\!\to x_m$ (m-as). Последнее условие, в частности, означает, что $x_m \neq z_0$ (m-as). Поскольку сходимость не зависит от первых членов последовательности, то без ограничения общности можно считать, что в случае невырожденного ядра $x_m = \sigma_m = (M_m, P_m, p_m) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{RP})(N)$ при $m \geq 1$.

Пусть $\{\sigma_m\}$ — последовательность из $RP(z_0)$, имеющая невырожденное ядро. Рассмотрим множество $\mathfrak{M}\{\sigma_m\}$ всех римановых поверхностей τ из $RP(z_0)$, удовлетворяющих условию: для любой римановой поверхности σ такой, что $\tau \subset \subset\!\!\!\to \sigma$ имеют место вложения $\tau \subset\!\!\!\to \sigma_m$ (m-as). Ясно, что $\mathfrak{M}\{\sigma_m\} \neq \emptyset$. Справедлива

Лемма 8.1 *Пусть* $\sigma \in \mathfrak{M}\{\sigma_m\}$, *для некоторой поверхности* τ *существуют морфизмы* $j : \tau \subset \hookrightarrow \sigma$, $j_m : \tau \hookrightarrow \sigma_m$ (m-as), *точка* S *принадлежит* τ *и* $S_0 = j(S)$, $S_m = j_m(S)$, (m-as). *Тогда* $\sigma(S_0) \in \in \mathfrak{M}\{\sigma_m(S_m)\}$.

Доказательство очевидно.

Особый интерес представляют максимальные элементы в $\mathfrak{M}\{\sigma_m\}$. Их существование вытекает из следующей леммы.

Лемма 8.2 *Множество* $\mathfrak{M}\{\sigma_m\}$ *индуктивно по отношению порядка* $\hookrightarrow$.

Доказательство. Пусть $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha \in A}$ есть линейно упорядоченное подмножество в $\mathfrak{M}\{\sigma_m\}$. По теореме 3.2 существует риманова поверхность $\sigma \in \mathrm{Ob}(\mathcal{RP})(N)$, которая является точной верхней гранью множества $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Покажем, что $\sigma \in \mathfrak{M}\{\sigma_m\}$.

Действительно, пусть $j : \tau \subset \hookrightarrow \sigma$, где $\tau = (M', P', p')$, $\tau_\alpha = = (M_\alpha, P_\alpha, p_\alpha)$, $\sigma = (M, P, p)$, и $\psi_\alpha : \sigma_\alpha \hookrightarrow \sigma$, $\alpha \in A$. Из доказательств теоремы 3.2 и леммы 3.1 следует, что σ есть предел прямого спектра в категории $\overline{\mathcal{RP}}(N)$, ассоциированного с $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha \in A}$, а (M, P) — это предел соответствующего прямого спектра в категории *Top* топологических пространств. Следовательно,

$$M = \bigcup_{\alpha \in A} \psi_\alpha(M_\alpha), \quad \overline{j(M')} = \bigcup_{\alpha \in A} \Big(\psi_\alpha(M_\alpha) \cap \overline{j(M')}\Big).$$

Множества $\psi_\alpha(M_\alpha) \cap \overline{j(M')}$ вложены друг в друга и образуют открытое покрытие компактного множества $\overline{j(M')}$. Поэтому существует $\alpha \in A$ такое, что $\psi_\alpha(M_\alpha) \cap \overline{j(M')} = \overline{j(M')}$. Значит, $j(M') \subset \psi_\alpha(M_\alpha)$, т. е. $\psi_\alpha^{-1} \circ j : \tau \subset \hookrightarrow \sigma_\alpha$. Однако $\sigma_\alpha \in \mathfrak{M}\{\sigma_m\}$, поэтому $\tau \hookrightarrow \sigma_m$ (m-as). Следовательно, $\sigma \in \mathfrak{M}\{\sigma_m\}$ и лемма 8.2 доказана.

Из леммы 8.2 и теоремы 3.3 следует

Теорема 8.1 *Если последовательность* $\{\sigma_m\}$ *имеет невырожденное ядро, то множество максимальных элементов в* $\mathfrak{M}\{\sigma_m\}$ *непусто. Если* $\tau \in \mathfrak{M}\{\sigma_m\}$, *то существует максимальный элемент* τ' в $\mathfrak{M}\{\sigma_m\}$ *такой, что* $\tau \hookrightarrow \tau'$.

Обозначим множество максимальных элементов в $\mathfrak{M}\{\sigma_m\}$ через $\mathrm{Ker}\{\sigma_m\}$, а его элементы будем называть *ядрами последовательности* $\{\sigma_m\}$. Если ядро последовательности $\{x_m\}$ из $RP(z_0)$ *вырождено*, то, по определению, полагаем, что множество $\mathrm{Ker}\{x_m\}$ содержит единственный элемент — точку $z_0 \in RP(z_0)$, которую будем называть *ядром последовательности* $\{x_m\}$.

Отметим, что для однолистных римановых поверхностей ядро определяется единственным образом, на возможность неединственности ядра для неоднолистных поверхностей над $\mathbb{C}$ впервые указал Ю. Ю. Трохимчук [95]. Следующий пример является модификацией примера из [95] для случая пунктированных римановых поверхностей.

Пример 8.1 Пусть E — единичный круг в $\mathbb{C}$, $f(\zeta) = \zeta$, $g(\zeta) = \zeta^2$, $\zeta \in E$. Рассмотрим последовательность $\{\sigma_m\}$ римановых поверхностей над $\overline{\mathbb{C}}$, где $\sigma_{2k-1} = (E, 1/2, f)$, $\sigma_{2k} = (E\backslash\{0\}, 1/\sqrt{2}, g)$, в $RP_{\overline{\mathbb{C}}}(1/2)$, $k \geq 1$. Пусть α — жорданова дуга в $\overline{E}$ и $\sigma = (E\backslash|\alpha|, 1/2, f)$. Тогда $\sigma \in \mathrm{Ker}\{\sigma_m\}$. Действительно, очевидно, что $\sigma \in \mathfrak{M}\{\sigma_m\}$, так как существуют морфизмы $j_{2k-1} : \sigma \hookrightarrow \sigma_{2k-1}$, $j_{2k} : \sigma \hookrightarrow \sigma_{2k}$, определенные равенствами $j_{2k-1}(\zeta) = \zeta$, $j_{2k}(\zeta) = \sqrt{\zeta}$, где ветвь корня в $E\backslash|\alpha|$ выбрана таким образом, что $\sqrt{1/2} > 0$. Поскольку σ_{2k-1} — однолистные римановы поверхности, то любой элемент $\sigma' \in \mathrm{Ker}\{\sigma_m\}$ должен быть однолистной поверхностью. Пусть $\sigma \hookrightarrow \sigma' \in \mathrm{Ker}\{\sigma_m\}$, где $\sigma' = (D, 1/2, h)$, $h(\zeta) = \zeta$, $\zeta \in D$ и $\sigma' \neq \sigma$. Тогда $E\backslash|\alpha|$ — собственное подмножество в D. Из включения $\sigma' \in \mathrm{Ker}\{\sigma_m\}$ нетрудно вывести, что $D \subset E$. Значит, существует точка $\zeta_0 \in |\alpha| \cap D$. Поскольку $\mathrm{ord}(0, \sigma_{2k-1}) = 0$, $\mathrm{ord}(0, \sigma_{2k}) = 1$, $k \geq 1$, то ζ_0 не может быть нулем. Но тогда существует жорданова дуга γ в D, содержащая внутри себя начало координат и проходящая через точку $1/2$. Пусть $G \subset\subset D$ — некоторая область, содержащая $|\gamma|$ и $\tau = (G, 1/2, h|_G)$. Тогда $\tau \subset \hookrightarrow \sigma'$ и, поскольку $\sigma' \in \mathfrak{M}\{\sigma_m\}$, существует морфизм $i_{2k} : \sigma \hookrightarrow \sigma_{2k}$ (k-as). Если $\gamma_{2k} = i_{2k}(\gamma)$, то γ_{2k} — жорданова кривая в E, не проходящая через начало координат. С другой стороны, $\gamma = h(\gamma) = g \circ i_{2k}(\gamma) = g(\gamma_{2k})$, где $g(\zeta) = \zeta^2$, и γ не может быть простой кривой, поскольку является образом кривой γ_{2k}, охватывающей начало координат, при степенном отображении. Итак, $\sigma = \sigma' \in \mathrm{Ker}\{\sigma_m\}$. Отметим, что множество ядер последовательности имеет континуальную мощность.

Определение 8.1 *Последовательность* $\{x_m\}$ *в* $RP(z_0)$ *сходится к элементу* $x \in \operatorname{Ker}\{x_m\}$, если $x \in \operatorname{Ker}\{x_{m_k}\}$ *для любой подпоследовательности* $\{x_{m_k}\}$ *последовательности* $\{x_m\}$.

Корректность определения 8.1 вытекает из следующей теоремы.

Теорема 8.2 *Пусть* $\{\sigma_m\}$ — *последовательность невырожденных элементов в* $\mathrm{RP}(z_0)$, *сходящаяся к невырожденному ядру* σ_1'. *Если* $\sigma_2' \in \operatorname{Ker}\{\sigma_m\}$, *то* $\sigma_1' = \sigma_2'$.

Доказательство. Предположим противное, т. е. что $\sigma_1' \neq \sigma_2'$. Покажем, что тогда существует подпоследовательность последовательности $\{\sigma_m\}$, для которой σ_1' не является ядром. Действительно, поскольку σ_1' и σ_2' — два различных максимальных элемента в $\mathfrak{M}\{\sigma_m\}$, то $\sigma_2' \not\hookrightarrow \sigma_1$. Пусть $\{\sigma^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ — компактное исчерпание римановой поверхности σ_1', т. е. $\sigma^{(n)} \hookrightarrow \sigma^{(n+1)} \subset \hookrightarrow \sigma_1'$, $n \in \mathbb{N}$, и $\sigma_1' = \cup_{n\in\mathbb{N}} \sigma^{(n)}$ $(\operatorname{rel} \sigma)$. Выберем такую поверхность $\sigma \in RP(z_0)$, что $\sigma \subset \hookrightarrow \sigma_2'$ и $\sigma \not\hookrightarrow \sigma_1'$. Без ограничения общности можно считать, что римановы поверхности $\sigma^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, и σ ограничены конечным числом аналитических кривых каждая. В силу леммы 7.3 среди объединений $\sigma \cup \sigma^{(1)}$ $(\operatorname{rel} \sigma_m\ )$ $(m$-as) существует лишь конечное число попарно различных. Следовательно, можно выбрать такую подпоследовательность $\{\sigma_{m_1}\}$ последовательности $\{\sigma_m\}$, для которой $\sigma \cup \sigma^{(1)}$ $(\operatorname{rel} \sigma_{m_1})$ не зависит от номера m_1. Обозначим это объединение через σ^1. Аналогично по индукции для любого $k \geq 2$ найдется подпоследовательность $\{\sigma_{m_k}\}$ последовательности $\{\sigma_{m_{k-1}}\}$ и риманова поверхность σ^k такие, что $\sigma \cup \sigma^{(1)}$ $(\operatorname{rel} \sigma_{m_1}) = \sigma^k$ не зависит от m_k.

Так как $\sigma^{(k)} \hookrightarrow \sigma^{(k+1)}$, то $\sigma^k \hookrightarrow \sigma^{k+1}$, $k \geq 1$. В силу теоремы 3.2 последовательность $\{\sigma^k\}$ обладает точной верхней гранью $\overline{\sigma}$. Так как $\sigma^k \hookrightarrow \overline{\sigma}$ и $\sigma^{(k)} \hookrightarrow \sigma^k$, то $\sigma^{(k)} \hookrightarrow \overline{\sigma}$, $k \geq 1$. Но последовательность $\{\sigma^{(k)}\}$ является исчерпанием поверхности σ_1', поэтому $\sigma_1' \hookrightarrow \overline{\sigma}$. Покажем, что $\overline{\sigma} \in \mathfrak{M}\{\sigma_{m_m}\}$ для диагональной последовательности $\{\sigma_{m_m}\}$. Действительно, если $\xi \subset \hookrightarrow \overline{\sigma} = \cup_{k=1}^{\infty} \sigma^k$ $(\operatorname{rel} \overline{\sigma})$, то в силу компактности вложения и монотонности последовательности $\{\sigma^k\}$ существует такое r, что $\xi \hookrightarrow \sigma^r$. Но $\sigma^r \hookrightarrow \sigma_{m_r}$ для всех m_r, а $\{\sigma_{m_m}\}$ есть подпоследовательность последовательности $\{\sigma_{m_r}\}$, начиная с некоторого номера, поэтому $\xi \hookrightarrow \sigma_{m_m}(m_m$-as). Итак, $\overline{\sigma} \in \mathfrak{M}\{\sigma_{m_m}\}$ и по теореме 8.1 $\overline{\sigma}$ содержится в некотором $\tau \in \operatorname{Ker}\{\sigma_{m_m}\}$. Но σ_1' по условию теоремы является ядром для любой подпоследовательности последовательности $\{\sigma_m\}$, в частности, и для $\{\sigma_{m_m}\}$, поэтому $\sigma'_1 = \tau$ в силу максимальности ядра.

С другой стороны, $\sigma \hookrightarrow \sigma^k$, $k \geq 1$, по построению, следовательно, $\sigma \hookrightarrow \sigma'_1$, т. к. $\sigma^k \hookrightarrow \overline{\sigma} \hookrightarrow \tau = \sigma'_1$. Однако мы предположили, что $\sigma \not\hookrightarrow \sigma'_1$. Полученное противоречие доказывает теорему 8.2.

Следствие 8.1 *Последовательность в $RP(z_0)$ не может сходиться к двум различным пределам.*

Следствие 8.2 *Если последовательность $\{\sigma_m\}$ сходится к σ в $RP(z_0)$ и риманова поверхность $\tau \in RP(z_0)$ такова, что $\tau \hookrightarrow \sigma_m$ $(m\text{-as})$, то $\tau \hookrightarrow \sigma$.*

Действительно, тогда $\tau \in \mathfrak{M}\{\sigma_m\}$ и по теореме 8.1 существует $\sigma' \in \mathrm{Ker}\{\sigma_m\}$, для которой имеет место включение $\tau \hookrightarrow \sigma'$. Но в силу теоремы 8.2 $\sigma' = \sigma$.

Следствие 8.3 *Ядро сходящейся в $RP(z_0)$ последовательности единственно.*

Введем на $RP(z_0)$ топологию $\mathcal{T}_0$, согласованную со сходимостью к ядру. В качестве предбазы для топологии $\mathcal{T}_0$ возьмем систему множеств $\mathcal{B} = \{U(\alpha), W(\alpha)\}_{\alpha \in RP(z_0)}$, где

$$U(\alpha) = \{\beta \in RP(z_0) | \alpha \subset \hookrightarrow \beta\}, \; W(\alpha) = \{\beta \in RP(z_0) | \alpha \not\hookrightarrow \beta\}. \quad (8.1)$$

Теорема 8.3 *Последовательность $\{x_m\}$ сходится к элементу x в смысле определения 8.1 тогда и только тогда, когда $\{x_m\}$ сходится к x в топологии $\mathcal{T}_0$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\{x_m\} \to x$ в смысле определения 8.1. Рассмотрим сначала случай, когда $x = \sigma$ — невырожденный элемент в $RP(z_0)$. Можно считать тогда, что все $x_m = \sigma_m$ невырождены. Рассмотрим любую окрестность элемента σ вида $U(\alpha)$. Тогда $\sigma \in U(\alpha)$, т. е. $\alpha \subset \hookrightarrow \sigma$. Выберем β таким образом, чтобы $\alpha \subset \hookrightarrow \beta \subset \hookrightarrow \sigma$. Тогда $\beta \hookrightarrow \sigma_m$ $(m\text{-as})$, т. к. $\sigma \in \mathfrak{M}\{\sigma_m\}$. Следовательно, $\alpha \subset \hookrightarrow \sigma_m$, т. е. $\sigma_m \in U(\alpha)$ $(m\text{-as})$. Пусть теперь $\sigma \in W(\alpha)$, т. е. $\alpha \not\hookrightarrow \sigma$. Докажем, что $\sigma_m \in W(\alpha)$ $(m\text{-as})$. Предположим противное. Тогда для некоторой подпоследовательности $\{\sigma_{m_k}\}$

имеем $\{\sigma_{m_k}\} \to \sigma$ в смысле определения 8.1, и из следствия 8.2 вытекает, что $\alpha \subset\!\!\!\to \sigma$ — противоречие. Из доказанного выше следует, что $\{\sigma_m\} \to \sigma$ в топологии $\mathcal{T}_0$.

Если же $x = z_0$, то ядро последовательности $\{x_m\}$ вырождено. Если $z_0 \in U(\alpha)$, то $\alpha \subset \subset\!\!\!\to z_0$, что может быть только в случае, когда $\alpha = z_0$. Но $U(z_0) = RP(z_0)$, и тогда $x_m \in U(z_0)$, $m \geq 1$. Если $z_0 \in$ $\in W(\alpha)$, то $\alpha \not\subset\!\!\!\to z_0$, т. е. $\alpha = \sigma$ — невырожденный элемент. Если неверно, что $\alpha \not\subset\!\!\!\to x_m$ (m-as), то для некоторой подпоследовательности $\{x_{m_k}\}$, как и выше, имеем $\alpha \subset\!\!\!\to x_{m_k}$ для любого m_k. Следовательно, ядро последовательности $\{x_{m_k}\}$ невырождено, т. е. $z_0 \notin$ $\mathrm{Ker}\{x_{m_k}\}$. Это противоречит тому, что $\{x_m\} \to z_0$ в смысле определения 8.1. Таким образом, $\{x_m\} \to z_0$ в топологии $\mathcal{T}_0$.

Достаточность. Пусть $\{x_m\} \to z_0$ в топологии $\mathcal{T}_0$. Отсюда следует, что

$$\forall \alpha\ (\alpha \subset \subset\!\!\!\to x \Rightarrow \alpha \subset \subset\!\!\!\to x_m)\ (m - \mathrm{as}),$$
$$\forall \alpha\ (\alpha \not\subset\!\!\!\to x \Rightarrow \alpha \not\subset\!\!\!\to x_m)\ (m - \mathrm{as}). \tag{8.2}$$

Пусть $x \neq z_0$. Из первой импликации (8.2) вытекает, что $x \in \mathfrak{M}\{x_m\}$, а из второй — что если для некоторой подпоследовательности $\alpha \subset\!\!\!\to$ $\subset\!\!\!\to x_{m_k}$, то $\alpha \subset\!\!\!\to x$. Следовательно, для любой подпоследовательности $\{x_{m_k}\}$ элемент x является наибольшим в $\mathfrak{M}\{x_{m_k}\}$, т. е. $x \in \mathrm{Ker}\{x_{m_k}\}$. Значит, $\{x_m\} \to x$ в смысле определения 8.1.

Если же $x = z_0$, то ядро любой подпоследовательности $\{x_{m_k}\}$ вырождено. Действительно, если для некоторой подпоследовательности $\{x_{m_k}\}$ и $\alpha \neq z_0$ имеем $\alpha \subset\!\!\!\to x_{m_k}$ для любого m_k, то, как и выше, $\alpha \subset\!\!\!\to x$, что противоречит тому, что $x = z_0$. Итак, $\mathrm{Ker}\{x_{m_k}\} = \{z_0\}$, т. е. $\{x_m\} \to x$ в смысле определения 8.1. Теорема 8.3 доказана.

Теперь установим свойства топологического пространства $RP(z_0)$, связанные с компактностью. Предварительно докажем один вспомогательный результат.

Обозначим через $\mathfrak{N}\{\sigma_m\}$ объединение $\cup \mathrm{Ker}\{x_{m_k}\}$ множества ядер по всем подпоследовательностям $\{\sigma_{m_k}\}$ последовательности $\{\sigma_m\}$ в $RP(z_0)$.

Лемма 8.3 *Множество $\mathfrak{N}\{\sigma_m\}$ индуктивно по отношению порядка $\subset\!\!\!\to$.*

Доказательство. Пусть $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — линейно упорядоченное семейство из множества $\mathfrak{N}\{\sigma_m\}$. Докажем, что оно обладает верхней гранью τ.

Пусть $\sigma_\alpha = (M_\alpha, P_\alpha, p_\alpha)$, $\alpha \in A$. Рассуждая так же, как при доказательстве леммы 8.2, получаем, что существует $\sigma = (M, P, p)$ такая, что для некоторых морфизмов ψ_α выполняются условия

$$\psi_\alpha : \sigma_\alpha \hookrightarrow \sigma, \quad \alpha \in A, \quad M = \cup_{\alpha\in A}\psi_\alpha(M_\alpha).$$

Пусть $G_1 \subset G_2 \subset \cdots \subset G_n \subset \cdots$ — некоторое компактное исчерпание M. Фиксируем любой элемент α_1. Далее по индукции определяем последовательность $\{\alpha_n\}$ следующим образом. Пусть α_{n-1} построено. Если $\psi_{\alpha_{n-1}}(M_{\alpha_{n-1}}) = M$, то $\sigma_{\alpha_{n-1}} = \sigma$ является максимальным элементом семейства $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha\in A}$ и его можно взять в качестве τ. В противном случае существует натуральное число k_n такое, что $G_{k_n} \not\subset \psi_{\alpha_{n-1}}(M_{\alpha_{n-1}})$. Поскольку множества $\psi_\alpha(M_\alpha)$ образуют открытое покрытие компактного множества $\overline{G}_{k_n}$ и вложены друг в друга, то существует α_n такое, что $\overline{G}_{k_n} \subset \psi_{\alpha_n}(M_{\alpha_n})$. В результате, если $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha\in A}$ не содержит максимального элемента, то получаем последовательность $\{\sigma_{\alpha_n}\}$ такую, что $\sigma_{\alpha_n} \hookrightarrow \sigma_{\alpha_{n+1}}$, $n \geq 1$, и $\sigma = \cup_{i=1}^{\infty}\sigma_{\alpha_i}$ $(\mathrm{rel}\,\sigma)$.

Каждая риманова поверхность σ_{α_n} является элементом $\mathfrak{N}\{\sigma_m\}$, т. е. ядром некоторой подпоследовательности $\{\sigma_m^{(n)}\}$ последовательности $\{\sigma_m\}$. Пусть $\tau_n = \big(G_{k_n}, P, p|_{G_{k_n}}\big)$. По построению $\tau_n \subset\hookrightarrow \sigma_{\alpha_n}$, поэтому $\tau_n \subset\hookrightarrow \sigma_m^{(n)}$ (m-as). Построим подпоследовательность $\{\sigma_{m_n}^{(n)}\}$ последовательности $\{\sigma_m\}$, для которой справедлива принадлежность $\sigma \in \mathfrak{M}\{\sigma_{m_n}^{(n)}\}$. Пусть $\sigma_{m_1}^{(1)}$ такова, что $\tau_1 \hookrightarrow \sigma_{m_1}^{(1)}$. Если построены $\sigma_{m_1}^{(1)}$, $\sigma_{m_2}^{(2)}, \ldots, \sigma_{m_{n-1}}^{(n-1)}$, то пусть $\sigma_{m_n}^{(n)}$ такова, что $\tau_n \hookrightarrow \sigma_{m_n}^{(n)}$ и в исходной последовательности $\{\sigma_m\}$ элемент $\sigma_{m_{n-1}}^{(n-1)}$ располагается раньше, чем элемент $\sigma_{m_n}^{(n)}$. Тогда $\sigma \in \mathfrak{M}\{\sigma_{m_n}^{(n)}\}$. Действительно, пусть $\xi \subset\hookrightarrow \sigma$. Поскольку римановы поверхности τ_n компактно исчерпывают σ, то существует n_0 такое, что $\xi \hookrightarrow \tau_n$ при $n \geq n_0$. Отсюда и из включения $\tau_n \hookrightarrow \sigma_{m_n}^{(n)}$ следует, что $\xi \hookrightarrow \sigma_{m_n}^{(n)}$, $n \geq n_0$, что и требовалось доказать. В силу теоремы 8.1 существует риманова поверхность $\tau \in \mathrm{Ker}\{\sigma_{m_n}^{(n)}\}$ такая, что $\sigma \hookrightarrow \tau$. Так как $\sigma_\alpha \hookrightarrow \sigma$, то $\sigma_\alpha \hookrightarrow \tau$. При этом $\tau \in \mathfrak{N}\{\sigma_m\}$ и τ является искомой. Лемма 8.3 доказана.

Теорема 8.4 *Пространство $RP(z_0)$ секвенциально компактно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно рассмотреть последовательность невырожденных элементов $\{\sigma_m\}$ из $RP(z_0)$ и доказать, что существует подпоследовательность $\{\sigma_{m_k}\}$, сходящаяся либо к точке z_0, либо к некоторой римановой поверхности $\sigma \in RP(z_0)$. Если z_0 является ядром для любой подпоследовательности последовательности $\{\sigma_m\}$, то $\{\sigma_m\} \to z_0$, $m \to \infty$. В противном случае множество $\tau \in \mathfrak{N}\{\sigma_m\}$ содержит нетривиальный элемент σ'. Из леммы 8.3 следует, с учетом теоремы 3.3, что существует максимальный элемент σ в $\mathfrak{N}\{\sigma_m\}$ такой, что $\sigma' \hookrightarrow \sigma$. Так как $\sigma \in \mathfrak{N}\{\sigma_m\}$, то существует подпоследовательность $\{\sigma_{m_k}\}$ последовательности $\{\sigma_m\}$ такая, что $\sigma \in \mathrm{Ker}\{\sigma_{m_k}\}$. Пусть $\{\sigma_{m_{k_j}}\}$ — любая подпоследовательность последовательности $\{\sigma_{m_k}\}$. Ясно, что $\sigma \in \mathfrak{M}\{\sigma_{m_{k_j}}\}$. По теореме 8.1 существует $\tau \in \mathrm{Ker}\{\sigma_{m_{k_j}}\}$ такая, что $\sigma \hookrightarrow \tau$. Но тогда $\tau \in \mathfrak{N}\{\sigma_m\}$ и, поскольку σ является максимальным элементом в $\mathfrak{N}\{\sigma_m\}$, $\sigma = \tau$. Итак, $\sigma \in \mathrm{Ker}\{\sigma_{m_{k_j}}\}$ для любой подпоследовательности последовательности $\{\sigma_{m_k}\}$, поэтому $\{\sigma_{m_k}\}$ сходится к σ и теорема 8.4 доказана.

Теорема 8.5 *Пространство $RP(z_0)$ с топологией $\mathcal{T}_0$ является хаусдорфовым и обладает счетной базой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Хаусдорфовость $RP(z_0)$ очевидна. Для доказательства второго утверждения достаточно установить существование счетной предбазы. Фиксируем некоторое аналитическое отображение $f : N \to \overline{\mathbb{C}}$. Рассмотрим систему $\mathcal{B}_0$, состоящую из множеств $U(\alpha)$ и $W(\alpha)$ вида (8.1), где $\alpha = z_0$ либо $\alpha \in \mathcal{F}$; здесь $\mathcal{F}$ есть множество поверхностей из $RP(z_0)$, каждая из которых ограничена конечным числом локально простых кривых, проектирующихся при отображении f в ломаные в $\mathbb{C}$, вершины которых имеют рациональные координаты, и не содержит граничных точек ветвления.

Множество конечных наборов кривых в N, проектирующихся в ломаные с вершинами, имеющими рациональные координаты, счетно. Это следует из того, что

1) множество ломаных в $\mathbb{C}$, имеющих «рациональные» вершины, счетно;

2) число листов римановой поверхности $\xi = (N, f)$ над любой точкой не более, чем счетно, и число точек ветвления ξ также не более, чем

счетно, следовательно, для любого отрезка $[AB]$ в $\mathbb{C}$ существует не более, чем счетное число простых кривых, проектирующихся в $[AB]$ при отображении f.

В силу утверждений леммы 7.2 число римановых поверхностей без точек ветвления (внутренних и граничных) над N, ограниченных заданными кривыми $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$, не более, чем счетно. Следовательно, система $\mathcal{B}_0$ счетна. Осталось установить, что топология, порожденная предбазой $\mathcal{B}_0$, совпадает с топологией $\mathcal{T}_0$.

Поскольку $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$, достаточно установить, что любой элемент из $\mathcal{B}$ представим в виде объединения элементов предбазы $\mathcal{B}_0$. Пусть $\alpha = \sigma$ — невырожденный элемент в $RP(z_0)$. Нетрудно доказать, что существует компактное исчерпание римановой поверхности σ поверхностями из $\mathcal{F}$, поэтому $\sigma = \cup_{\tau \hookrightarrow \sigma,\, \tau \in \mathcal{F}} \tau\ (\mathrm{rel}\, \sigma)$. Отсюда следует, что $\sigma \hookrightarrow \beta \Longleftrightarrow \tau \hookrightarrow \beta$ для любой поверхности τ, $\tau \hookrightarrow \sigma$, $\tau \in \mathcal{F}$. Значит, $\sigma \not\hookrightarrow \beta \Longleftrightarrow$ существует $\tau \in \mathcal{F}$ такая, что $\tau \hookrightarrow \sigma$, $\sigma \not\hookrightarrow \beta$. Следовательно,

$$U(\sigma) = \bigcup_{\tau \hookrightarrow \sigma,\, \tau \in \mathcal{F}} U(\tau). \tag{8.3}$$

Если $\sigma \subset \hookrightarrow \beta$, то, поскольку существует компактное исчерпание β поверхностями из $\mathcal{F}$, существует $\tau \in \mathcal{F}$ такая, что $\sigma \hookrightarrow \tau$ и $\tau \subset \hookrightarrow \beta$. Обратно, если $\tau \in \mathcal{F}, \sigma \hookrightarrow \tau$ и $\tau \subset \hookrightarrow \beta$, то $\sigma \subset \hookrightarrow \beta$. Поэтому

$$W(\sigma) = \bigcup_{\sigma \hookrightarrow \tau,\, \tau \in \mathcal{F}} W(\tau). \tag{8.4}$$

Так как $U(\tau)$, $W(\tau) \in \mathcal{B}_0$ при $\tau \in \mathcal{F}$, то из (8.3) и (8.4) следует утверждение теоремы 8.5.

Так как любое секвенциально компактное T_1-пространство со счетной базой является компактным (см., напр., [13], гл.III, предложение 3.23), то из теорем 8.4 и 8.5 вытекает

Теорема 8.6 *Пространство $RP(z_0)$ является компактным в топологии $\mathcal{T}_0$.*

Пусть $\sigma = (M, P, p) \in \mathfrak{M}\{\sigma_m\}$. Выберем некоторое компактное исчерпание $\sigma^{(n)} = (Q_n, P, p_n)$, где $p_n = p|_{Q_n}$, $n \geq 1$. Для любого компакта Q в M существует такой номер $n(Q)$, что $Q \subset Q_n$ при

$n \geq n(Q)$. Так как $\sigma^{(n)} \subset \hookrightarrow \sigma$, то для любого n существует такой номер $m(n)$, что для некоторого морфизма j_m^n имеем $j_m^n : \sigma^{(n)} \hookrightarrow \sigma_m$ при $m \geq n$. С использованием леммы 1.2, нетрудно показать, что отображение $j_m^n|_Q$ не зависит от n при $m \geq m(n)$, $n \geq n(Q)$. Так как $\sigma^{(n)} \hookrightarrow \sigma^{(n+1)}$, $n \geq 1$, то можно считать, что $m(n)$ монотонно зависит от n. Обозначим $j_m^Q = j_m^n|_Q$ при $m \geq m(n(Q))$. Назовем отображения j_m^Q, $Q \subset M$, $m \geq m(n(Q))$, *каноническими вложениями компактов из* σ *в* σ_m, *индуцированными включением* $\sigma \in \mathfrak{M}\{\sigma_m\}$. Аналогично определяются *канонические вложения, индуцированные сходимостью* $\{\sigma_m\} \to \sigma$, $m \to \infty$.

Отметим, что если $Q_1 \subset Q_2$, то $j_m^{Q_1} = j_m^{Q_2}|_{Q_1}$ в силу леммы 2.1 при $m \geq m(n(Q_2))$, т. е. отображения j_m фактически не зависят от Q (m-as). Поэтому будем опускать верхний индекс в обозначении j_m^Q и писать просто j_m, при этом j_m можно рассматривать как отображения из M в M_m, но определенные не на всем M, а на компактах в M при достаточно больших m, точнее, при $m \geq m_0$, где m_0 зависит от этого компакта.

Естественно, j_m^Q может зависеть от выбора компактного исчерпания, но если j_m^Q и i_m^Q — два канонических вложения, соответствующие двум различным компактным исчерпаниям, то $j_m^Q = i_m^Q$ при $m \geq m_1$, где m_1 зависит от Q и выбора этих исчерпаний. Более того, если Q — связный компакт в M, содержащий точку P, то j_m^Q не зависит и от выбора компактного исчерпания. Действительно, если $\sigma_1^{(n)} = (Q'_n, P, p'_n)$ — другое компактное исчерпание и $Q \subset Q_n$, $Q \subset Q'_k$, то $Q \subset Q''_{nk}$, где Q''_{nk} есть связная компонента пересечения $Q_n \cap Q'_k$, содержащая точку P. Если $\tau'' = (Q''_{nk}, P, p'_n\ )$, то в силу леммы 1.2 вложение $\tau'' \hookrightarrow \sigma_m$ определяется единственным образом, поэтому $j_m^n|_{Q''_{nk}} = i_m^k|_{Q''_{nk}}$, где $j_m^n : \sigma^{(n)} \hookrightarrow \sigma_m$ и $i_m^k : \sigma^{(n)} \hookrightarrow \sigma_m$. Значит, $j_m^Q = j_m^n|_Q = i_m^k|_Q = i_m^Q$ для всех m, для которых определены j_m^Q и i_m^Q.

Очевидна следующая

Лемма 8.4 *Пусть* $\sigma \in \mathfrak{M}\{\sigma_m\}$, j_m — *канонические вложения, индуцированные этим включением,* S — *любая точка из* σ *и* $S_m = j_m(S)$ (m-as) (*при малых* m *выберем в качестве* S_m *произвольную точку из* σ_m). *Тогда* $\sigma(S) \in \mathfrak{M}\{\sigma_m(S_m)\}$ *и* $j'_m = j_m$ (m-as), *где* j'_m — *канонические вложения, индуцированные включением* $\sigma(S) \in \mathfrak{M}\{\sigma_m(S_m)\}$.

§9. Общий случай

Теперь определим сходимость последовательностей произвольных элементов α_m из $\mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})(N)$. Будем предполагать, что проекции z_m отмеченных точек элементов α_m сходятся в N к некоторой точке z_0.

Рассмотрим любую односвязную окрестность U точки z_0 в N, ограниченную жордановой кривой γ. Если α_m является римановой поверхностью $\sigma_m = (M_m, P_m, p_m)$ над N и $z_m \in U$, то обозначим $\sigma_m^U = \big(M_m^U, P_m, p_m|_{M_m^U}\big)$, где M_m^U есть связная компонента прообраза $p_m^{-1}(U)$, содержащая отмеченную точку P_m.

Будем говорить, что *ядро последовательности* $\{\alpha_m\}$ *невырождено*, если α_m являются римановыми поверхностями σ_m (m-as) и существует окрестность W точки z_0 и натуральное число k такие, что для любой окрестности U точки z_0, лежащей в W и удовлетворяющей описанным выше свойствам, риманова поверхность σ_m^U является обобщенным односвязным k-листным кругом (m-as). Если ядро последовательности $\{\alpha_m\}$ невырождено, то можно считать, что все α_m являются римановыми поверхностями $\sigma_m = (M_m, P_m, p_m)$, $m \geq 1$.

Определение 9.1 *Риманова поверхность $\sigma = (M, P, p)$ принадлежит семейству $\mathfrak{S}\{\sigma_m\}$, если выполняются следующие условия:*

a) *Существуют точки $S_m \in \check{M}(\sigma_m)$, $m \geq 1$, и $S \in \check{M}(\sigma)$ такие, что $\check{\sigma}(S) \in \mathfrak{M}\{\check{\sigma}_m(S_m)\}$. (Для первых членов условие $p_m(S_m) = z_0$, где $z_0 = p(S)$, может не выполняться, и тогда при малых m имеем $\check{\sigma}_m(S_m) \notin RP(z_0)$. В подобном случае следует удалить эти члены из последовательности.)*

b) *Пусть j_m — канонические вложения, индуцируемые включением $\check{\sigma}(S) \in \mathfrak{M}\{\check{\sigma}_m(S_m)\}$, T — любая точка из M порядка $(n-1)$, $p(T) = T_0$ и $\mathcal{K}_n(T_0)$ — обобщенный односвязный n-листный круг над N с единственной точкой ветвления, если $n > 1$, такой, что существует морфизм $j : \mathcal{K}_n(T_0) \hookrightarrow \sigma(T)$. Если область $j(E)$ ограничена жордановой кривой γ, не проходящей через точки ветвления σ, и остается «слева» от нее при положительном обходе γ, то $j_m(\gamma)$ разбивает σ_m на две части* (m-as), *причем та из них, которая остается «слева» от кривой $j_m(\gamma)$ при ее положительном обходе, является обобщенным односвязным n-листным кругом $\mathcal{K}$ над N.*

с) *Если в предыдущем пункте точка T совпадает с отмеченной точкой P римановой поверхности σ, то этот односвязный круг $\mathcal{K}$ содержит отмеченную точку P_m поверхности σ_m* (m-as).

Лемма 9.1 *Если ядро последовательности $\{\sigma_m\}$ невырождено, то множество $\mathfrak{S}\{\sigma_m\}$ непусто.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть ядро последовательности $\{\sigma_m\}$ невырождено. Выберем окрестность W точки z_0 и натуральное число k такие, что римановы поверхности σ_m^U являются обобщенными односвязными k-листными кругами (m-as) для любой односвязной окрестности U точки z_0, ограниченной кривой. Без ограничения общности можно считать, что $N = \overline{\mathbb{C}}$, $z_0 = 0$ и $W = E = \{\zeta : |\zeta| < 1\}$. Действительно, иначе отобразим W конформно на E с помощью некоторой функции f и вместо поверхностей (M, P, p) над N таких, что $p(M) \subset W$, рассмотрим поверхности $(M, P, f \circ p)$.

Итак, пусть σ_m^U являются односвязными k-листными кругами (над $\overline{\mathbb{C}}$) для любой жордановой области U в E. Любой односвязный k-листный круг ограничен k-кратно обходимой окружностью γ. Пусть $E(r) = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < r\}$, где $r \in (0,1)$. Тогда $\sigma_m^{E(r)}$ также является односвязным k-листным кругом (m-as). Ясно, что $\sigma_m^{E(r)} \hookrightarrow \sigma_m^E$ (m-as). Пусть $r < 1/2$,

$$\sigma_m^{E(r)} = \left(M_m^{E(r)}, P_m, p_m|_{M_m^{E(r)}}\right), \quad \sigma_m^E = \left(M_m^E, P_m, p_m|_{M_m^E}\right),$$

$$M_m^{E(r,1)} = M_m^E \backslash \overline{M_m^{E(r)}} \text{ и } \sigma_m^{E(r,1)} = \left(M_m^{E(r,1)}, T_m, p_m|_{M_m^{E(r,1)}}\right),$$

(m-as), где T_m — любая точка из $M_m^{E(r,1)}$ такая, что $p_m(T_m) = 1/2$. Утверждается, что $\sigma_m^{E(r,1)}$ совпадает с k-листным кольцом

$$R_k(r,1) = (E(\sqrt[k]{r}, 1), 1/\sqrt[k]{2}, \zeta^k),$$

где $E(r,1) = \{\zeta \in \mathbb{C} | \sqrt[k]{r} < |\zeta| < 1\}$, т. е. не зависит от m (m-as).

Действительно, $\sigma_m^{E(r,1)}$ имеет нулевой род, ограничена двумя k-кратно обходимыми окружностями γ_r и γ, причем γ_r обходится по часовой стрелке, а γ — против часовой. Односвязные круги с единственной точкой ветвления в центре (если $k > 1$) $K_1 = (E, \zeta^k)$ и

$K_2 = (E, r/\zeta^k)$ ограничены кривыми γ^- и γ_r^-. Склеивая $\overline{\sigma}_m^{E(r,1)}$ с кругами $\overline{K}_1$ и $\overline{K}_2$ вдоль граничных кривых, получаем компактную риманову поверхность τ рода ноль, k-кратно накрывающую бесконечно удаленную точку (с учетом кратности). Согласно формуле Римана-Гурвица суммарная кратность точек ветвления

$$V(\tau) = 2n_\tau(\infty) - 2 = 2k - 2.$$

Поскольку τ имеет две точки, лежащие над точками $\zeta = 0$ и $\zeta = \infty$, кратности $(k-1)$, то других точек ветвления, кроме них, у τ нет. Так как τ односвязна, то τ можно представить в виде $\tau = (\overline{\mathbb{C}}, R)$, где $z = R(\zeta)$ — рациональная функция. При этом $R^{-1}(\infty)$ состоит из одной точки, которую можно считать бесконечно удаленной. Значит, R — полином степени k. Кроме $\zeta = \infty$ существует еще ровно одна точка ветвления τ, которую линейным преобразованием можно переместить в начало координат. Тогда $R'(\zeta) = 0 \iff \zeta = 0$, т. е. $R(\zeta) = a\zeta^k$, $a \neq 0$. Все римановы поверхности $(\overline{\mathbb{C}}, a\zeta^k)$ эквивалентны поверхности $(\overline{\mathbb{C}}, \zeta^k)$ функции $\zeta = \sqrt[k]{w}$. Отсюда следует, что $\sigma_m^{E(r,1)} = R_k(r,1)$ (m-as).

Пусть теперь $\sigma = (E, 0, \zeta^k)$ — односвязный единичный круг с единственной точкой ветвления в центре. Покажем, что $\sigma \in \mathfrak{S}\{\sigma_m\}$. Пусть $S = 1/\sqrt[k]{2}$, S_m — любая точка из M_m^E, проектирующаяся в точку $\zeta = 1/2$ (m-as). Тогда $\check{\sigma}(S) = (E\backslash\{0\}, 1/\sqrt[k]{2}, \zeta^k)$ при $k > 1$, $\check{\sigma}(S) = (E, 1/\sqrt[k]{2}, \zeta^k)$ при $k = 1$.

Пусть $k > 1$. Проверка условия a). Если Q — любая область, компактно содержащаяся в $E\backslash\{0\}$, то $1/\sqrt[k]{2} \in Q$ и существует $r \in (0,1)$, такое, что $Q \subset E(\sqrt[k]{r}, 1)$. Значит,

$$(Q, 1/\sqrt[k]{2}, \zeta^k) \hookrightarrow R_k(r,1) = \sigma_m^{E(r,1)} \hookrightarrow \check{\sigma}_m(S_m) \ (m\text{-as})$$

и $\check{\sigma}(S) \in \mathfrak{M}\{\check{\sigma}_m(S_m)\}$.

Проверка условия b). Пусть j_m — канонические вложения, индуцированные последним включением. Рассмотрим любую точку ζ_0 из E, и пусть D — область в E, содержащая точку ζ_0 и ограниченная жордановой кривой γ, не проходящей через точку 0, такая, что $K_n(w_0) = (D, \zeta_0, \zeta^k)$ является n-листным кругом над $\overline{\mathbb{C}}$ с единственной точкой ветвления — ζ_0 (если $n > 1$), где $n = \mathrm{ord}(\zeta_0, \sigma)$, $w = \zeta_0^n$. Если $\zeta_0 \neq 0$, то $n = 1$ и круг $K_n(w_0) = K_1(w_0)$ однолистен, т. е.

не содержит точку ветвления 0. Поэтому $K_1(w_0) \subset \hookrightarrow(\zeta_0)$ и поверхность $\big(j_m(D), j_m(\zeta_0), \zeta^k \circ j^{-1}|_{j_m(D)}\big)$ является однолистным обобщенным кругом над $\overline{\mathbb{C}}$, содержащимся в $\sigma_m(j_m(\zeta_0))$, ограниченным $j_m(\gamma)$ и остающимся «слева» от кривой $j_m(\gamma)$ при положительном ее обходе (m-as).

Если же $\zeta_0 = 0$, то $n = k$. Кривые $j_m(\gamma)$ являются простыми замкнутыми в M_m^E (m-as). Так как σ_m^E односвязна, то $j_m(\gamma)$ разбивает σ_m^E на две части, причем часть σ_m', которая остается «слева» от $j_m(\gamma)$, имеет компактное замыкание в σ_m^E с границей $|j_m(\gamma)|$, т. е. σ_m' есть односвязная риманова поверхность, ограниченная кривой $p_m \circ j_m(\gamma) = p(\gamma)$(отмеченную точку σ_m' фиксируем произвольно). Кривая $p(\gamma)$ есть k-кратно обходимая жорданова кривая δ в $\mathbb{C}$, поэтому с использованием теоремы 4.1 получаем, что σ_m' имеет ровно k листов над любой точкой, находящейся внутри δ (с учетом кратности ветвления) и не имеет точек над остальными точками $\overline{\mathbb{C}}$. Значит, σ_m' есть односвязный k-листный круг над $\mathbb{C}$. Очевидно, что то же самое справедливо не только для σ_m^E, но и для σ_m. Таким образом установлена справедливость условия b).

Проверка условия c). Пусть $\zeta_0 = 0$ — отмеченная точка римановой поверхности σ. Римановы поверхности σ_m^E содержат точки P_m, т. к. ядро последовательности $\{\sigma_m\}$ невырождено. Кривая $p(\gamma) = \delta^k$ не проходит через точку $0 = \zeta^k$ и разделяет точки 0 и ∞. Значит, точка 0 находится внутри кривой δ. Поскольку $z_m = p_m(P_m) \to z_0 = 0$ при $m \to \infty$, то при достаточно больших m кривая $p(\gamma) = \delta^k$ не проходит через точку z_m. Более того, точки z_m и $z_0 = 0$ находятся в одной компоненте связности множества $\mathbb{C}\setminus|\delta|$. Значит, число листов римановой поверхности σ_m' над точкой z_m равно числу листов над точкой 0, т. е. $\operatorname{ind}_0(\delta^k) = k \cdot \operatorname{ind}_0(\delta) = k$ по теореме 4.1 (где $\operatorname{ind}_z(\gamma)$ — индекс кривой γ относительно точки z). Так как σ_m' является частью σ_m^E, а число точек поверхности σ_m^E, лежащих над точкой z_m (с учетом кратности ветвления) равно k, то все эти точки, в частности, P_m лежат в σ_m'. Итак, σ_m' содержит точку P_m и справедливость условия c) установлена.

Если же $k = 1$, то нетрудно видеть, что $\check{\sigma}(S) = \sigma(S) \hookrightarrow \check{\sigma}_m(S_m)$, т. е. $\check{\sigma}(S) \in \mathfrak{M}\{\check{\sigma}_m(S_m)\}$, а условия b) и c) выполняются очевидным образом. Лемма 9.1 доказана.

Следующая лемма является аналогом леммы 8.2 для произвольных последовательностей римановых поверхностей.

Лемма 9.2 *Множество* $\mathfrak{S}\{\sigma_m\}$ *индуктивно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{\tau_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — линейно упорядоченное подмножество из $\mathfrak{S}\{\sigma_m\}$, $\tau_\alpha = (M^{(\alpha)}, P^{(\alpha)}, p^{(\alpha)}), \alpha \in A$. Можно считать, что $\{\tau_\alpha\}_{\alpha\in A}$ не содержит наибольшего элемента, иначе существование верхней грани этого семейства очевидно. В силу теоремы 3.2 существует точная верхняя грань σ семейства $\{\tau_\alpha\}_{\alpha\in A}$ в $\mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})(N)$. Из доказательства этой теоремы и леммы 3.3 следует, что можно так определить морфизмы $\phi_\alpha^\beta : \tau_\alpha \hookrightarrow \tau_\beta$ при $\alpha \prec \beta$, и $\phi_\alpha : \tau_\alpha \hookrightarrow \sigma$, что система $\{\tau_\alpha; \phi_\alpha^\beta\}$ образует прямой спектр в категории $\mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})(N)$ и $\{\sigma; \phi_\alpha\}$ есть предел этого спектра. Как и при доказательстве лемм 8.2 и 8.3 получаем, что $\sigma = \cup_{\alpha\in A}\tau_\alpha$ $(\mathrm{rel}\,\phi_\alpha)$, причем можно выбрать последовательность $\{\alpha_n\}$ такую, что $\sigma = \cup_{n=1}^\infty \tau_{\alpha_n}$ $(\mathrm{rel}\,\phi_{\alpha_n})$. Поэтому без ограничения общности можно считать, что множество A совпадает с $\mathbb{N}$.

Итак, пусть $\tau_n = (M^{(n)}, P^{(n)}, p^{(n)})$, $\{\sigma; \phi_n\} = \varinjlim\{\tau_n; \phi_n^l\}$ и $\sigma = \cup_{n=1}^\infty \tau_n$ $(\mathrm{rel}\,\phi_n)$, где $\phi_n : \tau_n \hookrightarrow \sigma$, $\phi_n^l : \tau_n \hookrightarrow \tau_l$ при $n \le l$. Покажем, что $\sigma \in \mathfrak{S}\{\sigma_m\}$. В силу леммы 1.1 существует обобщенный k-листный круг $K = (E, 0, \psi)$, $\psi(\zeta) = \phi(\zeta^k)$, где $\phi : \mathbb{C} \to N$ голоморфно, с единственной точкой ветвления в центре, если $k \ge 1$, такой, что для некоторого морфизма j имеем $j : K \hookrightarrow \tau_1$. Фиксируем точку $w_0 \in \psi(E\backslash\{0\}) \subset N$ и пусть $\zeta_1, \dots, \zeta_k$ — те точки из E, которые переходят в w_0 при отображении ψ. Пусть $S_n^l = \phi_1^n(\zeta_l)$, $l = 1, \dots, k$, $n \in \mathbb{N}$, $S_l = \phi_n(S_n^l)$, $l = 1, \dots, k$. Отметим, что так как $\phi_1 = \phi_n \circ \phi_1^n = \phi_j \circ \phi_1^j$, то S_l не зависит от $n \in \mathbb{N}$, $l = 1, \dots, k$.

Так как $\tau_n \in \mathfrak{S}\{\sigma_m\}$, то в силу определения 9.1 существуют точки T_m^n из σ_m и T^n из τ_n такие, что $\check{\tau}_n(T^n) \in \mathfrak{M}\{\check{\sigma}_m(T_m^n)\}$ и имеют место условия b) и c). Пусть j_m^n — канонические вложения, индуцированные включением $\check{\tau}_n(T^n) \in \mathfrak{M}\{\check{\sigma}_m(T_m^n)\}$, и $S_m^{nl} = j_m^n(S_n^l)$ (m-as), $n \in \mathbb{N}$, $l = 1, \dots, k$. Тогда в силу леммы 8.4 имеем $\check{\tau}_n(S_n^l) \in \mathfrak{M}\{\check{\sigma}_m(S_m^{nl})\}$, $n \in \mathbb{N}$, $l = 1, \dots, k$, причем можно считать, что канонические вложения, индуцированные последними включениями, совпадают с j_m^n. Так как $K \hookrightarrow \tau_1$ и $\tau_1 \hookrightarrow \tau_n$, то $K \hookrightarrow \tau_n$, $n \ge 1$.

Пусть $i_n : K \hookrightarrow \tau_n$ и γ_0 — кривая в E, которая обходит окружность $\{\zeta : |\zeta| = 3/4\}$ против часовой стрелки и $\gamma_n = i_n(\gamma_0)$, то в силу условий b) и c) определения 9.1 кривая $j_m^n(\gamma_n)$ разбивает σ_m на две части, одна из которых — σ_m^n — является обобщенным односвязным k-листным кругом, остается «слева» от $j_m^n(\gamma_n)$ и содержит точку P_m. Поскольку риманова поверхность σ_m^n ограничена кривой $p_m(j_m^n(\gamma)) = p^{(n)}(\gamma_n) = \psi(\gamma_0)$, то она является компонентой связности в $p_m^{-1}(\psi(\{|\zeta| < 3/4\}))$, содержащей точку P_m, значит, не зависит от n. Точки S_m^{nl} принадлежат σ_m^n (m-as), $n \in \mathbb{N}$, $l = 1, \dots, k$. Действительно, если Q — область, компактно содержащаяся в $E \backslash \{0\}$ и содержащая точки $\zeta_1, \dots, \zeta_k$, то морфизм $i_m^n = j_m^n \circ i_n : (Q, \zeta_l, \psi|_Q) \hookrightarrow \check{\sigma}_m(S_n^l)$ переводит Q в связное множество $i_m^n(Q)$, проекция которого совпадает с $\psi(Q) \subset \psi(\{|\zeta| < 3/4\})$ (m-as). Поэтому $i_m^n(Q)$ лежит в σ_m^n (m-as). Так как σ_m^n является обобщенным k-листным кругом, а проекции точек S_m^{nk} на N совпадают, то среди точек S_m^{nk} при достаточно больших фиксированных m существует не более, чем k различных. Отбрасывая в случае необходимости конечное число членов последовательности $\{\sigma_m\}$, можно считать, что это условие выполнено про любом $m \geq 1$.

Переходя в случае необходимости от последовательности $\{\tau_n\}$ к подпоследовательности $\{\tau_{n_i}\}$, можем добиться того, чтобы точки S_m^{nk} не зависели от n. Действительно, пусть $\{\tau_{n_1}\}$ — такая последовательность, что $S_1^{n_1,k}$ не зависит от n_1. Далее по индукции определяем при $k \geq 2$ подпоследовательность $\{\tau_{n_j}\}$ последовательности $\{\tau_{n_{j-1}}\}$ такую, что $S_j^{n_j,k}$ не зависит от n_j. Тогда диагональная последовательность $\{\tau_{n_n}\}$ удовлетворяет нужному свойству.

Итак, можно считать, что $S_m^k = S_m^{nk}$ не зависит от n. Тогда $j_m^n(S_n^k) = S_m^{nk} = S_m^{ik} = j_m^i(S_m^{ik}) = j_m^i \circ \phi_n^i(S_n^k)$ для любых n, $i \in \mathbb{N}$ таких, что $n \leq i$. Используя лемму 1.2, получаем, что на компактах в $\check{\tau}(S_n^k)$ отображения j_m^n и $j_m^i \circ \phi_n^i$ совпадают (m-as).

Теперь можно доказать, что $\sigma \in \mathfrak{S}\{\sigma_m\}$. Проверим условие а) определения 9.1. Пусть Q — область, компактно лежащая в $\check{\sigma}$ и содержащая точку S^k. Так как $\overline{Q} \subset \cup_{n=1}^{\infty} \phi_n(M^{(n)})$ и $\overline{Q}$ компактно, а области $\phi_n(M^{(n)})$ вложены друг в друга, то существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $\overline{Q} \subset \phi_n(M^{(n)})$ для любого $n \geq n_0$. Пусть $j_m = j_m^n \circ \phi_n^{-1}$ на Q (m-as). Если $i \geq n \geq n_0$, то $j_m^n \circ \phi_n^{-1} = j_m^i \circ \phi_n^i \circ \phi_n^{-1} = j_m^i \circ \phi_i^{-1}$ (m-as), поскольку $\phi_i \circ \phi_n^i = \phi_n$ в силу свойств предела прямого спектра. Таким образом, отображения j_m определены корректно, причем $j_m(S^k) = j_m^n \circ \phi_n^{-1}(S^k) = j_m^n(S_n^k) = S_m^{nk} = S_m^k$. Отсюда следует, что

$\check{\tau}(S^k) \in \mathfrak{M}\{\check{\sigma}_m(S_m^k)\}$. Условия b) и c) непосредственно следуют из соответствующих свойств канонических вложений j_m^n. Таким образом, $\sigma \in \mathfrak{S}\{\sigma_m\}$, т. е. σ — верхняя грань для линейно упорядоченного семейства $\{\tau_n\}$ не только в $\mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})(N)$, но и в $\mathfrak{S}\{\sigma_m\}$. Лемма 9.2 доказана.

Если $\mathfrak{S}\{\sigma_m\}$ непусто, то по теореме 3.3 непусто и множество максимальных элементов в $\mathfrak{S}\{\sigma_m\}$, которое обозначим через $\mathrm{Ker}\{\sigma_m\}$. Элементы $\mathrm{Ker}\{\sigma_m\}$ назовем ядрами последовательности $\{\sigma_m\}$.

Определение 9.2 *Пусть $\{\alpha_m\}$ — последовательность элементов из* $\mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})(N)$ *и $\alpha_m = (X_m, P_m, p_m)$, $m \geq 1$. Будем говорить, что $\{\alpha_m\}$ сходится к элементу $\alpha \in$* $\mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})(N)$, *если последовательность $z_m = p_m(P_m)$ сходится в N к некоторой точке z_0 и $\alpha \in$*$\mathrm{Ker}\{\alpha_{m_k}\}$ *для любой подпоследовательности $\{\alpha_{m_k}\}$ последовательности $\{\alpha_m\}$.*

Как и в случае определения 8.1 установим единственность предела последовательности в $\mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})(N)$.

Теорема 9.1 *Пусть $\{\sigma_m\}$ — последовательность невырожденных элементов из* $\mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})(N), \sigma_m = (M_m, P_m, p_m)$, *$m \geq 1$, и $z_m = = p_m(P_m) \to z_0$, $m \to \infty$. Если $\{\sigma_m\} \to \sigma_1'$, $m \to \infty$,* в $\mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})(N)$ и $\sigma_2' \in$$\mathrm{Ker}\{\sigma_m\}$, *то $\sigma_1' = \sigma_2'$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как ядро последовательности $\{\sigma_m\}$ невырождено, то существует окрестность W точки z_0 и натуральное число k такие, что для любой односвязной окрестности U точки z_0, лежащей в W и ограниченной жордановой кривой, римановы поверхности σ_m^U, определенные в начале параграфа, являются обобщенными k-листными кругами. Отсюда и из определения 9.1 следует, что если $\sigma_n' = (M_n', P_n', p_n')$, то $\mathrm{ord}(P_n', \sigma_n') = k$, $n = 1, 2$. Действительно, пусть K_n — обобщенный односвязный круг, содержащийся в σ_n' существование которого утверждается в лемме 1.1. Можно считать, что проекция U круга K_n на N лежит в W. Круг K_n ограничен k_n-кратно обходимой кривой α, где $k_n = \mathrm{ord}(P_n', \sigma_n')$. Из условий b) и c) определения 9.1 следует, что σ_m^U является односвязным обобщенным кругом над N, содержащим точку P_m. Следовательно, этот круг k-листен. С другой стороны, этот круг ограничен кривой α^{k_n}

и из теоремы 4.1 заключаем, что число его листов равно k_n. Итак, $k_1 = k_2 = k$. Можно считать, что $K_n = K = (E, 0, \psi)$ не зависит от n.

Пусть морфизм $j^{(n)} : K \hookrightarrow \sigma'_n$, $n = 1, 2$. Так как $\sigma'_n \in \mathrm{Ker}\{\sigma_m\}$, то в силу определения 9.1 имеем для некоторых точек $F_n \in \check{M}'_n(\sigma'_n)$ и $F_{nm} \in \check{M}_m(\sigma_m)$ включения $\sigma'_n(F_n) \in \mathfrak{M}\{\check{\sigma}_m(F_{nm})\}$, причем канонические вложения $j^{(n)}_m$, индуцированные ими, удовлетворяют условиям b) и c) определения 9.1. Как и при доказательстве леммы 9.2, выберем точки $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$, лежащие над одной и той же точкой $w_0 = \psi(E \backslash \{0\})$ и пусть

$$S^{(n)}_l = j^{(n)}(S^l),\ S^{(n)}_{lm} = j^{(n)}_m(S^{(n)}_l)\,(m - \mathrm{as}),\ l = 1, \ldots, k,\ n = 1, 2.$$

Тогда по лемме 8.4 $\check{\sigma}'_n(S^{(n)}_l) \in \mathfrak{M}\{\check{\sigma}_m(S^{(n)}_{lm})\}$, $l = 1, \ldots, k$, $n = 1, 2$. Точки $S^{(n)}_{lm}$ лежат в компоненте связности множества $p^{-1}_m(U)$, содержащей точку P_m, т. е. в некотором k-листном круге σ^U_m, и имеют одну и ту же проекцию на N — точку w_0. Поскольку при фиксированном n все точки $S^{(n)}_{lm}$ различны и их ровно k штук, то множества $\{S^{(1)}_{lm},\ l = 1, \ldots, k\}$ и $\{S^{(2)}_{lm},\ l = 1, \ldots, k\}$ совпадают. Следовательно, для любого m существует номер $l(m) \in \{1, 2, \ldots, k\}$ такой, что $S^{(2)}_{km} = S^{(1)}_{l(m),m}$. Выберем подпоследовательность $\{m_q\}$ такую, что $l(m_q)$ не зависит от m_q. Без ограничения общности можно считать, что $l(m_q) = k$. Тогда $\check{\sigma}'_2(S^{(2)}_k) \in \mathfrak{M}\{\check{\sigma}_{m_q}(S^{(1)}_{k,m_q})\}$.

Поскольку σ'_1 — максимальный элемент в $\mathfrak{S}\{\sigma_{m_q}\}$, то $\check{\sigma}'_1(S^{(1)}_k)$ является максимальным элементом в $\mathfrak{M}\{\check{\sigma}_{m_q}(S^{(1)}_{k,m_q})\}$. Это же верно и для любой подпоследовательности последовательности $\{\sigma_{m_q}\}$. Поэтому в силу теоремы 8.2 $\check{\sigma}'_1(S^{(1)}_k)$ является наибольшим элементом в $\mathfrak{M}\{\check{\sigma}_{m_q}(S^{(1)}_{k,m_q})\}$, а поскольку $\check{\sigma}'_2(S^{(2)}_k)$ принадлежит этому множеству, то существует морфизм $j : \check{\sigma}'_2(S^{(2)}_k) \hookrightarrow \check{\sigma}'_1(S^{(1)}_k)$. Ясно, что $j^{(2)}_{m_q} = j^{(1)}_{m_q} \circ j$ (q-as) в силу леммы 1.2. Отсюда и из максимальности элемента $\sigma^{(1)}$ в $\mathfrak{S}\{\sigma_{m_q}\}$ с учетом условий b), c) определения 9.1 следует, что $\sigma'_2 \hookrightarrow \sigma'_1$. Но поскольку $\sigma'_1, \sigma'_2 \in \mathfrak{S}\{\sigma_m\}$ и σ'_2 — максимальный элемент этого множества, то $\sigma'_1 \hookrightarrow \sigma'_2$. Значит, $\sigma'_1 = \sigma'_2$ и теорема 9.1 доказана.

Следствие 9.1 *Последовательность в* $\mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})(N)$ *не может сходиться к двум различным пределам. Ядро последовательности, сходящейся в* $\mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})(N)$, *определено единственным образом.*

Введем на $\mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})(N)$ другую сходимость. Пусть дана последовательность $\{\alpha_n\}$ из $\mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})(N)$ с нетривиальным ядром. Будем считать, что $\alpha_m = \sigma_m \in \mathrm{Ob}(\mathcal{RP})(N)$, $m \geq 1$. Обозначим через $\mathfrak{S}_1\{\sigma_m\}$ подмножество в $\mathfrak{S}\{\sigma_m\}$, обладающее свойством: если $\sigma \in \mathfrak{S}_1\{\sigma_m\}$, то выполняются условия a), b), c) определения 9.1 и, кроме того, в условии b) обобщенные n-листные круги $\mathcal{K}$ являются односвязными для любой точки T из σ. Множество максимальных элементов в $\mathfrak{S}_1\{\sigma_m\}$ непусто, это доказывается так же, как и для $\mathfrak{S}\{\sigma_m\}$. Обозначим его через $\mathrm{Ker}_1\{\sigma_m\}$. Если ядро последовательности $\{\sigma_m\}$ вырождено, то полагаем $\mathrm{Ker}_1\{\sigma_m\} = \{z_0\}$, где $\{z_0\}$ — предел проекций отмеченных точек из $\{\alpha_m\}$.

Определение 9.3 *Будем говорить, что последовательность $\{\alpha_m\}$ регулярно сходится к α в $\mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})(N)$, если $\alpha \in \mathrm{Ker}_1\{\alpha_{m_k}\}$ для любой подпоследовательности $\{\alpha_{m_k}\}$ последовательности $\{\alpha_m\}$.*

Справедлив аналог теоремы 9.1.

Теорема 9.2 *Предел регулярно сходящейся в $\mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})(N)$ последовательности является единственным. Ядро регулярно сходящейся в $\mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})(N)$ последовательности единственно.*

Следующий пример показывает различие между простой и регулярной сходимостями в $\mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})(N)$.

Пример 9.1 Пусть $D_1 = D_2 = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1, \mathrm{Im}\,\zeta > 0\}$, $D_3 = D_4 = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1, \mathrm{Im}\,\zeta < 0\}$. Обозначим через γ_j^i дугу на границе области D_i, обходящую при $j = 1$ отрезок $[-1, 0]$, при $j = 2$ — отрезок $[0, 1/(2m)]$ при $j = 3$ — отрезок $[1/(2m), 1/m]$, при $j = 4$ — отрезок $[1/m, 1]$ таким образом, чтобы область D_i оставалась «слева» от γ_j^i, $i = 1, \ldots, 4$, $j = 1, \ldots, 4$. Отождествляя дуги γ_1^1 и γ_1^3, γ_3^1 и γ_3^3, γ_1^2 и γ_1^4, γ_3^2 и γ_3^4, γ_2^1 и γ_2^4, γ_4^1 и γ_4^4, γ_2^2 и γ_2^3, γ_4^2 и γ_4^3, получаем риманову поверхность σ_m, склеенную из областей D_i, $i = 1, .., 4$, которая является двулистным кругом над $\overline{\mathbb{C}}$ с точками ветвления, проектирующимися в точки $\zeta = 0$, $\zeta = 1/(2m)$, $\zeta = 1/m$. Пусть отмеченная точка поверхности σ_m есть точка, которая соответствует точке $\zeta = \sqrt{-1}/2$ области D_1 при склеивании. Тогда $\{\sigma_m\}$ сходится к двулистному кругу $(E, (1 + \sqrt{-1})/2, \zeta^2)$ и сходится регулярно к проколотому двулистному кругу $(E \backslash \{0\}, (1 + \sqrt{-1})/2, \zeta^2)$.

Нетрудно показать, что если последовательность $\{\sigma_m\}$ сходится к $\sigma' = (M', P', p')$ и сходится регулярно к $\sigma'' = (M'', P'', p'')$, то $\sigma'' \hookrightarrow \sigma'$, причем если $j : \sigma'' \hookrightarrow \sigma'$ — некоторый морфизм, то $M' \setminus j(M'') \subset \subset \check{M}'(\sigma')$, т. е. σ'' получается из σ' выкалыванием некоторых точек ветвления или совпадает с σ'.

Если последовательность $\{\sigma_m\}$ сходится (или регулярно сходится) к σ при $m \to \infty$, то $\sigma \in \mathrm{Ker}\{\sigma_m\} \subset \mathfrak{S}\{\sigma_m\}$ (соответственно $\subset \mathfrak{S}_1\{\sigma_m\}$), поэтому определены канонические вложения компактов из $\check{\sigma}(S)$ в $\check{\sigma}_m(S_m)$, индуцированные вложением $\check{\sigma}(S) \in \mathfrak{M}\{\check{\sigma}_m(S_m)\}$. Назовем j_m каноническими вложениями, индуцированными сходимостью (регулярной сходимостью) $\{\sigma_m\}$ к σ.

Введем на $\mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})(N)$ топологию T, согласованную с регулярной сходимостью к ядру. Пусть $\overline{\sigma}_1 = (\overline{M}_1, \overline{p}_1)$ — риманова поверхность с краем над N без точек ветвления, ограниченная кривыми $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, причем γ_i является n_i-кратно обходимой кривой α_i, ограничивающей односвязную область U_i в N, $i = 1, \ldots, l$, где l — некоторое число, $1 \leq l \leq n$. Пусть $\overline{\tau} = (\overline{\sigma}_1, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_l)$ — упорядоченный набор, состоящий из римановой поверхности с краем $\overline{\sigma}_1$ без точек ветвления, у которой отмечены l граничных кривых Γ_1, $\Gamma_2, \ldots, \Gamma_l$, проектирующихся в кривые γ_1, $\gamma_2, \ldots, \gamma_l$. Множество таких наборов обозначим через $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(N)$. Пусть $\overline{\tau} \in \mathfrak{A}$, $\sigma = (M, P, p) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{RP})(N)$. Будем писать $j : \overline{\tau} \prec \sigma$ или просто $\overline{\tau} \prec \sigma$, если существует непрерывное инъективное отображение $j : \overline{M}_1 \to M$ такое, что $p \circ j = \overline{p}_1$ и образ $j(\Gamma_i)$ разбивает M на две части, причем та часть, которая остается «слева» от $j(\Gamma_i)$, является односвязным n_i-листным кругом, $i = 1, \ldots, l$, а при $i = 1$ этот круг содержит точку P. Если к тому же $j(\overline{M}_1) \subset \hookrightarrow(\sigma)$, то будем писать $j : \overline{\tau} \prec\prec \sigma$ или просто $\overline{\tau} \prec\prec \sigma$.

Обозначим через $\mathcal{L}$ множество открытых подобластей U в N. Будем писать $U \prec \alpha = (X, P, p) \in \mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})(N)$, если $p(P) \in \overline{U}$, и $U \prec\prec \alpha$, если $p(P) \in U$. Пусть

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(y) &= \quad \{\beta \in \mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})(N) \mid y \prec\prec \beta\} \\ \mathcal{W}(y) &= \quad \{\beta \in \mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})(N) \mid y \not\prec \beta\}. \end{aligned} \tag{9.1}$$

Обозначим через T топологию в $\mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})(N)$, порожденную предбазой $\{\mathcal{U}(y),\, \mathcal{W}(y)\}$, $y \in \mathfrak{A} \cup \mathcal{L}$.

Теорема 9.3 *Последовательность $\{x_m\}$ регулярно сходится к элементу x тогда и только тогда, когда $\{x_m\}$ сходится к x в топологии T.*

Для доказательства теоремы 9.3 нам будут необходимы две следующие леммы.

Лемма 9.3 *Пусть D_1 и D — две односвязные области в N, причем $D_1 \subset\subset D$ и D ограничена жордановой кривой γ. Пусть $z_0 \in D \backslash \overline{D}_1$ и $A_l(D, D_1, z_0)$ — множество всех односвязных обобщенных l-листных кругов $\mathcal{K} = (E, 0, \psi)$ таких, что $\psi(E) = D, \psi(0) = z_0$, и все точки ветвления $\mathcal{K}$ проектируются в точки, принадлежащие области D_1. Тогда любая последовательность $\{\sigma_m\}$ из $A_l(D, D_1, z_0)$ содержит подпоследовательность, сходящуюся регулярно к некоторой римановой поверхности $\sigma \in A_l(D, D_1, z_0)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $B\{\sigma_m\} = \{z \in N \mid \exists$ последовательность $\{z_m\}$ такая, что z_m является проекцией некоторой точки ветвления поверхности σ_m и $z = \lim_{m\to\infty} z_m\}$. В силу теоремы 5.2 число точек ветвления элементов множества $A_l(D, D_1, z_0)$ (с учетом кратности ветвления) зависит лишь от n (точнее, оно равно $(l-1)$). Выберем подпоследовательность $\{\sigma_{m_k}\}$ такую, что множество $B\{\sigma_{m_k}\}$ конечно. Пусть $B\{\sigma_{m_k}\} = \{w_1, \ldots, w_k\}$. По условию теоремы имеем $B\{\sigma_{m_k}\} \subset \overline{D}_1 \subset D \backslash \{z_0\}$.

Построим компактное исчерпание $\{Q_n\}$ области $D \backslash B\{\sigma_{m_k}\}$ областями Q_n, содержащими точку z_0 и ограниченных $(k+1)$-й жордановой кривой $\gamma_{1n}, \ldots, \gamma_{k+1,n}$ каждая. Пусть $\sigma_m = (M_m, P_m, p_m)$. Рассмотрим римановы поверхности $\sigma_{m_k}^{(n)} = \left(Q_n^{m_k}, P_{m_k}, p|_{Q_n^{m_k}}\right)$, где $Q_n^{m_k}$ — компонента связности множества $p_{m_k}^{-1}(Q_n)$, содержащая точку P_{m_k}. Нетрудно убедиться, что при фиксированном n римановы поверхности $\sigma_{m_k}^n$ не имеют точек ветвления (m_k-as), ограничены кривыми $(\gamma_{1n})^{s_1}, \ldots, (\gamma_{k+1,n})^{s_{k+1}}$ (m_k-as), где $s_1, \ldots, s_{k+1}$ — некоторые натуральные числа, не превосходящие l. В силу леммы 7.1 число таких поверхностей конечно. Применяя в случае необходимости диагональный процесс и переходя к подпоследовательности, можно считать, что $\sigma_{m_k}^{(n)} = \sigma^{(n)}$ не зависят от m_k (m_k-as) для любого $n \geq 1$. Так как $\sigma_{m_k}^{(n)} \hookrightarrow \sigma_{m_k}^{(n+1)}$, $n \geq 1$, по теореме 3.2 существует σ' такая, что $\sigma^{(n)} \hookrightarrow \sigma'$, $n \geq 1$, и $\sigma' = \cup_{n=1}^{\infty} \sigma^{(n)}$ $(\mathrm{rel}\, \sigma)$. Риманова поверхность $\sigma^{(n)}$

имеет ровно l листов над любой точкой из Q_n (m_k-as), поэтому σ' имеет ровно l листов над любой точкой множества $D\backslash B\{\sigma_{m_k}\}$. Ясно, что $\sigma^{(n)}$ имеет род нуль и получается из некоторого l-листного односвязного круга $\sigma \in A_l(D, D_1, z_0)$ выкалыванием точек, лежащих над множеством $B\{\sigma_{m_k}\}$. Непосредственно проверяется, что $\{\sigma_m\}$ сходится регулярно к σ и утверждение леммы 9.3 доказано.

Лемма 9.4 *Пусть* $\sigma_m = \sigma_{m1} \cup \sigma_{m2}$ $(\operatorname{rel} \sigma_m)$, $m \geq 1$, *причем пересечение* $\tau = \sigma_{m1} \cap \sigma_{m2}$ $(\operatorname{rel} \sigma_m)$ *не зависит от* m. *Если* $\{\sigma_{mi}\}$ *сходится регулярно к* σ_i, $i = 1, 2$, то $\tau \hookrightarrow \sigma_i$, $i = 1, 2$, *морфизмы* $j_i : \tau \hookrightarrow \sigma_i$, $i = 1, 2$, *удовлетворяют условию граничной склейки и* $\{\sigma_m\}$ *регулярно сходится к римановой поверхности* σ, *получающейся из* σ_1 *и* σ_2 *склеиванием относительно морфизмов* j_1 *и* j_2.

Доказательство очевидно.

Доказательство теоремы 9.3. Необходимость. Пусть $\{x_m\} \to x$ в смысле определения 9.3. Рассмотрим сначала случай, когда $x = \sigma = (M, P, p)$ — невырожденный элемент в $\mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})(N)$. Тогда можно считать, что все $x_m = \sigma_m = (M_m, P_m, p_m)$ являются римановыми поверхностями над N. Пусть $\sigma \in \mathcal{U}(y)$, т. е. $y \prec\prec \sigma$. Если $y = U$, то $p(P) \in U$. Поскольку $p_m(P_m) \to p(P)$, $m \to \infty$, и U открыто, то $p_m(P_m) \in U$, т. е. $y \prec\prec \sigma_m$ (m-as), а это означает, что $\sigma_m \in \mathcal{U}(y)$ (m-as).

Если $y = (\overline{M}_1, \overline{p}_1, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_l) \in \mathfrak{A}$, то условие $y \prec\prec \sigma$ означает, в частности, что существует $j : y \prec \sigma$, т. е. такое непрерывное инъективное отображение $j : \overline{M}_1 \to M$, что $p \circ j = \overline{p}_1$ и $j(\Gamma_i)$ ограничивает в σ некоторый односвязный обобщенный n_i-листный круг, $i = 1, \ldots, l$, причем при $i = 1$ он содержит точку P. Пусть j_m — канонические вложения, индуцированные регулярной сходимостью $\{\sigma_m\} \to \sigma$. Так как $j(\overline{M}_1) \subset\subset \check{M}(\sigma)$, то m-as определены отображения $j_m \circ j$. Используя условия b) и c) определения множества $\mathfrak{S}_1\{\sigma_m\}$, нетрудно заключить, что $j_m \circ j : y \prec\prec \sigma_m$ (m-as), т. е. $\sigma_m \in \mathcal{U}(y)$ (m-as).

Рассмотрим теперь окрестность вида $\mathcal{W}(y)$. Если $y = U$ и $\sigma \in \mathcal{W}(y)$, то $p(P) \notin \overline{U}$ и поскольку $p_m(P_m) \to p(P)$, $m \to \infty$, а $\overline{U}$ замкнуто, то $p_m(P_m) \notin \overline{U}$ (m-as), т. е. $\sigma_m \in \mathcal{W}(y)$ (m-as).

Если же $y = (\overline{M}_1, \overline{p}_1, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_l) \in \mathfrak{A}$ и $\sigma \in \mathcal{W}(y)$, то также $\sigma_m \in \mathcal{W}(y)$ (m-as). В противном случае существует подпоследовательность $\{\sigma_{m_k}\}$ такая, что $\sigma_{m_k} \notin \mathcal{W}(y)$, т. е. $y \prec \sigma_{m_k}$ для всех m_k. Пусть $j_{m_k} : y \to \sigma_{m_k}$ — соответствующие отображения. Обозначим через $\sigma^{(i)}_{m_k}$ обобщенный n_i-листный круг, который ограничен в σ_{m_k} кривой $j_{m_k}(\Gamma_i)$, $i = 1, \ldots, l$. Так как $(\overline{M}_1, \overline{p}_1)$ не содержит точек ветвления, то у каждой граничной кривой Γ_i существует «воротник», т. е. такая замкнутая область $\overline{G}_i$ в $\overline{M}_1$, ограниченная Γ_i и некоторой кривой Γ'_i, которая гомеоморфна кольцу $\{1 \leq |\zeta| \leq 2\}$ и обладает тем свойством, что ее проекция $\overline{p}_1(\overline{G}_i)$ гомеоморфна кольцу и над каждой точкой $\overline{p}_1(\overline{G}_i)$ лежит ровно n_i точек из $\overline{G}_i$. Можно выбрать эти «воротники» таким образом, чтобы они попарно не пересекались в $\overline{M}_1$. Тогда кривые $j_{m_k}(\Gamma'_i)$ также ограничивают некоторый обобщенный n_i-листный круг $\tau^{(i)}_{m_k}$, содержащий $\sigma^{(i)}_{m_k}$, число точек ветвления которого не превосходит n, $i = 1, \ldots, l$.

Фиксируем точку $T_i \in G_i$, и пусть $T^{(i)}_{m_k} = j_{m_k}(T_i)$, $i = 1, \ldots, l$. В силу леммы 9.3 существуют подпоследовательность $\{\sigma_{m_{k_s}}\}$ последовательности $\{\sigma_{m_k}\}$ такая, что круги $\tau^{(i)}_{m_{k_s}}\left(T^{(i)}_{m_{k_s}}\right)$ с отмеченной точкой $T^{(i)}_{m_{k_s}}$ сходятся к некоторому обобщенному односвязному n_i-листному кругу $\tau^{(i)}$ для любого $i = 1, \ldots, l$. Чтобы не усложнять обозначения, можно без ограничения общности считать, что это условие выполнено для последовательности $\{\sigma_{m_k}\}$. Поскольку все $\tau^{(i)}_{m_k}\left(T^{(i)}_{m_k}\right)$ содержат «воротник» $\overline{v}_i = \left(\overline{G}_i, \overline{T}_i, \overline{p}_1|_{\overline{G}_i}\right)$, по лемме 9.4 ядро σ подпоследовательности $\{\sigma_{m_k}\}$ содержит риманову поверхность, получающуюся из $(\overline{M}_1, \overline{p}_1)$ приклеиванием обобщенных односвязных n_i-листных кругов $\overline{\tau^{(i)}}$ вдоль «воротников» $\overline{v}_i$, $i = 1, \ldots, l$. Отсюда следует, что $y \prec \sigma$, т. е. $\sigma \notin \mathcal{W}(y)$. Это противоречит исходному предположению. Итак, $\sigma_m \notin \mathcal{W}(y)$ (m-as).

Теперь рассмотрим случай, когда $x = z_0$ — вырожденный элемент из $\mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})(N)$. Если $x \in \mathcal{U}(y)$, то $y = U \in \mathcal{L}$ и $x = z_0 \in U$. Поскольку для $x_m = (X_m, P_m, p_m)$ имеем $p_m(P_m) \to z_0$, то $p_m(P_m) \in U$ (m-as), т. е. $x_m \in \mathcal{U}(y)$ (m-as). Если же $x \in \mathcal{W}(y)$, где $y = U \in \mathcal{L}$, то аналогично предыдущему $x = z_0 \notin U \Rightarrow p_m(P_m) \notin U$ (m-as), т. е. $x_m \in \mathcal{W}(y)$.

Наконец, если $y \in \mathfrak{A}$, $x \in \mathcal{W}(y)$, то предположение $x_m \notin \mathcal{W}(y)$ ведет, как и в случае $x = \sigma$, к невырожденности ядра последовательности $\{x_m\}$.

Достаточность. Пусть $\{x_m\} \to x$ в топологии T. Пусть сначала $x = \sigma = (M, P, p)$ — риманова поверхность над N. Пусть $\{\overline{Q}_n\}$ — компактное исчерпание M замкнутыми областями, ограниченными кривыми, не проходящими через точки ветвления поверхности σ. Пусть $S_1 = P, S_2, \ldots, S_k$ — множество точек ветвления σ, попадающих в Q_n, дополненное точкой P, если P не является точкой ветвления σ. Пусть $n_i{=}\mathrm{ord}(S_i, \sigma)$, $i = 1, \ldots, k$. Выберем попарно непересекающиеся односвязные обобщенные n_i-листные круги K_i, компактно содержащиеся в Q_n и содержащие точки S_i, $i = 1, \ldots, k$, соответственно. Удаляя из $\overline{Q}_n$ эти круги, получаем замкнутую область $\overline{Q}'_n$. Можно подобрать $\overline{Q}'_n$ таким образом, чтобы последовательность $\{\overline{Q}'_n\}$ являлась компактным исчерпанием для $M\backslash\{P\}$.

Пусть $\overline{\tau}_n = (\overline{Q}'_n, p|_{\overline{Q}'_n}, \Gamma^n_1, \ldots, \Gamma^n_k)$, где $\Gamma^n_1, \ldots, \Gamma^n_k$ — граничные кривые области $\overline{Q}'_n$, соответствующие удаляемым из области $\overline{Q}_n$ кругам $K_1, \ldots, K_k$. По построению $\overline{\tau}_n \prec\prec \sigma$, поэтому $\sigma \in \mathfrak{A}(\overline{\tau}_n)$, $n \geq 1$. Так как $\{x_m\} \to x$ в топологии T, то $x_m{=}\sigma_m \in \mathfrak{A}(\overline{\tau}_n)$ (m-as) для любого фиксированного n, т. е. существует $j^n_m : \overline{\tau}_n \prec\prec \sigma_m$ (m-as). Пусть S — любая точка из $\overline{Q}'_1$ и $S^n_m = j^n_m(S)$. Нетрудно видеть, что образ Γ^1_1 при отображении j^n_m разбивает σ_m на две части, одна из которых есть обобщенный односвязный n_1-листный круг, содержащий точку P_m. Поэтому среди точек S^n_m при фиксированном m есть не более, чем n_1 различных и, применяя диагональный процесс, получаем, что последовательность $\{\tau_n\}$ содержит подпоследовательность $\{\tau_{n_t}\}$ такую, что $S^{n_t}_m = S_m$ не зависит от номера n_t. Отсюда и из условия $j^n_m : \overline{\tau}_n \prec\prec \sigma_m$ (m-as) следует, что $\check{\sigma}(S) \in \mathfrak{M}\{\check{\sigma}_m(S_m)\}$ и далее, что $\sigma \in \mathfrak{S}\{\sigma_m\}$ с каноническими вложениями j_m, равными j^n_m на Q'_n. Для любой окрестности σ вида $\mathcal{W}(y)$ имеем $\sigma_m \in \mathcal{W}(y)$ (m-as). Это означает, что если для некоторой подпоследовательности $\{\sigma_{m_r}\}$ имеем $y \prec \sigma_{m_r}$ (m_r-as), то $y \prec \sigma$. Отсюда следует, что σ — максимальный элемент в $\mathfrak{S}\{\sigma_m\}$, а поскольку это утверждение верно и для любой подпоследовательности $\{\sigma_{m_r}\}$, то $\{\sigma_m\} \to \sigma$ в смысле определения 9.3.

Если $x = z_0$ — вырожденный элемент в $\mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})(N)$ и $\{x_m\} \to x$ в топологии T, то $\{x_m\}$ сходится регулярно к z_0. В противном случае существует подпоследовательность $\{x_{m_k}\}$, ядро которой невырождено. Тогда существует $y \in \mathfrak{A}$ такое, что $y \prec\prec \sigma$, где σ — некоторое ядро последовательности $\{x_{m_k}\}$ относительно регулярной сходимости.

Следовательно, $y \prec\prec x_{m_k}$ (m_k-as). Но, с другой стороны, $z_0 \in \mathcal{W}(y)$, т. к. $y \not\prec z_0$. Это противоречит тому, что $\{x_m\}$ сходится к z_0 в топологии T. Теорема 9.2 полностью доказана.

Пусть $\mathfrak{N}\{\sigma_m\}$ есть объединение множеств $\mathrm{Ker}\{\sigma_{m_k}\}$, взятое по всем подпоследовательностям $\{\sigma_{m_k}\}$ последовательности $\{\sigma_m\}$, аналогично через $\mathfrak{N}_1\{\sigma_m\}$ обозначим объединение множеств $\mathrm{Ker}_1\{\sigma_{m_k}\}$ также по всем подпоследовательностям.

Лемма 9.5 *Множества $\mathfrak{N}\{\sigma_m\}$ и $\mathfrak{N}_1\{\sigma_m\}$ индуктивны по отношению порядка $\hookrightarrow$.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 8.3.

Пусть N_0 — любая замкнутая область, компактно вложенная в N, и $\mathrm{Ob}_{N_0}(\overline{\mathcal{RP}})(N)$ — множество, состоящее из объектов (X, P, p) в пространстве $\mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})(N)$, для которых $p(P) \in N_0$.

Теорема 9.4 *Из любой последовательности $\{x_m\}$ элементов в $\mathrm{Ob}_{N_0}(\overline{\mathcal{RP}})(N)$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{m_k}\}$, которая*
a) *сходится в $\mathrm{Ob}_{N_0}(\overline{\mathcal{RP}})(N)$;*
b) *регулярно сходится в $\mathrm{Ob}_{N_0}(\overline{\mathcal{RP}})(N)$.*

Доказательство. Пусть $x_m = (X_m, P_m, p_m)$, $m \geq 1$. Тогда для всех m точки $p_m(P_m) \in N_0$ и существует подпоследовательность $\{x_{m_k}\}$ и точка $z_0 \in N$ такие, что $p_{m_k}(P_{m_k}) \to z_0$, $m_k \to \infty$. Далее доказательство проводится как и в теореме 8.4.

Следствие 9.2 *Пространство $\mathrm{Ob}_{N_0}(\overline{\mathcal{RP}})(N)$ секвенциально компактно в топологии T.*

Теорема 9.5 *Пространство $\mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})(N)$ с топологией T хаусдорфово и удовлетворяет второй аксиоме счетности.*

Доказательство. Хаусдорфовость $\mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})(N)$ очевидна. Поэтому достаточно установить существование счетной предбазы топологии T. Как и при доказательстве теоремы 8.5 фиксируем некоторое аналитическое отображение $f : N \to \overline{\mathbb{C}}$. Рассмотрим систему $\{\mathcal{U}(y), \mathcal{W}(y)\}$, где y — точка или набор $\overline{\tau} = (\overline{\sigma}_1, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_l) \in \mathfrak{A}$,

$\overline{\sigma}_1 = (\overline{M}_1, \overline{p}_1)$, причем компоненты края $\overline{\sigma}_1$ проектируются при отображении $f \circ \overline{p}_1$ в ломаные в $\mathbb{C}$, вершины которых имеют рациональные координаты. Как и при доказательстве теоремы 8.5, убеждаемся, что топология, порождаемая этой предбазой, совпадает с T, а сама предбаза является счетной. Теорема 9.5 доказана.

Теорема 9.6 *Пространство* $\mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})(N)$ *локально компактно в топологии* T. *Если* N *— компактная поверхность, то пространство* $\mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})(N)$ *в топологии* T *компактно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если точка $x = z_0$ — вырожденный элемент в $\mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})(N)$, то фиксируем некоторую область U в N, содержащую точку z_0, с компактным замыканием в N. Пусть $y = U \in \mathcal{L}$. Тогда $z_0 \in \mathcal{U}(y) = \{\beta = (X, P, p) \mid p(P) \in U\}$. Нетрудно видеть, что $\overline{\mathcal{U}(y)} = \{\beta = (X, P, p) \mid p(P) \in \overline{U}\} =: \mathrm{Ob}_{\overline{U}}(\overline{\mathcal{RP}})(N)$ Пространство $\mathrm{Ob}_{\overline{U}}(\overline{\mathcal{RP}})(N)$ секвенциально компактно по следствию 9.2, хаусдорфово и имеет счетную базу, как подпространство $\mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})(N)$, по теореме 9.4. Следовательно, оно компактно (см., напр., [13]). Таким образом, $\overline{\mathcal{U}(y)}$ — компактная окрестность точки z_0 в $\mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})(N)$.

Пусть теперь $x = \sigma = (M, P, p)$ — риманова поверхность над N. Фиксируем некоторый набор $\overline{\tau} = (\overline{\sigma}_1, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_l) \in \mathfrak{A}$ такой, что существует $j : \overline{\tau} \prec\!\prec \sigma$. Пусть $\overline{\sigma}_1 = (\overline{M}_1, \overline{p}_1)$. Тогда $j(\Gamma_k)$ разбивает $\overline{\sigma}_1$ на две части, причем та часть, которая лежит «слева» от $j(\Gamma_k)$, является обобщенным односвязным n_k-листным кругом, содержащим точку P, $k = 1, \ldots, l$. Как и при доказательстве теоремы 9.2 построим для каждого натурального n «воротник» $\overline{G}_i^{(n)}$ около Γ_i, ограниченный кривыми Γ_i и $\Gamma_i^{(n)}$, таким образом, чтобы $\overline{G}_i^{(n)} \supset \overline{G}_i^{(n+1)}$, $n \geq 1$, и $\cap_{n=1}^{\infty} \overline{G}_i^{(n)} = |\Gamma_i|$, $i = 1, \ldots, l$. Можно считать, что $\overline{G}_i^{(n)} \cap \overline{G}_j^{(n)} = \emptyset$, $i \neq j$, $n \geq 1$. Пусть $\overline{M}_1^{(n)} = \overline{M}_1 \setminus \cup_{i=1}^{l} \overline{G}_i^{(n)}$. Тогда

$$\overline{\tau}^{(n)} = \left(\overline{M}_1^{(n)}, p_1|_{\overline{M}_1^{(n)}}, \Gamma_1^{(n)}, \Gamma_2^{(n)}, \ldots, \Gamma_l^{(n)}\right) \in \mathfrak{A}, \quad n \geq 1.$$

С использованием лемм 9.3 и 9.4 нетрудно показать, что замыкание $\overline{\mathcal{U}(\overline{\tau})} = \cap_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}(\overline{\tau}^{(n)})$, это множество компактно в топологии T и является окрестностью σ.

Если N компактно, то $\mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})(N)$ секвенциально компактно по следствию 9.2. Поэтому по теореме 9.4 (см. также [13]) оно компактно. Теорема 9.6 доказана.

В заключение отметим без доказательства некоторые почти очевидные свойства регулярной сходимости.

Теорема 9.7 *Если последовательность $\{\sigma_m\}$ такова, что каждая риманова поверхность σ_m либо односвязна, либо не имеет точек ветвления, то $\{\sigma_m\}$ сходится к римановой поверхности σ тогда и только тогда, когда $\{\sigma_m\}$ регулярно сходится к σ.*

Теорема 9.8 *Пусть некоторая последовательность $\{\sigma_m\}$, где $\sigma_m = (M_m, P_m, p_m)$, $m \geq 1$, регулярно сходится к римановой поверхности $\sigma = (M, P, p)$ и j_m — канонические вложения, индуцированные этой сходимостью. Пусть $T \in M$ и $T_m \in M_m$, $m \geq 1$, — такие точки, что выполняется условие:*

если некоторый обобщенный односвязный n-листный круг $K = (E, 0, \psi)$, с единственной точкой ветвления в центре в случае, если $n > 1$, содержится в $\sigma(T)$, причем образ $j(E)$ при вложении $j : K \hookrightarrow \sigma(T)$ ограничен кривой Γ, обходящей границу $j(E)$ в положительном направлении, то $j_m(\Gamma)$ ограничивает (m-as) некоторый n-листный круг в σ_m, который остается «слева» от кривой $j_m(\Gamma)$ при ее обходе и содержит точку T_m (в частности, это условие выполнено, если $T \in M(\check{\sigma}), T_m = j_m(T)$ (m-as)).

Тогда последовательность $\{\sigma_m(T_m)\}$ сходится регулярно к $\sigma(T)$, причем канонические вложения j'_m, индуцированные этой сходимостью, можно выбрать совпадающими с j_m.

Теорема 9.9 *Пусть последовательность $\{\sigma_m\}$ сходится или регулярно сходится к римановой поверхности σ. Если отмеченные точки поверхностей σ_m, $m \geq 1$, и σ не являются точками ветвления, то последовательность $\{\check{\sigma}_m\}$сходится к $\check{\sigma}$, причем сходится регулярно.*

Теорема 9.10 *Пусть $\{\sigma_m\}$, где $\sigma_m = (M_m, P_m, p_m)$, $m \geq 1$, регулярно сходится к римановой поверхности $\sigma = (M, P, p)$, причем $p_m(M_m) \subset Q$, где Q — некоторая область в N. Если $\varphi : Q \to N_1$ — произвольная непостоянная голоморфная функция из Q в некоторую риманову поверхность N_1, то последовательность $\sigma'_m = (M_m, P_m, \varphi \circ p_m)$, $m \geq 1$, римановых поверхностей над N_1 регулярно сходится к $\sigma' = (M, P, \varphi \circ p)$.*

§10. Сходимость к ядру последовательности универсальных накрытий

Введем еще один вид сходимости, необходимый при изучении сходимости последовательностей универсальных накрытий.

Если γ — кривая в топологическом пространстве X, не обязательно замкнутая, то через $[\gamma]_X$ будем обозначать гомотопический класс кривой γ в X (относительно ее концов). Гомотопический класс точечной кривой будем обозначать через e (без указания пространства X и точки — носителя этой кривой). Если $f: X \to Y$ — непрерывное отображение топологических пространств, то через $f_\#$ обозначим индуцированное функцией f отображение фундаментальных группоидов (см., напр., [87]).

Пусть H — некоторое подмножество группы G. *Оболочкой множества* H назовем подгруппу в G, порожденную всевозможными сопряжениями yxy^{-1} элементов $x \in H$ элементами $y \in G$. Оболочка H есть наименьшая нормальная подгруппа в G, содержащая множество H. Элементы оболочки называются *следствиями элементов* множества H (см., напр., [51], гл. IV, п. I).

Определение 10.1 *Последовательность* $\sigma_m = (M_m, P_m, p_m)$ *из* $\mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})(N)$ *сходится к* $\sigma = (M, P, p) \in \mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})(N)$ *с сохранением связности, если выполнены условия:*
a) σ_m *регулярно сходится к* σ;
b) *если* γ *— замкнутая кривая в* $\overline{M}(\sigma)$, *такая, что* $[\gamma]_M \neq e$, *то* $[j_m \circ \gamma]_{M_m} \neq e$ (m-as), *где* j_m *— канонические вложения, индуцированные регулярной сходимостью* $\{\sigma_m\}$ *к* σ.

Следующий пример показывает различие между регулярной сходимостью и сходимостью с сохранением связности.

Пример 10.1 Последовательность $\{\sigma_m\}$, где

$$\sigma_m = (E, 1/2, z + 1/(mz), \quad m \geq 1,$$

римановых поверхностей над $\overline{\mathbb{C}}$ сходится регулярно к римановой поверхности $\sigma = (E\backslash\{0\}, 1/2, z)$, однако не сходится к σ с сохранением связности, так как, к примеру, кривая γ, однократно обходящая окружность $\{|z| = 1/4\}$, не гомотопна точечной в $E\backslash\{0\}$, в то время как $[j_m \circ \gamma]_{M_m} = e$ (m-as), поскольку E односвязно.

Нашей ближайшей целью будет доказательство того, что сходимость с сохранением связности локально равномерна. Это будет сделано в серии, состоящей из трех лемм.

Лемма 10.1 *Пусть M — абстрактная риманова поверхность, Q — область в M с компактным замыканием, содержащая фиксированную точку $P \in M$ и ограниченная конечным числом простых замкнутых попарно непересекающихся кривых $\beta_1, \ldots, \beta_s$. Пусть кривая α_i соединяет точку P с началом кривой β_i в Q, $i = 1, \ldots, s$, и $\gamma_i = \alpha_i \beta_i \alpha_i^-$, $i = 1, \ldots, s$. Если γ — замкнутая кривая в $\overline{Q}$, с началом в точке P и $[\gamma]_M = e$, то $[\gamma]_{\overline{Q}}$ принадлежит оболочке $\mathcal{O}$ элементов $[\gamma_i]_{\overline{Q}}$, $i \in A$, в фундаментальной группе $\overline{Q}$, где $A = (1 \leq i \leq s \mid [\gamma_i]_M = e\}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Построим универсальное накрытие $f : \tilde{M} \to M$ римановой поверхности M и фиксируем точку $\tilde{P} \in f^{-1}(P)$. Пусть $\tilde{Q}$ — компонента связности множества $f^{-1}(Q)$, содержащая точку $\tilde{P}$. Из свойств накрывающих отображений [87] и теоремы о монодромии [88] следует, что $\tilde{Q}$ ограничена в $\tilde{M}$ не более, чем счетным числом простых замкнутых кривых, носители которых являются компонентами связности множества $B_1 = \bigcup_{i \in A} f^{-1}(|\beta_i|)$, и открытых разомкнутых дуг — компонент связности множества $B_2 = \bigcup_{i \notin A} f^{-1}(|\beta_i|)$. По теореме о монодромии поднятие $\tilde{\gamma}$ кривой γ из точки $\tilde{P}$ на $\tilde{M}$ является замкнутой кривой. Так как $|\gamma| \subset \overline{Q}$, то $|\tilde{\gamma}| \subset \overline{\tilde{Q}}$.

Пусть $\tilde{Q}'$ — компонента связности множества $\tilde{M} \backslash B_2$, содержащая точку $\tilde{P}$. Поскольку $\tilde{M}$ односвязно и $\tilde{Q}'$ ограничено в $\tilde{M}$ не более, чем счетным числом открытых дуг, то $\tilde{Q}'$ односвязно. При этом $\tilde{Q}' \backslash \overline{\tilde{Q}}$ есть объединение не более, чем счетного числа жордановых областей, каждая из которых ограничена некоторой компонентой связности множества B_1. При этом ни одна точка любой из компонент множества B_1 не является предельной точкой для объединения остальных компонент. Отсюда с привлечением теоремы Зейферта-ван Кампена следует, что фундаментальная группа $\pi_1(\overline{\tilde{Q}}, P)$ замкнутой области $\overline{\tilde{Q}}$ в точке $\tilde{P}$ есть свободная группа с образующими вида $[\tilde{\alpha}_{kl} \tilde{\beta}_{kl} (\tilde{\alpha}_{kl})^-]_{\overline{\tilde{Q}}}$, где $\tilde{\beta}_{kl}$ — простая замкнутая кривая в $\tilde{Q}$, являющаяся поднятием кривой β_k из некоторой точки $\tilde{P}_{kl}$, такая, что $|\tilde{\beta}_{kl}| \subset \partial\tilde{Q}$, а $\tilde{\alpha}_{kl}$ — кривая в $\tilde{Q}$, соединяющая точку $\tilde{P}$ с точкой $\tilde{P}_{kl}$. Пусть $f' = f|_{\overline{\tilde{Q}}} : \overline{\tilde{Q}} \to Q$. Поскольку

$$f'_{\#}\left([\tilde{\alpha}_{kl}\tilde{\beta}_{kl}(\tilde{\alpha}_{kl})^{-}]_{\overline{\tilde{Q}}}\right) = [f(\tilde{\alpha}_{kl})\beta_k f(\tilde{\alpha}_{kl})^{-}]_{\overline{Q}} =$$

$$= [f(\tilde{\alpha}_{kl})\alpha_k^{-}]_{\overline{Q}}[\gamma_k]_{\overline{Q}}[f(\tilde{\alpha}_{kl})\alpha_k^{-}]_{\overline{Q}}^{-1},$$

то образ $f'_{\#}\left([\tilde{\alpha}_{kl}\tilde{\beta}_{kl}(\tilde{\alpha}_{kl})^{-}]_{\overline{\tilde{Q}}}\right)$ лежит в оболочке элементов $[\gamma_i]_{\overline{Q}}$, $i \in A$. Но поскольку $[\gamma]_{\overline{Q}} = [f(\tilde{\gamma})]_{\overline{Q}} = f'_{\#}([\tilde{\gamma}]_{\overline{\tilde{Q}}})$, то $[\gamma]_{\overline{Q}} \in \mathcal{O}$. Лемма 10.1 доказана.

Следствие 10.1 *Пусть Q — область на абстрактной римановой поверхности M, P_0, P_1, $P_2, \ldots, P_n$ — некоторые точки из Q, $Q' = Q \backslash \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ и $U_1, U_2, \ldots, U_n$ — жордановы области в Q, которые попарно не пересекаются, причем $P_j \in U_j$, $j = 1, \ldots, n$. Пусть β_j — кривая, обходящая границу области U_j, а кривая α_j соединяет точку P_0 с началом кривой β_j в Q', $j = 1, \ldots, n$. Если $[\gamma]_Q = e$ и начало кривой γ есть точка P_0, то $[\gamma]_{Q'}$ является следствием элементов $[\alpha_j\beta_j\alpha_j^{-}]_{Q'}$ в $\pi_1(Q', P_0)$.*

Доказательство следует из того, что если U'_j — жорданова область такая, что $P_j \in U'_j \subset\subset U_j$, то $U_j \backslash \overline{U'_j}$ является сильным деформационным ретрактом в $U_j \backslash \{P_j\}$. Поэтому $Q'' = Q \backslash \cup_{j=1}^{n} U'_j$ — сильный деформационный ретракт для Q'. Обозначим через α'_j и β'_j кривые, аналогичные кривым α'_j и β'_j, но определенным для U'_j, а не для U_j. В силу леммы 10.1 $[\gamma]_{Q''}$ является следствием элементов $[\alpha'_j\beta'_j(\alpha'_j)^{-}]_{Q''}$. Так как $Q''' = Q \backslash \cup_{j=1}^{n} U_j$ сильный деформационный ретракт для Q'', и деформацию можно построить таким образом, что при ней α'_j и β'_j переходят в α_j и β_j, то $[\alpha'_j\beta'_j(\alpha'_j)^{-}]_{Q''} = [\alpha_j\beta_j\alpha_j^{-}]_{Q''}$. Поэтому $[\gamma]_{Q''}$ является следствием элементов $[\alpha_j\beta_j(\alpha_j)^{-}]_{Q''}$, откуда следует утверждение следствия.

Лемма 10.2 *Если $\sigma = (M, P, p)$, $\sigma_m = (M_m, P_m, p_m)$, $m \geq 1$, γ — замкнутая кривая в $\check{M}(\sigma)$, такая, что $[\gamma]_M = e$, и последовательность $\{\sigma_m\}$ регулярно сходится к σ, то $[j_m(\gamma)]_{M_m} = e$ (m-as), где j_m — канонические вложения, индуцированные регулярной сходимостью $\{\sigma_m\}$ к σ.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как кривая γ гомотопна точечной в M и образ гомотопии есть компактное множество, то существует область $Q \subset\subset M$, ограниченная жордановыми кривыми, такая, что γ гомотопна точечной кривой в Q. Обозначим через $P_1, \dots, P_n$ точки ветвления римановой поверхности M, лежащие в Q. Применяя следствие 10.1, убеждаемся, что β гомотопна в $Q \backslash \{P_1, \dots, P_n\}$ произведению петель вида $\alpha_k \beta_k^{\pm} \alpha_k^-$, $k = 1, \dots, n$, где β_k — простая замкнутая кривая в M, ограничивающая жорданову область U_k, содержащую точку P_k и не содержащую других точек ветвления σ, $k = 1, \dots, n$. Используя компактность образа гомотопии, выберем компакт Q_1 в $Q \backslash \{P_1, \dots, P_n\}$ такой, что β гомотопна произведению $\gamma = \prod_{k=1}^{l} \alpha'_k \beta^{\pm}_{i(k)} (\alpha'_k)^-$ в Q_1 для некоторых кривых α'_k. Тогда имеем $Q_1 \subset\subset \check{M}(\sigma)$.

В качестве $U_1, \dots, U_n$ можно брать произвольные малые окрестности точек $P_1, \dots, P_n$. В силу леммы 1.1 можно подобрать их такими, что β_k ограничивает некоторый односвязный обобщенный круг в M, $k = 1, \dots, n$. Используя определение регулярной сходимости, заключаем, что $j_m(\beta_k)$ ограничивает обобщенный односвязный круг в M_m (m-as), поэтому

$$[j_m(\beta_k)]_{M_m} = e \ (m - \mathrm{as}), \ k = 1, \dots, n. \tag{10.1}$$

Так как $[\beta]_{Q_1} = [\gamma]_{Q_1}$, то $[j_m(\beta)]_{j_m(Q_1)} = [j_m(\gamma)]_{j_m(Q_1)}$ (m-as), а значит,

$$[j_m(\beta)]_{M_m} = [j_m(\gamma)]_{M_m} = \prod_{k=1}^{l} [j_m(\alpha'_k)]_{M_m} [j_m(\beta_{i(k)})]^{\pm 1}_{M_m} [j_m(\alpha'_k)]^{-1}_{M_m} = e$$

в силу (10.1). Лемма 10.2 доказана.

Сходимость с сохранением связности локально равномерна в следующем смысле.

Лемма 10.3 *Если последовательность $\{\sigma_m\}$ сходится к σ с сохранением связности, $\sigma = (M, P, p)$, $\sigma_m = (M_m, P_m, p_m)$, $m \geq 1$, и Q— компакт в $\check{M}(\sigma)$, то существует номер N, зависящий только от Q такой, что для любого $m \geq N$ и любой кривой γ в Q имеют место эквивалентности*

$$1) \ [\gamma]_M = e \Longleftrightarrow [j_m(\gamma)]_{M_m} = e;$$

$$2) \ [\gamma]_M \neq e \Longleftrightarrow [j_m(\gamma)]_{M_m} \neq e.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Можно считать, что Q удовлетворяет условиям леммы 10.1, иначе расширим Q до нужной области.

1) Если $|\gamma| \in Q$, $[\gamma]_M = e$, то по лемме 10.1 в обозначениях той же леммы гомотопический класс $[\gamma]_{\overline{Q}}$ принадлежит оболочке $\mathcal{O}$ элементов $[\gamma_i]_{\overline{Q}}$, $i \in A$. Так как $[\gamma_i]_M = e$, $i \in A$, множество A конечно и $\{\sigma_m\}$ регулярно сходится к σ, то по лемме 10.2 существует $N = N(Q)$ такое, что $[j_m(\gamma_i)]_{M_m} = e$ при $m \geq N(Q)$, $i \in A$. Отсюда следует, что при $m \geq N$ гомоморфизм $(j_m^{\overline{Q}})_\#$, где $j_m^{\overline{Q}} : \overline{Q} \to M_m$ — сужение канонических вложений j_m на $\overline{Q}$, переводит элементы $[\gamma_i]_{\overline{Q}}$, $i \in A$, в единичный элемент фундаментальной группы поверхности M_m. Поскольку ядро гомоморфизма $(j_m^{\overline{Q}})_\#$ есть нормальная подгруппа фундаментальной группы замкнутой области $\overline{Q}$, а оболочка $\mathcal{O}$ элементов $[\gamma_i]_{\overline{Q}}$, $i \in A$, есть наименьшая нормальная подгруппа, содержащая их, то $\mathcal{O} \subset \mathrm{Ker}(j_m^{\overline{Q}})_\#$, $m \geq N$. Так как $[\gamma]_{\overline{Q}} \in \mathcal{O}$, то отсюда следует, что $[\gamma]_{\overline{Q}} \in \mathrm{Ker}(j_m^{\overline{Q}})_\#$ и

$$[j_m(\gamma)]_{M_m} = (j_m^{\overline{Q}})_\#([\gamma]_{\overline{Q}}) = e, \quad m \geq N.$$

Обратно, если при $m \geq N$ выполняются условия $[j_m(\gamma)]_{M_m} = e$, то $[\gamma]_M = e$. Это непосредственно следует из определения 10.1.

2) Предположим противное. Тогда существует подпоследовательность $\{\sigma_{m_k}\}$ последовательности $\{\sigma_m\}$ и кривые $\gamma^{(m_k)}$, такие, что либо

a) $[\gamma^{(m_k)}]_M = e$ и $[j_{m_k}(\gamma^{(m_k)})]_{M_{m_k}} \neq e$ для любого m_k, либо

b) $[\gamma^{(m_k)}]_M \neq e$ и $[j_{m_k}(\gamma^{(m_k)})]_{M_{m_k}} = e$ для любого m_k.

Случай a) невозможен, поскольку если $[\gamma^{(m_k)}]_M = e$, то в силу 1) при $m_k \geq N$ выполняются условия $[j_{m_k}(\gamma^{(m_k)})]_{M_{m_k}} = e$. Предположим, что имеет место случай b). Пусть $Q_{m_k} = j_{m_k}(Q)$, $\gamma_{m_k} = j_{m_k}(\gamma^{(m_k)})$. В силу леммы 10.1 элемент $[\gamma_{m_k}]_{\overline{Q}_{m_k}}$ является следствием элементов $[j_{m_k}(\gamma_i)]_{\overline{Q}_{m_k}}$, $i \in A_{m_k}$, где

$$A_{m_k} = \{1 \leq i \leq s : [j_{m_k}(\gamma_i)]_{M_{m_k}} = e\}.$$

Так как число различных подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, s\}$ конечно, то, переходя в случае необходимости к подпоследовательности, можно считать, что множество $A_{m_k} = A$ не зависит от m_k. Так как

$\{\sigma_m\}$ сходится к σ с сохранением связности, то из определения 10.1 следует, что $[\gamma_i]_M = e$, $i \in A$, поскольку $[j_{m_k}(\gamma_i)]_{M_{m_k}} = e$ для любого m_k. Но j_{m_k} отображает гомеоморфно $\overline{Q}$ на $\overline{Q}_{m_k}$, поэтому $[\gamma^{(m_k)}]_{\overline{Q}}$ является следствием элементов $[\gamma_i]_{\overline{Q}}$, $i \in A$. Вложение $j : \overline{Q} \to M$ индуцирует гомоморфизм $j_\#$ фундаментальных групп, при котором $[\gamma_i]_{\overline{Q}}$ переходит в $[\gamma_i]_M = e$ при $i \in A$. Следовательно, элементы $[\gamma^{(m_k)}]_{\overline{Q}}$ лежат в ядре гомоморфизма $j_\#$ и $[\gamma^{(m_k)}]_M = j_\#([\gamma^{(m_k)}]_{\overline{Q}}) = e$. Полученное противоречие доказывает лемму 10.3.

Отметим следующий любопытный факт.

Теорема 10.1 *Если последовательность $\{\sigma_m\}$ римановых поверхностей без точек ветвления сходится к римановой поверхности σ, то $\{\sigma_m\}$ сходится к σ с сохранением связности.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{\sigma_m\}$ сходится к римановой поверхности σ, причем $\sigma_m = (M_m, P_m, p_m)$, $m \geq 1$, являются римановыми поверхностями без точек ветвления. Тогда очевидно, что $\sigma = (M, P, p)$ также не имеет точек ветвления и в силу теоремы 9.7 $\{\sigma_m\}$ сходится к σ регулярно. Следовательно, условие a) определения 10.1 выполнено. Докажем, что имеет место условие b). Предположим противное. Тогда существуют кривая γ в M и подпоследовательность $\{\sigma_{m_k}\}$ последовательности $\{\sigma_m\}$, такие, что $[\gamma]_M \neq e$, но $[\gamma_{m_k}]_{M_{m_k}} = e$, где $\gamma_{m_k} = j_{m_k}(\gamma)$.

Пусть Q — область в M, удовлетворяющая условиям леммы 10.1, которая содержит $|\gamma|$, и $Q_{m_k} = j_{m_k}(Q)$. Рассуждая так же, как и при доказательстве леммы 10.3, п. 2, получаем, что существует такое множество A, что $[\gamma_{m_k}]_{\overline{Q}_{m_k}}$ лежит в оболочке элементов $[j_{m_k}(\gamma_i)]_{\overline{Q}_{m_k}}$, $i \in A$, причем $[\beta^i_{m_k}]_{M_{m_k}} = e$, $i \in A$, где $\beta^i_{m_k} = j_{m_k}(\beta_i)$.

Кривые $\beta^{(i)}_{m_k}$ простые, замкнутые и гомотопны точечным в M_{m_k}, поэтому либо $\beta^{(i)}_{m_k}$, либо $(\beta^{(i)}_{m_k})^-$ является ориентированной границей некоторой односвязной подобласти $M^i_{m_k}$. Отметим, что $p_{m_k}(\beta^{(i)}_{m_k}) = p_{m_k} \circ j_{m_k}(\beta_i) = p(\beta_i)$, т. е. не зависит от m_k. Переходя в случае необходимости к подпоследовательности, с использованием леммы 7.2 и следствия 7.1, можем считать, что римановы поверхности с краем $\overline{\sigma}^i_{m_k} = \left(\overline{M}^i_{m_k}, T_{m_k}, p|_{\overline{M}^i_{m_k}}\right)$ (для некоторых точек $T_{m_k} \in M^i_{m_k}$) попарно эквивалентны и их ориентированной границей является либо $\beta^i_{m_k}$ для всех m_k, либо $(\beta^i_{m_k})^-$ для всех m_k, $i \in$A. Если для некоторого $i \in A$ они ограничены кривыми $\beta^i_{m_k}$, то очевидно, что $Q_{m_k} \subset M^i_{m_k}$ и в качестве T_{m_k} можно взять точки $j_{m_k}(P)$. Используя максимальность элемента σ в множестве $\mathfrak{S}_1\{\sigma_m\}$, заключаем, что существует односвязная область Q^i в M, содержащая Q, и такая, что $(\overline{Q}^i, P, p|_{\overline{Q^i}})$ эквивалентна $\overline{\sigma}^i_{m_k}$ для любого m_k. Поскольку $|\gamma| \subset Q \subset Q^i$ и Q^i односвязно, то $[\gamma]_M = e$, что противоречит предположению.

Если же для всех $i \in A$ римановы поверхности $\overline{\sigma}^i_{m_k}$ ограничены кривыми $(\beta^{(i)}_{m_k})^-$, то существует односвязная область Q^i в M такая, что $\overline{Q}^i \cap \overline{Q} = |\beta_i|$, поэтому $[\beta_i]_M = e$ и $[\gamma_i]_M = e$, $i \in A$. Поскольку $[\gamma]_{\overline{Q}}$ является следствием элементов $[\gamma_i]_{\overline{Q}}$, то $[\gamma]_M$ является следствием элементов $[\gamma_i]_M$. Значит, $[\gamma]_M = e$ — противоречие, и теорема 10.1 доказана.

Пусть $\sigma = (M, P, p)$ — риманова поверхность над N и $f : (\tilde{M}, \tilde{P}) \to$ $\to (M, P)$ — универсальное накрытие для M с отмеченной точкой P. Будем использовать стандартную реализацию $\tilde{M}$ как множество гомотопических классов $[\gamma]_M$ кривых γ в M с началом в точке P с естественно определяемой топологией и комплексной структурой (см., напр., [88]). При этом $f([\gamma]_M) = P'$, где P' — конечная точка кривой γ. Универсальным накрытием римановой поверхности σ назовем тройку $\tilde{\sigma} = (\tilde{M}, \tilde{P}, \tilde{p})$, где $\tilde{p} = p \circ f$.

Установим теорему о связи сходимости последовательности римановых поверхностей над N со сходимостью их универсальных накрытий.

Теорема 10.2 *Последовательность $\{\sigma_m\}$ римановых поверхностей $\sigma_m = (M_m, P_m, p_m)$ над N сходится к римановой поверхности $\sigma = (M, P, p)$ с сохранением связности тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:*

I) *последовательность $\tilde{\sigma}_m = (\tilde{M}_m, \tilde{P}_m, \tilde{p}_m)$ универсальных накрытий римановых поверхностей σ_m сходится к универсальному накрытию $\tilde{\sigma} = (\tilde{M}, \tilde{P}, \tilde{p})$ римановой поверхности σ;*

II) *канонические вложения $\tilde{j}_m$, индуцированные сходимостью $\{\tilde{\sigma}_m\}$ к $\tilde{\sigma}$, можно подобрать таким образом, что отображения $f_m \circ \tilde{j}_m$ сходятся равномерно внутри $\check{\tilde{M}}(\tilde{\sigma})$ к f (где $f_m : \tilde{M}_m \to M_m$,*

$m \geq 1$, $f : \tilde{M} \to M$ — соответствующие накрытия) в том смысле, что для любой области $\tilde{Q} \subset\subset \check{\tilde{M}}(\tilde{\sigma})$ содержащей фиксированную точку $\tilde{S} \in \check{\tilde{M}}(\tilde{\sigma})$ поверхности $\left(Q_m = f_m \circ \tilde{j}_m(\tilde{Q}), f_m \circ \tilde{j}_m(\tilde{S}), p|_{Q_m}\right)$ эквивалентны $\left(Q = f(\tilde{Q}), f(\tilde{S}), p|_Q\right)$ (m-as).

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теорем 9.6 и 9.7 можно считать, что отмеченные точки римановых поверхностей $\sigma_m, \tilde{\sigma}_m, \sigma$ и $\tilde{\sigma}$ не являются точками ветвления и, если $\{\sigma_m\} \to \sigma$ регулярно, то $P_m = j_m(P)$, где j_m — канонические вложения, индуцированные этой сходимостью, а если $\{\tilde{\sigma}_m\} \to \tilde{\sigma}$, то $\tilde{P}_m = \tilde{j}_m(\tilde{P})$, $m \geq 1$, и $\tilde{S} = \tilde{P}$.

A) Рассмотрим сначала случай, когда поверхности σ_m не имеют точек ветвления, $m \geq 1$.

Необходимость условия I). Пусть $\{\sigma_m\}$ сходится регулярно к σ. Рассмотрим любую поверхность $\tilde{\tau} \subset \subset\!\!\to \tilde{\sigma}$. Можно считать, что $\tilde{\tau} = \left(\tilde{Q}, \tilde{P}, \tilde{p}|_{\tilde{Q}}\right)$, где $\tilde{Q} \subset\subset \tilde{M}$. Так как p непрерывно и образ компакта при непрерывном отображении есть компакт, то $\tau \subset \subset\!\!\to \sigma$, где $\tau = (Q, P, p|_Q)$, $Q = p(\tilde{Q})$. Ясно, что $\tilde{Q}$ содержится в множестве $\{[\gamma]_M : \gamma$ — кривая в Q, соединяющая точку P с некоторой точкой $P'\}$. Действительно, если $\tilde{P}_1 \in \tilde{Q}$ и $\tilde{\gamma}_1$ — кривая в $\tilde{Q}$, соединяющая точки $\tilde{P}$ и $\tilde{P}_1$, то $\tilde{P}_1 = [\gamma_1]_M$, где $\gamma_1 = f(\tilde{\gamma}_1)$ — кривая в Q. Определим вложения $\tilde{j}_m : \tilde{\tau} \hookrightarrow \tilde{\sigma}_m$ по формуле $\tilde{j}_m([\gamma]_M) = [j_m(\gamma)]_{M_m}$. Это определение корректно в силу утверждения 1) леммы 10.3, и $\tilde{j}_m$ инъективны в силу утверждения 2) той же леммы. Очевидно, что $\tilde{j}_m$ непрерывны. Отсюда следует, что $\tilde{\sigma} \in \mathfrak{M}\{\tilde{\sigma}_m\}$.

Покажем, что $\tilde{\sigma}$ $\in$Ker$\{\tilde{\sigma}_m\}$. Пусть $\tilde{\tau} = (\tilde{q}, \tilde{S}, \tilde{\rho})$ — такая риманова поверхность над N, что существуют морфизмы $\tilde{q}_m : \tilde{\tau} \subset \subset\!\!\to \tilde{\sigma}_m$ (m-as). Достаточно установить, что $\tilde{\tau} \hookrightarrow \tilde{\sigma}$. Пусть $\tilde{Q}_m = \tilde{q}_m(\tilde{Q})$ (m-as). Без ограничения общности можно считать, что $\tilde{\tau}$ ограничена конечным числом аналитических кривых $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$, иначе рассмотрим компактное исчерпание поверхности $\tilde{\tau}$ такими поверхностями. Тогда каждая риманова поверхность $\left(\tilde{Q}_m, \tilde{P}_m, \tilde{p}|_{\tilde{Q}_m}\right)$ также ограничена кривыми $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$. Отсюда следует, что граница $\tilde{Q}_m$ в $\tilde{M}_m$ состоит из кривых $\Gamma_{m1}, \ldots, \Gamma_{mn}$, причем $\tilde{p}_m \circ \Gamma_{mi} = \Gamma_i$, $i = 1, \ldots, n$. В силу односвязности $\tilde{M}_m$ кривая Γ_{mi} разбивает $\tilde{M}_m$ на две части, по крайней мере одна из которых односвязна. Обозначим эту односвязную компоненту через $\tilde{Q}_{mi}$.

Ясно, что либо $\tilde{Q}_m \subset \tilde{Q}_{mi}$, либо $\overline{\tilde{Q}}_m \cap \overline{\tilde{Q}}_{mi} = |\Gamma_{mi}|$, и риманова поверхность $\tilde{\tau}_{mi} = \left(\tilde{Q}_{mi}, \tilde{p}_m|_{\tilde{Q}_{mi}}\right)$ ограничена в первом случае кривой γ_i, а во втором — кривой Γ_i^-. В силу леммы 7.2 и следствия 7.1 среди поверхностей $\tilde{\tau}_{mi}$ существует не более, чем конечное число различных (с точностью до эквивалентности). Поэтому, переходя в случае необходимости к подпоследовательности, можем считать, что $\tilde{\tau}_{mi}$ не зависит от m для каждого $i = 1, \ldots, n$. Если для некоторого i имеем $\tilde{Q}_m \subset \tilde{Q}_{mi}$ (m-as), то заменим $\tilde{\tau}$ на $\tilde{\tau}' = \left(\tilde{Q}_{mi}, \tilde{P}_m, \tilde{p}_m|_{\tilde{Q}_{mi}}\right) = \tilde{\tau}_{mi}(\tilde{P}_m)$. Если же для всех i имеем $\overline{\tilde{Q}}_m \bigcap \overline{\tilde{Q}}_{mi} = |\Gamma_{mi}|$, то пусть $\tilde{\tau}' = \left(\tilde{Q}'_m, \tilde{P}_m, \tilde{p}_m|_{\tilde{Q}'_m}\right)$, где $\tilde{Q}'_m = \tilde{Q}_m \bigcup \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} \tilde{Q}_{mi}\right)$ (m-as). И в том, и в другом случаях $\tilde{\tau}'$ не зависит от m, ограничена одной кривой, односвязна, содержит $\tilde{\tau}$ и компактно содержится во всех $\tilde{\sigma}_m$(m-as). Поэтому, заменяя в случае необходимости $\tilde{\tau}$ на $\tilde{\tau}'$, можем считать, что $\tilde{\tau}$ односвязна и ограничена одной аналитической кривой.

$$
\begin{tikzcd}
\tilde{\tau} \arrow[rr, "\tilde{q}_m"] \arrow[d, "f'"'] & & \tilde{\sigma}_m \arrow[d, "f_m"] \\
\tau \arrow[rr, "q_m"] \arrow[dr, "q"'] & & \sigma_m \\
& \sigma \arrow[ur, "j_m\ (\text{loc},\ m\text{-as})"'] &
\end{tikzcd}
$$

Диагр. 10.1

Более того, в силу леммы 7.4, переходя в случае необходимости к подпоследовательности, можем считать, что все поверхности $(Q_m, P_m, p_m|_{Q_m})$, где $Q_m = f_m(\tilde{Q}_m)$, эквивалентны некоторой фиксированной римановой поверхности $\tau = (Q, S, \rho)$ (m-as). Тогда определены вложения $q_m \subset \hookrightarrow \sigma_m$ (m-as), и так как $\{\sigma_m\}$ сходится регулярно к σ, то в силу следствия 8.2 существует морфизм $q : \tau \hookrightarrow \sigma$.

Ясно, что существует единственное отображение $f' : \tilde{Q} \to Q$ такое, что коммутативна диаграмма 10.1

Определим вложение $\tilde{q} : \tilde{\tau} \hookrightarrow \tilde{\sigma}$ следующим образом. Если $\tilde{T} \in \tilde{Q}$ и $\tilde{\gamma}$ — кривая в $\tilde{Q}$, соединяющая точку $\tilde{P}$ с точкой $\tilde{T}$, то полагаем $\tilde{q}(\tilde{P}) = [q \circ f'(\tilde{\gamma})]_M$.

Покажем, что q определено корректно. Если $\tilde{\gamma}_1$ и $\tilde{\gamma}_2$ — две кривые в $\tilde{Q}$, соединяющие точку $\tilde{P}$ с точкой $\tilde{T}$, то в силу односвязности $\tilde{Q}$ имеем $[\tilde{\gamma}_1]_{\tilde{Q}} = [\tilde{\gamma}_2]_{\tilde{Q}}$. Поэтому $[q \circ f'(\tilde{\gamma}_1)]_M = [q \circ f'(\tilde{\gamma}_2)]_M$. Ясно, что $\tilde{q}$ непрерывно. Покажем, наконец, что $\tilde{q}$ инъективно. Если кривая $\tilde{\gamma}_i$ соединяет $\tilde{P}$ с точкой $\tilde{T}_i$, $i = 1, 2$, причем $\tilde{q}(\tilde{T}_1) = \tilde{q}(\tilde{T}_2)$, то в силу коммутативности диаграммы 10.1 получаем

$$[f_m \circ \tilde{q}_m(\tilde{\gamma}_1)]_{M_m} = [j_m \circ q \circ f'(\tilde{\gamma}_1)]_{M_m} = (j_m)_\#(\tilde{q}(\tilde{T}_1)) =$$

$$= (j_m)_\#(\tilde{q}(\tilde{T}_2)) = [j_m \circ q \circ f'(\tilde{\gamma}_2)]_{M_m} = [f_m \circ \tilde{q}_m(\tilde{\gamma}_2)]_{M_m}.$$

По теореме о монодромии [88] кривые $q_m(\tilde{\gamma}_1)$ и $q_m(\tilde{\gamma}_2)$ оканчиваются в одной и той же точке поверхности $\tilde{\sigma}_m$. Следовательно, $\tilde{q}_m(\tilde{T}_1) = \tilde{q}_m(\tilde{T}_1)$ (m-as). Но $\tilde{q}_m$ инъективны, поэтому $\tilde{T}_1 = \tilde{T}_2$ и $\tilde{q}$ инъективно.

Это доказывает, что $\tilde{q} : \tilde{\tau} \hookrightarrow \tilde{\sigma}$. Следовательно, $\tilde{\sigma} \in$Ker$\{\tilde{\sigma}_m\}$. Так как это верно и для любой подпоследовательности $\{\tilde{\sigma}_{m_k}\}$ последовательности $\{\tilde{\sigma}_m\}$, то $\{\tilde{\sigma}_m\} \to \tilde{\sigma}$ в силу определения 8.1.

Необходимость условия II). Покажем, что $f_m \circ \tilde{j}_m$ сходятся равномерно внутри $\tilde{M}$ к f. Пусть $(\tilde{Q}_n)_{n \geq 1}$ — компактное исчерпание $\tilde{M}$, $\tilde{P} \in \tilde{Q}_n$, $\tilde{\tau}_n = \left(\tilde{Q}_n, \tilde{P}, \tilde{p}|_{\tilde{Q}_n}\right)$, $n \geq 1$. Тогда $\tilde{\tau}_n \subset \hookrightarrow \tilde{\sigma}$, и так как $\{\tilde{\sigma}_m\} \to \tilde{\sigma}$, $m \to \infty$, то $\tilde{j}_m|_{\tilde{Q}_n} : \tilde{\tau}_n \hookrightarrow \tilde{\sigma}_m$ (m-as). Рассуждая как при доказательстве необходимости условия I) теоремы с использованием диагонального процесса и переходя в случае необходимости к подпоследовательности $\{\tilde{\sigma}_{m_k}\}$, получаем, что существуют римановы поверхности $\tau_n = \left(Q_n, P, p|_{\tilde{Q}_n}\right) \hookrightarrow \sigma$ и непрерывные отображения $f'_n : \tilde{Q}_n \to Q_n$ такие, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\tilde{\tau}_n \arrow[r, "\tilde{j}_{m_k}|_{\tilde{Q}_n}"] \arrow[d, "f'_n"'] & \tilde{\sigma}_{m_k} \arrow[d, "f_{m_k}"] \\
\tau_n \arrow[r, "j_{m_k}|_{Q_n}"] & \sigma_{m_k}
\end{tikzcd}$$

Диагр. 10.2

для любого $n \geq 1$. При $l \geq n$ имеем $\tilde{Q}_n \subset \tilde{Q}_l$ и $f'_l|_{\tilde{Q}_n} = f'_n$. Действительно, из коммутативности диаграммы 10.2 следует, что

$$j_{m_k} \circ f'_l|_{\tilde{Q}_n} = f_{m_k} \circ \tilde{j}_{m_k}|_{\tilde{Q}_n} = j_{m_k} \circ f'_n$$

(m_k-as) и так как j_{m_k} инъективны, то $f'_l|_{\tilde{Q}_n} = f'_n$. Следовательно, на $\tilde{M}$ определено отображение $f' : \tilde{M} \to M$ такое, что $f'|_{\tilde{Q}_n} = f'_n$, $n \geq 1$.

Из коммутативности диаграммы 10.2 следует, что (m_k-as)

$$p \circ f'_n = p_{m_k} \circ j_{m_k} \circ f'_n = p_{m_k} \circ f_{m_k} \circ \tilde{j}_{m_k} = p_{m_k} \circ \tilde{j}_{m_k} = \tilde{p}|_{\tilde{Q}_n}.$$

Значит, $p \circ f' = \tilde{p}$. Так как $\tilde{M}$ односвязно и $f : (\tilde{M}, \tilde{P}) \to (M, P)$ — накрытие, то в силу [87], гл.2, §4, теорема 5, существует поднятие отображения $f' : (\tilde{M}, \tilde{P}) \to (M, P)$ на $\tilde{M}$ относительно f, т. е. такое непрерывное отображение $\tilde{f}' : (\tilde{M}, \tilde{P}) \to (\tilde{M}, \tilde{P})$, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
 & (\tilde{M}, \tilde{P}) \arrow[dr, "f"] & \\
(\tilde{M}, \tilde{P}) \arrow[ur, "\tilde{f}'"] \arrow[rr, "f'"] & & (M, P)
\end{tikzcd}$$

Диагр. 10.3

Тогда $\tilde{p} \circ \tilde{f}' = p \circ f \circ \tilde{f}' = p \circ f' = \tilde{p}$ и $\tilde{f}'(\tilde{P}) = \tilde{P}$. Отсюда с учетом следствия 6.2 из [65], гл. V, следует, что $\tilde{f}' : \tilde{M} \to \tilde{M}$ есть тождественное отображение. Значит, $f' = f \circ \tilde{f}' = f$ и в силу коммутативности диаграммы 10.2 имеем (m_k-as)

$$j_{m_k} \circ f|_{\tilde{Q}_n} = j_{m_k} \circ f'|_{\tilde{Q}_n} = j_{m_k} \circ f'_n|_{\tilde{Q}_n} = f_{m_k} \circ \tilde{j}_{m_k}|_{\tilde{Q}_n}, \ n \geq 1,$$

что означает, что подпоследовательность $f_{m_k} \circ \tilde{\tilde{j}}_{m_k}$ сходится внутри $\tilde{M}$ к f. Аналогично показывается, что любая подпоследовательность $\{\sigma_{m_k}\}$ содержит такую подпоследовательность $\{\sigma_{m'_k}\}$, для которой $p_{m'_k} \circ \tilde{\tilde{j}}_{m'_k}$ сходится внутри $\tilde{M}$ к f. Это означает, что $f_m \circ \tilde{\tilde{j}}_m$ сходится внутри $\tilde{\tilde{M}}$ к f и II) установлено.

Достаточность. Сначала отметим два простых факта, необходимых при доказательстве.

Лемма 10.4 *Пусть $\sigma_i = (M_i, P_i, p_i)$, $i = 1, 2$, — две римановы поверхности над N, и $f : (M_1, P_1) \to (M_2, P_2)$ — голоморфное отображение. Обозначим через $f(\sigma_1)$ риманову поверхность $\big(f(M_1), P_2, p|_{f(M_1)}\big)$. Тогда*

1) *если f инъективно, то $f(\sigma_1) = \sigma_1$;*

2) *если $\operatorname{ord}(P_1, \sigma_1) = 0$, $\sigma_1 = \cup_{\alpha \in A} \sigma_\alpha$ $(\operatorname{rel} \sigma_1)$ и морфизмы $j_\alpha : \sigma_\alpha \hookrightarrow \sigma_1$, $\alpha \in A$, а f инъективно на каждой из областей $j_\alpha(\sigma_\alpha)$, то $f(\sigma_1) = \cup_{\alpha \in A} \sigma_\alpha$ $(\operatorname{rel} \sigma_2)$.*

Перейдем теперь к доказательству достаточности. Пусть $(\tilde{\tau}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — компактное исчерпание σ, $\tilde{\tau}_n = \Big(\tilde{Q}_n, \tilde{P}, \tilde{p}|_{\tilde{Q}_n}\Big)$, $n \geq 1$. Тогда $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$, где $\tau_n = f(\tilde{\tau}_n) = (Q_n, P, p|_{Q_n})$, $n \geq 1$, — компактное исчерпание римановой поверхности σ. В силу условия II) теоремы поверхность $\tau_n = f(\tilde{\tau}_n)$ эквивалентна поверхностям $f_m \circ \tilde{\tilde{j}}_m(\tilde{\tau}_n)$ (m-as), поэтому $\tau_n \hookrightarrow \sigma_m$ (m-as). Отсюда следует, что $\sigma \in \mathfrak{M}\{\sigma_m\}$.

Покажем, что $\sigma \in \operatorname{Ker}\{\sigma_m\}$. Для этого нужно установить, что если $\tau \hookrightarrow \sigma_m$ (m-as), то $\tau \hookrightarrow \sigma$. Без ограничения общности можно считать, что τ представима в виде объединения конечного числа односвязных римановых поверхностей $\tau = \cup_{i=1}^{s} \tau_i$ $(\operatorname{rel} \tau)$, иначе рассмотрим компактное исчерпание τ такого типа поверхностями. Так как τ_i односвязны, то по теореме о монодромии $\tau_i \hookrightarrow \sigma_m$ (m-as), $i = 1, \ldots, s$. В силу условия I) теоремы $\{\tilde{\sigma}_m\} \to \tilde{\sigma}$, $m \to \infty$, поэтому $\tau_i \hookrightarrow \tilde{\sigma}$, $i = 1, \ldots, s$ в силу следствия 8.2. Пусть $\tilde{\tau} = \cup_{i=1}^{s} \tau_i$ $(\operatorname{rel} \tilde{\sigma}) = \Big(\tilde{Q}, \tilde{P}, \tilde{p}|_{\tilde{Q}}\Big) \hookrightarrow \tilde{\sigma}$. Рассмотрим компактное исчерпание $(\tau_{ni})_{n \geq 1}$ римановой поверхности τ_i, $i = 1, \ldots, s$. Тогда $\tilde{\tau}_n = \cup_{i=1}^{s} \tau_{ni}$ $(\operatorname{rel} \tilde{\sigma})$ — компактное исчерпание $\tilde{\tau}$. Используя условие II) теоремы, инъективность отображений f_m на Q_{ni}, где Q_{ni} — область в $\tilde{\sigma}$, соответствующая образу τ_{ni} при вложении $\tau_{ni} \hookrightarrow \tilde{\sigma}$, и инъективность $\tilde{\tilde{j}}_m$ внутри $\tilde{M}$, а также лемму 10.4, получаем, что риманова поверхность $\cup_{i=1}^{s}\tau_{ni}$ $(\mathrm{rel}\,\sigma)$= $f\,(\cup_{i=1}^{s}\tau_{ni}$ $(\mathrm{rel}\,\tilde{\sigma}))$ эквивалентна римановым поверхностям

$$f_m \circ \tilde{j}_m\,(\cup_{i=1}^{s}\tau_{ni}\ (\mathrm{rel}\,\tilde{\sigma})) = f_m\,(\cup_{i=1}^{s}\tau_{ni}\ (\mathrm{rel}\,\tilde{\sigma}_m)) =$$

$$= \cup_{i=1}^{s}\tau_{ni}\ (\mathrm{rel}\,\sigma_m) = \cup_{i=1}^{s}\tau_{ni}\ (\mathrm{rel}\,\tau) = \tau_n \quad (m\text{-as}).$$

Значит, $\tau_n \hookrightarrow \sigma$, а так как $(\tau_n)_{n\geq 1}$ — компактное исчерпание τ, то $\tau \hookrightarrow \sigma$. Итак, $\sigma \in \mathrm{Ker}\{\sigma_m\}$. Аналогично для любой подпоследовательности $\{\sigma_{m_k}\}$ последовательности $\{\sigma_m\}$ имеем $\sigma \in \mathrm{Ker}\{\sigma_{m_k}\}$. Значит, $\{\sigma_m\} \to \sigma$, причем регулярно в силу теоремы 9.6 и с сохранением связности в силу теоремы 10.1. Доказательство теоремы в случае A) закончено.

B) Отметим, что отображения $\check{f}_m = f_m|_{\check{M}_m(\sigma_m)} : \check{\tilde{\sigma}}_m \to \check{\sigma}_m$, $m \geq 1$, и $\check{f} = f|_{\check{M}(\sigma)} : \check{\tilde{\sigma}} \to \sigma$ являются накрытиями $\check{\sigma}_m$, $m \geq 1$ и $\check{\sigma}$ соответственно.

Необходимость. Пусть последовательность $\{\sigma_m\}$ сходится к σ с сохранением связности. Тогда $\{\check{\sigma}_m\}$ сходится к $\check{\sigma}$ регулярно и с сохранением связности в силу теорем 9.6 и 10.1. Построим универсальные накрытия $\tilde{f} : \tilde{\tilde{\sigma}} \to \check{\tilde{\sigma}}$, $\tilde{f}_m : \tilde{\tilde{\sigma}}_m \to \check{\tilde{\sigma}}_m$, $m \geq 1$, для $\check{\tilde{\sigma}}$ и $\check{\tilde{\sigma}}_m$, $m \geq 1$, соответственно. Тогда $\tilde{\tilde{f}} = \check{f} \circ \tilde{f} : \tilde{\tilde{\sigma}} \to \check{\sigma}$ и $\tilde{\tilde{f}}_m = \check{f}_m \circ \tilde{f}_m : \tilde{\tilde{\sigma}}_m \to \check{\sigma}_m$, $m \geq 1$, — накрытия, которые в силу односвязности $\tilde{\tilde{\sigma}}$ и $\tilde{\tilde{\sigma}}_m$, $m \geq 1$, являются универсальными. Имеем коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\tilde{\tilde{\sigma}} \arrow[dd, "\tilde{\tilde{f}}"'] \arrow[dr, "\tilde{f}"] & \\
& \check{\tilde{\sigma}} \arrow[dl, "\check{f}"] \\
\check{\sigma} &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\tilde{\tilde{\sigma}}_m \arrow[dd, "\tilde{\tilde{f}}_m"'] \arrow[dr, "\tilde{f}_m"] & \\
& \check{\tilde{\sigma}}_m \arrow[dl, "\check{f}_m"] \\
\check{\sigma}_m &
\end{tikzcd}$$

Диагр. 10.4

В силу доказанного в случае A), последовательность $\{\tilde{\tilde{\sigma}}_m\}$, где $\tilde{\tilde{\sigma}}_m = (\tilde{\tilde{M}}_m, \tilde{\tilde{P}}_m, \tilde{\tilde{p}}_m)$, $m \geq 1$, сходится к $\tilde{\tilde{\sigma}} = (\tilde{\tilde{M}}, \tilde{\tilde{P}}, \tilde{\tilde{p}})$, и отображения $\tilde{\tilde{f}}_m \circ \tilde{\tilde{j}}_m$ сходятся равномерно внутри $\tilde{\tilde{M}}_m$ к $\tilde{\tilde{f}}$, где $\tilde{\tilde{j}}_m$ — канонические вложения, индуцированные сходимостью $\{\tilde{\tilde{\sigma}}_m\}$ к $\tilde{\tilde{\sigma}}$.

Покажем, что отображения $\tilde{f}_m \circ \tilde{\tilde{j}}_m$ сходятся к $\tilde{f}$ равномерно внутри $\tilde{\tilde{M}}$. Пусть $\tilde{\tilde{\tau}} = \left(\tilde{\tilde{Q}}, \tilde{\tilde{P}}, \tilde{\tilde{p}}|_{\tilde{\tilde{Q}}}\right)) \subset \subset\!\!\!\to \tilde{\tilde{\sigma}}$. Без ограничения общности можно считать, что $\tilde{\tilde{\tau}}$ ограничена аналитической кривой и односвязна, поскольку $\tilde{\tilde{\sigma}}$ односвязна и существует компактное исчерпание ее такого типа областями. В силу леммы 7.4 существует подпоследовательность $\{m_k\}$ такая, что все поверхности $\tilde{\tau}_{m_k} = \tilde{f}_{m_k} \circ \tilde{\tilde{j}}_{m_k}(\tilde{\tilde{\tau}})$ эквивалентны некоторой фиксированной римановой поверхности $\tilde{\tau}$. Докажем, что $\tilde{\tau}$ эквивалентна поверхности $\tilde{f}(\tilde{\tilde{\tau}})$. Для этого достаточно установить, что для любых двух точек $\tilde{\tilde{T}}_1$, $\tilde{\tilde{T}}_2 \in \tilde{\tilde{Q}}$ равенство $\tilde{f}(\tilde{\tilde{T}}_1) = \tilde{f}(\tilde{\tilde{T}}_2)$ равносильно равенству

$$\tilde{f}_{m_k} \circ \tilde{\tilde{j}}_{m_k}(\tilde{\tilde{T}}_1) = \tilde{f}_{m_k} \circ \tilde{\tilde{j}}_{m_k}(\tilde{\tilde{T}}_2) \ (m_k\text{-as}). \tag{10.2}$$

В силу того что $f : \tilde{\sigma}_m \to \sigma_m$ есть универсальное накрытие, равенство (10.2) по теореме о монодромии имеет место тогда и только тогда, когда

$$[\tilde{\tilde{f}}_{m_k} \circ \tilde{\tilde{j}}_{m_k}(\tilde{\tilde{\gamma}}_1)]_{M_{m_k}} = [\tilde{\tilde{f}}_{m_k} \circ \tilde{\tilde{j}}_{m_k}(\tilde{\tilde{\gamma}}_2)]_{M_{m_k}} \ (m_k\text{-as}), \tag{10.3}$$

где $\tilde{\tilde{\gamma}}_1$ и $\tilde{\tilde{\gamma}}_2$ — некоторые кривые в $\tilde{\tilde{Q}}$, соединяющие точку $\tilde{\tilde{P}}$ с точками $\tilde{\tilde{T}}_1$ и $\tilde{\tilde{T}}_2$ соответственно. Так как $\tilde{\tilde{f}}_{m_k} \circ \tilde{\tilde{j}}_{m_k}$ сходятся равномерно к $\tilde{\tilde{f}}$ в $\tilde{\tilde{Q}}$, то (10.3) эквивалентно условию

$$[\tilde{j}_{m_k} \circ \tilde{\tilde{f}}_{m_k}(\tilde{\tilde{\gamma}}_1)]_{M_{m_k}} = [\tilde{j}_{m_k} \circ \tilde{\tilde{f}}_{m_k}(\tilde{\tilde{\gamma}}_2)]_{M_{m_k}} \quad (m_k\text{-as}). \tag{10.4}$$

Поскольку $\{\sigma_m\}$ сходится к с σ сохранением связности, то по лемме 10.3 равенство (10.4) эквивалентно равенству

$$[\tilde{\tilde{f}}_{m_k}(\tilde{\tilde{\gamma}}_1)]_M = [\tilde{\tilde{f}}_{m_k}(\tilde{\tilde{\gamma}}_2)]_M \quad (m_k\text{-as}). \tag{10.5}$$

Кривые $\tilde{f}(\tilde{\tilde{\gamma}}_1)$ и $\tilde{f}(\tilde{\tilde{\gamma}}_2)$ являются поднятиями кривых $\tilde{\tilde{f}}(\tilde{\tilde{\gamma}}_1)$ и $\tilde{\tilde{f}}(\tilde{\tilde{\gamma}}_2)$ на $\tilde{M}$ из точки $\tilde{P}$ относительно отображения $f : \tilde{\sigma} \to \sigma$, которое определяет универсальное накрытие. Поэтому (10.5) выполняется тогда и только тогда, когда концы кривых $\tilde{f}(\tilde{\tilde{\gamma}}_1)$ и $\tilde{f}(\tilde{\tilde{\gamma}}_2)$ совпадают, т. е. $\tilde{f}(\tilde{\tilde{T}}_1) = \tilde{f}(\tilde{\tilde{T}}_2)$.

Итак, мы показали, что из последовательности $\{\sigma_m\}$ можно выделить подпоследовательность $\{\sigma_{m_k}\}$ такую, что $\tilde{f}_{m_k} \circ \tilde{\tilde{\tilde{j}}}_{m_k}$ сходится к $\tilde{f}$ на $\tilde{\tilde{\tau}}$. Применяя в случае необходимости диагональный процесс, можно добиться того, чтобы $\tilde{f}_{m_k} \circ \tilde{\tilde{\tilde{j}}}_{m_k}$ сходились к $\tilde{f}$ равномерно внутри $\tilde{\tilde{M}}$. Аналогично показывается, что из любой подпоследовательности $\{\sigma_{m_k}\}$ можно выделить подпоследовательность $\{\sigma_{m'_k}\}$, обладающую таким же свойством. Значит, $\tilde{f}_{m_k} \circ \tilde{\tilde{\tilde{j}}}_{m_k}$ сходятся равномерно внутри $\tilde{\tilde{M}}$ к $\tilde{f}$.

Так как, кроме того, $\{\tilde{\tilde{\sigma}}_m\}$ сходится к $\tilde{\tilde{\sigma}}$, то, применяя уже доказанную достаточность условий I), II) теоремы 10.2 в случае A) к последовательности универсальных накрытий $\tilde{f}_m : \tilde{\tilde{\sigma}}_m \to \check{\tilde{\sigma}}_m$, получаем, что $\{\check{\tilde{\sigma}}_m\} \to \check{\tilde{\sigma}}$.

Докажем, что $f_m \circ \tilde{j}_m$ сходится к f равномерно внутри $\check{\tilde{M}}(\tilde{\sigma})$, где $\tilde{j}_m$ — канонические вложения, индуцированные сходимостью $\{\check{\tilde{\sigma}}_m\} \to$ $\to \check{\tilde{\sigma}}$. Пусть область $\tilde{Q} \subset\subset \check{\tilde{M}}(\tilde{\sigma})$, $\tilde{P} \in \tilde{Q}$ и $\tilde{\tau} = \left(\tilde{Q}, \tilde{P}, \tilde{p}|_{\tilde{Q}}\right)$. Без ограничения общности можно считать, что $\tilde{\tau} = \cup_{i=1}^{s} \tilde{\tau}_i$ $(\mathrm{rel}\,\tilde{\tau})$, где $\tilde{\tau}_i$ односвязны, $i = 1, \ldots, s$. Используя односвязность $\tilde{\tau}_i$ и условие $\tilde{\tau}_i \subset$ $\hookrightarrow \check{\tilde{\sigma}}$, с помощью теоремы 5.1 из [56], гл. V, получаем, что $\tilde{\tau}_i \subset \hookrightarrow \tilde{\sigma}_j$, $i = 1, \ldots, s$. Тогда $\tilde{\tilde{\tau}} = \cup_{i=1}^{s} \tilde{\tau}_i$ $(\mathrm{rel}\,\tilde{\tilde{\sigma}}) \subset \hookrightarrow \tilde{\tilde{\sigma}}$. Так как $\{\tilde{\tilde{\sigma}}_m\} \to \tilde{\tilde{\sigma}}$, то $\tilde{\tilde{\tau}} \subset$ $\hookrightarrow \tilde{\tilde{\sigma}}_m$ (m-as), и поскольку $\tilde{\tilde{f}}_m \circ \tilde{\tilde{\tilde{j}}}_m$ сходятся к $\tilde{\tilde{f}}$ равномерно внутри $\tilde{\tilde{M}}$, то поверхность $\tilde{\tilde{f}}(\tilde{\tilde{\tau}})$ эквивалентна $\tilde{\tilde{f}}_m \circ \tilde{\tilde{\tilde{j}}}_m(\tilde{\tilde{\tau}})$ (m-as). С другой стороны, $\tilde{\tilde{f}}(\tilde{\tilde{\tau}}) = f \circ \tilde{f}(\tilde{\tilde{\tau}}) = f(\tilde{\tau})$ и

$$\tilde{\tilde{f}}_m \circ \tilde{\tilde{\tilde{j}}}_m(\tilde{\tilde{\tau}}) = f_m \circ \tilde{f}_m \circ \tilde{\tilde{\tilde{j}}}_m(\tilde{\tilde{\tau}}) = f_m \circ \tilde{j}_m \circ \tilde{f}(\tilde{\tilde{\tau}}) = f_m \circ \tilde{j}_m(\tilde{\tau}) \ (m\text{-as}),$$

поэтому $f(\tilde{\tau}) = f_m \circ \tilde{j}_m(\tilde{\tau})$ (m-as) и $f_m \circ \tilde{j}_m$ сходится равномерно внутри $\check{\tilde{f}}(\sigma)$ к f.

Осталось установить, что $\{\tilde{\sigma}_m\}$ сходится к $\tilde{\sigma}$. Мы уже показали, что $\{\check{\tilde{\sigma}}_m\} \to \check{\tilde{\sigma}}$. Докажем, что $\tilde{\sigma} \in \mathfrak{S}_1\{\tilde{\sigma}_m\}$. Достаточно рассмотреть точки ветвления римановой поверхности $\tilde{\sigma}$ и проверить условие b) определения 9.1 для таких точек.

Пусть $\tilde{T} \in \tilde{M}$ — точка ветвления римановой поверхности $\tilde{\sigma}$ порядка $(n-1) > 0$ и $\tilde{j} : K_n = (E, 0, \psi) \subset \hookrightarrow \tilde{\sigma}(\tilde{T})$ — вложение односвязного обобщенного n-листного круга над N с единственной точкой ветвления в центре в поверхность $\tilde{\sigma}(\tilde{T})$. Можно считать, что замкнутая область $\overline{\tilde{j}(E)}$ не содержит других точек ветвления римановой поверхности $\tilde{\sigma}$, кроме $\tilde{T}$, ограничена жордановой кривой γ и настолько мала, что f инъективно на $\overline{\tilde{j}(E)}$. Тогда $j = f \circ \tilde{j} : K_n \subset \hookrightarrow \tilde{\sigma}(\tilde{T})$, где $T = f(\tilde{T})$, и $j(E)$ ограничена кривой $f(\gamma)$. Так как $f_m \circ \tilde{j}_m(\gamma) = j_m \circ f(\gamma)$, то $\tilde{j}_m(\gamma)$ является поднятием на $\tilde{M}_m$ кривой $j_m \circ f(\gamma)$. Поскольку $\{\sigma_m\}$ сходится регулярно к σ, кривая $j_m \circ f(\gamma)$ разбивает M_m на две части, причем та часть M_{m1}, которая лежит «слева» от этой кривой, является односвязным n-листным кругом (m-as). Следовательно, по теореме о монодромии любое поднятие кривой $j_m \circ f(\gamma)$ на $\tilde{M}$ является замкнутой кривой, причем та часть G_m, которая лежит «слева» от нее, гомеоморфно отображается на M_{m1} функцией $f_m|_{G_m}$, а значит, является односвязным n-листным кругом. Таким образом, $\tilde{\sigma} \in \mathfrak{S}_1\{\tilde{\sigma}_m\}$.

Покажем теперь, что $\tilde{\sigma} \in \mathrm{Ker}_1\{\tilde{\sigma}_m\}$. Пусть $\tilde{\tau} \in \mathfrak{S}_1\{\tilde{\sigma}_m\}$. Так как $\{\check{\tilde{\sigma}}_m\} \to \check{\tilde{\sigma}}$, то $\check{\tilde{\sigma}} \in \mathrm{Ker}\{\check{\tilde{\sigma}}_m\}$. Кроме того, $\check{\tilde{\tau}} \in \mathfrak{M}\{\check{\tilde{\sigma}}_m\}$, поэтому существует морфизм $\tilde{h} : \check{\tilde{\tau}} \subset\hookrightarrow \check{\tilde{\sigma}}$. Нам надо показать, что $\tilde{\tau} \subset\hookrightarrow \tilde{\sigma}$.

Пусть $\tilde{T} \in \tilde{M}$ — точка ветвления римановой поверхности $\tilde{\tau}$ порядка $(n-1) > 0$ и $\tilde{j} : K_n \subset \hookrightarrow \tilde{\tau}(\tilde{T})$ — некоторый морфизм, где $K_n = (E, 0, \psi)$ — некоторый односвязный обобщенный n-листный круг над N с единственной точкой ветвления в центре, в поверхность $\tilde{\sigma}(\tilde{T})$, причем замкнутая область $\overline{\tilde{j}(E)}$ не содержит других точек ветвления римановой поверхности $\tilde{\tau}$, кроме $\tilde{T}$, и ограничена жордановой кривой γ. Докажем, что $\tilde{h}(\gamma)$ ограничивает в $\tilde{\sigma}$ односвязный обобщенный n-листный круг, откуда будет следовать, что $\tilde{\tau} \subset\hookrightarrow \tilde{\sigma}$.

Пусть $\tilde{h}_m$ — канонические вложения, индуцированные включением $\check{\tilde{\tau}} \in \mathfrak{M}\{\check{\tilde{\sigma}}_m\}$. В силу того, что $\tilde{\tau} \in \mathfrak{S}\{\tilde{\sigma}_m\}$, с использованием условия b) определения 9.1 получаем, что $\tilde{h}_m(\gamma)$ ограничивает в $\tilde{\sigma}_m$ некоторый односвязный обобщенный n-листный круг (m-as). Поскольку $\tilde{j}_m \circ \tilde{h} = \tilde{h}_m$, кривая $\tilde{j}_m \circ \tilde{h}(\gamma)$ ограничивает в $\tilde{\sigma}_m$ некоторый односвязный обобщенный n-листный круг (m-as).

Предположим противное, т. е. что $\tilde{h}(\gamma)$ не является ориентированной границей односвязного обобщенного n-листного круга в $\tilde{\sigma}$. Тогда $\tilde{h}(\gamma)$ ограничивает некоторый проколотый обобщенный круг в $\tilde{\sigma}$. Поскольку $\tilde{\sigma}$ односвязна, то $[\tilde{h}(\gamma)]_{\tilde{M}} = e$. Значит, $(\tilde{h}(\gamma))^-$ является границей некоторой односвязной области $\tilde{G}$ в $\tilde{M}$, компактно содержащейся в $\tilde{M}$ (и, значит, $\tilde{M}$ конформно эквивалентна сфере Римана). Пусть $P_1, \ldots, P_k$ — точки ветвления поверхности $\tilde{\sigma}$, попадающие в $\tilde{G}$. Выберем обобщенные односвязные круги K_i, содержащие единственную точку ветвления P_i каждый, $i=1,\ldots,k$, лежащие внутри $\tilde{G}$ и имеющие попарно непересекающиеся замыкания. Удаляя замыкания этих кругов из $\tilde{G}$, получаем область $\tilde{Q}$, ограниченную кривой $(\tilde{h}(\gamma))^-$ и кривыми $\gamma_1,\ldots,\gamma_k$. Так как $\{\tilde{\sigma}_m\}\to\tilde{\sigma}$ и кривые γ_i^- ограничивают обобщенные односвязные круги K_i в $\tilde{\sigma}$, то, используя п. b) определения 9.1, получаем, что кривые $\tilde{j}_m(\gamma_i^-)$ также ограничивают обобщенные круги в $\tilde{\sigma}_m$, $i=1,\ldots,k$ (m-as). Эти круги односвязны, т. к. все $\tilde{\sigma}_m$ односвязны. Учитывая также, что $\tilde{j}_m(h(\gamma))$ ограничивает односвязный круг в $\tilde{\sigma}_m(m\text{-as})$, получаем, что $\tilde{M}_m$ может быть сконструирована из $(k+1)$-связной области $\overline{\tilde{j}_m(\tilde{Q})}$ приклеиванием односвязных кругов вдоль всех ее граничных компонент (m-as). Так как $\overline{\tilde{j}_m(\tilde{Q})}$ — область, подобная однолистной, то $\tilde{M}_m$ топологически, а значит, и конформно эквивалентна сфере $\overline{\mathbb{C}}$ (m-as).

Поскольку $f_m:\tilde{M}_m\to M_m$ — накрытие, $m\geq 1$, то по теореме 9.4 из [88], гл. 9, f_m — гомеоморфизм, значит, можно считать, что $\tilde{\sigma}_m=\sigma_m$ и f_m — тождественное отображение (m-as). Так как $f_m\circ\tilde{j}_m$ сходятся равномерно внутри $\check{\tilde{M}}(\tilde{\sigma})$ к f, то отсюда следует, что f инъективно, т. е. $\tilde{\sigma}=\sigma$. Наконец, так как $\{\sigma_m\}$ сходится регулярно к σ, то $\{\tilde{\sigma}_m\}$ сходится регулярно к $\tilde{\sigma}$. Это противоречит предположению, что $\tilde{\tau}\not\subset\!\!\!\to\tilde{\sigma}$. Значит, $\tilde{\sigma}$ — максимальный элемент в $\mathfrak{S}_1\{\tilde{\sigma}_m\}$, т. е. $\tilde{\sigma}\in\mathrm{Ker}_1\{\tilde{\sigma}_m\}$. Аналогично показывается, что $\tilde{\sigma}\in\mathrm{Ker}_1\{\tilde{\sigma}_{m_k}\}$ для любой подпоследовательности $\{\tilde{\sigma}_{m_k}\}$ последовательности $\{\tilde{\sigma}_m\}$.

Достаточность. Если $\{\tilde{\sigma}_m\}\to\tilde{\sigma}$, то $\{\check{\sigma}_m\}\to\check{\sigma}$ по теореме 9.8, и в силу уже доказанного случая A) теоремы (необходимость) $\{\tilde{\check{\sigma}}_m\}\to\tilde{\check{\sigma}}$ и отображения $\tilde{f}_m\circ\tilde{\check{j}}_m$ сходятся локально равномерно к $\tilde{f}$ в $\tilde{\check{\sigma}}$. Так как по условию $f_m\circ\tilde{j}_m$ сходятся равномерно внутри $\check{\sigma}$ к f, то отображения $\tilde{\tilde{f}}_m\circ\tilde{\check{j}}_m=f_m\circ\tilde{f}_m\circ\tilde{\check{j}}_m$ сходятся равномерно к $f\circ\tilde{f}=$ $=\tilde{\tilde{f}}$ внутри $\tilde{\check{\sigma}}$. Используя опять доказанное в п. A) (достаточность), получаем, что $\{\check{\sigma}_m\}\to\check{\sigma}$.

Докажем, что $\{\sigma_m\}$ сходится регулярно к σ. Пусть $T\in M$ — точка ветвления поверхности σ порядка $(n-1)$ и $j:K_n\hookrightarrow\sigma(T)$, где $K_n=(E,0,\psi)$ — обобщенный односвязный n-листный круг с единственной точкой ветвления в центре, причем $\overline{j(E)}$ не содержит других точек ветвления, кроме T, и ограничена кривой γ. Можно считать, что $\overline{j(E)}$ лежит в такой малой окрестности U точки T, которая просто накрыта, т. е. $f^{-1}(U)$ есть несвязная сумма областей U_i, причем $f_i = f|_{U_i} : U_i \to U$ — гомеоморфизм. Фиксируем номер i. Тогда $g = f_i^{-1} \circ j : K_n \hookrightarrow \tilde{\sigma}(\tilde{T})$, где $\tilde{T} = f_i^{-1}(T)$. Образ круга $g(E)$ ограничен кривой Γ, такой, что $f(\Gamma) = \gamma$, и является обобщенным односвязным n-листным кругом в $\tilde{\sigma}$ с единственной точкой ветвления в центре. Так как $\{\tilde{\sigma}_m\}$ сходится регулярно к $\tilde{\sigma}$, то $\tilde{j}_m(\Gamma)$ ограничивает в $\tilde{\sigma}_m$ некоторый обобщенный односвязный n-листный круг $(\tilde{G}_m, \tilde{p}_m|_{\tilde{G}_m})$ (m-as). Поскольку отображения $f_m \circ \tilde{j}_m$ сходятся к f равномерно внутри $\check{\tilde{M}}$ и f инъективно на $|\Gamma|$, то f_m инъективны на $\tilde{j}_m(|\Gamma)$ (m-as). Нетрудно проверить, что $f_m|_{\overline{\tilde{G}}_m} : \overline{\tilde{G}}_m \to f_m(\overline{\tilde{G}}_m)$ является накрывающим отображением для любого m (m-as). Так как $f_m|_{\overline{\tilde{G}}_m}$ однолистно на границе, то согласно лемме 3.4 из [56] $f_m|_{\overline{\tilde{G}}_m}$ — гомеоморфизм. Следовательно, $j_m(\gamma) = f_m \circ \tilde{j}_m(\Gamma)$ ограничивает в σ_m односвязный n-листный круг $(f_m(G_m), p|_{f_m(G_m)})$ (m-as). Отсюда следует, что $\sigma \in \mathrm{Ker}_1\{\sigma_m\}$. Поскольку это верно и для любой подпоследовательности $\{\sigma_{m_k}\}$, то $\{\sigma_m\}$ сходится регулярно к σ.

Наконец, покажем, что $\{\sigma_m\}$ сходится к σ с сохранением связности. Пусть γ — замкнутая кривая в $\check{\tilde{M}}$, такая, что $[\gamma]_M \neq e$, и $\tilde{\gamma}$ — поднятие γ на $\tilde{M}$. Тогда $\tilde{\gamma}$ не замкнута по теореме о монодромии [88]. Значит, в силу инъективности $\tilde{j}_m$ получаем, что $\tilde{j}_m(\tilde{\gamma})$ не замкнута (m-as). Но проекция кривой $\tilde{j}_m(\tilde{\gamma})$ на M_m есть $f_m \circ \tilde{j}_m(\tilde{\gamma}) = j_m \circ f(\tilde{\gamma}) = j_m(\gamma)$ (m-as) в силу условия II) теоремы. Применяя снова теорему о монодромии, получаем, что $[j_m(\gamma)]_{M_m} \neq e$. Это завершает доказательство теоремы.

Следствие 10.1 *При выполнении условий теоремы 10.2 имеет место равенство $f_m \circ \tilde{j}_m = j_m \circ f$ на компактах в $\check{M}(\tilde{\sigma})$* ($m$-as).

Теорема 10.3 *Пусть последовательность $\{\sigma_m\}$ римановых поверхностей $\sigma_m = (M_m, P_m, p_m)$, $m \geq 1$, над N сходится регулярно к римановой поверхности $\sigma = (M, P, p)$ и последовательность универсальных накрытий $\tilde{\sigma}_m = (\tilde{M}_m, \tilde{P}_m, \tilde{p}_m)$ сходится к односвязной римановой поверхности $\tilde{\sigma} = (\tilde{M}, \tilde{P}, \tilde{p})$. Тогда $\tilde{\sigma}$ является универсальным накрытием поверхности σ и последовательность $\{\sigma_m\}$ сходится к σ с сохранением связности.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно установить, что $\{\sigma_m\}$ сходится к σ с сохранением связности. Предположим противное. Тогда существует кривая γ в $\check{M}(\sigma)$, такая, что $[\gamma]_M \neq e$, и $[j_m(\gamma)]_{M_m} = e$ (m-as), где j_m — канонические вложения, индуцированные регулярной сходимостью $\{\sigma_m\}$ к σ. Без ограничения общности можно считать, что γ — простая замкнутая кривая в M. Тогда кривые $\gamma_m = j_m(\gamma)$ также простые и замкнутые в M_m, гомологичные нулю, поскольку они гомотопны точечным (m-as). Следовательно, либо γ_m, либо γ_m^- является границей некоторой односвязной области G_m в M_m. Можем считать, переходя в случае необходимости к подпоследовательности и меняя ориентацию γ, что ориентированной границей области G_m является γ_m. Более того, деформируя γ, можем добиться того, чтобы $P_m \in G_m$ (m-as).

Пусть $f_m : \tilde{M}_m \to M_m$ – накрывающие отображения, $m \geq 1$. Рассмотрим компоненту связности $\tilde{G}_m$ множества $f_m^{-1}(G_m)$, содержащую точку $\tilde{P}_m$. Так как $\overline{G_m}$ односвязна, то $\overline{\tilde{G}}_m$ отображается функцией f_m гомеоморфно на $\overline{G}_m$. Поэтому римановы поверхности $\tilde{\tau}_m = (\tilde{G}_m, \tilde{P}_m, \tilde{p}_m|_{\tilde{G}_m})$ и $\tau_m = (G_m, P_m, p_m|_{G_m})$ эквивалентны, и эту эквивалентность осуществляет морфизм $f|_{\tilde{G}_m} : \tilde{\tau}_m \hookrightarrow \tau_m$ (m-as).

Нетрудно проверить, что последовательность $\{\tau_m\}$ сходится регулярно к римановой поверхности τ, где $\tau = (G, P, p|_G)$, а G — компонента связности множества $M \backslash |\gamma|$, содержащая точку P. Так как $\tau_m = \tilde{\tau}_m \hookrightarrow \tilde{\sigma}_m$ и $\{\tilde{\sigma}_m\} \to \tilde{\sigma}$, то $\tau \hookrightarrow \tilde{\sigma}$. Если $\varphi : \tau \hookrightarrow \tilde{\sigma}$ — соответствующий морфизм, то граница $\varphi(G)$ в $\tilde{M}$ состоит из простой кривой $\tilde{\gamma}$. Эта кривая не может быть гомотопна точечной в $\overline{\phi(G)}$, так как иначе γ была бы гомотопна точечной в G. Однако $\tilde{M}$ односвязно, значит, односвязно и множество $\tilde{M} \backslash \varphi(G)$. Из определения сходимости $\{\tilde{\sigma}_m\}$ к $\tilde{\sigma}$ следует, что $\tilde{M}_m \backslash \tilde{G}_m$ односвязны (m-as). Следовательно, все $\tilde{M}_m$ конформно эквивалентны сфере Римана $\overline{\mathbb{C}}$ и f_m однолистны (m-as) (см., напр., [88], гл. 9). Тогда $\tilde{\sigma}_m = \sigma_m$ (m-as) и в силу единственности предела $\tilde{\sigma} = \sigma$. Поэтому σ является односвязной поверхностью, и любая кривая на ней, в частности γ, гомотопна точечной. Полученное противоречие доказывает теорему.

ГЛАВА 4. ПРОСТРАНСТВА РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ НАД СФЕРОЙ

§11. Метризация пространства римановых поверхностей над сферой, связанного с регулярной сходимостью к ядру

Рассмотрим пространство $\mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})$ пунктированных римановых поверхностей над сферой $\overline{\mathbb{C}}$, пополненное точками $\overline{\mathbb{C}}$ (вырожденными элементами), с топологией T, согласованной с регулярной сходимостью к ядру. Согласно теоремам 9.4 и 9.5 это пространство является компактным и удовлетворяет второй аксиоме счетности. По второй метризационной теореме П. С. Урысона (см., напр., [13]) пространство $\mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})$ метризуемо. В связи с этим представляет интерес описание в явном виде метрики пространства $\mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})$, согласованной с регулярной сходимостью к ядру, что и делается в настоящем параграфе. Отметим, что Б. П. Куфаревым в [53] была построена соответствующая метрика в пространстве подобластей плоскости.

Будем считать, что сфера $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ наделена метрикой с дифференциальным элементом $|dz|/(1+|z|^2)$. Таким образом, диаметр сферы как метрического пространства равен $\pi/2$. Если $\sigma = (M, P, p)$ (или $\overline{\sigma} = (\overline{M}, P, \overline{p})$) — риманова поверхность (соответственно риманова поверхность с краем) над $\overline{\mathbb{C}}$, то на $\sigma(\overline{\sigma})$ можно ввести метрику $d_\sigma(P_1, P_2) = \inf_\gamma l_{\overline{\mathbb{C}}}((p(\gamma))$, где точная нижняя грань берется по всем кривым, соединяющим точки P_1 и P_2 в M $(\overline{M})$, а $l_{\overline{\mathbb{C}}}((p(\gamma))$ — сферическая длина кривой $p(\gamma)$.

Пусть $\overline{M}_0$ — риманова поверхность с краем ∂M_0, состоящим из кривых $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ $(n \geq 1)$, $M_0 = \overline{M}_0 \backslash \partial M_0$, отображение $p_0 : \overline{M}_0 \to \overline{\mathbb{C}}$ голоморфно в M_0, непрерывно и локально инъективно в $\overline{M}_0$. Множество наборов $\overline{\tau}_0 = (\overline{M}_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_l, p_0)$, состоящих из римановых поверхностей над $\overline{\mathbb{C}}$ с краем, у которых l компонент края отмечены $(l \leq n)$, обозначим через $\mathfrak{A}$ (см. §9).

Пусть $\sigma = (M, P, p) \in \mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})$ и $\overline{\tau}_0 \in \mathfrak{A}$. Будем писать $j : \overline{\tau}_0 < < \sigma$, или просто $\overline{\tau}_0 < \sigma$, если существует непрерывное инъективное отображение $j : \overline{M}_0 \to M$, голоморфное в M_0, такое, что $p \circ j = p_0$ и для любого k, $1 \leq k \leq l$, кривая $j(\Gamma_k)$ разбивает M на две части, причем та часть M_k, которая не пересекается с $j(M_0)$, имеет в M компактное замыкание, $p(M_k) \neq \overline{\mathbb{C}}$, и при $k = 1$ поверхность M_1 односвязна и содержит точку P.

Напомним, что через $K_n(z_0,\varepsilon)$ мы обозначаем n-листный односвязный круг с центром в точке z_0 радиуса ε с реализацией $(E,0,f)$, где $E=\{|\zeta|<1\}$ (см. § 1).

Определение 11.1 *Пусть* $\varepsilon\in(0,\pi/4)$. *Будем писать* $j:\overline{\tau}_0\overset{\varepsilon}{<}\sigma$ *или просто* $\overline{\tau}_0\overset{\varepsilon}{<}\sigma$, *если*

a) *существует отображение* $j:\overline{\tau}_0<\sigma$, *для которого* $j(M_0)\subset\subset$ $\subset\subset M_\varepsilon(\sigma)$, *где*

$$M_\varepsilon(\sigma)=\{S\in M(\sigma)|\exists i:K_1(p(S),\varepsilon)\subset\!\subset\!\hookrightarrow\check{\sigma}(S),i(E)\subset\subset M\setminus\{P\}\};\quad(11.1)$$

b) *для любых двух точек* T_1, $T_2\in\overline{M}_0$ *существует кривая* γ, *соединяющая их в* $\overline{M}_0$, *длина которой строго меньше, чем* c/ε, *где* $c=\pi^2/2$; *граничные кривые* $\overline{M}_0$ *спрямляемы и длина каждой из них строго меньше, чем* c/ε;

c) *риманова поверхность* $(M_1,P,p|_{M_1})$ *является односвязным* k*-листным кругом (для некоторого* k*) с единственной точкой ветвления в центре, если* $k>1$, *радиуса* $r\in(\varepsilon,\pi/4)$.

Пусть $\mathfrak{A}(\sigma)=\{\overline{\tau}_0\in\mathfrak{A}\mid\overline{\tau}_0<\sigma\}$, $\mathfrak{A}_\varepsilon(\sigma)=\{\overline{\tau}_0\in\mathfrak{A}\mid\overline{\tau}_0\overset{\varepsilon}{<}\sigma\}$ при $\varepsilon\in(0,\pi/4)$, $\mathfrak{A}_\varepsilon(\sigma)=\emptyset$ при $\varepsilon\geq\pi/4$.

Лемма 11.1 *Пусть* $\overline{\tau}_0\in\mathfrak{A}$, $\sigma\in\mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})$ *и* $\varepsilon\in(0,\pi/4)$. *Тогда существует не более, чем конечное число различных отображений* $j:\overline{\tau}_0\overset{\varepsilon}{<}\sigma$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $j:\overline{\tau}_0\overset{\varepsilon}{<}\sigma$. Тогда в силу п. c) определения 11.1 риманова поверхность $(M_1,P,p|_{M_1})$ является k-листным односвязным кругом $K_k(\zeta_0,\varepsilon)$ радиуса r с центром в точке $\zeta_0=p(P)\in\overline{\mathbb{C}}$, причем $k=\mathrm{ord}(P,\sigma)$. Склеивая $\overline{\tau}_0$ и $\overline{K_k(\zeta_0,r)}$ вдоль граничных компонент, получаем риманову поверхность $\overline{\tau}'$ с краем над $\overline{\mathbb{C}}$, состоящим из $(n-1)$ компонент, соответствующих $\Gamma_2,\ldots,\Gamma_n$. Пусть τ' получается из $\overline{\tau}'$ отбрасыванием края. Очевидно, что τ' определяется по $\overline{\tau}_0$ единственным образом, в частности, не зависит от $j:\overline{\tau}_0\overset{\varepsilon}{<}\sigma$. При этом отображение $j|_{M_0}:M_0\to M$ продолжается до морфизма $j':\tau'\subset\!\hookrightarrow\sigma$, и соответствие $j\mapsto j'$ инъективно. Используя лемму 1.2, получаем, что существует не более, чем конечное число морфизмов $j':\tau'\subset\!\hookrightarrow\sigma$. Значит, число отображений $j:\overline{\tau}_0\overset{\varepsilon}{<}\sigma$ не более, чем конечно, и лемма 11.1 доказана.

Теперь установим ряд свойств множеств $\mathfrak{A}_\varepsilon(\sigma)$.

Лемма 11.2 *Пусть σ_1 и σ — две римановы поверхности над $\overline{\mathbb{C}}$, причем $\sigma_1 \hookrightarrow \sigma$. Тогда*

1) *если $0 < \delta < \varepsilon$, то $\mathfrak{A}_\varepsilon(\sigma) \subset \mathfrak{A}_\delta(\sigma) \subset \mathfrak{A}(\sigma)$;*
2) *если $\varepsilon > 0$, то $\mathfrak{A}_\varepsilon(\sigma_1) \subset \mathfrak{A}_\varepsilon(\sigma)$;*
3) *существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\mathfrak{A}_\varepsilon(\sigma) \neq \emptyset$.*

Доказательство. Утверждения 1) и 2) сразу следуют из определений. Установим справедливость утверждения 3). Пусть $\operatorname{ord}(P, \sigma) = k - 1$. Тогда в силу леммы 1.1 существуют $r \in (0, \pi/4)$ и морфизм $j : K_k(\zeta_0, r) \hookrightarrow \sigma = (M, P, p)$, где $\zeta_0 = p(P)$. Пусть $K_k(\zeta_0, r) = (E, 0, f)$ и $\overline{M}_0 = j(\{1/3 \leq |\zeta| \leq 2/3\}), \Gamma_1$ — образ кривой, обходящей окружность $\{|\zeta| = 1/3\}$ по часовой стрелке, при отображении j. Пусть $\overline{\tau}_0 = (M_0, \Gamma_1, p_0)$, где $p_0 = p|_{\overline{M}_0}$. Тогда k-листное кольцо с краем $\overline{\tau}_0 \in \mathfrak{A}$. Пусть l_1 — длина кривой Γ_1.

Так как $\overline{M}_0$ компактно в M, то $l_2 = \sup_{T_1, T_2 \in \overline{M}_0} \inf_\gamma l_\sigma(\gamma) < \infty$, где инфимум длин кривых берется по всем кривым, соединяющим T_1 с T_2 в $\overline{M}_0$. В силу компактности же $\overline{M}_0$ и того, что $M_0 \subset\subset M \backslash \{P\}$, имеем $\delta > 0$, где

$$\delta = \inf_{T \in \overline{M}_0} \sup\{r > 0 \mid \exists j : K_1(p(T), r) \hookrightarrow \sigma(T),\ j(E) \subset M \backslash \{P\}\} > 0.$$

Кривая Γ_1 разбивает σ на две части, причем та часть, которая лежит «справа» от Γ_1, является односвязным k-листным кругом $K_k(\zeta_0, \varepsilon')$ радиуса $\varepsilon' = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} r/3^k)$. Фиксируем число $\varepsilon \in (0, \pi/4)$ такое, что $\varepsilon < \min(c/l_1, c/l_2, \delta, \varepsilon')$. Тогда в силу выбора величин l_1, l_2, δ и ε' получаем, что $\overline{\tau}_0 \overset{\varepsilon}{<} \sigma$ т. е. $\overline{\tau}_0 \in \mathfrak{A}_\varepsilon(\sigma)$. Лемма 11.2 доказана.

Лемма 11.3 *Если $\overline{\tau}_0 \in \mathfrak{A}_\varepsilon(\sigma)$ для некоторого $\varepsilon \in (0, \pi/4)$, то существует $\widetilde{\varepsilon} \in (\varepsilon, \pi/4)$ такое, что $\overline{\tau}_0 \in \mathfrak{A}_{\tilde{\varepsilon}}(\sigma)$.*

Доказательство. Пусть $\overline{\tau}_0 \in \mathfrak{A}_\varepsilon(\sigma)$ и $j : \overline{\tau}_0 \overset{\varepsilon}{<} \sigma$. Нетрудно проверить, что множества $M_{\varepsilon'}$, определенные согласно (11.1), открыты для любого $\varepsilon' > 0$ и $M_\varepsilon = \cup_{\varepsilon' > \varepsilon} M_{\varepsilon'}$. Так как $j(\overline{M}_0)$ компактно в M, а множества $M_{\varepsilon'}$ убывают (в смысле включения), при возрастании ε', то существует $\varepsilon_1 \in (\varepsilon, \pi/4)$, такое, что $j(\overline{M}_0) \subset\subset M_{\varepsilon_1}$.

Пусть теперь T_1, T_2 — произвольные точки из $\overline{M}_0$, и $f(T_1, T_2) = \inf_\gamma l_\sigma(\gamma)$, где инфимум берется по всем кривым γ, соединяющим точки T_1 и T_2 в $\overline{M}_0$. Так как функция $f(T_1, T_2)$ непрерывна на компакте $\overline{M}_0 \times \overline{M}_0$, то по теореме Вейерштрасса точная нижняя грань $\varepsilon'' = \inf_{T_1,T_2}[c/f(T_1, T_2)]$ является на самом деле минимумом. В силу условия b) определения 11.1 для любых $T_1, T_2 \in \overline{M}_0$ справедливо неравенство $c/f(T_1, T_2) > \varepsilon$, поэтому $\varepsilon'' > \varepsilon$.

Пусть $\varepsilon_1'' = c/\min_{1\le i\le l} l_\sigma(\Gamma_i)$, где $l_\sigma(\Gamma_i)$ — длина кривой Γ_i в $\overline{\tau}_0$, $i = 1, \ldots, l$. Из определения 11.1 следует, что $\varepsilon_1'' < \varepsilon$. Выберем некоторое число ε_3 из интервала $(\varepsilon_1'', \varepsilon)$.

Наконец, пусть $\varepsilon_4 \in (\varepsilon, r)$, где r — число, описываемое в п. с) определения 11.1. Тогда число $\widetilde{\varepsilon} = \min_{1\le i\le 4} \varepsilon_i$ является искомым. Лемма 11.3 доказана.

Для двух римановых поверхностей $\sigma_i = (M_i, P_i, p_i)$, $i = 1$, 2, над $\overline{\mathbb{C}}$ определим *полуотклонение*

$$d(\sigma_1, \sigma_2) = \inf\{\varepsilon > 0 | \mathfrak{A}_\varepsilon(\sigma_1) \subset \mathfrak{A}(\sigma_2)\}. \tag{11.2}$$

Докажем вспомогательное утверждение, которое является основным инструментом для проверки неравенства треугольника для вводимой ниже метрики на пространстве $\mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})$.

Лемма 11.4 *Если* $d(\sigma_1, \sigma_2) = \varepsilon$, *то* $\mathfrak{A}_{\varepsilon+\delta}(\sigma_1) \subset \mathfrak{A}_\delta(\sigma_2)$ *для любого положительного* δ.

Доказательство. В силу определения множества $\mathfrak{A}_{\varepsilon+\delta}(\sigma_1)$ можно считать, что $\varepsilon + \delta < \pi/4$. Пусть $\overline{\tau}_0 = (M_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_l, p_0) \in \mathfrak{A}_{\varepsilon+\delta}(\sigma_1)$. В силу п. 1 леммы 11.2 имеем $\overline{\tau}_0 \in \mathfrak{A}_\varepsilon(\sigma_2)$, а так как $d(\sigma_1, \sigma_2) = \varepsilon$, то $\overline{\tau}_0 \in \mathfrak{A}(\sigma_2)$. Покажем, что $\overline{\tau}_0 \in \mathfrak{A}_{\delta'}(\sigma_2)$ для любого $\delta' \in (0, \delta)$.

Пусть отображение $j_1 : \overline{\tau}_0 \overset{\varepsilon+\delta}{<} \sigma_1$. Тогда согласно определения 11.1 $j_1(\overline{M}_0) \subset (M_1)_{\varepsilon+\delta}(\sigma_1)$, при этом одна из граничных компонент области $j_1(M_0)$, а именно $j_1(\Gamma_1)$ делит M_1 на две части — Q_1 и Q_2, причем одна из частей, скажем, $(Q_1, P_1, p_1|_{Q_1})$ является односвязным k-листным кругом радиуса $r > \varepsilon+\delta$ с единственной точкой ветвления в центре, если $k > 1$.

Для любой точки S из множества $j_1(\overline{M}_0)$ существует морфизм $i_S : K_1(p_1(S), \delta) \subset\hookrightarrow \check{\sigma}_1(S)$, поскольку

$$j_1(\overline{M}_0) \subset (M_1)_{\varepsilon+\delta}(\sigma_1) \subset\subset (M_1)_\delta(\sigma_1)$$

и в силу (11.1). Пусть $U = \cup_{S\in j_1(M_0)} \overline{i_S(E)}$. Нетрудно видеть, что U связно, не содержит P_1, и одна из граничных компонент U, которую обозначим через Γ_1', делит M_1 на две части Q_1' и Q_2', причем если Q_1' — та часть, которая содержит точку P_1, то риманова поверхность $(Q_1', P_1, p_1|_{Q_1'}$ является k-листным кругом радиуса $r_1 = r - \delta < \pi/4$. Отметим, что $r_1 > \varepsilon$.

Рассмотрим любую область Q_0 в U, ограниченную кривыми, и такую, что $\overline{Q}_0$ содержит множества $j_1(\overline{M}_0)$, $\overline{G} = \cup_{S\in j_1(|\Gamma_1|)}\overline{i_S(E)}$ и имеет вид $\overline{Q}_0 = \overline{G} \cup \left(\cup_{n=1}^{l}\overline{i_{S^{(n)}}(E)}\right)$, где $S^{(1)}, \dots, S^{(l)}$ — некоторые точки из $j_1(\overline{M}_0)$. (Отметим, что $(\overline{G}, p_1|_{\overline{G}})$ является замкнутым k-листным кольцом, если $r + \delta < \pi/2$, и замкнутым k-листным кругом, если $r + \delta \geq \pi/2$.) Тогда одной из граничных компонент $\overline{Q}_0$ является Γ_1'. Установим, что $\overline{\tau}' = (\overline{Q}_0, \Gamma_1', p_1|_{\overline{Q}_0})$ принадлежит множеству $\mathfrak{A}_\varepsilon(\sigma_1)$. Поскольку $r_1 > \varepsilon$, условие c) определения 11.1 выполнено. Осталось проверить условия a) и b).

Проверка условия a). Для любой точки $T \in \overline{Q}_0$ существует точка $S \in j(\overline{M}_0)$ такая, что $T \in \overline{i_S(E)}$. Так как $S \in j(\overline{M}_0) \subset\subset (M_1)_{\varepsilon+\delta}(\sigma_1)$, то существует морфизм $j_S : K_1(p_1(S), \varepsilon + \delta) \subset \hookrightarrow \check{\sigma}_1(S)$, такой, что $\overline{j_S(E)} \subset M_1 \backslash \{P_1\}$. Отображение p_1 непрерывно и инъективно на множестве $\overline{j_S(E)}$ и его проекция $p_1(\overline{j_S(E)})$ есть замкнутый сферический круг радиуса $(\varepsilon + \delta)$ с центром в $p_1(S)$. Так как $T \in \overline{j_S(E)}$, то сферическое расстояние от точки $p_1(S)$ до точки $p_1(T)$ не превосходит δ. Пусть B — сферический круг с центром в точке $p_1(T)$ радиуса ε. Тогда $\overline{B} \subset p_1(\overline{j_S(E)})$ и $\left(p_1|_{\overline{j_S(E)}}\right)^{-1}|_B : K_1(p_1(T), \varepsilon) \subset \hookrightarrow \check{\sigma}_1(T)$, где $K_1(p_1(T), \varepsilon) = (B, p_1(T), \mathrm{id}_B)$, $\mathrm{id}_B : B \to \overline{\mathbb{C}}$ — отображение, тождественное на B. Поскольку $P_1 \notin \left(p_1|_{\overline{j_S(E)}}\right)^{-1}(B)$, то отсюда следует, что точка T принадлежит множеству $(M_1)_\varepsilon(\sigma_1)$.

Проверка условия b). Пусть T_1, T_2 — любые точки из $\overline{Q}_0$. Выберем точки S_1, $S_2 \in j_1(\overline{M}_0)$ такие, что $T_i \in \overline{j_{S_i}(E)} \subset \overline{Q}_0$, $i = 1, 2$. Тогда точку T_1 можно соединить в $\overline{Q}_0$ с точкой S_i кривой γ_i, длина которой не превосходит δ, $i = 1, 2$. Так как $j_1 : \overline{\tau}_0 \overset{\varepsilon+\delta}{<} \sigma_1$ и отображение j_1 сохраняет проекции, то точку S_1 можно соединить в $\overline{Q}_0$ с точкой S_2 кривой γ, длина которой не превосходит $c/(\varepsilon + \delta)$ в силу определения 11.1, п. b). Рассмотрим кривую $\gamma_1\gamma\gamma_2^-$. Ее длина

$$l_\sigma(\gamma_1\gamma\gamma_2^-) \leq l_\sigma(\gamma_1) + l_\sigma(\gamma) + l_\sigma(\gamma_2^-) \leq 2\delta + c/(\varepsilon + \delta) =$$

$$= c/\varepsilon + 2\delta - c\delta/[\varepsilon(\varepsilon + \delta)] < c/\varepsilon + 2\delta - 4c\delta/\pi^2 = c/\varepsilon,$$

поскольку ε, $\varepsilon+\delta<\pi/2$ и $c=\pi^2/2$. Итак, кривая $\gamma_1\gamma\gamma_2^-$ соединяет в $\overline{Q}_0$ точки T_1 и T_2 и ее длина меньше c/ε.

Длина кривой Γ_1' равна

$$l_\sigma(\Gamma_1')=\pi k\sin[2(r-\delta)]<\pi k\sin 2r=l_\sigma(\Gamma_1)<c/(\varepsilon+\delta)<c/\varepsilon,$$

поскольку $0<r-\delta<r<\pi/4$. Значит, условие b) также выполнено.

Итак, $\overline{\tau}'\overset{\varepsilon}{<}\sigma_1$, т. е. $\overline{\tau}'\in\mathfrak{A}_\varepsilon(\sigma_1)$. Так как $j_1:\overline{\tau}_0\overset{\varepsilon+\delta}{<}\sigma_1$, то согласно определению $<$-вложимости кривая $j_1(\Gamma_k)$ при $1\le k\le l$ разбивает M_1 на две части, одна из которых — M_{1k} не пересекается с $i(M_0)$, односвязна и $p_1(M_{1k})\neq\overline{\mathbb{C}}$. Пусть $\Gamma_2',\ldots,\Gamma_t'$ — граничные кривые области Q_0 в M_1, которые содержатся в $\cup_{k=2}^t M_{1k}$. Тогда кривая Γ_i', $i=1,\ldots,t$, разбивает M_1 на две части, причем та часть M_{1i}', которая не пересекается с Q_0, является односвязной и $p_1(M_{1i}')\neq\overline{\mathbb{C}}$. Пусть $\overline{\tau}''=(\overline{Q}_0,p_1|_{\overline{Q}_0},\Gamma_1',\ldots,\Gamma_t')$. Сказанное выше означает, что $\overline{\tau}''\overset{\varepsilon}{<}\sigma_1$. Поскольку $d(\sigma_1,\sigma_2)=\varepsilon$, то существует отображение $g:\overline{\tau}''\overset{\varepsilon}{<}\sigma_2$. Тогда $g\circ j_1:\overline{\tau}_0<\sigma_2$.

Отображение $g\circ j_1$ зависит, вообще говоря, от выбора области $\overline{Q}_0$. Построим теперь возрастающую систему областей $(Q_n)_{n\ge1}$, обладающую теми же свойствами, что и область Q_0, таких, что $\overset{\circ}{U}=\cup_{i=1}^\infty Q_i$. Пусть $\overline{\tau}_i''=(\overline{Q}_i,p_1|_{\overline{Q}_i},\Gamma_1',\Gamma_{2i}',\ldots,\Gamma_{t(i),i})$ — элемент из $\mathfrak{A}(\sigma_1)$, построенный по Q_i аналогично тому, как $\overline{\tau}''$ было построено по области Q_0. Тогда $\overline{\tau}_i''\overset{\varepsilon}{<}\sigma_1$ и существует отображение $g_i:\overline{\tau}_i''<\sigma_2$. Значит, $g_i\circ j_1:\overline{\tau}_0<\sigma_2$, $i\ge1$. В силу леммы 11.1 среди отображений g_i, $i\ge1$, существует не более, чем конечное число различных. Поэтому, переходя в случае необходимости к подпоследовательности, можем считать, что $g_i\circ j_1$ не зависит от i. Обозначим $g_2=g_i\circ j_1$.

Докажем, что $j_2:\overline{\tau}_0\overset{\delta'}{<}\sigma_2$ для любого $\delta'<\delta$. Достаточно проверить условие a) определения 11.1, поскольку условия b) и c) очевидным образом выполнены. Пусть $T_1\in\overline{M}_0$, $j_1(T_1)=T$. Так как $K_1(p_1(T),\delta')\subset\hookrightarrow K_1(p_1(T),\delta)$, а $T\in j_1(\overline{M}_0)$, то существует морфизм $\psi:K_1(p_1(T),\delta')\subset\hookrightarrow\check{\sigma}_1(T)$, причем $\overline{\psi(E))}\subset\overset{\circ}{U}$. Компактное множество $\overline{\psi(E))}$ содержится в некотором Q_i при достаточно большом i. Тогда определен морфизм $g_i\circ\psi:K_1(p_1(T),\delta')\hookrightarrow\sigma_2$, причем вложение компактно, так как δ' — любое число, меньшее δ, и

$K_1(p_1(T), \delta') \subset \subset\!\!\to K_1(p_1(T), \delta'')$ при $\delta' < \delta'' < \delta$. Очевидно, что $g_i \circ \psi(E) \subset M_2 \backslash \{P_2\}$. Поэтому

$$S_1 = j_2(T_1) = g_i \circ j_1(T_1) = g_i(T) \in (M_2)_{\delta'}(\sigma_2).$$

Поскольку T_1 — любая точка из $\overline{M}_0$, то $\overline{j_2(M)} \subset (M_2)_{\delta'}(\sigma_2)$. Итак, $j_2 : \overline{\tau}_0 \overset{\delta'}{<} \sigma_2$, т. е. $\overline{\tau}_0 \in \mathfrak{A}_{\delta'}(\sigma_2)$ для любого $\delta' < \delta$.

Теперь заметим, что если $\overline{\tau}_0 \in \mathfrak{A}_{\varepsilon+\delta}(\sigma_1)$, то в силу леммы 11.3 $\overline{\tau}_0 \in \mathfrak{A}_{\varepsilon+\widetilde{\delta}}(\sigma_1)$ для некоторого $\widetilde{\delta} \geq \delta$. В силу доказанного выше $\overline{\tau}_0 \in \in \mathfrak{A}_{\delta'}(\sigma_2)$ для любого $\delta' < \widetilde{\delta}$, в частности, для $\delta' = \delta$ и лемма 11.4 доказана.

Введем теперь *метрику ρ на пространстве* $\mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})$ римановых поверхностей, пополненных точками $\overline{\mathbb{C}}$, над $\overline{\mathbb{C}}$. Пусть

$$d(\sigma) = \inf\{\varepsilon > 0 | \mathfrak{A}_\varepsilon(\sigma) = \emptyset\} \tag{11.3}$$

для любой поверхности $\sigma \in \mathrm{Ob}(\mathcal{RP})$.

Если $\sigma_i = (M_i, P_i, p_i) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{RP})$, $i = 1,\ 2$, то пусть

$$\rho(\sigma_1, \sigma_2) = \max\{d(\sigma_1, \sigma_2), d(\sigma_2, \sigma_1)\} + d_{\overline{\mathbb{C}}}(p_1(P_1), p_2(P_2)), \tag{11.4}$$

где $d(\sigma_i, \sigma_j)$ определено формулой (11.2).

Если $\sigma = (M, P, p) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{RP})$ и $z \in \overline{\mathbb{C}}$, то пусть

$$\rho(z, \sigma) = \rho(\sigma, z) = d(\sigma) + d_{\overline{\mathbb{C}}}(p(P), z), \tag{11.5}$$

где $d(\sigma)$ определено формулой (11.3).

Наконец, если $z_1,\ z_2 \in \overline{\mathbb{C}}$, то пусть

$$\rho(z_1, z_2) = d_{\overline{\mathbb{C}}}(z_1, z_2). \tag{11.6}$$

Справедлива

Теорема 11.1. *Отображение* $\rho : \mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}}) \times \mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}}) \to \mathbb{R}_+$ *определяет метрику на пространстве римановых поверхностей над* $\overline{\mathbb{C}}$, *пополненном точками сферы* $\overline{\mathbb{C}}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Симметрия и неотрицательность ρ следует из определений (11.4)–(11.6). Ясно также, что $\rho(x, x) = 0$ для любого $x \in \mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})$. Докажем, что если $\rho(x, y) = 0$, то $x = y$.

Если $\rho(z_1, z_2) = 0$, то $z_1 = z_2$. Если $\sigma \in \mathrm{Ob}(\mathcal{RP})$, $z \in \overline{\mathbb{C}}$, то в силу (11.3) величина $d(\sigma) > 0$, и из (11.5) следует, что $\rho(z,\sigma) = \rho(\sigma, z) \geq \geq d(\sigma) > 0$.

Поэтому осталось показать, что если $\rho(\sigma_1, \sigma_2) = 0$, $\sigma_i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{RP})$, $i = 1, 2$, то $\sigma_1 = \sigma_2$. В силу симметрии ρ достаточно установить, что $\sigma_1 \hookrightarrow \sigma_2$. Ясно, что в силу неотрицательности полуотклонения (11.2) и сферической метрики из условия $\rho(\sigma_1, \sigma_2) = 0$ следует, что $d_{\overline{\mathbb{C}}}(p_1(P_1), p_2(P_2)) = 0$, откуда $p_1(P_1) = p_2(P_2) = z_0$. Пусть $Q \subset\subset M_1, P_1 \in Q$, $\sigma = (Q, P_1, p_1|_Q)$, причем Q ограничена конечным числом кривых, лежащих в $\check{M}_1(\sigma_1)$. Пусть $P^{(1)} = P_1$, а $P^{(2)}, \ldots, P^{(s)}$ — точки ветвления поверхности σ_1, попадающие в Q и не совпадающие с P_1. Обозначим $k_i = \mathrm{ord}(P^{(i)}, \sigma_1)$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда существует такое малое $\varepsilon_0 \in (0, \pi/4)$, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ существуют морфизмы $j_i : K_{k_i}(z_i, \varepsilon) \hookrightarrow \sigma(P^{(i)})$, где $z_i = p_1(P^{(i)})$, $i = 1, \ldots, n$, причем $j_i(E)$ имеют попарно непересекающиеся в Q замыкания.

Пусть $Q' = Q \backslash \cup_{i=1}^{s} \overline{j_i(E)}$. Тогда Q' — область в M_1, ограниченная конечным числом кривых, причем s из них — $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s$ — соответствуют кругам $j_1(E), \ldots, j_s(E)$. Так как $\overline{Q}'$ не содержит точек ветвления σ_1 и компактна в M_1, то $\overline{Q}' \subset (M_1)_\delta(\sigma_1)$ для некоторого $\delta > 0$. Пусть l_1 — минимальная из длин кривых $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s$. В силу компактности Q' существует $l_2 > 0$ такое, что для любых точек $T_1, T_2 \in \overline{Q}'$ существует кривая, соединяющая в $\overline{Q}'$ точки T_1 и T_2, длина которой не превосходит l_2. Следовательно, $\overline{\tau} = \left(\overline{Q}', p_1|_{\overline{Q}'}, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_s\right) \overset{\varepsilon}{<} \sigma_1$ для любого ε', удовлетворяющего неравенству $0 < \varepsilon' < \min(\varepsilon, \delta, c/l_1, c/l_2)$, т. е. $\overline{\tau} \in \mathfrak{A}_{\varepsilon'}(\sigma_1)$. Так как $\rho(\sigma_1, \sigma_2) = 0$, то в силу неотрицательности полуотклонения (11.2) и сферической метрики имеем $d(\sigma_1, \sigma_2) = 0$. Значит, $d(\sigma_1, \sigma_2) < \varepsilon'$, поэтому из (11.2) следует, что $\overline{\tau} \in \mathfrak{A}(\sigma_2)$. Таким образом, существует отображение $j : \overline{\tau} < \sigma_2$.

Образ $j(\Gamma_i)$ разбивает σ_2 на две части, одна из которых — $M_2^{(i)}$ односвязна, не пересекается с $j(\overline{Q}')$, причем $p_2(M_2^{(i)}) \neq \overline{\mathbb{C}}$. Поскольку $p_2 \circ j(\Gamma_i) = p_1(\Gamma_i)$ есть k_i-кратно обходимая окружность C_i, то с использованием теоремы 4.1 нетрудно показать, что любая точка из внутренности D_i кривой C_i покрывается ровно k_i раз (с учетом кратностей ветвления) при отображении p_2, а точки из $\overline{\mathbb{C}} \backslash D_i$ не имеют прообразов при отображении $p_2|_{M_2^{(i)}}$. Отсюда следует, что $\sigma_2^{(i)} = \left(M_2^{(i)}, S_i, p_2|_{M_2^{(i)}}\right)$ есть односвязный k_i-листный круг с центром в точке $z_i = p_1(P_i)$, $i = 1, \dots, s$. Поскольку ε — любое сколь угодно малое число из интервала $(0, \varepsilon_0)$ и отображения $j = j_\varepsilon$ можно выбирать, как при доказательстве леммы 11.4, согласованно друг с другом в силу леммы 11.1, т. е. $j_{\varepsilon_1}|_{\overline{Q}'_{\varepsilon_2}} = j_{\varepsilon_2}$ при $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1$ (индекс ε означает, что соответствующий объект j или $\overline{Q}'$ строится для заданного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$), то нетрудно видеть, что $k_i = \mathrm{ord}(S^{(i)}, \sigma_2) + 1$, где $S^{(i)}$ — единственная точка из $M_2^{(i)}$, лежащая над точкой z_i. С использованием теоремы 5.2 нетрудно получить, что $V(\sigma_2^{(i)}) = k_i - 1$, т. е. $S^{(i)}$ — единственная точка ветвления поверхности $\sigma_2^{(i)}$, если $k_i > 0$. Очевидно, что $S^{(1)} = P_2$. Доказанное позволяет утверждать, что существуют морфизмы $j_i^{(2)} : K_{k_i}(z_i, \varepsilon) \hookrightarrow \sigma_2(S^{(i)})$, $i = 1, \dots, s$, и, если определить отображение $h : Q \to M_2$ таким образом, что $h = j$ на $Q \setminus \cup_{i=1}^{s} j_i(E)$, $h = j_i^{(2)} \circ (j_i)^{-1}$ на $j_i(E)$, $i = 1, \dots, s$, то h непрерывно, инъективно и является морфизмом $h : \sigma \hookrightarrow \sigma_2$. Итак, для любой поверхности $\sigma \subset \hookrightarrow \sigma_1$ имеем $\sigma \hookrightarrow \sigma_2$. Значит, $\sigma_1 \hookrightarrow \sigma_2$, что и требовалось доказать.

Для завершения доказательства теоремы 11.1 осталось установить справедливость неравенства треугольника. Неравенства

$$\rho(z_1, z_3) \le \rho(z_1, z_2) + \rho(z_2, z_3),$$

$$\rho(z_1, z_2) \le \rho(z_1, \sigma) + \rho(\sigma, z_2),$$

$$\rho(z_1, \sigma) \le \rho(z_1, z_2) + \rho(z_2, \sigma),$$

где z_1, z_2, $z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$, $\sigma \in \mathrm{Ob}(\mathcal{RP})$, следуют сразу из определения ρ, неотрицательности величины $d(\sigma)$ и неравенства треугольника для сферической метрики.

Докажем, что

$$\rho(\sigma_1, \sigma_2) \le \rho(\sigma_1, z) + \rho(z, \sigma_2), \tag{11.7}$$

$$\rho(\sigma_1, z) \le \rho(\sigma_1, \sigma_2) + \rho(\sigma_2, z), \tag{11.8}$$

$$\rho(\sigma_1, \sigma_3) \le \rho(\sigma_1, \sigma_2) + \rho(\sigma_2, \sigma_3). \tag{11.9}$$

Если $\mathfrak{A}_\varepsilon(\sigma_1) = \emptyset$, то $d(\sigma_1, \sigma_2) \le \varepsilon$ в силу (11.2). Поэтому $d(\sigma_1, \sigma_2) \le$ $\le d(\sigma_1)$. Аналогично $d(\sigma_1, \sigma_2) \le d(\sigma_2)$. Используя эти неравенства и неравенство треугольника для сферической метрики, получаем, что

$$\rho(\sigma_1, \sigma_2) = \max\{d(\sigma_1, \sigma_2), d(\sigma_2, \sigma_1)\} + d_{\overline{\mathbb{C}}}(p_1(P_1), p_2(P_2)) \le$$

$$\leq d(\sigma_1, z) + d(z, \sigma_2) + d_{\overline{\mathbb{C}}}(p_1(P_1), z) + d_{\overline{\mathbb{C}}}(z, p_2(P_2)) = \rho(\sigma_1, z) + \rho(z, \sigma_2),$$

откуда следует (11.7).

Докажем (11.8). Пусть $d(\sigma_1, \sigma_2) = \varepsilon$. В силу леммы 11.4 справедлива импликация $\mathfrak{A}_\delta(\sigma_2) = \emptyset \Rightarrow \mathfrak{A}_{\delta+\varepsilon}(\sigma_1) = \emptyset$. Следовательно, в силу (11.3)

$$d(\sigma_1) \leq \varepsilon + d(\sigma_2) = d(\sigma_1, \sigma_2) + \varepsilon \leq \max\{d(\sigma_1, \sigma_2), d(\sigma_2, \sigma_1)\} + d(\sigma_2).$$

Складывая эти неравенства с неравенством треугольника

$$d_{\overline{\mathbb{C}}}(p_1(P_1), z) \leq d_{\overline{\mathbb{C}}}(p_1(P_1), p_2(P_2)) + d_{\overline{\mathbb{C}}}(p_2(P_2), z),$$

получаем (11.8).

Наконец, установим справедливость неравенства (11.9). Обозначим $d(\sigma_1, \sigma_2) = \varepsilon$, $d(\sigma_2, \sigma_3) = \delta$. Докажем, что $d(\sigma_1, \sigma_3) \leq \varepsilon + \delta$. Пусть $\overline{\tau}_0 \in \mathfrak{A}_{\varepsilon+\delta}(\sigma_1)$. Так как $d(\sigma_1, \sigma_2) = \varepsilon$, то по лемме 11.4 $\overline{\tau}_0 \in \mathfrak{A}_\delta(\sigma_2)$, откуда с учетом равенства $d(\sigma_2, \sigma_3) = \delta$ следует, что $\overline{\tau}_0 \in \mathfrak{A}(\sigma_3)$. Итак, $d(\sigma_1, \sigma_3) \leq \varepsilon + \delta \leq A$, где

$$A = \max\{d(\sigma_1, \sigma_2), d(\sigma_2, \sigma_1)\} + \max\{d(\sigma_2, \sigma_3), d(\sigma_3, \sigma_2)\}.$$

Так как аналогичная оценка справедлива и для $d(\sigma_3, \sigma_1)$, то

$$\max\{d(\sigma_1, \sigma_3), d(\sigma_3, \sigma_1)\} \leq A,$$

откуда с использованием неравенства треугольника в $\overline{\mathbb{C}}$ для точек $p_i(P_i)$, $i = 1$, 2, 3, следует неравенство (11.9). Теорема 11.1 доказана.

§12. Согласованность метрики со сходимостью к ядру

Теперь докажем, что введенная в §11 метрика ρ согласована с регулярной сходимостью к ядру. Предварительно установим ряд вспомогательных утверждений.

Пусть $\varepsilon \in (0, \pi/2)$, точки $z_1, \ldots, z_n \in \overline{\mathbb{C}}$. Через $\mathcal{M}(z_1, \ldots, z_n; \varepsilon)$ обозначим множество римановых поверхностей $\sigma = (M, P, p)$ над $\overline{\mathbb{C}}$, обладающих свойством: существуют точки $P_1, \ldots, P_n$ в M, где $P_1 = P$, и морфизмы $i_k : K_1(z_k, \varepsilon) \hookrightarrow \sigma(P_k)$ такие, что $i_k(E) \cap i_{k+1}(E) \neq \emptyset$, $k = 1, \ldots, n-1$, и $M = \cup_{k=1}^{n} i_k(E)$. В силу леммы 7.3 множество $\mathcal{M}(z_1, \ldots, z_n; \varepsilon)$ не более, чем конечно. Точки $P_1, \ldots, P_n$ назовем *базисными точками* для σ.

Лемма 12.1 *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ и*

$$\sigma_m = (M_m, P_m, p_m) \in \mathcal{M}(z_1^{(m)}, \ldots, z_n^{(m)}; \varepsilon), \quad m \geq 1,$$

где $z_l^{(m)}$ — такие точки, что

$$\widetilde{\varepsilon} = \sup_{m \geq 1, 1 \leq l \leq n-1} d_{\overline{\mathbb{C}}}(z_l^{(m)}, z_{l+1}^{(m)}) < \varepsilon. \tag{12.1}$$

Тогда для любого $\delta \in (\widetilde{\varepsilon}, \varepsilon)$ существует $\sigma \in \mathcal{M}(z_1, \ldots, z_n; \varepsilon)$, где z_i — некоторые точки из $\overline{\mathbb{C}}$, $i = 1, \ldots, n$, такая, что $\sigma \in \mathfrak{S}\{\sigma_{m_k}\}$ для некоторой подпоследовательности $\{\sigma_{m_k}\}$ последовательности $\{\sigma_m\}$, причем если $P_1^{(m)}, \ldots, P_n^{(m)}$ — базисные точки поверхности σ_m, $m \geq 1$, а $P_1, \ldots, P_n$ — базисные точки σ, и j_{m_k} — канонические вложения, индуцированные включением $\sigma \in \mathfrak{S}\{\sigma_{m_k}\}$, то расстояние между точками $j_{m_k}(P_l)$ и $P_l^{(m_k)}$ в σ_{m_k} стремится к нулю при $k \to \infty$ для любого $l = 1, \ldots, n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{\sigma_{m_k}\}$ — такая подпоследовательность, что все последовательности $\{z_l^{(m_k)}\}$ сходятся в $\overline{\mathbb{C}}$ и $z_l = \lim_{k\to\infty} z_l^{(m_k)}$, $l = 1, \ldots, n$. Фиксируем $\delta \in (\widetilde{\varepsilon}, \varepsilon)$. При достаточно больших m_k расстояние $d_{\overline{\mathbb{C}}}(z_l^{(m_k)}, z_l) < \varepsilon + \delta$, $l = 1, \ldots, n$. Значит, существуют морфизмы

$$\varphi_l^{(m_k)} : K_1(z_l, \delta) \hookrightarrow K_1(z_l^{(m_k)}, \varepsilon)(S_l),$$

где S_l — точка из $K_1(z_l^{(m_k)}, \varepsilon)$, лежащая над точкой z_l, $l = 1, \ldots, n$. Пусть $j_l^{(m_k)} : K_1(z_l^{(m_k)}, \varepsilon) \hookrightarrow \sigma_{m_k}(P_l^{(m_k)})$, тогда

$$\psi_l^{(m_k)} = j_l^{(m_k)} \circ \varphi_l^{(m_k)} : K_1(z_l, \delta) \hookrightarrow \sigma_{m_k}(S_l^{(m_k)}),$$

где $S_l^{(m_k)} = j_l^{(m_k)}(S_l)$, $l = 1, \ldots, n$.

Так как $d_{\overline{\mathbb{C}}}(z_l, z_{l+1}) = \lim_{k\to\infty} d_{\overline{\mathbb{C}}}(z_l^{(m_k)}, z_{l+1}^{(m_k)}) \le \widetilde{\varepsilon} < \delta$ в силу (12.1), $l = 1, \ldots, n-1$, то $d_{\overline{\mathbb{C}}}(z_l^{(m_k)}, z_{l+1}^{(m_k)}) < \delta$ (m_k-as). Следовательно, существуют точки $\zeta_l^{(m_k)} \in p_{m_k}\left(\psi_l^{(m_k)}(E)\right) \cap p_{m_k}\left(\psi_{l+1}^{(m_k)}(E)\right) \subset$ $\subset p_{m_k} \circ j_l^{(m_k)}(E) \cap p_{m_k} \circ j_{l+1}^{(m_k)}(E)$, $l = 1, \ldots, n-1$. Поскольку пересечение $j_l^{(m_k)}(E) \cap j_{l+1}^{(m_k)}(E) \ne \emptyset$, $l = 1, \ldots, n-1$, отображение p_{m_k} инъективно на $j_k(E)$, $k = 1, \ldots, n$, и пересечение римановых поверхностей в силу предложения 1.2 не зависит от объемлющей поверхности, то существует точка $T_l^{(m_k)} \in j_l^{(m_k)}(E) \cap j_{l+1}^{(m_k)}(E)$ такая, что $p_{m_k}(T_l^{(m_k)}) = \zeta_l^{(m_k)}$, $l = 1, \ldots, n-1$ (m_k-as).

Пусть

$$M_{m_k}^{(\delta)} = \bigcup_{l=1}^{n} \psi_l^{(m_k)}(E), \quad p_{m_k}^{(\delta)} = p_{m_k}|_{M_m^{(\delta)}}.$$

Тогда $\sigma_{m_k}^{(\delta)} = \left(M_{m_k}^{(\delta)}, S_1^{(m_k)}, p_{m_k}^{(\delta)}\right)$ является римановой поверхностью из множества $\mathcal{M}(z_1, \ldots, z_n; \delta)$. Поскольку это множество конечно, то, переходя в случае необходимости к подпоследовательности, можем считать, что $\sigma_{m_k}^{(\delta)} = \sigma^{(\delta)}$ не зависит от m_k.

Ясно, что $j_{m_k} : \sigma^{(\delta)} \hookrightarrow \sigma_{m_k}(S_1^{(m_k)})$ для некоторых морфизмов j_{m_k}, причем базисные точки поверхности $\sigma^{(\delta)}$ переходят при отображении j_{m_k} в точки $S_l^{(m_k)}$, расстояние от которых до точек $P_l^{(m_k)}$ стремится к нулю при $m_k \to \infty$, $l = 1, \ldots, n$. Отсюда следует, что $\sigma^{(\delta)} \in \mathfrak{S}\{\sigma_{m_k}\}$ и лемма 12.1 доказана.

Лемма 12.2 *Существует константа L, зависящая только от ε и обладающая свойством: если $\sigma \in \mathrm{Ob}(\mathcal{RP})$ и $\overline{\tau}_0 \in \mathfrak{A}_\varepsilon(\sigma)$, то число листов $\overline{\tau}_0$ над любой точкой $z \in \overline{\mathbb{C}}$ не превосходит L.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное. Тогда

1) существует $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ и последовательности $\{\overline{\tau}_{0m}\}$ и $\{\sigma_m\}$, где $\overline{\tau}_{0m} = (\overline{M}_{0m}, \overline{p}_{0m}, \Gamma_{1m}, \ldots, \Gamma_{n(m),m})$, $\sigma_m = (M_m, P_m, p_m)$, $m \ge 1$,

такие, что для некоторых отображений φ_m имеем $\varphi_m : \overline{\tau}_{0m} \overset{\varepsilon}{<} \sigma_m$, $m \geq 1$;

2) существуют попарно различные точки $S_{m1}, .., S_{mk(m)}$ в $\overline{M}_{0m}$, такие, что $\overline{p}_{0m}(S_{mj})$ не зависит от j, $j = 1, \ldots, k(m)$;

3) $k(m)$ монотонно стремится к бесконечности при $m \to \infty$.

Для любого l, $2 \leq l \leq k(m)$, в силу определения 11.1 существует кривая γ_{ml}, соединяющая точки S_{m1} и S_{ml}, длина которой не превосходит C/ε. Выберем на кривой γ_{ml} точки $T_{m1}^{(l)}, \ldots, T_{mt}^{(l)}$, где $t + [2C/\varepsilon^2] + 1$, расположенные в порядке возрастания второго нижнего индекса при обходе γ_{ml} так, чтобы $T_{m1}^{(l)} = S_{m1}, T_{mt}^{(l)} = S_{ml}$ и длина дуги кривой γ_{ml} между точками $T_{mk}^{(l)}$ и $T_{m,k+1}^{(l)}$ была меньше $\varepsilon/2, k = 1, \ldots, t$.

Пусть $\widetilde{T}_{mk}^{(l)} = \varphi_m(T_{mk}^{(l)})$, $z_{mk}^{(l)} = \overline{p}_{0m}(T_{mk}^{(l)})$, $1 \leq l \leq k(m)$, $m \geq 1$, $l = 1, \ldots, t$. Так как $\widetilde{T}_{mk}^{(l)} \in \varphi_m(\overline{M}_{0m})$ и $\varphi_m : \overline{\tau}_{0m} \overset{\varepsilon}{<} \sigma_m$, то в силу п. b) определения 11.1 существуют морфизмы $i_{mk}^{(l)} : K_1(z_{mk}^{(l)}, \varepsilon) \hookrightarrow \sigma_m(\widetilde{T}_{mk}^{(l)})$. Так как расстояние между точками $T_{mk}^{(l)}$ и $T_{m,k+1}^{(l)}$ меньше $\varepsilon/2$, то $i_{mk}^{(l)}(E) \cap i_{m,k+1}^{(l)}(E) \neq \emptyset$, $k = 1, \ldots, t-1$, $2 \leq l \leq k(m)$, $m \geq 1$. Для любого натурального $l > 1$ существует m_0 такое, что $k(m) \geq l$ при $m \geq m_0$. Значит, при $m \geq m_0$ определена поверхность $\xi_m^{(l)} = (M_m^{(l)}, \widetilde{T}_{m1}^{(l)}, p_m^{(l)}) \in \mathcal{M}(z_{m1}^{(l)}, \ldots, z_{mt}^{(l)}; \varepsilon)$, где

$$M_m^{(l)} = \cup_{k=1}^t i_{mk}^{(l)}(E), \quad p_m^{(l)} = p|_{M_m^{(l)}}.$$

Очевидно, что

$$\sup_{m \geq m_0,\, 1 \leq k \leq t} d_{\overline{\mathbb{C}}}(z_{mk}^{(l)}, z_{m,k+1}^{(l)}) \leq \varepsilon/2 < \varepsilon. \tag{12.2}$$

В силу леммы 12.1, переходя в случае необходимости к подпоследовательности с использованием диагонального процесса, можем считать, что

a1) $z_{mk}^{(l)} \to z_k^{(l)} \in \overline{\mathbb{C}}$ при $m \to \infty$, $1 \leq k \leq t$, $l \geq 2$;

a2) существует риманова поверхность $\xi^{(l)} \in \mathcal{M}(z_1^{(l)}, \ldots, z_n^{(l)}; \delta)$, такая, что $\xi^{(l)} \in \mathfrak{S}\{\xi_m^{(l)}\}$;

a3) если $P_i^{(l)}$, $i = 1, \ldots, t$, — базисные точки поверхности $\xi^{(l)}$, а $j_m^{(l)}$ — канонические вложения, индуцированные включением $\xi^{(l)} \in$

$\in \mathfrak{S}\{\xi_m^{(l)}\}$, то расстояние между точками $j_m^{(l)}(P_i^{(l)})$ и $\widetilde{T}_{mi}^{(l)}$ стремится к нулю при $m \to \infty$, $1 \le k \le t$, $l \ge 2$.

В частности, стремится к нулю расстояние между точками $j_m^{(l)}(P_1^{(l)})$ и $\widetilde{T}_{m1}^{(l)} = \varphi_m(S_{m1})$, а также между $j_m^{(l)}(P_t^{(l)})$ и $\widetilde{T}_{mt}^{(l)} = \varphi_m(S_{ml})$. Отметим, что в силу (12.2)

$$d_{\overline{\mathbb{C}}}(z_k^{(l)}, z_{k+1}^{(l)}) = \lim_{m\to\infty} d_{\overline{\mathbb{C}}}(z_{mk}^{(l)}, z_{m,k+1}^{(l)}) \le \varepsilon/2 < \varepsilon, \quad 1 \le k \le t,\ l \ge 2.$$

Применяя еще раз лемму 12.1, на этот раз к последовательности $\{\xi^{(m)}\}$, и переходя в случае необходимости к подпоследовательности, заключаем, что существуют такие $\widetilde{\delta} \in (\varepsilon/2, \delta)$ и риманова поверхность $\xi \in \mathcal{M}(z_1, \dots, z_t; \widetilde{\delta})$, что

b1) $\xi \in \mathfrak{S}\{\xi^{(m)}\}$;

b2) если $P_1, \dots, P_t$ — базисные точки поверхности ξ, а ψ_m — канонические вложения, индуцированные включением b1), то расстояние между точками $\psi_m(P_k)$ и $P_k^{(m)}$ стремится к нулю при $m \to \infty$, $1 \le k \le t$.

Рассмотрим любую простую кривую γ в ξ, соединяющую точки P_1 и P_t. Так как носитель $|\gamma|$ компактен в ξ и ξ не содержит точек ветвления, то (l-as) определена кривая $\psi_l(\gamma)$, которая компактно лежит в поверхности $\xi^{(l)}$, также не содержащей точек ветвления. Поэтому при достаточно больших фиксированных l определена (m-as) кривая $\eta_{ml} = j_m^{(l)} \circ \psi_l(\gamma)$, лежащая в $M_m^{(l)} \subset M_m$. В силу условия b2) концы $\psi_l(P_1)$ и $\psi_l(P_2)$ кривой $\psi_l(\gamma)$ сколь угодно близки к точкам $P_1^{(l)}$ и $P_t^{(l)}$ при $l \to \infty$. Значит, концы кривой η_{ml} сколь угодно близки к точкам $j_m^{(l)}(P_1^{(l)})$ и $j_m^{(l)}(P_t^{(l)})$, а те, в свою очередь, в силу условия a3) — к точкам $\varphi_m(S_{m1}) = \widetilde{T}_{m1}^{(l)}$ и $\varphi_m(S_{ml}) = \widetilde{T}_{mt}^{(l)}$ при достаточно больших m и l .

Поскольку σ_m содержит однолистные круги радиуса ε с центром в точках $\varphi_m(S_{m1})$ и $\varphi_m(S_{ml})$, то, соединяя начало и конец кривой η_{ml} с этими точками геодезическими (m, l-as), получаем кривую $\widetilde{\eta}_{ml}$ в σ_m, соединяющую точки $\varphi_m(S_{m1})$ и $\varphi_m(S_{ml})$. Отметим, что проекции кривых $\widetilde{\eta}_{ml}$ на $\overline{\mathbb{C}}$ не зависят от l. Пусть $\gamma_m = p_m(\widetilde{\eta}_{ml})$. Так как кривые $\widetilde{\eta}_{ml}$ не проходят через точки ветвления, то, в силу единственности поднятия кривых на неразветвленные накрытия, кривые $\widetilde{\eta}_{ml}$ обязаны совпадать между собой при $2 \le l \le k(m)$. Значит, конечные точки этих кривых — $\varphi_m(S_{ml})$ — также совпадают, $2 \le l \le k(m)$. Но точки S_{ml} попарно различны, $2 \le l \le k(m)$, поэтому это противоречит инъективности отображения φ_m. Лемма 12.2 доказана.

Следствие 12.1 *Пусть* $j : \overline{\tau}_0 \overset{\varepsilon}{<} \sigma$, *где* $\overline{\tau}_0 = (\overline{M}_0, \overline{p}_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_l)$, $\sigma = (M, P, p)$. *Для любой точки* $S \in j(\overline{M}_0)$ *обозначим через* i_S *морфизм* $i_S : K_1(p(S), \varepsilon/2) \hookrightarrow \sigma(S)$ *(существование* i_S *следует из определения 11.1). Пусть* $M_1 = \cup_{S \in j(\overline{M}_0)} i_S(E), p_1 = p|_{M_1}$. *Тогда число листов римановой поверхности* (M_1, p_1) *ограничено числом* L_1, *которое зависит только от* ε.

Доказательство. Одной из граничных кривых поверхности M_1 является кривая Γ', такая, что $(\Gamma')^-$ ограничивает некоторый односвязный круг в M с центром в точке P радиуса $\rho > \varepsilon/2$, причем этот круг не пересекается с M_1. Без ограничения общности можно считать, что M_1 ограничена кривыми в M, иначе устроим исчерпание M_1 такого рода областями, содержащими на границе кривую Γ'.

Покажем, что $\overline{\tau} = \left(\overline{M}_1, p|_{\overline{M}_1}, \Gamma'\right) \in \mathfrak{A}_\delta(\sigma)$, где δ зависит только от ε. Действительно, для любой точки $T \in \overline{M}_1$ ее $(\varepsilon/2)$-окрестность содержится в ε-окрестности некоторой точки $S \in j(\overline{M}_0)$, которая является однолистным кругом, т. к. $j(\overline{M}_0) \subset (M)_\varepsilon(\delta)$. Значит, $\overline{M}_1 \subset$ $\subset (M)_{\varepsilon/2}(\delta)$. Кроме того, любые две точки S_1, S_2 из $j(\overline{M}_0)$ можно соединить кривой в $j(\overline{M}_0) \subset M_1$ длины, меньшей C/ε, а для любой точки $T \in \overline{M}_1$ существует точка $S \in\in j(\overline{M}_0)$, которую можно соединить с T в $i_S(E) \subset M_1$ кривой длины, меньшей, чем $\varepsilon/2$. Следовательно, любые две точки T_1, T_2 можно соединить кривой в M_1 длины, меньшей $(C/\varepsilon)+\varepsilon$. Значит, в качестве δ можно взять величину $\min\{\varepsilon/2, C\varepsilon/(C+\varepsilon^2)\}$. Теперь утверждение следствия 12.1 вытекает из леммы 12.2.

Лемма 12.3 *Существует константа* L_2, *зависящая только от* $\varepsilon > 0$, *такая, что если* $\overline{\tau}_0 = (\overline{M}_0, \overline{p}_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_l)$, $\sigma = (M, P, p)$ *и* $j : \overline{\tau}_0 \overset{\varepsilon}{<} \sigma$, *то существует* $\delta \in (0, \varepsilon)$ *и точки* $P_1, \dots, P_n$, *число которых* n *не превосходит* L_2, *такие, что если для некоторых морфизмов* $i_k : K_1(p(P_k), \delta) \hookrightarrow \sigma(P_k)$, $k = 1, \dots, n$, *то* $j(\overline{M}_0) \subset \cup_{k=1}^n i_k(E)$.

Доказательство. Будем называть систему точек $P_1, \dots, P_n$, удовлетворяющих условиям леммы 12.3, *неразветвленной* δ*-сетью* для $j(\overline{M}_0)$ в σ.

Предположим противное. Тогда существует $\varepsilon > 0$ и последовательность $j_m : \overline{\tau}_{0m} \overset{\varepsilon}{<} \sigma_m$, где

$$\overline{\tau}_{0m} = (\overline{M}_{0m}, \overline{p}_{0m}, \Gamma_{1m}, \ldots, \Gamma_{lm}), \quad l = l(m),$$

$$\sigma_m = (M_m, P_m, p_m), \quad m \geq 1,$$

такие, что ни для какого $\delta \in (0, \varepsilon)$ никакие m точек в $D_m = j_m(\overline{M}_{0m})$ не образуют неразветвленную δ-сеть в σ_m.

Пусть $\delta = 2\varepsilon/3$. Выберем любую точку $P_1^{(m)} \in D_m$, где m — достаточно большое число. Так как система, состоящая из одной точки, не образует неразветвленной δ-сети для D_m в σ_m, то существует точка $P_2^{(m)} \in D_m$, лежащая вне δ-окрестности точки $P_1^{(m)}$. Система $P_1^{(m)}, P_2^{(m)}$ также не является неразветвленной δ-сетью для D_m в σ_m. Значит, существует точка $P_3^{(m)}$, лежащая вне δ-окрестностей точек $P_1^{(m)}$, $P_2^{(m)}$.

Продолжая этот процесс, выберем точки $P_1^{(m)}, \ldots, P_m^{(m)}$ в D_m такие, что точка $P_{k+1}^{(m)}$ лежит вне объединения δ-окрестностей точек $P_1^{(m)}, P_2^{(m)}, \ldots, P_k^{(m)}$, $k = 1, \ldots, m-1$. Пусть

$$\varphi_k^{(m)} : K_1(z_k^{(m)}, \varepsilon/3) \hookrightarrow \sigma_m(P_k^{(m)})$$

морфизмы, существующие в силу условия $D_m \subset (M_m)_\varepsilon(\sigma_m)$. Тогда множества $\varphi_k^{(m)}(E)$, $k = 1, \ldots, m$, попарно не пересекаются и лежат в $M_1^{(m)} = \cup_{S \in j(\overline{M}_0)} i_S^{(m)}(E)$, где морфизмы $i_S^{(m)}$: $K_1(p_m(S), \varepsilon/2) \hookrightarrow \sigma_m(S)$. В силу следствия 12.1 площадь $M_1^{(m)}$ не превосходит $\pi L_1(\varepsilon)$. С другой стороны, $M_1^{(m)}$ содержит m попарно непересекающихся множеств $\varphi_k^{(m)}(E)$, площадь каждого из которых равна площади $\Sigma(\varepsilon/3)$ сферического круга радиуса $\varepsilon/3$. Следовательно, $m\Sigma(\varepsilon/3) \leq \pi L_1(\varepsilon)$, что неверно при больших m. Полученное противоречие доказывает лемму 12.3.

Следующая лемма является обобщением леммы 9.3 для римановых поверхностей над $\overline{\mathbb{C}}$ на случай произвольных граничных кривых.

Лемма 12.4 *Пусть $\sigma_m = (M_m, P_m, p_m)$, $m \geq 1$, — последовательность односвязных римановых поверхностей над $\overline{\mathbb{C}}$, ограничен-*

ных одной и той же локально простой кривой β, причем число листов поверхности σ_m над некоторой точкой $z_m \in \overline{\mathbb{C}}$ ограничено константой, не зависящей от m. Пусть $D_m \subset M_m$ — подобласть в M_m, содержащая точку P_m, причем $M_m \backslash D_m$ — компакт в M_m и все римановы поверхности $\sigma'_m = (D_m, P_m, p_m|_{D_m})$ эквивалентны между собой. Тогда

1) *существует подпоследовательность $\{\sigma_{m_k}\}$ последовательности $\{\sigma_m\}$, регулярно сходящаяся к некоторой односвязной римановой поверхности $\sigma = (M, P, p)$, ограниченной кривой β;*

2) *существует область D в M, содержащая точку P, такая, что $M \backslash D$ — компакт в M;*

3) *риманова поверхность $\sigma' = (D, P, p|_D)$ эквивалентна всем σ'_m, $m \geq 1$, причем, если $\varphi_{m_k} : \sigma' \hookrightarrow \sigma'_{m_k}$, то на компактах в D отображение φ_{m_k} совпадает с каноническими вложениями, индуцированными регулярной сходимостью $\{\sigma_{m_k}\}$ к σ, φ_{m_k} непрерывно продолжается на $\overline{D}$ и $\varphi_{m_k}(\partial M) = \partial M_{m_k}$ (m_k-as).*

Доказательство. По теореме Ф. Г. Авхадиева [5], теорема 1, существует односвязная риманова поверхность $\eta = (G_0, p_0)$, ограниченная кривой β^-, без граничных точек ветвления, причем согласно предложению 4 из [4] число листов η над любой точкой $z \in \overline{\mathbb{C}}$ равномерно ограничено. В силу условий теоремы число листов римановых поверхностей σ_m над точкой z_m равномерно ограничено. Склеивая $\overline{\sigma}_m = (\overline{M}_m, \overline{P}_m, \overline{p}_m)$ и $\overline{\eta} = (\overline{G}_0, \overline{p}_0)$ вдоль граничных кривых, получаем компактную риманову поверхность ξ_m над $\overline{\mathbb{C}}$ рода нуль, число листов которой над точкой z_m (с учетом кратности ветвления) равномерно ограничено. Без ограничения общности можно считать, что оно не зависит от m. Поскольку ξ_m компактна, то число листов ξ_m над любой точкой $z \in \overline{\mathbb{C}}$ (с учетом кратности ветвления) одинаково.

Без ограничения общности можно считать, что римановы поверхности σ'_m, $m \geq 1$, ограничены двумя кривыми, одна из которых есть, конечно, β. Пусть $\xi' = (M', P', p')$ получается из $\overline{\sigma}'_m$ и $\overline{\eta}$ склеиванием вдоль граничных кривых. Поскольку $\eta \hookrightarrow \xi' \hookrightarrow \xi_m$, $m \geq 1$, то ядро последовательности $\{\xi_m\}$ непусто. Более того, ξ' содержится в любом элементе множества $\operatorname{Ker}\{\xi_{m_k}\}$ для любой подпоследовательности $\{\xi_{m_k}\}$ последовательности $\{\xi_m\}$. Рассуждая так же, как при доказательстве леммы 9.2, получаем, что существует подпоследовательность $\{\xi_{m_k}\}$, которая регулярно сходится к некоторой компактной римановой поверхности рода нуль $\xi = (M, P, p)$. Тогда существуют морфизмы $j' : \xi' \hookrightarrow \xi$, $j : \eta \hookrightarrow \xi$. Пусть $\sigma = (G, P, p|_G)$, где $G = M \backslash \overline{j(G')}$, $D = j'(M') \backslash \overline{j(G')}$. Нетрудно проверяется, что $\{\sigma_{m_k}\}$ сходится к σ и выполняются условия 2), 3) леммы 12.4.

Лемма 12.5 *Пусть $\varepsilon \in (0, \pi/2)$, $\sigma_m = (M_m, P_m, p_m)$, $m \geq 1$, — последовательность римановых поверхностей над $\overline{\mathbb{C}}$, γ_m — кривая в $(M_m)_\varepsilon(\sigma_m)$, длина которой меньше C/ε, разбивающая M_m на две части, одна из которых — D_m, лежащая «слева» от γ_m, содержит точку P_m, односвязна и $p_m(D_m) \neq \overline{\mathbb{C}}$, $m \geq 1$. Пусть морфизмы $i_{mS} : K_1(p_m(S), \varepsilon) \hookrightarrow \sigma_m(S)$ для любой точки $S \in (M_m)_\varepsilon(\sigma_m)$ и $\widetilde{D}_m = D_m \left(\cup_{S \in |\gamma_m|} i_{mS}(E)\right)$. Тогда*

a) *последовательность $\widetilde{\eta}_m = \left(\widetilde{D}_m, P_m, p_m|_{\widetilde{D}_m}\right)$, $m \geq 1$, содержит подпоследовательность $\{\widetilde{\eta}_{m_k}\}$, сходящуюся регулярно к некоторой римановой поверхности $\widetilde{\eta} = (\widetilde{M}, \widetilde{P}, \widetilde{p})$;*

b) *если $\widetilde{j}_{m_k}$ — канонические вложения, индуцированные сходимостью $\{\widetilde{\eta}_{m_k}\}$ к $\widetilde{\eta}$, то для некоторой области $Q_0 \subset\subset \check{\widetilde{M}}(\widetilde{\eta})$ имеем $|\gamma_{m_k}| \subset \widetilde{j}_{m_k}(Q_0)$ (m_k-as);*

c) *кривая $(\widetilde{j}_{m_k})^{-1}(\gamma_{m_k})$ разбивает $\widetilde{M}$ на две части, одна из которых — Q_{m_k}, которая лежит «слева» от нее, содержит точку $\widetilde{P}$, односвязна и $\widetilde{p}(Q_{m_k}) \neq \overline{\mathbb{C}}$ (m_k-as).*

Доказательство. Поскольку длины кривых γ_m равномерно ограничены, то для любого $m \geq 1$ существует конечное число точек $P_{1m}, \ldots, P_{nm}$, где n не зависит от m, лежащих на γ_m последовательно в порядке возрастания первого индекса, таких, что длина дуги γ_{km} кривой γ_m, лежащей между точками P_{km} и $P_{k+1,m}$, не превосходит $\varepsilon/4$ ($P_{n+1,m} = P_{1m}$). Пусть $i_{km} = i_S$ для $S = P_{km}$, $z_{km} = p_m(P_{km})$, $k = 1, \ldots, n$, $D'_m = \cup_{k=1}^m i_{km}(E)$, $p'_m = p|_{D'_m}$, $\tau_m = (D'_m, P_{1m}, p'_m)$, $m \geq 1$. Тогда $\tau_m \in \mathcal{M}(z_{1m}, \ldots, z_{nm}; \varepsilon)$.

Фиксируем некоторое $\delta > \varepsilon/2$. В силу леммы 12.1, переходя в случае необходимости к подпоследовательности, можем считать, что существует риманова поверхность $\tau = (D'', P'', p'') \in \mathcal{M}(z_1, \ldots, z_n; \delta)$, которая принадлежит $\mathfrak{S}\{\tau_m\}$, причем если φ_m — канонические вложения, индуцированные этим включением, а $P'' = P^{(1)}, \ldots, P^{(n)}$ — базисные точки τ, то расстояние между точками $\varphi_m(P^{(k)})$ и P_{km} стремится к нулю при $m \to \infty$, $k = 1, \ldots, n$.

Пусть морфизмы $\psi_k : K_1(z_k, \delta) \hookrightarrow \tau(P^{(k)})$, $k = 1, \ldots, n$. Выберем $r < 1$ настолько близким к единице, чтобы множество $p'' \circ \psi_k(E_r)$, где $E_r = \{|\zeta| < r\}$, являлось сферическим кругом с центром в точке z_k радиуса, большего $\varepsilon/2$. Так как $\psi_k(E_r) \subset\subset D''$, то m-as определено множество $\varphi_m(\psi_k(E_r))$.

Поскольку длина дуги γ_{km} не превосходит $\varepsilon/4$, $\varphi_m(\psi_k(E_r))$ есть круг в M_m радиуса $\varepsilon/2$ с центром в точке $\varphi_m(P^{(k)})$, и расстояние между точками $\varphi_m(P^{(k)})$ и P_{km} стремится к нулю при $m \to \infty$, причем $P_{km} \in |\gamma_{km}|$, то $|\gamma_{km}| \subset \varphi_m(\psi_k(E_r))$ (m-as), $k = 1, \ldots, n$. Значит, если $Q = \cup_{k=1}^{n} \psi_k(E_r)$, то $|\gamma_m| \subset \varphi_m(Q)$ (m-as). Более того, любая точка из $|\gamma_m|$ содержится в $\varphi_m(Q)$ вместе со своей однолистной $(\varepsilon/4)$-окрестностью. Поэтому m-as определена кривая $\widetilde{\gamma}_m = \varphi_m^{-1}(\gamma_m)$.

Докажем, что при достаточно больших m и l кривые $\widetilde{\gamma}_m$ и $\widetilde{\gamma}_l$ свободно гомотопны в Q. Действительно, пусть ω_{km} — кривая в $\psi_{k-1}(E_r) \cap \psi_k(E_r)$, соединяющая точки $P^{(k)}$ и $\varphi_m^{-1}(P_{km})$, $k = 1, \ldots, n$ (m-as), где $\psi_0 = \psi_n$. Тогда кривая $\widetilde{\gamma}_m$ свободно гомотопна в Q кривой $\prod_{k=1}^{n} \kappa_{km}$, где $\kappa_{km} = \omega_{km} \widetilde{\gamma}_{km} (\omega_{k+1,m})^{-}$, $\widetilde{\gamma}_{km} = \varphi_m^{-1}(\gamma_{km})$, $k = 1, \ldots, n$, $\omega_{n+1,m} = \omega_{1m}$ (m-as). При достаточно больших m и l кривые κ_{km} и κ_{kl} соединяют точки $P^{(k)}$ и $P^{(k+1)}$ в $\psi_k(E_r)$, $k = 1, \ldots, n$ ($P_{n+1} = P_1$). Поскольку $\psi_k(E_r)$ односвязно, то кривые κ_{km} и κ_{kl} гомотопны в $\psi_k(E_r) \subset Q$. Поэтому $\prod_{k=1}^{n} \kappa_{km}$ гомотопна кривой $\prod_{k=1}^{n} \kappa_{kl}$, а кривая $\widetilde{\gamma}_m$ свободно гомотопна $\widetilde{\gamma}_l$ в Q.

Выберем простую замкнутую кривую γ в Q, которая свободно гомотопна кривым $\widetilde{\gamma}_m$ (m-as) в Q и обладает свойством: существует малая окрестность точки $P^{(1)}$, которую $\widetilde{\gamma}$ разбивает на две части, причем $P^{(1)}$ лежит в той части, которая остается «слева» от $\widetilde{\gamma}$ при ее обходе. Тогда кривая $\gamma'_m = \varphi_m(\widetilde{\gamma})$ свободно гомотопна кривой γ_m в $\varphi_m(Q)$, а, значит, и в M_m (m-as). Учитывая, что расстояние от точки P_{m1} до точки $\varphi_m(P^{(1)})$ стремится к нулю при $m \to \infty$, заключаем, что кривая γ'_m, как и γ_m, разбивает M_m на две части, и та из них — G_m, которая лежит «слева» от γ'_m, односвязна и содержит точку P_{m1}, и $\varphi_m(P^{(1)}) = P_m^{(1)}$ (m-as). Кривые γ_m и γ'_m свободно гомотопны в $\varphi_m(Q) \subset (M_m)_\varepsilon(\sigma_m)$. Поэтому $P_m \notin \varphi_m(Q)$, и так как P_m лежит в области D_m, остающейся «слева» от γ_m, то P_m лежит в области G_m, остающейся «слева» от γ'_m (m-as).

Пусть $\eta'_m = \left(G_m, P_m^{(1)}, p_m|_{G_m}\right)$, $m \geq 1$. Римановы поверхности η'_m ограничены одной и той же кривой $p(\widetilde{\gamma})$. Так как очевидно, что

$G_m \subset D_m \cup \varphi_m(Q)$, и существует точка $z_m \notin p_m(D_m)$, а поверхность $\bigl(\varphi_m(Q), p_m|_{\varphi_m(Q)}\bigr)$ не более, чем n-листна, поскольку склеена из n однолистных кругов, то число листов поверхности η'_m над точкой z_m ограничено константой n. Пусть D — область в Q, ограниченная кривыми, содержащая точку $P^{(1)}$, одной из граничных кривых которой является $\widetilde{\gamma}$. Тогда римановы поверхности $\Bigl(\varphi_m(D), P^{(1)}_m, p_m|_{\varphi_m(D)}\Bigr)$ попарно эквивалентны (m-as).

Из леммы 12.4 следует, что существует подпоследовательность $\{\eta'_{m_k}\}$, сходящаяся к некоторой односвязной римановой поверхности $\eta' = (M', P', p')$, причем морфизм $i : \bigl(D, P^{(1)}, p|_D\bigr) \hookrightarrow \eta'$ и канонические вложения j'_{m_k}, индуцированные этой сходимостью, таковы, что

$$j_{m_k} \circ i = \varphi_{m_k} \ (m_k - \mathrm{as}). \tag{12.3}$$

Пусть $\widetilde{\delta}$ — простая замкнутая кривая в D, которая свободно гомотопна в Q кривой $\widetilde{\gamma}$ и $\widetilde{\delta}_{m_k} = \varphi_{m_k}(\widetilde{\delta})$ (m_k-as). Тогда $\widetilde{\delta}_{m_k}$ свободно гомотопна в $\varphi_{m_k}(Q)$ кривой $\widetilde{\gamma}_{m_k}$, а, следовательно, и γ_{m_k}(m_k-as).

Рассмотрим последовательность $\{\widetilde{\eta}_{m_k}(P^{(1)}_{m_k})\}$. В силу теоремы 9.4 можно считать, что она регулярно сходится к некоторой римановой поверхности $\widetilde{\eta}_0 = (\widetilde{M}, \widetilde{P}_0, \widetilde{p})$. Так как

$$\eta'_{m_k} \hookrightarrow \widetilde{\eta}_{m_k}(P^{(1)}_{m_k}) \quad \text{и} \quad \tau_{m_k} \hookrightarrow \widetilde{\eta}_{m_k}(P^{(1)}_{m_k}),$$

причем $\{\eta'_{m_k}\}$ сходится регулярно к η', а $\tau \in \mathfrak{S}_1\{\tau_{m_k}\}$, то существуют морфизмы $j' : \eta' \hookrightarrow \widetilde{\eta}_0$ и $j'' : \tau \hookrightarrow \widetilde{\eta}_0$, причем канонические вложения $\widetilde{j}_{m_k}$, индуцированные регулярной сходимостью $\{\widetilde{\eta}_{m_k}(P^{(1)}_{m_k})\} \to \to \widetilde{\eta}_0$, можно подобрать так, чтобы они совпадали с $j'_{m_k} \circ (j')^{-1}$ и $\varphi_{m_k} \circ (j'')^{-1}$ на компактах в $j'(\eta')$ и $j''(\tau)$ соответственно.

Пусть $Q_0 = j''(Q)$. Так как $Q \subset\subset D'$, то $Q_0 \subset\subset \check{M}_0(\xi)$. Из вложения $|\gamma_{m_k}| \subset \varphi_{m_k}(Q)$ следует, что

$$|\gamma_{m_k}| \subset \varphi_{m_k} \circ (j'')^{-1}(Q_0) = \widetilde{j}_{m_k}(Q_0). \tag{12.4}$$

Кривая $(\widetilde{j}_{m_k})^{-1}(\gamma_{m_k})$ свободно гомотопна в Q_0, в силу (12.3), кривой

$$(\widetilde{j}_{m_k})^{-1}(\widetilde{\tau}_{m_k}) = j' \circ (j_{m_k})^{-1}(\widetilde{\tau}_{m_k}) = j' \circ i \circ (\varphi_{m_k})^{-1}(\widetilde{\tau}_{m_k}) = j' \circ i(\widetilde{\delta})$$

(m_k-as). Так как поверхность η' односвязна, то $i(\widetilde{\delta})$ разбивает ее на две части, причем та часть, которая лежит «слева» от $i(\widetilde{\delta})$, односвязна. В силу гомотопности то же справедливо и для кривой $(j_{m_k})^{-1}(\gamma_{m_k})$ (m_k-as).

Покажем, что из последовательности $\{\widetilde{\eta}_{m_k}\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{\widetilde{\eta}_{m'_k}\}$, регулярно сходящуюся к $\widetilde{\eta} = (\widetilde{M}, \widetilde{P}, \widetilde{p}) = \widetilde{\eta}_0(\widetilde{P})$, где $\widetilde{P}$ — некоторая точка поверхности $\widetilde{M}$, причем канонические вложения $\widetilde{j}_{m'_k}$, индуцированные этой сходимостью, совпадают с $\widetilde{j}_{m_k}$.

Предположим сначала, что существует область $K \subset\subset \widetilde{\check{M}}(\widetilde{\eta}_0)$, такая, что для некоторой подпоследовательности $\{m'_k\}$ точки $P_{m'_k}$ лежат в $\widetilde{j}_{m'_k}(\overline{K})$. Тогда без ограничения общности можно считать, что последовательность $(\widetilde{j}_{m'_k})^{-1}(P_{m'_k})$ сходится к некоторой точке $\widetilde{P} \in \overline{K}$. Нетрудно видеть, что точка $\widetilde{P}$ и подпоследовательность $\{\widetilde{\eta}_{m'_k}\}$ являются искомыми.

Если же для любой области $K \subset\subset \widetilde{\check{M}}(\widetilde{\eta}_0)$ точки P_{m_k} не лежат в $\widetilde{j}_{m_k}(\overline{K})$, начиная с некоторого номера, то рассмотрим семейство областей $\{Q_n\}$ в M', построеннное следующим образом. Риманова поверхность η' ограничена кривой $p(\widetilde{\gamma})$, которая является квази- локально простой как образ простой кривой при аналитическом отображении. По теореме 5.2 множество точек ветвления римановой поверхности η' конечно. Пусть $\widetilde{D}$ — область в D, ограниченная кривыми $\widetilde{\delta}$ и $\widetilde{\gamma}$, и $T_1, \ldots, T_\nu$ — внутренние точки ветвления поверхности η', причем $\operatorname{ord}(T_l, \eta') = n_l$, $l = 1, \ldots, \nu$. Существует малое $\varepsilon > 0$ такое, что η' компактно содержит n_l-листные сферические односвязные круги с центрами в точках T_l радиуса ε, $l = 1, \ldots, \nu$, замыкания которых в η' не попарно пересекаются. Удаляя из $M' \backslash \overline{i(\widetilde{D})}$ n_l-листные сферические односвязные круги $K_l^{(n)}$ радиуса ε/n с центрами в точках T_l, $l = 1, \ldots, \nu$, получим область Q_n, $n \geq 1$. Пусть $K_n = j'(Q_n)$, $n \geq 1$. Тогда $\{K_n\}$ — возрастающая последовательность областей в $\widetilde{\check{M}}(\widetilde{\eta}_0)$. Поскольку $Q_n \subset\subset \check{M}'(\eta')$, имеем $K_n \subset\subset \widetilde{\check{M}}(\widetilde{\eta}_0)$, $n \geq 1$. По предположению, точки P_{m_k} не лежат в $\widetilde{j}_{m_k}(\overline{K})$, начиная с некоторого номера. Пусть Γ_{nl} — кривая, являющаяся границей круга $j'(K_l^{(n)})$ в $\widetilde{M}$. Так как кривая $\widetilde{\delta}_{m_k} = j_{m'_k} \circ i(\widetilde{\delta})$ разбивает M' на две части, причем та часть, которая лежит «слева» от нее, односвязна и содержит $j_{m'_k}(\overline{K}_n)$ (m_k-as), то кривая $\widetilde{j}_{m_k}(\Gamma_{nl})$, лежащая в этой части, разбивает $\widetilde{\eta}_{m_k}$ на две части, она из которых является односвязным n_l-листным сферическим кругом $K^{(n)}_{l,m_k}$ (m_k-as). Нетрудно убедиться, что существует $l = l(m_k, n)$ такое, что $P_{m_k} \in K^{(n)}_{l,m_k}$ (m_k-as). Так как l принимает конечное число значений, то, переходя в случае необходимости к подпоследовательностям в $\{\widetilde{\eta}_{m_k}\}$ и $\{Q_n\}$, можем считать, что $l = l(m_k, n)$ не зависит от m_k и n. Тогда в качестве точки $\widetilde{P}$ можно взять точку $j'(T_l)$.

Итак, можем считать, переходя в случае необходимости к подпоследовательностям, что $\{\widetilde{\eta}_{m_k}\}$ сходится регулярно к $\widetilde{\eta}_0(\widetilde{P}) = \widetilde{\eta}$ с каноническими вложениями $\widetilde{j}_{m_k}$, т. е. условие a) теоремы выполнено. Условия b), c) уже установлены, за исключением того, что $\widetilde{p}(Q_{m_k}) \neq \overline{\mathbb{C}}$ (m_k-as). Последнее следует из того, что поверхности $\left(Q_{m_k}, \widetilde{p}|_{Q_{m_k}}\right)$ и $(D_{m_k}, p_{m_k}|D_{m_k})$ ограничены одной и той же кривой и имеют одинаковое число листов над любой точкой из $\overline{\mathbb{C}}$, поэтому $\widetilde{p}(Q_{m_k}) = p_{m_k}(D_{m_k}) \neq \overline{\mathbb{C}}$ (m_k-as). Лемма 12.5 доказана.

Теперь установим согласованность введенной в предыдущем параграфе метрики ρ с регулярной сходимостью к ядру.

Теорема 12.1 *Последовательность $\{\alpha_m\}$ из $\mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})$ регулярно сходится к элементу $\alpha \in \mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})$ тогда и только тогда, когда $\rho(\alpha_m, \alpha) \to 0$, $m \to \infty$.*

Доказательство. Необходимость. Рассмотрим сначала случай, когда α есть точка $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$. Достаточно рассмотреть ситуацию, когда все α_m являются одновременно либо точками, либо римановыми поверхностями. Если $\alpha_m = z_m \in \overline{\mathbb{C}}$, $m \geq 1$, и $\{\alpha_m\} \to \alpha$, $m \to \infty$, то $\rho(\alpha_m, \alpha) = d_{\overline{\mathbb{C}}}(z_m, z) \to 0$, $m \to \infty$.

Пусть теперь $\alpha_m = \sigma_m = (M_m, P_m, p_m) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{RP})$, $m \geq 1$. Докажем, что $\rho(\sigma_m, z_0) \to 0$ при $m \to \infty$. Предположим противное. Тогда, переходя в случае необходимости к подпоследовательности, можно считать, что $\rho(\sigma_m, z_0) > 2\varepsilon$, $m \geq 1$, для некоторого $\varepsilon \in (0, \pi/8)$. Поскольку $p_m(P_m) \to \infty$ при $m \to \infty$, то из (11.5) и последнего неравенства следует, что $d(\sigma_m) > \varepsilon$ (m-as), где $d(\sigma)$ определено в (11.3). Можно считать, что $d(\sigma_m) > \varepsilon$ при $m \geq 1$. Тогда $\mathfrak{A}_\varepsilon(\sigma_m) \neq \emptyset$, $m \geq 1$. Значит, существуют

$$\overline{\tau}_m = (\overline{M}_{0m}, \overline{p}_{0m}, \Gamma_{1m}, \ldots, \Gamma_{l(m),m})$$

и отображение $j_m : \overline{M}_{0m} \to M_m$ такие, что $j_m : \overline{\tau}_m \overset{\varepsilon}{<} \sigma_m$, $m \geq 1$. Кривая $\gamma_m = j_m(\Gamma_{1m})$ удовлетворяет всем требованиям леммы 12.5, $m \geq 1$. Значит, в силу этой леммы существует последовательность $\{\widetilde{\eta}_m\}$ такая, что $\widetilde{\eta}_m \hookrightarrow \sigma_m$, $m \geq 1$, и $\{\widetilde{\eta}_m\}$ сходится регулярно к невырожденному ядру $\widetilde{\eta}$. Отсюда вытекает, что $\widetilde{\eta} \in \mathfrak{S}_1\{\sigma_m\}$. Но α — единственный максимальный элемент в $\mathfrak{S}_1\{\sigma_m\}$ в силу теоремы 9.2. Следовательно, $\widetilde{\eta} \hookrightarrow \alpha$, что противоречит тому, что $\alpha = z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ — вырожденное ядро для $\{\sigma_m\}$.

Рассмотрим теперь случай, когда $\alpha = \sigma = (M, P, p) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{RP})$. Так как $z_m = p_m(P_m) \to z_0 = p(P)$ при $m \to \infty$, то для доказательства того, что $\rho(\sigma_m, \sigma) \to 0$ при $m \to \infty$ в силу (11.4) достаточно установить, что

$$\lim_{m\to\infty} d(\sigma, \sigma_m) = 0, \tag{12.5}$$

$$\lim_{m\to\infty} d(\sigma_m, \sigma) = 0. \tag{12.6}$$

Пусть $j : \overline{\tau}_0 \overset{\varepsilon}{<} \sigma$, где $\overline{\tau} = (\overline{M}_0, \overline{p}_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_l)$ и $\varepsilon \in (0, \pi/4)$. Докажем, что $\overline{\tau}_0 < \sigma_m$ (m-as). Без ограничения общности можно считать, что кривая $j(\Gamma_k)$ разбивает σ на две части, причем та часть, которая не пересекается с $j(\overline{M}_0)$, является односвязным n_k-листным кругом (с единственной точкой ветвления в центре, если $n_k > 1$). В противном случае можем добиться этого, увеличивая $\overline{\tau}_0$ и уменьшая ε. Пусть j_m — канонические вложения, индуцированные регулярной сходимостью $\{\sigma_m\}$ к σ. Тогда определены (m-as) отображения $\varphi_m = j_m \circ j : \overline{M}_0 \to M_m$. Используя условия b), c) определения 9.1 для $\mathfrak{S}\{\sigma_m\}$, условие $\sigma \in \mathrm{Ker}_1\{\sigma_m\} \subset \mathfrak{S}_1\{\sigma_m\} \subset \mathfrak{S}\{\sigma_m\}$ и определение множества $\mathfrak{S}_1\{\sigma_m\}$, получаем, что $\varphi_m(\Gamma_k)$ разбивает σ_m на две части (m-as), одна из которых, не пересекающаяся с $\varphi_m(\overline{M}_0)$, является односвязным n_k-листным кругом, $k = 1, \ldots, l$, причем при $k = 1$ этот круг содержит точку P_m. Это означает, что $\varphi_m : \overline{\tau}_0 < \sigma_m$, откуда вытекает, что расстояние $d(\sigma, \sigma_m) \leq \varepsilon$ (m-as). Следовательно, справедливо (12.5).

Докажем (12.6). Предположим противное. Тогда, переходя в случае необходимости к подпоследовательности, можем считать, что $d(\sigma_m, \sigma) \geq \varepsilon$, $m \geq 1$, для некоторого $\varepsilon \in (0, \pi/4)$. Это означает, что существуют последовательности $\overline{\tau}_m = (\overline{M}_{0m}, \overline{p}_{0m}, \Gamma_{1m}, \ldots, \Gamma_{l(m),m})$, $m \geq 1$, и $\varphi_m : \overline{M}_{0m} \to M_m$, $m \geq 1$, такие, что $\varphi_m : \overline{\tau}_m \overset{\varepsilon}{<} \sigma_m$ и условие $\overline{\tau}_m < \sigma$ не выполняется ни при каком $m \geq 1$.

Кривая $\varphi_m(\Gamma_{1m})$ разбивает σ_m на две части, одна из которых — D_m — содержит точку P_m и является односвязным кругом. Отметим, что вместе с каждой точкой $S \in \varphi_m(\overline{M}_{0m})$ риманова поверхность σ_m содержит и однолистный круг $U_S^{(m)}$ с центром в точке S радиуса ε. Пусть

$$G = D \cup \left(\cup_{S \in \Lambda_m} U_S^{(m)}\right),$$

где

$$\Lambda_m = |\varphi_m(\Gamma_{1m})|, \quad \eta_m = (G_m, P_m, p_m|_{G_m}), \quad m \geq 1.$$

В силу леммы 12.5, переходя в случае необходимости к подпоследовательности, можем считать, что последовательность $\{\eta_m\}$ регулярно сходится к некоторой римановой поверхности $\eta = (G, \widetilde{P}_0, \widetilde{p}_0)$ и если j_m — канонические вложения, индуцированные этой регулярной сходимостью, то кривая $\beta_m = i_m^{-1}(\varphi_m(\Gamma_{1m}))$ определена (m-as) и разбивает η на две части, причем та часть Q_m, которая содержит отмеченную точку P, односвязна и ее проекция на $\overline{\mathbb{C}}$ не совпадает с $\overline{\mathbb{C}}$. Так как проекция β_m на $\overline{\mathbb{C}}$ есть окружность в $\overline{\mathbb{C}}$, обходимая некоторое число раз, то часть поверхности η, соответствующая Q_m, является односвязным кругом над $\overline{\mathbb{C}}$. Из того, что $\eta_m \hookrightarrow \sigma_m$, $m \geq 1$, и из регулярной сходимости $\{\sigma_m\}$ к σ следует, что $\eta \hookrightarrow \sigma$, и можно считать, что η есть часть σ, т. е. $G \subset M, \widetilde{P}_0 = P$ и $\widetilde{p}_0 = p|_G$, а канонические вложения j_m, индуцированные регулярной сходимостью $\{\sigma_m\}$ к σ, совпадают с i_m на компактах в $\check{G}(\eta)$.

Фиксируем некоторую точку $S_m \in \Lambda_m$. В силу леммы 12.5 последовательность $j_m^{-1}(S_m)$ содержится в некоторой области $Q \subset\subset \check{G}(\eta)$ и без ограничения общности можно считать, что она сходится к некоторой точке $S_0 \in \check{G}(\eta)$. Тогда по теореме 9.8 последовательность $\{\eta_m(S_m)\}$ сходится регулярно к $\eta(S_0)$, причем канонические вложения, индуцированные этой сходимостью, совпадают с i_m. Аналогично получаем, что последовательность $\{\sigma_m(S_m)\}$ сходится регулярно к $\sigma(S_0)$ с каноническими вложениями j_m.

В силу леммы 12.3 существует $\delta \in (0, \varepsilon)$ и число L, зависящее только от ε, такие, что $\varphi_m(\overline{M}_{0m})$ обладает неразветвленной δ-сетью $A_m = \{P_{m1}, \ldots, P_{mL}\}$. Можно считать, что $P_{m1} = S_m$, $m \geq 1$. Так как при любом k, $1 \leq k \leq L-1$, любые две точки P_{mk}, $P_{m,k+1}$ можно соединить в $\varphi_m(\overline{M}_{0m})$ кривой α_k, длина которой не превосходит C/ε, то, разбивая $|\alpha_k|$ на $[2C/\varepsilon^2]$ частей и добавляя в случае необходимости к точкам P_{mk} точки разбиения, можем добиться того, чтобы

$\sup_{m,k} d_{\overline{\mathbb{C}}}(z_{mk}, z_{m,\,k+1}) < \varepsilon$. Из леммы 12.1 тогда получим, переходя в случае необходимости к подпоследовательности, что существует риманова поверхность $\widetilde{\tau} = (\widetilde{Q}, \widetilde{T}, \widetilde{p}) \in \mathcal{M}(z_1, \ldots, z_n; (\varepsilon + \delta)/2) \cap \mathfrak{S}_1\{\widetilde{\tau}_m\}$ такая, что если q_m — канонические вложения, индуцированные включением $\widetilde{\tau} \in \mathfrak{S}_1\{\widetilde{\tau}_m\}$ и $P_1, \ldots, P_L$ — базисные точки $\widetilde{\tau}$, то расстояние между точками $q_m(P_k)$ и P_{mk} стремится к нулю при $m \to \infty$, $k = 1, \ldots, L$.

Так как $\widetilde{\tau}_m \hookrightarrow \sigma_m(S_m)$, $\widetilde{\tau} \in \mathfrak{S}_1\{\widetilde{\tau}_m\}$ и последовательность $\{\sigma_m(S_m)\}$ регулярно сходится к $\sigma(S_0)$, то $\widetilde{\tau} \hookrightarrow \sigma(S_0)$ и можно считать, что $\widetilde{Q} \subset \subset M$, $\widetilde{p} = p|_{\widetilde{Q}}$, $\widetilde{T} = S_0$ и канонические вложения q_m совпадают с j_m на компактах в $\widetilde{Q}(\widetilde{\tau})$. Пусть $U_1, \ldots, U_L$ — круги в $\widetilde{\tau}$ с центрами в точках $P_1, \ldots, P_L$ радиуса $r \in (\delta, (\varepsilon + \delta)/2)$. Тогда при достаточно больших m круг $i_m(U_k) = q_m(U_k)$ радиуса r с центром в точке $q_m(P_k)$ содержит круг радиуса δ с центром в точке P_{mk}. Поскольку точки P_{mk}, $k = 1, \ldots, L$, образуют δ-сеть для $\varphi_m(\overline{M}_{0m})$, то $\varphi_m(\overline{M}_{0m}) \subset j_m\left(\cup_{k=1}^{L} U_k\right)$ (m-as). Значит, (m-as) определено отображение $\psi_m = j_m^{-1} \circ \varphi_m : \overline{M}_{0m} \to M$.

Докажем, что $\psi_m : \overline{\tau}_m < \sigma$ (m-as). Действительно, $\psi_m(\Gamma_{1m}) = \beta_m$ разбивает σ на две части, одна из которых есть односвязный круг, содержащий точку P. Поэтому осталось доказать, что для любого k, $2 \le k \le l(m)$, кривая $\psi_m(\Gamma_{km})$ разбивает σ на две части, причем та часть, которая не пересекается с $\psi_m(\overline{M}_{0m})$, является односвязной римановой поверхностью над $\overline{\mathbb{C}}$, проекция которой не совпадает со всей сферой $\overline{\mathbb{C}}$.

Предположим противное. Тогда для любого m существует такое $k = k(m)$, что кривая $\psi_m(\Gamma_m)$, где $\Gamma_m = \Gamma_{k(m),m}$, не удовлетворяет данному условию. Как и в случае кривых Γ_{1m}, переходя в случае необходимости к подпоследовательности, подберем такие точки $T_m \in \varphi_m(\Gamma_m)$, $m \ge 1$, и $T \in M$, что последовательность $\{\sigma_m(T_m)\}$ регулярно сходится к $\sigma(T)$ и канонические вложения, индуцированные этой сходимостью, совпадают с j_m. Так как $\varphi_m : \overline{\tau}_m \overset{\varepsilon}{<} \sigma$, то кривая $\varphi_m(\Gamma_m)$ разбивает σ_m на две части, причем та часть — D'_m, которая не пересекается с $\varphi_m(\overline{M}_{0m})$, односвязна и $p_m(D'_m) \ne \overline{\mathbb{C}}$, $m \ge 1$. Пусть $G'_m = D'_m \cup \left(\cup_{S \in \Lambda_{0m}} U_S^{(m)}\right)$, где $\Lambda_{0m} = \varphi_m(|\Gamma_m|)$, $\eta' = (G'_m, T_m, p_m|G'_m)$, $m \ge 1$. Используя утверждение леммы 12.5 и переходя в случае необходимости к подпоследовательности, получаем, как и выше для кривых Γ_{1m}, что последовательность $\{\eta'_m\}$ сходится регулярно к некоторой римановой поверхности $\eta' = (G', T, p') \hookrightarrow \sigma(T)$ и канонические вложения h'_m, индуцированные этой сходимостью, совпадают с j_m на компактах в $\check{G}'(\eta')$. При этом кривая

$$\psi_m(\Gamma_m) = j_m^{-1} \circ \varphi_m(\Gamma_m) = (h'_m)^{-1} \circ \varphi_m(\Gamma_m)$$

в силу леммы 12.5 разбивает σ на две части, и та часть, которая не пересекается с $\psi_m(\overline{M}_{0m})$, односвязна и ее проекция не совпадает с $\overline{\mathbb{C}}$ (m-as).

Полученное противоречие доказывает, что $\psi_m : \overline{\tau}_m < \sigma$ (m-as). Однако мы предположили, что $\overline{\tau}_m < \sigma$ неверно ни при каком m. Следовательно, справедливость (12.6) и необходимость условия теоремы доказана.

Достаточность. Пусть $\rho(\alpha_m, \alpha) \to 0$ при $m \to \infty$. Из любой подпоследовательности $\{\alpha_{m_k}\}$ по теореме 9.4 можно выделить подпоследовательность $\{\alpha_{m'_k}\}$, которая регулярно сходится к некоторому элементу $\beta \in \mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})$. В силу необходимости условия настоящей теоремы, уже установленной выше, имеем $\rho(\alpha_{m'_k}, \beta) \to 0$ при $k \to \infty$. В силу единственности предела последовательности в метрическом пространстве заключаем, что $\beta = \alpha$. Итак, из любой подпоследовательности $\{\alpha_{m_k}\}$ можно выделить подпоследовательность, регулярно сходящуюся к α. Значит, $\{\alpha_m\}$ регулярно сходится к элементу α. Теорема 12.1 доказана.

§13. Связь сходимости римановых поверхностей к ядру со сходимостью последовательностей мероморфных функций

Сходимость римановых поверхностей к ядру дает геометрическую интерпретацию локально равномерной сходимости мероморфных функций. Приводимые ниже теоремы обобщают результаты Каратеодори [114], Л. И. Волковыского [26] и Ю. Ю. Трохимчука [96] (см. также [142]).

Пусть последовательность $\sigma_m = (M_m, P_m, p_m)$, $m \geq 1$, римановых поверхностей над $\overline{\mathbb{C}}$ сходится регулярно к римановой поверхности $\sigma = (M, P, p)$ с каноническими вложениями i_m. Пусть $\sigma'_m = (M'_m, P'_m, p'_m)$, $m \geq 1$, — другая последовательность римановых поверхностей над $\overline{\mathbb{C}}$, причем существует голоморфная биекция $F_m : M_m \to M'_m$. Опишем условия, при которых последовательность $\{\sigma'_m\}$ сходится регулярно.

Пусть $f_m : M_m \to \overline{\mathbb{C}}$ — некоторые голоморфные отображения, $m \geq 1$. Будем говорить, что *последовательность* $\{f_m\}$ *сходится локально равномерно* к функции $f : M \to \overline{\mathbb{C}}$, если:

a) для любого компакта Q в $\check{M}(\sigma)$ функции $f_m \circ i_m$, определенные m-as, сходятся равномерно на Q к функции f;

b) для любой точки ветвления T римановой поверхности σ, порядка $\operatorname{ord}(T, \sigma) = n - 1$ существуют ε, $\delta \in (0, \pi/2)$ такие, что если кривая γ в σ ограничивает односвязный n-листный круг радиуса ε с единственной точкой ветвления T в центре и $|\gamma| \subset \check{M}(\sigma)$, а K_m — односвязный n-листный круг в σ_m, ограниченный кривой $i_m(\gamma)$ (m-as), то $d_{\overline{\mathbb{C}}}(f(T), f_m(T_m)) < \delta$ для любой точки $T_m \in K_m$ (m-as).

Пусть $\sigma_m = (M_m, P_m, p_m)$, $m \geq 1$, — последовательность римановых поверхностей над $\overline{\mathbb{C}}$ гиперболического типа и $\widetilde{\sigma}_m = (E, 0, \widetilde{p}_m)$ — универсальное накрытие для σ_m (см. § 10). Будем говорить, что *последовательность* $\{\sigma_m\}$ *нормальна*, если последовательность отображений $\widetilde{p}_m : E \to \overline{\mathbb{C}}$ нормальна в E (последовательность $\widetilde{p}_m$ определяется неединственным образом, но определение нормальности не зависит от выбора $\widetilde{p}_m, m \geq 1$).

Нормальность последовательности $\{\sigma_m\}$ в ряде случаев следует из ее геометрических свойств. Так, в частности, последовательность $\{\sigma_m\}$ нормальна, если существуют три различные точки a, b, $c \in \overline{\mathbb{C}}$ такие, что $p(M) \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus \{a, b, c\}$ (m-as) (см., напр., [63], [28]).

Справедлива

Теорема 13.1 *Пусть последовательность $\{\sigma_m\}$ римановых поверхностей над $\overline{\mathbb{C}}$ гиперболического типа нормальна и сходится к римановой поверхности σ с сохранением связности. Пусть $\sigma'_m = (M'_m, P'_m, p'_m) \in \mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{RP}})$, $F_m : M_m \to M'_m$ — голоморфная биекция такая, что $F_m(P_m) = P'_m$, и $f_m = p'_m \circ F_m$, $m \geq 1$. Тогда*

1) *последовательность $\{f_m\}$ сходится локально равномерно к непостоянной функции $f : M \to \overline{\mathbb{C}}$ тогда и только тогда, когда*

a) *последовательность $\{\sigma'_m\}$ нормальна и сходится к нетривиальному ядру $\sigma' = (M', P', p')$ с сохранением связности;*

b) *для некоторых точек $T \in \check{M}(\sigma)\backslash\{P\}$, $T' \in \check{M}'(\sigma')\backslash\{P'\}$ расстояние между точками $F_m \circ i_m(T)$ и $i'_m(T')$ в σ'_m стремится к нулю, где i'_m — канонические сложения, индуцированные регулярной сходимостью $\{\sigma'_m\}$ к σ;*

c) *последовательность $f_m \circ i_m(T)$ ограничена на плоскости $\mathbb{C}$ и, если $\psi : E \to \check{M}(\sigma)$ — произвольное однолистное голоморфное отображение такое, что $\psi(0) = T$ и $\psi_m = f_m \circ i_m \circ \psi$, $m \geq 1$, то последовательность $\arg(\psi'_m(0))$ сходится;*

2) *при выполнении условия 1) существует голоморфная биекция $F : M \to M'$, такая, что $p' \circ F = f$;*

3) *если $\{\sigma'_m\}$ — нормальная последовательность, то последовательность $\{f_m\}$ сходится локально равномерно к постоянной функции $f \equiv w_0$ тогда и только тогда, когда $\{\sigma'_m\}$ сходится регулярно к вырожденному ядру w_0;*

4) *при выполнении условия 1) функции $\varphi_m = p_m \circ F_m^{-1}$ сходятся локально равномерно к $\varphi = p \circ F^{-1}$.*

Прежде чем доказывать теорему 13.1, установим справедливость ее частного случая, когда все σ_m совпадают с единичным кругом E. Теорема 13.2 является модификацией результатов Каратеодори [114] и Л. И. Волковыского [26].

Теорема 13.2 *Пусть f_m — последовательность мероморфных в единичном круге функций, которая сходится локально равномерно в E к функции $f : E \to \overline{\mathbb{C}}$.*

1) *Если $f \not\equiv$const, то последовательность римановых поверхностей $\sigma_m = (E, 0, f_m)$, $m \geq 1$, сходится регулярно к римановой по-*

верхности $\sigma = (E, 0, f)$ *и последовательность канонических вложений* i_m, *индуцируемых этой сходимостью, сходится равномерно на компактах в* $\check{E}(\sigma)$ *к тождественному отображению* $\mathrm{id}_E : E \to E$.

2) *Если* $f \equiv w_0$, *то последовательность* $\{\sigma_m\}$ *сходится регулярно к вырожденному ядру* w_0.

Доказательство. 1) Пусть ζ_0 — любая точка из E такая, что $f(\zeta_0) \neq \infty$, $f'(\zeta_0) \neq 0$. Тогда существует открытая окрестность U точки ζ_0 в E, такая, что f аналитична и однолистна в U. Пусть V — открытый круг, содержащий точку ζ_0 и компактно вложенный в U. Из теоремы Руше следует, что все f_m однолистны в U. Пусть $g : E \to V$ — конформное отображение E на V такое, что $g(0) = \zeta_0$. Тогда

$$f_m \circ g(\zeta) = a_{m0} + e^{i\alpha_m} a_{m1} \zeta + \sum_{k=2}^{\infty} a_{mk} \zeta^k,$$

$|\zeta| < 1$, где $\alpha_m \in \mathbb{R}$, $m \geq 1$. Так как $f_m \circ g$ сходятся к однолистной функции f в E, то $a_{m0} \to a_0$, $e^{i\alpha_m} \to e^{i\alpha}$, где $a_0 \in \mathbb{C}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ — некоторые константы. Пусть $h_m(z) = e^{-i\alpha_m}(z - a_{m0})$, $m \geq 1$. Тогда функции $k_m = h_m \circ f_m \circ g$ сходятся к функции $k = h \circ f \circ g$, где $h(z) = e^{-i\alpha}(z - a_0)$, причем $k_m(0) = 0$, $k'_m(0) > 0$. По теореме 1 из [30], гл. II, § 5, области $D_m = k_m(E)$ сходятся как к ядру к области $D = k(E)$ относительно точки 0. Поскольку

$$h_m^{-1}(w) = a_{m0} + e^{i\alpha_m} w \to a_0 + e^{i\alpha} w = h^{-1}(w), \quad m \to \infty,$$

локально равномерно в E, то нетрудно видеть, что последовательность областей $h_m^{-1}(D_m) = f_m(V)$ сходится как к ядру к области $h^{-1}(D) = f(V)$ относительно любой точки последней области, в частности, точки $f(\zeta_0)$. Используя то, что $f_m(\zeta_0) \to f(\zeta_0)$, $m \to \infty$, заключаем, что последовательность однолистных римановых поверхностей $\sigma'_m = (V, \zeta_0, f_m)$ сходится регулярно к римановой поверхности $\sigma' = (V, \zeta_0, f)$. Поскольку $\sigma'_m \hookrightarrow \sigma_m(\zeta_0)$, $m \geq 1$, то ядро последовательности $\{\sigma_m(\zeta_0)\}$ невырождено.

В силу теоремы 9.4 существует подпоследовательность $\{\sigma_{m_k}(\zeta_0)\}$, сходящаяся регулярно к некоторой поверхности $\tau = (M, P, p)$. Пусть j_{m_k} — канонические вложения, индуцированные регулярной сходимостью $\{\sigma_{m_k}(\zeta_0)\}$ к τ, и $\{Q_n\}$ — компактное исчерпание $\check{M}(\tau)$, причем $P \in Q_n$, $n \geq 1$. Поскольку все римановы поверхности $\sigma_{m_k}(\zeta_0)$ имеют гиперболический тип и односвязны, то риманова поверхность τ подобна однолистной и не является поверхностью эллиптического типа, т. е. можно считать, что $M \subset \mathbb{C}$. Функции $j_{m_k}|_{Q_n} : Q_n \to E$ определены (m_k-as) и однолистны в Q_n, поэтому в силу теоремы 1 из [30], гл. I, § 2, образуют нормальное семейство. Применяя в случае необходимости диагональный процесс и переходя к подпоследовательности, можем считать, что функции j_{m_k} сходятся на любом компакте Q_n в $\check{M}(\tau)$ к функции $\varphi|_{Q_n} : Q_n \to E$, где $\varphi : \check{M}(\tau) \to E$ — некоторая голоморфная функция.

Так как $f_{m_k} \circ j_{m_k} = p$ на компактных подмножествах множества $\check{M}(\tau)(m_k\text{-as})$, то $f'_{m_k}(\zeta_0) \circ j'_{m_k}(P) = p'(P)$, откуда, используя теорему Вейерштрасса и сходимость производных f'_{m_k} к f' и j'_{m_k} — к φ', заключаем, что $\varphi'(P) = \lim_{k\to\infty} i'_{m_k}(P) = p'(P)/f'(\zeta_0) \neq 0$, т. е. $\varphi \not\equiv \mathrm{const}$ в $\check{M}(\tau)$. Из определения регулярной сходимости следует, что $j'_{m_k}(P) - \zeta_0 \to 0$ при $k \to \infty$, откуда

$$\varphi(P) = \lim_{k\to\infty} j_{m_k}(P) = \zeta_0.$$

Функция φ ограничена в $\check{M}(\tau)$, поэтому в точках множества $M \backslash \check{M}(\tau)$ имеет устранимые особенности и продолжается до аналитической функции $\psi : M \to$E. Таким образом, $\check{\tau}$ эквивалентна поверхности $\tau' = (G, \zeta_0, f|_G)$, где эквивалентность задается отображением $\psi : M \to G = \psi(M)$, и без ограничения общности можно считать, что $\tau = \tau'$, $\psi = \mathrm{id}_G$.

Докажем, что $G = E$. В противном случае возможны два варианта.

I) Существует точка $\zeta' \in \partial G \cap E$, такая, что f инъективно в некоторой окрестности U_1 точки ζ' в E. Уменьшая в случае необходимости U_1, можем добиться того, чтобы все f_{m_k} были инъективны в U_1. Так как $i_{m_k} \to \psi = \mathrm{id}_G$ равномерно на компактах в $\check{G}(\tau')$, то последовательность $\{\sigma_{m_k}(\zeta'_{m_k})\}$, где $\zeta'_{m_k} = \sigma_{m_k}(\zeta')$, регулярно сходится к $\tau'(\zeta')$. Пусть U_2 — круг с центром в точке ζ', компактно содержащийся в U_1. Применяя теорему Руше (если $f(\zeta') = \infty$, то рассматриваем функции $1/f_{m_k}$ и $1/f$), убеждаемся, что существует последовательность точек ζ_{m_k} в U_2 (определенная m_k-as) такая, что $\xi = (U_2, \zeta', f) \hookrightarrow (U_1, \zeta_{m_k}, f_{m_k})$ (m_k-as). Из однолистности функций f_{m_k} в U_1 и равенства $f_{m_k}(\zeta_{m_k}) = f(\zeta_1) = f_{m_k} \circ i_{m_k}(\zeta_1) = f_{m_k}(\zeta'_{m_k})$

следует, что $\zeta_{m_k} = \zeta'_{m_k}$ (m_k-as) и тогда $\xi \hookrightarrow \tau'(\zeta')$, чего не может быть, поскольку $\xi = (U_2, \zeta', f), \tau'(\zeta') = (G, \zeta', f)$ и $U_2 \to$G.

II) Если $\zeta' \in \partial G \cup E$, то f не инъективно ни в какой окрестности точки ζ'. По теореме единственности множество таких точек дискретно. Пусть γ — простая замкнутая кривая в $\check{G}(\tau')$, разбивающая $\sigma = (E, 0, f)$ на две части, одна из которых содержит точку ζ' и является n-листным кругом (K, f) с единственной точкой ветвления ζ'. Так как E односвязно и $f_{m_k} \circ i_{m_k} = f$, то $i_{m_k}(\gamma)$ разбивает σ_{m_k} на две части, одна из которых — (K_{m_k}, f_{m_k}) односвязна и ограничена кривой $f_{m_k} \circ i_{m_k}(\gamma) = f(\gamma)$, как и (K, f), т. е. n-кратно обходимой сферической окружностью. Пусть точка $\zeta_0 \in \overline{\mathbb{C}} \backslash f(K)$. Выберем область $Q \subset\subset E$, такую, что $K \subset\subset Q$ и $\zeta_0 \notin f(Q)$. Так как f_{m_k} сходится равномерно к f в Q, то $\zeta_0 \notin f_{m_k}(Q)$ (m_k-as). Из теоремы 4.1 следует, что числа листов поверхностей (K_{m_k}, f_{m_k}) и (K, f) над любой точкой из $f(K)$ совпадают (m_k-as). Следовательно, (K_{m_k}, f_{m_k}) есть n-листный круг. Отсюда и из определения регулярной сходимости следует, что $\zeta' \in G$ — противоречие. Итак, $G = E$.

Наконец, $\sigma_{m_k} = \sigma_{m_k}(0) \to \sigma(0) = \sigma$, $m_k \to \infty$. Это показываем, используя рассуждения, проводимые выше, случай II), если 0 — точка ветвления σ. Если $\operatorname{ord}(0, \sigma) = 0$, то это следует из сходимости $i_{m_k} \to \mathrm{id}_E$, $m_k \to \infty$. Аналогично из любой подпоследовательности $\{\sigma_{m_k}\}$ последовательности $\{\sigma_m\}$ можно выделить подпоследовательность, регулярно сходящуюся к σ. Значит, $\{\sigma_m\}$ регулярно сходится к σ, $m \to \infty$.

2) Пусть теперь $f \equiv w_0$. Докажем, что $\{\sigma_m\}$ сходится регулярно к w_0. Предположим противное. Тогда существует подпоследовательность $\{\sigma_{m_k}\}$, которая регулярно сходится к некоторому невырожденному ядру $\tau = (M, P, p)$, где $p(P) = w_0$. Как и в случае 1), можно считать, что $M \subset \mathbb{C}$. Пусть i_{m_k} — канонические вложения, индуцированные регулярной сходимостью $\{\sigma_{m_k}\}$ к τ. Так как i_{m_k} переводит компакты Q из $\check{M}(\tau)$ в E, то в силу теоремы 1 из [30], гл. I, § 2, отображения $i_{m_k}|_Q$ образуют нормальное семейство и без ограничения общности можно считать, что i_{m_k} сходятся к отображению $i : \check{M}(\tau) \to E$ равномерно на компактах в $\check{M}(\tau)$. В силу леммы 1.1 существует n-листный односвязный круг $K_n(w_0, \varepsilon) = (E, 0, g)$, где $n = \operatorname{ord}(P, \tau) + 1$, $w_0 = p(P)$, содержащийся в τ, т. е. существует морфизм $i : K_n(w_0, \varepsilon) \hookrightarrow \tau$. Пусть $E = \{\zeta \in E : 1/4 < |\zeta| < 3/4\}$. Тогда

расстояние
$$d_{\overline{\mathbb{C}}}(p \circ i(\overline{E}_1), z_0) > 0. \qquad (13.1)$$
Модуль двусвязной области E_1 равен 3. Поскольку модуль двусвязной области инвариантен при конформном отображении, то модуль областей $E^{(1)}_{m_k} = i_{m_k}(E_1)$ также равен 3. Из определения регулярной сходимости следует, что образ $i_{m_k}(\{|\zeta| = 1/2\})$ окружности радиуса $1/2$ разбивает E на две части, одна из которых односвязна и содержит точку 0 — отмеченную точку поверхности σ_{m_k}, причем $0 \notin E^{(1)}_{m_k}$ (m_k-as). Следовательно, граничные кривые области $E^{(1)}_{m_k}$ отделяют точку 0 от единичной окружности. Тогда область $E^{(1)}_{m_k}$ содержит (m_k-as) по крайней мере одну точку ζ_{m_k}, такую, что $|\zeta_{m_k}| < 1/2$. В противном случае $E^{(1)}_{m_k}$ содержалась бы в кольце $E' = \{1/2 < |\zeta| < 1\}$ и ее граничные компоненты разделяли бы граничные компоненты кольца E' и тогда, согласно [14], модуль $E^{(1)}_{m_k}$ не превосходил бы модуля E', который равен 2.

Без ограничения общности можно считать, что последовательность точек $\{z_{m_k}\}$, где $z_{m_k} = i^{-1} \circ i^{-1}_{m_k}(\zeta_{m_k})$, сходится к некоторой точке $z_0 \in \overline{E}_1$, а последовательность $\{\zeta_{m_k}\}$ — к точке $\zeta_0 \in E$. Так как $f_{m_k} \circ i_{m_k} = p$ на компактах в $\check{M}(\tau)$, то
$$p \circ i(z_0) = \lim_{k\to\infty} p \circ i(z_{m_k}) = \lim_{k\to\infty} f_{m_k}(\zeta_{m_k}) = f(\zeta_0) = w_0.$$
Это противоречит условию (13.1). Теорема 13.2 доказана.

Доказательство теоремы 13.1.

Пусть $\widetilde{\sigma}_m = (E, 0, g_m)$, $m \geq 1$, и $\widetilde{\sigma} = (E, 0, g)$ — универсальные накрытия римановых поверхностей σ_m, $m \geq 1$, и σ соответственно, и $G_m : E \to M_m$, $m \geq 1$, $G : E \to M$ — соответствующие накрывающие отображения. По теореме 10.2 последовательность $\{\widetilde{\sigma}_m\}$ сходится (регулярно) к $\widetilde{\sigma}$. Пусть $\widetilde{i}_m$ — канонические вложения, индуцируемые регулярной сходимостью $\{\widetilde{\sigma}_m\}$ к $\widetilde{\sigma}$. Фиксируем точку $\zeta_0 \in \check{E}(\widetilde{\sigma})\backslash\{0\}$, $\zeta_0 > 0$, и пусть $\zeta_m = \widetilde{i}_m(\zeta_0)$ (m-as). Поскольку отображения g_m и g определяются с точностью до поворота, то можно подобрать их таким образом, чтобы выполнялось условие $\zeta_m > 0$ (m-as).

Покажем, что $g_m \to g$, $m \to \infty$. Так как последовательность $\{\sigma_m\}$ нормальна, то существует подпоследовательность $\{g_{m_k}\}$, сходящаяся к некоторому отображению $g^{(1)} : E \to \overline{\mathbb{C}}$. С другой стороны, последовательность $\{\widetilde{\sigma}_m\}$ сходится (регулярно) к $\widetilde{\sigma} = (E, 0, g)$. Поэтому в силу теоремы 13.2 $g^{(1)} \not\equiv \mathrm{const}$ и римановы поверхности $\widetilde{\sigma}^{(1)} = (E, 0, g^{(1)})$ и $\widetilde{\sigma}$ эквивалентны. Значит, для некоторого $\alpha \in \mathbb{R}$ имеем $g^{(1)}(\zeta) = g(e^{i\alpha}\zeta)$, $\zeta \in E$. Пусть $\widetilde{i}_{m_k}$ и $\widetilde{i}^{(1)}_{m_k}$ — канонические вложения, индуцируемые сходимостью $\{\widetilde{\sigma}_{m_k}\}$ к $\widetilde{\sigma}$ и $\sigma^{(1)}$ соответственно. Тогда $\widetilde{i}^{(1)}_{m_k}(\zeta) = e^{i\alpha}\widetilde{i}_{m_k}(\zeta)$, $\zeta \in \check{E}(\widetilde{\sigma})$. По теореме 13.2 $\widetilde{i}^{(1)}_{m_k}(\zeta) \to \zeta$, $k \to \infty$ в $\check{E}(\widetilde{\sigma})$, поэтому

$$\zeta_0 = \lim_{k\to\infty} \widetilde{i}^{(1)}_{m_k}(\zeta) = e^{i\alpha} \lim_{k\to\infty} \widetilde{i}_{m_k}(\zeta) = e^{i\alpha} \lim_{k\to\infty} \zeta_{m_k}.$$

Из условий $\zeta_0 > 0$, $\zeta_{m_k} > 0$ (m_k-as) следует, что $e^{i\alpha} = 1$, поэтому $g^{(1)} = g$. Аналогично показывается, что из любой подпоследовательности последовательности $\{g_m\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к g. Следовательно, $g_m \to g$, $m \to \infty$. Тогда по теореме 13.2 $\widetilde{i}_{m_k}(\zeta) \to \zeta$, $\zeta \in \check{E}(\widetilde{\sigma})$.

Пусть $H_m = F_m \circ G_m$, $h_m = p'_m \circ H_m$, $m \geq 1$, $h = f \circ G$. Тогда следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{tikzcd}
\overline{\mathbb{C}} \arrow[dr, "p_m"'] & & E \arrow[ll, "g_m"'] \arrow[rr, "h_m"] \arrow[dl, "G_m"'] \arrow[dr, "H_m"] & & \overline{\mathbb{C}} \arrow[dl, "p'_m"] \\
& M_m \arrow[rr, "F_m"] \arrow[urrr, bend right, "f_m"'] & & M'_m &
\end{tikzcd}$$

По следствию 10.1 $G_m \circ \widetilde{i}_m = i_m \circ G$ на компактах в $\check{E}(\widetilde{\sigma})$ (m-as), а по условию теоремы $f_m \circ j_m \to f$ на компактах в $\check{M}(\sigma)$. Поэтому $h_m \circ \widetilde{i}_m = f_m \circ G_m \circ \widetilde{i}_m = f_m \circ i_m \circ G \to f \circ G = h$ в $\check{E}(\widetilde{\sigma})$, $m \to \infty$. По теореме 1 из [30], гл. 2, § 5, функции $(\widetilde{i}_m)^{-1}$, определенные на компактах в $\check{E}(\widetilde{\sigma})$, сходятся локально равномерно к тождественному отображению. Поэтому $h_m = (h_m \circ \widetilde{i}_m) \circ (\widetilde{i}_m)^{-1} \to h$, $m \to \infty$ в $\check{E}(\widetilde{\sigma})$. Докажем, что $h_m \to h$ в круге E.

Пусть ζ — любая точка ветвления поверхности $\widetilde{\sigma}$. Тогда $T = G(\zeta)$ — точка ветвления поверхности σ. Согласно п. b) определения локально равномерной сходимости $\{f_m\}$ к f существуют ε, $\delta \in (0, \pi/2)$ такие, что если кривая γ ограничивает в σ односвязный n-листный круг K радиуса ε с единственной точкой ветвления T в центре и $|\gamma| \subset \check{M}(\sigma)$, а K_m — односвязный n-листный круг в σ_m, ограниченный кривой $i_m(\gamma)$, то

$$d_{\overline{\mathbb{C}}}(f(T), f_m(T_m)) < \delta \tag{13.2}$$

для любой точки $T_m \in K_m$ (m-as). Пусть $\widetilde{K} \subset E$ — односвязный круг в $\widetilde{\sigma}$, ограниченный поднятием $\widetilde{\gamma}$ кривой γ на $\widetilde{\sigma}$ (относительно отображения G) и содержащий точку ζ. Так как $G_m \circ \widetilde{i}_m = i_m \circ G$ на компактах в $\check{E}(\widetilde{\sigma})$ (m-as), то кривые $\widetilde{\gamma}_m = i_m(\widetilde{\gamma})$ являются поднятиями на $\widetilde{\sigma}_m$ (относительно отображения G_m) кривых γ_m и, следовательно, ограничивают некоторый n-листный круг $\widetilde{K}_m$ в $\widetilde{\sigma}_m$ (m-as), причем $G_m(\widetilde{K}_m) = K_m$. Так как $\widetilde{i}_m \to \mathrm{id}$, $m \to \infty$, равномерно на $|\widetilde{\gamma}|$, то существует окрестность U точки ζ такая, что $U \subset \widetilde{K}$ и $|\widetilde{\gamma}_m| \cap U = \emptyset$ (m-as). Следовательно, $U \subset \widetilde{K}_m$ (m-as). Если точка $\zeta' \in U$, то $h_m(\zeta') = f_m \circ G_m(\zeta') = f_m(T_m)$, где $T_m = G_m(\zeta') \in K_m$. В силу (13.2) $d_{\overline{\mathbb{C}}}(z, h_m(\zeta')) < \delta$, $\zeta' \in U$. В силу [30], гл. I, § 2, семейство $\{h_m\}$ нормально в U. Но так как $\{h_m\} \to h$ в $\check{E}(\widetilde{\sigma})$ и функция h мероморфна в E, то любая сходящаяся в U последовательность $\{h_{m_k}\}$ сходится по теореме единственности к h. Следовательно, $\{h_m\} \to h$ в E.

По теореме 13.2 последовательность $\widetilde{\sigma}'_m = (E, 0, h_m)$, $m \geq 1$, сходится (регулярно) к римановой поверхности $\widetilde{\sigma}' = (E, 0, h)$. Отметим, что $\widetilde{\sigma}'_m$ является универсальным накрытием для σ'_m с накрывающим отображением $H_m : E \to M'_m$. По теореме 9.4 существует подпоследовательность $\{\sigma'_{m_k}\}$ последовательности $\{\sigma'_m\}$, сходящаяся регулярно. Так как $\widetilde{\sigma}'$ — предел последовательности универсальных накрытий — невырожден, то $\{\sigma'_{m_k}\}$ сходится к невырожденному ядру $\sigma' = (M', P', p')$. Из односвязности $\widetilde{\sigma}'$ в силу теоремы 10.3 следует, что $\widetilde{\sigma}'$ является универсальным накрытием для σ'. Пусть $\widetilde{i}'_{m_k}$ и i'_{m_k} — канонические вложения, индуцируемые регулярными сходимостями $\{\widetilde{\sigma}'_{m_k}\}$ к $\widetilde{\sigma}'$ и $\{\sigma'_{m_k}\}$ к σ' соответственно. Тогда $H_{m_k} \circ \widetilde{i}'_{m_k} = i'_{m_k} \circ H$ на компактах в $\check{E}(\widetilde{\sigma}')$ в силу следствия 10.1, где $H : E \to M'$ — накрывающее отображение.

Покажем, что существует голоморфная биекция $F : M \to M'$ такая, что $p' \circ F = f$. Сначала установим, что существует непрерывное отображение $F : M \to M'$, такое, что $p' \circ F = f$. Пусть Q — произвольная точка из M и γ — кривая в M, соединяющая точку P с Q. Поднимем γ на E из точки 0 относительно отображения G. Если $\widetilde{\gamma}$ — это поднятие, и $\gamma' = H(\widetilde{\gamma})$, то определим $F(Q)$ как конечную точку кривой γ'. Покажем, что F определено корректно. Предположим противное. Тогда существуют кривые γ_1 и γ_2, соединяющие точки P и Q в M такие, что γ_1' и γ_2' оканчиваются в различных точках M'. Без ограничения общности можно считать, что точка Q не является точкой ветвления σ и $Q \notin G(\check{E}(\widetilde{\sigma}'))$. Тогда, заменяя кривую $\gamma = \gamma_2\gamma_1^-$ на гомотопную, можем считать, что ее поднятие $\widetilde{\gamma} = \widetilde{\gamma}_2\widetilde{\gamma}_1^-$ на E не проходит через точки ветвления $\widetilde{\sigma}$ и $\widetilde{\sigma}'$, а кривая $\gamma' = \gamma_2'(\gamma_1')^- = H(\widetilde{\gamma})$ разомкнута. Значит, разомкнуты кривые $\gamma_{m_k}^{(1)} = i'_{m_k} \circ H(\widetilde{\gamma}) = H_{m_k} \circ \widetilde{i}'_{m_k}(\widetilde{\gamma})$. Так как $\gamma_{m_k}^{(2)} = H_{m_k} \circ \widetilde{i}_{m_k}(\widetilde{\gamma}) = F_{m_k} \circ G_{m_k} \circ \widetilde{i}_{m_k}(\widetilde{\gamma}) = F_{m_k} \circ i_{m_k} \circ G(\widetilde{\gamma}) = F_{m_k} \circ i_{m_k}(\gamma)$, то кривые $\gamma_{m_k}^{(2)}$ замкнуты.

Пусть T_1 и T_2 — начальная и конечная точки кривой $\widetilde{\gamma}$, а $T_{m_k,1}^{(i)}$ и $T_{m_k,2}^{(i)}$ — начальная и конечная точки кривой $\gamma_{m_k}^{(i)}$, $i = 1, 2$. Тогда $H(T_1) = H(T_2)$,

$$H_{m_k}(T_{m_k,1}^{(1)}) \neq H_{m_k}(T_{m_k,2}^{(1)}), \quad H_{m_k}(T_{m_k,1}^{(2)}) = H_{m_k}(T_{m_k,2}^{(2)}). \tag{13.3}$$

Выберем односвязные окрестности U_1 и U_2 точек T_1 и T_2 в множестве $\check{E}(\widetilde{\sigma}) \cap \check{E}(\widetilde{\sigma}')$ так, чтобы $H|_{U_i}$ было инъективным отображением, $i = 1, 2$, и $H(U_1) = H(U_2)$. Так как $\widetilde{i}_{m_k}$ и $\widetilde{i}'_{m_k}$ сходятся к тождественному отображению в $\check{E}(\widetilde{\sigma})$ и $\check{E}(\widetilde{\sigma}')$ соответственно, то $T_{m_k,j}^{(i)} \in U_j$, $i, j = 1, 2$. Пусть кривая $\omega_{m_k,1}$ соединяет точки $T_{m_k,1}^{(1)}$ и $T_{m_k,1}^{(2)}$ в U_1. Тогда существует единственная кривая $\omega_{m_k,2}$ в U_2, соединяющая точки $T_{m_k,2}^{(1)}$ и $T_{m_k,2}^{(2)}$ в U_2 такая, что $H(\omega_{m_k,1}) = H(\omega_{m_k,2})$. Кривые $\widetilde{i}_{m_k}(\widetilde{\gamma})$ и $\gamma_{m_k}^{(3)} = \omega_{m_k,1}\widetilde{i}_{m_k}(\widetilde{\gamma})(\omega_{m_k,2})^-$ имеют концы в точках $T_{m_k,1}^{(1)}$ и $T_{m_k,2}^{(1)}$, поэтому кривая

$$H_{m_k}(\gamma_{m_k}^{(3)}) = H_{m_k} \circ \widetilde{i}'_{m_k}(\omega_{m_k,1}) \cdot H_{m_k} \circ \widetilde{i}'_{m_k}(\widetilde{\gamma}) \cdot \Big(H_{m_k} \circ \widetilde{i}'_{m_k}(\omega_{m_k,2})\Big)^-$$

разомкнута в силу (13.3). С другой стороны,

$$H_{m_k} \circ \widetilde{i}'_{m_k}(\omega_{m_k,1}) = i'_{m_k} \circ H(\omega_{m_k,1}) =$$

$$= (i'_{m_k} \circ H(\omega_{m_k,2}))^- = (H_{m_k} \circ \widetilde{i}'_{m_k}(\omega_{m_k,2}))^-,$$

поэтому кривая $H_{m_k}(\gamma^{(3)}_{m_k})$ замкнута, как и $\gamma^{(2)}_{m_k}$. Полученное противоречие доказывает, что F определено корректно. Так как $p' \circ F = f$, а p' и f голоморфны, то и F голоморфно.

Докажем, что F инъективно. Действительно, рассуждая как и выше, получаем, что кривые $\gamma^{(1)}_{m_k}$ замкнуты, а кривые $\gamma^{(2)}_{m_k}$ — разомкнуты (m_k-as). Однако эти кривые либо одновременно замкнуты, либо одновременно разомкнуты. Итак, F — голоморфная биекция. Это, в частности, означает, что σ' эквивалентна поверхности (M, P, f) и можно считать, что $\sigma' = (M, P, f)$.

Итак, из последовательности $\{\sigma_m\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся регулярно к σ'. Аналогично показывается, что из любой подпоследовательности последовательности $\{\sigma_{m_k}\}$ можно выделить подпоследовательность, регулярно сходящуюся к σ', причем σ' не зависит от выбора подпоследовательности. Значит, $\{\sigma_m\}$ регулярно сходится к σ.

Для доказательства необходимости условий п. 1) осталось установить, что для некоторых точек $T \in \check{M}(\sigma)\backslash\{P\}$ и $T' \in \check{M}'(\sigma')\backslash\{P\}$ расстояние между точками $F_m \circ i_m(T)$ и $i'_m(T')$ в σ'_m стремится к нулю при $m \to \infty$. Пусть $\zeta \in \check{E}(\widetilde{\sigma}') \cap \check{E}(\widetilde{\sigma})\backslash\{0\}$ — произвольная точка и $T = G(\zeta), T' = H(\zeta) = F(T)$. Тогда

$$F_m \circ i_m(T) = F_m \circ i_m(G(\zeta)) = F_m \circ G_m \circ \widetilde{i}_m(\zeta) = H_m \circ \widetilde{i}_m(\zeta),$$

$i'_m(T') = i'_m \circ H(\zeta)$. Пусть (U, ζ, h) — односвязный однолистный круг радиуса $\varepsilon > 0$, содержащийся в $\widetilde{\sigma}'(\zeta)$. Так как $\widetilde{i}_m$ и $\widetilde{i}'_m$ стремятся к тождественному отображению локально равномерно в U, то при достаточно больших m существует последовательность $\{\zeta_m\}$ в U такая, что $\widetilde{i}'_m(\zeta_m) = \widetilde{i}_m(\zeta)$. Значит, точка

$$F_m \circ i_m(T) = H_m \circ \widetilde{i}'_m(\zeta_m) = i'_m \circ H_m(\zeta_m),$$

т. е. лежит в круге радиуса ε с центром в точке $i'_m(T') = i'_m \circ H(\zeta)$, поэтому расстояние между точками $F_m \circ i_m(T)$ и $i'_m(T')$ не превосходит ε (m-as). Поскольку ε можно выбрать сколь угодно малым, то это расстояние стремится к нулю и необходимость 1) установлена, т. к. условие c) очевидным образом выполнено.

Теперь докажем 3). Пусть $\{f_m\} \to w_0$, $m \to \infty$, но $\{\sigma'_m\}$ не сходится (регулярно) к w_0. Тогда в силу теоремы 9.4 можно считать, что $\{\sigma'_m\}$ сходится регулярно к некоторой римановой поверхности σ'. Если $\widetilde{\sigma}'_m = (E, 0, h_m)$ — универсальное накрытие поверхности σ'_m, $m \geq 1$, то в силу нормальности последовательности $\{\sigma'_m\}$ существует подпоследовательность $\{h_{m_k}\}$, которая сходится к некоторому голоморфному отображению h. Поскольку σ' — невырожденное ядро последовательности $\{\sigma'_m\}$, то ядро последовательности $\{\widetilde{\sigma}'_m\}$ также невырождено. Следовательно, $h \not\equiv \mathrm{const}$ в силу теоремы 13.2. Поскольку $h_m \circ \widetilde{i}_m = f_m \circ G_m \circ \widetilde{i}_m = f_m \circ i_m \circ G \to f \circ G$ в $\check{E}(\widetilde{\sigma})$ и $\widetilde{i}_m$ стремится к тождественному отображению локально равномерно в $\check{E}(\widetilde{\sigma})$, то $h_m \to f \circ G$, $m \to \infty$, в $\check{E}(\widetilde{\sigma})$. Таким образом, $h = f \circ G \equiv w_0$ — противоречие. Необходимость условия 3) теоремы установлена.

Предположим теперь, что $\{\sigma'_m\}$ — нормальная последовательность. Тогда последовательность $h_m = f_m \circ G_m$, $m \geq 1$, нормальна в E. Пусть $\{h_{m_k}\}$ — любая подпоследовательность, сходящаяся локально равномерно в E к функции h. Тогда

$$f_{m_k} \circ i_{m_k} \circ G = f_{m_k} \circ G_{m_k} \circ \widetilde{i}_{m_k} = h_{m_k} \circ i_{m_k} \to h \quad k \to \infty,$$

локально равномерно в $\check{E}(\widetilde{\sigma})$, следовательно, $f_{m_k} \circ i_{m_k}$ сходится локально равномерно на компактах в $\check{M}(\sigma)$ к некоторой функции $\check{f}$ такой, что $\check{f} \circ G = h$.

Докажем, что $\{f_{m_k}\}$ сходится к некоторой функции $f : M \to \overline{\mathbb{C}}$ такой, что $f|_{\check{M}(\sigma)} = \check{f}$. Пусть $T \in M \backslash \check{M}(\sigma)$ и $n = \mathrm{ord}(T, \sigma) + 1$. Фиксируем точку $\zeta \in E$ такую, что $G(\zeta) = T$. Так как $\{h_{m_k}\} \to \infty$, $m_k \to \infty$, то существуют $\delta \in (0, \pi/2)$ и открытая окрестность U точки ζ в E такие, что

$$d_{\overline{\mathbb{C}}}(h(\zeta), h_{m_k}(z)) < \delta \tag{13.4}$$

для любой точки $z \in U$ (m_k-as). В силу леммы 1.1 существует область $\widetilde{V} \subset\subset U$ такая, что $\left(\widetilde{V}, \zeta, g|_{\widetilde{V}}\right)$ — n-листный односвязный круг над $\overline{\mathbb{C}}$ с единственной точкой ветвления в центре, если $n > 1$. Так как граничная кривая $\widetilde{\gamma}$ области $\widetilde{V}$ компактно содержится в E, то кривые $\widetilde{\gamma}_{m_k} = \widetilde{i}_{m_k}(\widetilde{\gamma})$ лежат в U (m_k-as) и ограничивают области $\widetilde{V}_{m_k}$ в U такие, что $\left(\widetilde{V}_{m_k}, \zeta, g_{m_k}|_{\widetilde{V}_{m_k}}\right)$ — односвязные n-листные круги над $\overline{\mathbb{C}}$. Можно выбрать $\widetilde{V}$ настолько малой, чтобы G было инъективно на $\overline{\widetilde{V}}$. Тогда кривая $\gamma = G(\widetilde{\gamma})$ ограничивает односвязный n-листный круг $(V, T, p|_V)$, где $V = G(\widetilde{V})$. Из определения регулярной сходимости $\{\sigma_{m_k}\}$ к σ следует, что кривые

$$\gamma_{m_k} = G_{m_k}(\widetilde{\gamma}_{m_k}) = G_{m_k} \circ \widetilde{i}_{m_k}(\widetilde{\gamma}) = i_{m_k} \circ G(\widetilde{\gamma}) = i(\gamma)$$

ограничивают односвязные n-листные круги $\left(V_{m_k}, T_{m_k}, p|_{V_{m_k}}\right)$ в σ_{m_k} (m_k-as), где $T_{m_k} = G_{m_k}(T)$. Нетрудно видеть, что $V_{m_k} = G_{m_k}(\widetilde{V}_{m_k})$ и отображение G_{m_k} инъективно на $\widetilde{V}_{m_k}$ (m_k-as).

Из (13.4) следует, что $d_{\overline{\mathbb{C}}}(h(\zeta), h(z)) < \delta$, $z \in U$, поэтому

$$d_{\overline{\mathbb{C}}}(h(\zeta), \check{f}(z)) \le \delta < \pi/2, \quad S \in V \backslash \{T\}.$$

Из последнего условия вытекает, что $\check{f}$ имеет устранимую особенность в точке T. Положим $f(T) = h(\zeta)$. Ясно, что функция f, доопределенная таким образом в любой точке ветвления поверхности M, является голоморфной. Пусть $T_{m_k} \in V_{m_k}$ и z_{m_k} — точка из $\widetilde{V}_{m_k}$, такая, что $G_{m_k}(z_{m_k}) = T_{m_k}$. Тогда $d_{\overline{\mathbb{C}}}(f(T), f_{m_k}(T_{m_k})) = d_{\overline{\mathbb{C}}}(h(\zeta), f_{m_k} \circ G_{m_k}(z_{m_k})) = d_{\overline{\mathbb{C}}}(h(\zeta), h_{m_k}(z_{m_k})) < \delta$ в силу (13.4). Это показывает, что $\{f_{m_k}\}$ сходится к f локально равномерно.

Если $\{\sigma'_m\} \to w_0$, $m \to \infty$, то $\{f_{m_k}\} \to w_0$. Действительно, в противном случае, в силу уже установленной необходимости 1) последовательность $\{\sigma'_m\}$ сходилась бы к нетривиальному ядру. Аналогично показываем, что для любой подпоследовательности в $\{f_m\}$ можно выделить ее подпоследовательность, сходящуюся к w_0. Значит, $\{f_m\} \to w_0$ и достаточность 3) установлена.

Пусть теперь $\{\sigma'_m\}$ сходится с сохранением связности к нетривиальному ядру $\sigma' = (M', P', p')$. Тогда $h \not\equiv \text{const}$, и, следовательно, $f \not\equiv \text{const}$. Применяя доказанную необходимость утверждения 1) и утверждение 2) теоремы, заключаем о том, что $f = p' \circ F$, где $F : M \to M'$ есть некоторая голоморфная биекция.

Покажем, что если для некоторых точек $T \in \check{M}(\sigma)$ и $T' \in \check{M}'(\sigma')$ расстояние между точками $F_m \circ i_m(T)$ и $i'_m(T')$ стремится к нулю при $m \to \infty$, то $T' = F(P)$. Действительно, поскольку $T' \in \check{M}'(\sigma')$, то существует однолистный круг $(U', T', P'|_{U'})$ с центром в точке T', лежащий в $\sigma'(T')$. Так как U' односвязен, по теореме о монодромии существует круг $(W, \zeta', h|_W)$ в $\widetilde{\sigma}'$ такой, что H отображает гомеоморфно W на W'. По условию, $F_{m_k} \circ i_{m_k}(T) \in i'_{m_k}(U')$ (m_k-as), поэтому существуют точки ζ_{m_k} такие, что $i'_{m_k} \circ H(\zeta_{m_k}) = F_{m_k} \circ i_{m_k}(T)$ (m_k-as), причем $\{\zeta_{m_k}\} \to \zeta'$, $m_k \to \infty$. С другой стороны, если $\zeta \in E$ таково, что $G(\zeta) = T$, то

$$F_{m_k} \circ i_{m_k}(T) = F_{m_k} \circ i_{m_k}(G(\zeta)) = F_{m_k} \circ G_{m_k} \circ \widetilde{i}_{m_k}(\zeta) = H \circ \widetilde{i}_{m_k}(\zeta).$$

Так как $H_{m_k} : E \to M'_{m_k}$ — универсальное накрывающее отображение и $H_{m_k} \circ \widetilde{i}_{m_k}(\zeta) = H_{m_k} \circ \widetilde{i}'_{m_k}(\zeta_{m_k})$, то существует преобразование наложения, т. е. дробно-линейный автоморфизм A_{m_k} круга E такой, что $A_{m_k}(\zeta_{m_k}) = \zeta'_{m_k}$, где $\zeta_{m_k} = \widetilde{i}_{m_k}(\zeta)$, $\zeta'_{m_k} = \widetilde{i}'_{m_k}(\zeta_{m_k})$. Так как семейство дробно-линейных автоморфизмов E относительно компактно, то без ограничения общности можно считать, что $\{A_{m_k}\}$ сходится локально равномерно к некоторому отображению A, причем A — либо автоморфизм E, либо константа, по модулю равная единице. Ясно, что $A(\zeta) = \lim_{k\to\infty} A_{m_k}(\zeta_{m_k}) = \lim_{k\to\infty} \zeta'_{m_k} = \zeta'$, поэтому $A \not\equiv \text{const}$. Докажем, что A — преобразование наложения для накрытия $H : E \to M'$.

Имеем $H_{m_k} \circ A_{m_k} = H_{m_k}$, поэтому

$$H_{m_k} \circ \widetilde{i}'_{m_k} \circ (\widetilde{i}'_{m_k})^{-1} \circ A_{m_k} \circ \widetilde{i}'_{m_k} = H_{m_k} \circ \widetilde{i}'_{m_k} (m_k\text{-as})$$

на компактах в $E_A = \check{E}(\widetilde{\sigma}') \cap A(\check{E}(\widetilde{\sigma}'))$, следовательно,

$$H \circ (\widetilde{i}'_{m_k})^{-1} A_{m_k} \circ \widetilde{i}'_{m_k} = H$$

внутри E_A. Учитывая, что i'_{m_k} и $(i'_{m_k})^{-1}$ стремятся на компактах в E_A к тождественному отображению, заключаем, что $H \circ A = H$, что и требовалось доказать.

Так как ζ' не является точкой ветвления поверхности $\widetilde{\sigma}'$ и $A(\zeta) = \zeta'$, где A — преобразование наложения для универсального накрытия $H : E \to M'$, то ζ также не является точкой ветвления для $\widetilde{\sigma}'$. Используя доказанное выше, получаем, что расстояние между точками $F_{m_k} \circ i_{m_k}(T)$ и $i'_{m_k}(T'')$, где $T'' = F(T)$, стремится к нулю. Значит, стремится к нулю и расстояние между точками $i'_{m_k}(T')$ и $i'_{m_k}(T'')$, откуда следует, что $T' = T'' = F(T)$.

Повторяя рассуждения для любой подпоследовательности, получаем, что любая подпоследовательность из $\{f_m\}$ содержит подпоследовательность, сходящуюся локально равномерно к $f = p' \circ F$, где

$F : M \to M'$ — голоморфная биекция и $F(T) = T'$. Осталось доказать, что f не зависит от выбора подпоследовательности. Если последовательность $f_m \circ i_m(T)$ ограничена в $\mathbb{C}$ и $\psi : E \to \check{M}(\sigma)$ — однолистное голоморфное отображение, такое, что $\psi(0) = T$, $\psi_m = f_m \circ i_m \circ \psi$, $m \geq 1$, и последовательность $\arg(\psi_m'(0))$ сходится к константе α, то нетрудно видеть, что функция $\varphi = f \circ \psi$ аналитична в окрестности нуля (как отображение в конечную плоскость $\mathbb{C}$) и $\arg(\varphi'(0)) = \alpha$. Если $F_i : M \to M'$, $i = 1, 2$, — два голоморфных гомеоморфизма и $f_i = p' \circ F_i$, $i = 1, 2$, то пусть $G_1 : E \to M$ — универсальное накрытие, такое, что $G_1(0) = T$. Тогда $H_i = F_i \circ G_1 : E \to M$, $i = 1, 2$, — два универсальных накрытия, причем $H_1(0) = H_2(0)$. Следовательно, $H_2(\zeta) = H_1(e^{i\vartheta}\zeta)$ для некоторого $\vartheta \in \mathbb{R}$. Имеем $F_i \circ G_1 = F_i \circ \psi \circ r(\zeta)$, где $r = \psi^{-1} \circ G_1 : E \to E$, $r(0) = 0$. Поэтому $f_2 \circ \psi \circ r(\zeta) = f_1 \circ \psi \circ r(e^{i\vartheta}\zeta)$, откуда $(f_2 \circ \psi)'(0) = e^{i\vartheta}(f_2 \circ \psi)'(0)$. Если $\arg(f_i \circ \psi)'(0) = \alpha$, $i = 1, 2$, то $\vartheta = 0$, откуда $F_1 = F_2$ и $f_1 = f_2$, т. е. 1) полностью доказано.

Справедливость 4) следует из применения 1) к обратным функциям $F_m^{-1} : M_m' \to M_m$, $m \geq 1$. Теорема 13.1 доказана.

Замечание 13.1 Если не существует нетривиальных конформных отображений поверхности M на себя, оставляющих точку P неподвижной, то условия b) и c) теоремы 13.1 можно опустить, поскольку они нужны лишь для установления единственности конформного отображения $F : M \to M'$.

В заключение отметим одно следствие теоремы 13.2. Напомним, что для римановой поверхности $\sigma = (R, P, \pi)$ гиперболического типа над $\mathbb{C}$ можно определить *плотность гиперболической метрики* λ_σ следующим образом. Пусть $F : E \to \widetilde{R}$ — некоторое конформное отображение, где $\widetilde{R}$ — универсальное накрытие R, и $f = \pi \circ F$. Если точка Q не является точкой ветвления σ и $\zeta \in f^{-1}(Q)$, то в окрестности ζ отображение f локально однолистно. Пусть

$$\lambda_\sigma(Q) = \frac{1}{f'(\zeta)(1 - |\zeta|^2)}.$$

Хорошо известно, что $\lambda_\sigma(Q)$ не зависит от выбора точки ζ (см., напр., [49], гл. 2).

Справедливо следующее утверждение (см. также [142]).

Следствие 13.1 *Пусть последовательность римановых поверхностей гиперболического типа* σ_n *над* $\mathbb{C}$ *сходится к поверхности* $\sigma = (R, P, \pi)$ *гиперболического типа с сохранением связности. Тогда* $\lambda_{\sigma_n} \to \lambda_\sigma$ *равномерно на компактах в* $\check{R}(\sigma)$. *В частности, если гиперболические поверхности* σ_n *над* $\mathbb{C}$ *не содержат точек ветвления и сходятся к гиперболической поверхности* σ, *то* $\lambda_{\sigma_n} \to \lambda_\sigma$ *равномерно на компактах в* R.

Доказательство сразу следует из теорем 10.1, 10.2 и 13.2.

§14. Сходимость к ядру односвязных поверхностей и сходимость соответствующих им голоморфных функций

В этом параграфе установим теоремы о связи сходимости к ядру односвязных римановых поверхностей со сходимостью соответствующих им функций.

Пусть $\sigma_m = (M_m, P_m, p_m)$, $m \geq 1$, — последовательность римановых поверхностей гиперболического типа над $\overline{\mathbb{C}}$, сходящаяся к нетривиальному односвязному ядру $\sigma = (M, P, p)$ гиперболического типа. Пусть $n = \mathrm{ord}(P, \sigma) + 1$ и ε настолько мало, что существует кривая γ в $\check{M}(\sigma)$, разбивающая M на две части, одна из которых содержит P и является односвязным n-листным кругом над $\overline{\mathbb{C}}$ с единственной точкой ветвления в центре, если $n > 1$. По определению сходимости к ядру кривые $\gamma_m = i_m(\gamma)$, где i_m — канонические вложения, индуцируемые сходимостью $\{\sigma_m\}$ к σ, разбивает σ_m на две части, одна из которых является n-листным односвязным кругом, содержащим точку P_m (m-as). Пусть M^ε и M_m^ε (m-as) получаются из M и M_m удалением n-листных кругов, содержащих точки P и P_m и ограниченных γ и γ_m соответственно.

Будем говорить, что *последовательность* $\{\sigma_m\}$ *сходится* к σ *с сохранением модуля*, если $\mathrm{mod}(M^\varepsilon) = \lim_{m\to\infty} \mathrm{mod}(M_m^\varepsilon)$, где $\mathrm{mod}(Q)$ означает модуль двусвязной области Q.

Как будет показано ниже в теореме 14.1 это определение не зависит от выбора $\varepsilon > 0$.

Пример 14.1 Последовательность $\sigma_m = (E, 0, z + (2z)^m)$ сходится к $\sigma = (E, 0, z/2)$ с каноническими вложениями $i_m(z) \to i(z) = z/2$, $z \in E$. Таким образом,

$$\mathrm{mod}(M^\varepsilon) = (1/2\pi) \ln \mathrm{ctg}(\varepsilon) \neq (1/2\pi) \ln \mathrm{ctg}(\varepsilon/2) = \lim_{m\to\infty} \mathrm{mod}(M_m^\varepsilon),$$

и сходимость $\{\sigma_m\}$ к σ происходит без сохранения модуля.

Теорема 14.1 *Пусть f, $f_m : E \to \overline{\mathbb{C}}$, $m \geq 1$, — некоторая последовательность голоморфных функций. Последовательность $\{f_m\}$ сходится к f локально равномерно в E тогда и только тогда, когда последовательность римановых поверхностей $\sigma_m = (E, 0, f_m)$, $m \geq 1$, сходится к $\sigma = (E, 0, f)$ с сохранением модуля и для неко-*

торой точки $\zeta_0 \in \check{E}(\sigma)\backslash\{0\}$ имеем $i_m(\zeta_0) \to \zeta_0$, $m \to \infty$, где i_m — канонические вложения, индуцируемые сходимостью $\{\sigma_m\}$ к σ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{f_m\} \to f \not\equiv \mathrm{const}$. Согласно теореме 13.2 римановы поверхности $\sigma_m = (E, 0, f_m)$ сходятся к $\sigma = (E, 0, f)$. Докажем, что сходимость происходит с сохранением модуля. Пусть γ — кривая в E, ограничивающая область D в E, содержащую начало координат такая, что $\gamma \in \check{E}(\sigma)$ и $(D, 0, f|_D)$ — n-листный круг с центром в точке 0 с единственной точкой ветвления в центре, если $n > 1$. Если i_m — канонические вложения, индуцируемые сходимостью $\{\sigma_m\}$ к σ, то кривые $\gamma_m = i_m(\gamma)$ ограничивают n-листный односвязный круг в σ_m, содержащий точку 0 (m-as). Пусть $\mathrm{mod}(E/D) = l$ и $\delta = e^{-2\pi l}$. Тогда существует конформное отображение φ кольца $E(\delta) = \{\zeta \in \overline{\mathbb{C}} : \delta < |\zeta| < 1\}$ на D. Поскольку кривая γ аналитична (она переходит в n-кратно обходимую окружность при аналитическом отображении f), то отображение $\varphi : E(\delta) \to D$ можно продолжить в более широкое кольцо $E(\delta_1) = \{\zeta \in \overline{\mathbb{C}} : \delta_1 < |\zeta| < 1\}$, где $0 < \delta_1 < \delta$. Пусть $\varphi_1 : E(\delta_1) \to \overline{\mathbb{C}}$ — это продолжение. Фиксируем малое $\varepsilon > 0$. Так как i_m стремится к тождественному отображению при $m \to \infty$, то кривые γ_m лежат в сколь угодно малой окрестности кривой γ, следовательно, содержатся в $\varphi_1(E(\delta_1))$ (m-as). При этом кривые $\varphi_1^{-1}(\gamma_m)$ лежат в сколь угодно малой окрестности кривой $\varphi_1^{-1}(\gamma)$, обходящей окружность $\{|\zeta| = \delta\}$, в частности, в круговом кольце $\{\delta_2 < |\zeta| < \delta_3\}$, где $\delta_2 = e^{-2\pi(l+\varepsilon)}$, $\delta_3 = e^{-2\pi(l-\varepsilon)}$, и гомотопна кривой $\varphi_1^{-1}(\gamma)$ в этом кольце. Пусть Q_m — область, ограниченная кривой $\varphi_1^{-1}(\gamma_m)$ и окружностью $\{|\zeta| = 1\}$. Тогда $E(\delta_2) \subset Q_m \subset E(\delta_3)$, следовательно,

$$l - \varepsilon = \mathrm{mod}(E(\delta_3)) \le \mathrm{mod}(Q_m) \le \mathrm{mod}(E(\delta_2)) \quad (m\text{-as}).$$

Если D_m — область в E, ограниченная кривой γ_m и окружностью $\{|\zeta| = 1\}$, то φ_1 отображает Q_m конформно на D_m, т. е. $\mathrm{mod}(D_m) = \mathrm{mod}(Q_m)$ (m-as). Следовательно,

$$|\,\mathrm{mod}(D_m) - \mathrm{mod}(D)| = |\,\mathrm{mod}(Q_m) - l| \le \varepsilon \quad (m\text{-as}),$$

что показывает, в силу произвольности ε, что $\mathrm{mod}(D_m) \to \mathrm{mod}(D)$ при $m \to \infty$. Это означает, что с $\{\sigma_m\} \to \sigma$ с сохранением модуля.

Пусть теперь $\zeta_0 \in \check{E}(\sigma)\backslash\{0\}$. Тогда $i_m(\zeta_0) \to \zeta_0$, $m \to \infty$. Это завершает доказательство необходимости теоремы.

Достаточность. Пусть $\sigma_m = (E, 0, f_m)$, $m \geq 1$, сходится к $\sigma = (E, 0, f)$ с сохранением модуля. Рассмотрим кривую γ в $\check{E}(\sigma)$, разбивающую σ на две части, одна из которых есть n-листный круг с центром в нуле радиуса ε с единственной точкой ветвления в 0, если $n > 1$. Пусть $\gamma_m = i_m(\gamma)$ (m-as) и γ_m разбивает σ_m на две части, одна из которых есть односвязный n-листный круг, содержащий начало координат. Если $M^\varepsilon = \mathrm{Int}(\gamma)$, $M_m^\varepsilon = \mathrm{Int}(\gamma_m)$ (m-as), то $\mathrm{mod}(M_m^\varepsilon) \to \mathrm{mod}(M^\varepsilon)$ при $m \to \infty$.

Для любого компакта Q в $\check{E}(\sigma)$ последовательность однолистных отображений $i_m|_Q : Q \to E$ равномерно ограничена, поэтому нормальна. Рассматривая компактное исчерпание $\check{E}(\sigma)$ областями Q_n, $n \geq 1$, и применяя диагональный процесс, заключаем, что существует подпоследовательность $\{i_{m_k}\}$, сходящаяся к некоторой однолистной аналитической функции $i : \check{E}(\sigma) \to E$. Поскольку множество точек ветвления поверхности σ дискретно, то i продолжается до отображения $i : E \to E$.

Докажем, что $i \not\equiv \mathrm{const}$. В противном случае $i(\zeta) \equiv \zeta_0 \in \overline{E}$. Поскольку, согласно [14], гл. 3, для любого континуума C, лежащего в E и содержащего точки 0 и $w \neq 0$, модуль двусвязной области $E \backslash C$ не превосходит числа $m(r) = \mathrm{mod}(E \backslash C_r)$, где C_r — отрезок $\{\zeta \mid 0 \leq \mathrm{Re}\,\zeta \leq r, \mathrm{Im}\,\zeta = 0\}$, $r = |w|$, причем $m(r) \to 0$ при $r \to 1$, то точки кривой γ_m лежат в некотором круге $\{|\zeta| \leq R\}$, $R < 1$; иначе для некоторой подпоследовательности $\{m_l'\}$ модуль области $M_{m_l'}^\varepsilon$ стремился бы к нулю при $l \to \infty$. Следовательно, $|\zeta_0| = \lim_{k\to\infty} |i_{m_k}(\zeta)| \leq R$, $\zeta \in |\gamma|$, поэтому $|\zeta_0| < 1$.

Если K_r — круг радиуса r с центром в точке ζ_0, содержащийся компактно в E, то $|\gamma_{m_k}| \subset K_r$ (m_k-as), поскольку i_{m_k} сходится равномерно к ζ_0 на $|\gamma|$. Следовательно, справедливо неравенство $\mathrm{mod}(M_{m_k}^\varepsilon) \geq \mathrm{mod}(E \backslash K_r)$ (m-as). Поскольку $\mathrm{mod}(E \backslash K_r) \to \infty$ при $r \to 0$, то $\mathrm{mod}(M_{m_k}^\varepsilon) \to \infty$ при $k \to \infty$ — противоречие, доказывающее, что $i \not\equiv \mathrm{const}$.

Поскольку i_{m_k} однолистны, то i однолистна в $\check{E}(\sigma)$, а, значит, и в E. Докажем, что $i(E) = E$. Так как i_{m_k} сходится равномерно к i на $|\gamma|$, то кривые γ_{m_k} лежат в сколь угодно малой окрестности кривой $i(\gamma)$. Рассуждая аналогично тому, как это было сделано при доказательстве необходимости условия теоремы, убеждаемся, что

$$\mathrm{mod}(E \backslash \mathrm{Int}(i(\gamma))) = \lim_{k\to\infty} \mathrm{mod}(E \backslash \mathrm{Int}(i(\gamma_{m_k}))) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \operatorname{mod}(M^{\varepsilon}_{m_k}) = \operatorname{mod}(M^{\varepsilon}) = \operatorname{mod}(E\setminus \operatorname{Int}(\gamma)).$$

Область $i(M^{\varepsilon})$ лежит в $E\setminus \operatorname{Int}(i(\gamma))$, поэтому ее модуль не превосходит $\operatorname{mod}(E\setminus \operatorname{Int}(i(\gamma))) = \operatorname{mod}(M^{\varepsilon})$ и знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда эти области совпадают. С другой стороны, $i(M^{\varepsilon})$ является конформным образом области M^{ε}, следовательно, в силу инвариантности модуля $\operatorname{mod}(i(M^{\varepsilon})) = \operatorname{mod}(M^{\varepsilon})$. Отсюда следует, что $i(E\setminus \operatorname{Int}(\gamma)) = E\setminus \operatorname{Int}(i(\gamma))$, поэтому $i(E) = E$.

Нетрудно убедиться, что $i(0) = 0$. Действительно, если ω — кривая в E, ограничивающая малый n-листный круг в σ с центром в нуле, то $i_{m_k}(\omega)$ ограничивает n-листный круг в σ_{m_k}, содержащий начало координат, поэтому $i(\omega)$ как предел кривых $i_{m_k}(\omega)$ ограничивает область, содержащую внутри или на границе точку 0. Значит, $i(0) = 0$ и $i(\zeta) = e^{i\alpha}\zeta$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Так как $i(\zeta_0) = \lim_{k\to\infty} i_{m_k}(\zeta_0) = \zeta_0$, $\zeta_0 \neq 0$, то $e^{i\alpha} = 1$ и $i(\zeta) = \zeta$, $\zeta \in E$.

Аналогично показывается, что для любой подпоследовательности $\{i_{m_k}\}$ существует ее подпоследовательность, сходящаяся локально равномерно к тождественному отображению в $\check{E}(\sigma)$. Следовательно, $\{i_m\} \to i$, $m \to \infty$, локально равномерно в $\check{E}(\sigma)$.

В силу теоремы 13.2 последовательность i_m^{-1} сходится локально равномерно в $i(\check{E}(\sigma))$ к i^{-1}. Поэтому $f_m = f \circ i_m^{-1} \to f \circ i^{-1} = f$ локально равномерно в $i(\check{E}(\sigma)) = \check{E}(\sigma)$. Докажем, что $\{f_m\} \to f$ локально равномерно в E. Пусть ζ — точка ветвления σ порядка $(k-1)$. Выберем любое малое $\varepsilon > 0$ и пусть $(D, \zeta, f|_D)$ — k-листный односвязный круг с единственной точкой ветвления в ζ, ограниченный кривой γ в $\check{E}(\sigma)$, радиуса, меньшего ε. Тогда $i_m(\gamma)$ ограничивает k-листный круг $(D_m, \zeta_m, f|_{D_m})$ радиуса r (m-as). Поскольку $i_m(\gamma) \to \gamma$, $m \to \infty$, то точка ζ лежит во всех областях D_m (m-as). В силу произвольности ε получаем, что $\{f_m\} \to f$ поточечно, а, следовательно, и локально равномерно в E. Теорема 14.1 доказана.

Замечание 14.1 Вместо условия $i_m(\zeta_0) \to \zeta_0$, $m \to \infty$, можно потребовать, чтобы $f_m^{(n)}(0) \to f_m^{(n)}(0)$, $m \to \infty$, где $n = \operatorname{ord}(0, \sigma) + 1$ в случае, если $f(0) \neq \infty$, и $(1/f_m)^{(n)}(0) \to (1/f)^{(n)}(0)$, $m \to \infty$, в случае, если $f(0) = \infty$.

Замечание 14.2 Сходимость с сохранением модуля римановых поверхностей гиперболического типа обеспечивает нормальность соответствующего им семейства отображающих функций.

Теперь обсудим вопрос о сходимости *односвязных* римановых поверхностей в случае, когда нормировка отображающих функций производится не во внутренней точке (как в точке 0 в теореме 14.1), а в трех граничных точках.

Введем необходимые определения. Пусть $\sigma = (M, P, p)$ — односвязная риманова поверхность гиперболического типа над $\overline{\mathbb{C}}$ и $F : E \to M$ — некоторое конформное отображение. *Сечением единичного круга* назовем простую кривую $\overline{\gamma}$, лежащую в E (за исключением концов) и соединяющую две различные точки единичной окружности. Пусть $z : [0,1] \to \overline{E}$ — представление $\overline{\gamma}$ и γ — открытая дуга кривой $\overline{\gamma}$ с представлением $z : (0,1) \to E$, т. е. γ получается из $\overline{\gamma}$ удалением концевых точек. Тогда кривую $F(\gamma)$ назовем *сечением поверхности* σ.

Пусть $\{\overline{\gamma}_n\}$ — последовательность сечений E, обладающих свойством: каждая кривая $\overline{\gamma}_n$ разбивает E на две части, одна из которых — δ_n — не содержит точку 0, причем $\delta_{n+1} \subset \delta_n$, $n \geq 1$, и $\cap_{n=1}^{\infty} \overline{\delta}_n = e^{i\vartheta} \in \partial E$. Последовательность $\{\overline{\gamma}_n\}$ называется *цепью сечений единичного круга* E, а соответствующая последовательность $\{\delta_n\}$ — *цепью областей. Две цепи сечений* $\{\overline{\gamma}_n^1\}$ и $\{\overline{\gamma}_n^2\}$ называются *эквивалентными*, если выполняется одно из двух равносильных условий:

a) если $\{\delta_n^1\}$ и $\{\delta_n^2\}$ — соответствующие им цепи областей, то

$$\cap_{n=1}^{\infty} \overline{\delta}_n^1 = \cap_{n=1}^{\infty} \overline{\delta}_n^2 = e^{i\vartheta};$$

b) для любого $n \geq 1$ существует $m \geq 1$, такое, что $\delta_m^1 \subset \delta_n^2$, $\delta_m^2 \subset \delta_n^1$.

Класс эквивалентности x цепей сечений $\{\overline{\gamma}_n\}$ называется *простым концом единичного круга*, соответствующим точке $e^{i\vartheta}$ (см., напр., [30], [46], [92], [93], [178]). Можно отождествить x с точкой $e^{i\vartheta} \in E$.

Если $\{\overline{\gamma}_n\}$ — цепь сечений E, то назовем последовательность $\{F(\gamma_n)\}$ *цепью сечений поверхности* σ, а образ $\{F(\gamma_n)\}$ соответствующей цепи областей $\{\delta_n\}$ — *цепью областей поверхности* σ. На множестве цепей сечений σ индуцируется отношение эквивалентности: $\{F(\gamma_n^1)\}$ эквивалентна $\{F(\gamma_n^2)\}$, если $\{\overline{\gamma}_n^1\}$ эквивалентна $\{\overline{\gamma}_n^2\}$. Класс эквивалентности цепей сечений $\{F(\gamma_n)\}$ поверхности σ назовем *простым концом* σ.

Отметим, что мы вводим и рассматриваем здесь лишь граничные простые концы поверхности.

Пусть y — простой конец σ и $\{F(\gamma_n)\}$ — его представитель. Если $x = e^{i\vartheta}$ — простой конец E с представителем $\{\overline{\gamma}_n\}$, то полагаем $\overline{F}(x) = y$. Таким образом, отображение F продолжается до отображения $\overline{F} : \overline{E} \to \overline{M} = M \cup PE(M)$, где $PE(M)$ — множество простых концов σ. Введем на $\overline{M}$ топологию, согласованную с топологией M, следующим образом. Окрестность U простого конца y с представителем $\{F(\gamma_n)\}$ и соответствующей ему цепью областей $\{F(\delta_n)\}$ определяется любым подмножеством Q в M, таким, что $F(\delta_n) \subset Q$ (n-as). По определению U состоит из точек $S \in Q$, а также простых концов x_1 с представителями $\{F(\gamma_n^1)\}$ и соответствующей ему цепью областей $\{F(\delta_n^1)\}$, что $F(\delta_n^1) \subset Q$ (n-as). Окрестность точек из M определяется очевидным образом. Нетрудно проверить, что отображение $\overline{F} : \overline{E} \to \overline{M}$ является гомеоморфизмом.

В дальнейшем будем применять также обозначения $\Gamma_n = F(\gamma_n)$, $D_n = F(\delta_n)$, $n \geq 1$. Важной задачей является описание цепей сечений $\{\Gamma_n\}$, определяющих простые концы заданной римановой поверхности σ внутренним образом, т. е. в терминах самой σ, без привлечения отображения F, которое, как правило, в явном виде неизвестно.

Опишем, как это может быть сделано для конечнолистных поверхностей и поверхностей $\sigma = (M, P, p)$, таких, что $\overline{p(M)} \neq \overline{\mathbb{C}}$. Сначала определим понятие достижимой граничной точки поверхности σ. Пусть Γ — кривая на M с представлением $z : [0, \infty) \to M$, причем для любого компакта Q в M существует $t_0 \in [0, \infty)$ такое, что $z(t) \in M \backslash Q$, $t \geq t_0$, и существует $\lim_{t\to\infty} p(z(t)) = a$. Если Γ_1, Γ_2 — две подобные кривые с представлениями z_1, $z_2 : [0, \infty) \to M$, причем $\lim_{t\to\infty} p(z_1(t)) = \lim_{t\to\infty} p(z_2(t)) = a$, то будем называть Γ_1 и Γ_2 эквивалентными, если существует гомотопия, т. е. непрерывное отображение $Z : [0, \infty) \times [0, 1] \to M$ такое, что $Z(t, 0) = z_1(t)$, $Z(t, 1) = z_2(t)$, $t \geq 0$, причем $p(Z(t, \tau))$ стремится к a при $t \to \infty$ равномерно по τ, $0 \leq \tau \leq 1$. Класс эквивалентности A таких кривых назовем *достижимой граничной точкой поверхности* σ. Положим $p(A) = a$. Если $\Gamma \in A$, то будем говорить, что *кривая* Γ *оканчивается в достижимой граничной точке* A поверхности σ. Будем говорить, что *достижимая граничная точка* A *принадлежит простому концу* y поверхности σ, если для любых представителей Γ точки A и $\{\Gamma_n\}$ простого конца y выполняется условие: для любого $n \geq 1$ при достаточно больших t сечение Γ_n разделяет точки P и $z(t)$ в M, где $z : [0, \infty) \to M$ — представление кривой Γ.

Предположим теперь, что $\overline{p(M)} \neq \overline{\mathbb{C}}$. Без ограничения общности можно считать, что $p(M) \subset \{t \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$. Как и в однолистном случае, из леммы Линделефа (см., напр., [30]), примененной к функции $p \circ F$, следует, что для любой достижимой граничной точки A поверхности σ существует единственная точка $e^{i\vartheta} \in \partial E$ такая, что если $\Gamma \in A$, $z : [0, \infty) \to M$ — представление кривой Γ, то $F^{-1}(z(t)) \to e^{i\vartheta}$, $t \to \infty$. Следовательно, достижимая граничная точка принадлежит ровно одному простому концу. С использованием теоремы 2.3.1 из [46] и ее доказательства нетрудно показать, что простой конец поверхности σ не может содержать более одной достижимой граничной точки. Эти же утверждения справедливы и для конечнолистных поверхностей. Действительно, пусть поверхность σ не более, чем k-листна и существует точка $a \in \mathbb{C}$, которая имеет ровно k прообразов (с учетом кратности ветвления), т. е. $p^{-1}(a) = \{A_1, \ldots, A_l\}$, $\sum\limits_{i=1}^{l} [\mathrm{ord}(A_i, \sigma) + 1] = k$. Выбросим из σ круги с центрами в этих прообразах, содержащиеся в σ и такие, что их проекция совпадает с фиксированным кругом $K = \{z \mid d_{\overline{\mathbb{C}}}(z, z_0) < \varepsilon\}$. Полученная поверхность подобна однолистной и конформно эквивалентна l-связной области $D \subset E$ при отображении F^{-1}. При этом $p(F(D)) \cup K = \emptyset$, т. е. $\overline{p(F(D))} \neq \overline{\mathbb{C}}$. Поскольку приводимые выше утверждения носят локальный характер, то при рассмотрении граничного соответствия при отображении $F : E \to D$ в окрестности граничных точек можно ограничиваться односвязными подобластями D_1 в E, содержащимися в D и содержащих множества вида $\{z \in \mathbb{C} : r < |z| < 1, \vartheta_1 < \arg(z) < \vartheta_2\}$, для которых $\overline{p(F(D_1))} \neq \overline{\mathbb{C}}$, и применять полученные выше результаты. Итак, справедлива

Теорема 14.2 *Пусть $\sigma = (M, P, p)$ — риманова поверхность гиперболического типа над $\overline{\mathbb{C}}$ и выполнено по крайней мере одно из условий: a) $\overline{p(M)} \neq \overline{\mathbb{C}}$; b) σ конечнолистна. Тогда любая достижимая граничная точка принадлежит ровно одному простому концу. Любой простой конец σ содержит не более одной достижимой граничной точки поверхности σ.*

Если выполняются условия теоремы 14.2, то из теоремы Фату о радиальных пределах следует, что множество точек $e^{i\vartheta}$ на ∂E, в которых функция $p \circ F$ имеет радиальный предел, всюду плотно на ∂E. Следовательно, при определении простых концов σ в этом случае можно выбирать сечения Γ_n, оканчивающиеся в достижимых граничных точках σ. Будем говорить, что *сечение* Γ_1 *поверхности* σ *отделяет достижимую граничную точку* Q *поверхности* σ *от точки* P, если Γ_1 разделяет точки P и $z(t)$, где $z : [0, \infty) \to M$ — представление некоторой кривой $\Gamma \in A$.

Пусть $\{\Gamma_n\}$ — последовательность сечений римановой поверхности σ, причем

a) сечение Γ_n отделяет сечение Γ_{n+1} от точки P в M, $n \geq 1$;

b) если D_n — множество точек в M, которые Γ_n отделяет от P, то $\cap_{n=1}^{\infty} D_n = \emptyset$;

c) сечение Γ_n оканчивается в достижимых граничных точках A_n, B_n поверхности σ и среди достижимых точек A_n, B_n, A_{n+1}, B_{n+1} нет совпадающих;

d) множество достижимых граничных точек A поверхности σ, удовлетворяющих условию «для любого $n \geq 1$ сечение Γ_n отделяет A от точки P», содержит не более одного элемента.

Теорема 14.3 *Пусть выполняются условия теоремы* 14.2. *Тогда любой простой конец* σ *содержит цепь сечений* $\{\Gamma_n\}$*, удовлетворяющую условиям* a) – d). *Обратно, если* $\{\Gamma_n\}$ *— последовательность сечений* σ*, удовлетворяющая условиям* a) – d)*, то* $\{\Gamma_n\}$ *является цепью сечений, определяющей некоторый простой конец* σ.

Доказательство очевидно.

Отметим также, что если σ конечнолистна и ее простой конец y содержит достижимую граничную точку, то можно выбрать такую цепь сечений $\{\Gamma_n\}$, определяющую y, что проекции $p(\Gamma_n)$ сечений Γ_n лежат на концентрических окружностях с центром в точке $a = p(A)$ и радиусами, стремящимися к нулю.

Если функция $p \circ F$ непрерывно продолжима на единичную окружность ∂E, то σ допускает присоединение края и простые концы $\overline{F}(e^{i\vartheta})$ можно отождествить с точками этого края.

Пусть последовательность $\sigma_m = (M_m, P_m, p_m)$, $m \geq 1$, односвязных римановых поверхностей гиперболического типа над $\overline{\mathbb{C}}$ сходится нормально к римановой поверхности $\sigma = (M, P, p)$ и j_m — канонические вложения, индуцируемые этой сходимостью. Согласно теореме 13.1 можно подобрать конформные отображения $F_m : (E, 0) \to$

$\to (M_m, P_m)$, $m \geq 1$, и $F : (E, 0) \to (M, P)$ таким образом, чтобы функции $f_m = p_m \circ F_m$ сходились равномерно внутри E к $f = p \circ F$ и для любой точки $\zeta \in F^{-1}(\check{M}(\sigma))$ расстояние между точками $F_m(\zeta)$ и $j_m \circ F(\zeta)$ стремится к нулю при $m \to \infty$.

Определим понятие простого конца последовательности поверхностей $\{\sigma_m\}$, сходящейся к σ. Для этого рассмотрим сначала тривиальную сходимость последовательности единичных однолистных кругов $(E_m, 0)$ к единичному кругу $(E, 0)$. Пусть $\overline{\gamma}$ — сечение круга E, оканчивающееся в точках $e^{i\alpha}$ и $e^{i\beta}$. Рассмотрим последовательность $\overline{\gamma}_m$ сечений кругов E_m, удовлетворяющих условиям:

a) для любой окрестности U сечения $\overline{\gamma}$ в $\mathbb{C}$ сечения $\overline{\gamma}_m$ лежат в U (m-as);

b) если $e^{i\alpha_m}$ и $e^{i\beta_m}$ — концы сечения $\overline{\gamma}_m$, то $e^{i\alpha_m} \to e^{i\alpha}$, $e^{i\beta_m} \to e^{i\beta}$ при $m \to \infty$.

Будем говорить, что последовательность $\Delta = \{\gamma_m\}$ есть *сечение последовательности кругов* $(E_m, 0)$*, сходящейся к* $(E, 0)$*, лежащее над* $\overline{\gamma}$. (Отметим, что данное определение согласуется с определением из [91], [93].)

Пусть теперь $\{\overline{\gamma}_n\}$ — цепь сечений E, определяющая простой конец $e^{i\alpha} \in E$. Построим при фиксированном n сечение $\Delta_n = \{\overline{\gamma}_{nm}\}$ последовательности кругов $(E_m, 0)$, сходящейся к $(E, 0)$, лежащее над $\overline{\gamma}_n$. Тогда последовательность сечений $\{\Delta_n\}$ назовем *цепью сечений последовательности* $(E_m, 0)$*, сходящейся к* $(E, 0)$. Пусть $\{\Delta_n^{(i)}\}$, где $\Delta_n^{(i)} = \{\overline{\gamma}_{nm}^{(i)}\}$, $i = 1, 2$, — две цепи сечений последовательности $(E_m, 0)$, сходящейся к $(E, 0)$. Назовем их *эквивалентными*, если для любого $k \geq 1$ существует m_0, такое, что при $m \geq m_0$ сечение $\overline{\gamma}_{km}^{(1)}$ отделяет сечения $\overline{\gamma}_{nm}^{(2)}$ от точки P_m (n-as), а сечение $\overline{\gamma}_{km}^{(2)}$ отделяет сечения $\overline{\gamma}_{nm}^{(1)}$ от точки P_m (n-as).

Пусть $\{\Delta_n\}$, где $\Delta_n = \{\overline{\gamma}_{nm}\}$, — цепь сечений последовательности $(E_m, 0)$, сходящейся к $(E, 0)$. Тогда последовательность $\{F(\Delta_n)\}$, где $F(\Delta_n) = \{F(\gamma_{nm})\}$, $n \geq 1$, назовем *цепью сечений последовательности* $\{\sigma_m\}$ *сходящейся к* σ. *Две цепи сечений* $\{F(\Delta_n^1)\}$ и $\{F(\Delta_n^2)\}$ *последовательности* $\{\sigma_m\} \to \sigma$ назовем *эквивалентными*, если эквивалентны их «прообразы» $\{\Delta_n^1\}$ и $\{\Delta_n^2\}$. Класс эквивалентности Z цепей сечений последовательности $\{\sigma_m\} \to \sigma$ назовем *простым концом последовательности* $\{\sigma_m\} \to \sigma$. Если представитель $\{F(\Delta_n)\} \in Z$ таков, что Δ_n есть сечение последовательности $(E_m, 0)$, сходящейся к $(E, 0)$, лежащее над $\overline{\gamma}_n$, $n \geq 1$, и $\{\overline{\gamma}_n\}$ — цепь сечений, определяющая простой конец $e^{i\vartheta,}$ то будем говорить, что Z — *простой конец последовательности* $\{\sigma_m\} \to \sigma$, *соответствующий простому концу* $\overline{F}(e^{i\vartheta})$ *поверхности* σ.

Как и в случае простых концов фиксированной римановой поверхности, для практических применений теории простых концов последовательности $\{\sigma_m\} \to \sigma$ необходимо научиться определять эти простые концы геометрически, без привлечения функций F_m, которые, как правило, неизвестны. Это можно сделать, например, в случае, когда римановы поверхности σ_m не содержат точек ветвления и существует точка из $\overline{\mathbb{C}}$, не принадлежащая замыканию множества $\cup_{m=1}^{\infty} p_m(M_m)$. Тогда $\overline{p(M)} \neq \overline{\mathbb{C}}$ и, как показано выше, цепи сечений, определяющие простые концы σ, можно выбирать так, чтобы они оканчивались в достижимых граничных точках σ. Пусть Γ — сечение σ, оканчивающееся в достижимых граничных точках σ. Будем говорить, что последовательность $\{\Gamma_m\}$ сечений поверхностей σ_m, оканчивающихся в достижимых граничных точках σ_m, образует *сечение последовательности* $\{\sigma_m\} \to \sigma$, *лежащее над* Γ, если

1) существует точка $S \in \check{M}(\sigma)$, такая, что Γ разделяет в M точки P и S, а Γ_m — точки P_m и S (m-as);

2) для любого $\varepsilon > 0$ существует m_0 и дуга $\Gamma_\varepsilon \subset\subset M$ кривой Γ, обладающие свойством: при $m \geq m_0$ для любой точки T_m кривой Γ_m существует точка кривой $j_m(\Gamma_\varepsilon)$, расстояние до которой от T_m не превосходит ε.

Как и в однолистном случае (см., напр., [93]) справедлива

Теорема 14.4 1) *Пусть* $\{\sigma_m\}$— *последовательность римановых поверхностей гиперболического типа, нормально сходящаяся к римановой поверхности* σ, *причем замыкание* $\cup_{m=1}^{\infty} p_m(M_m)$ *не совпадает* $\overline{\mathbb{C}}$. *Тогда для любого сечения* Γ *поверхности* σ *существует сечение* $\{\Gamma_m\}$ *последовательности* $\{\sigma_m\} \to \sigma$, *лежащее над* Γ.

2) *Если* $\{\Gamma_m\}$ — *цепь сечений последовательности* $\{\sigma_m\} \to \sigma$, *определяющая простой конец* $\overline{F}(e^{i\vartheta})$, *и для фиксированного* n *последовательность* $\widetilde{\Delta}_n = \{\Gamma_{nm}\}$ — *сечение последовательности* $\{\sigma_m\} \to$ $\to \sigma$, *лежащее над* Γ_n, *то* $\{\widetilde{\Delta}_n\}$ — *цепь сечений последовательности* $\{\sigma_m\} \to \sigma$, *определяющий простой конец, соответствующий* $\overline{F}(e^{i\vartheta})$.

Правильной последовательностью для последовательности $\{\sigma_m\}$, сходящейся к σ, назовем последовательность $\{Z_m\}$, где $Z_m \in \overline{M}_m = M_m \cup PE(M_m)$.

Будем говорить, что *правильная последовательность* $\{Z_m\}$ *сходится к простому концу* Z последовательности $\{\sigma_m\} \to \sigma$, если для любых представителей $\{\widetilde{\Delta}_n\}$, где $\widetilde{\Delta}_n = \{\Gamma_{nm}\}$, $n \geq 1$, простого конца Z и, если $Z_m \in PE(M_m)$, $\{\Gamma_n^{(m)}\}$ простого конца Z_m выполняется условие: существует k_0 и функция $m(k)$, $k \geq k_0$, такие, что при $k \geq k_0$, $m \geq m(k)$ сечение Γ_{km} отделяет точку P_m от Z_m, если $Z_m \in M_m$, и от $\Gamma_i^{(m)}$ (i-as), если $Z_m \in PE(M_m)$.

Из определений немедленно следует

Теорема 14.5 *Пусть $\sigma_m = (M_m, P_m, p_m)$, $m \geq 1$, — последовательность односвязных римановых поверхностей гиперболического типа над $\overline{\mathbb{C}}$, которая нормально сходится к римановой поверхности $\sigma = (M, P, p)$, $\overline{F}_m : \overline{E} \to M_m \cup PE(M_m)$, $m \geq 1$, $\overline{F} : \overline{E} \to M \cup PE(M)$ — гомеоморфные отображения, конформные в E, и последовательность $f_m = p_m \circ F_m$ сходится к $f = p \circ F$ локально равномерно в E. Пусть $\{z_m\}$ — последовательность точек из E. Последовательность $\{z_m\}$ сходится к $z_0 \in \partial E$ тогда и только тогда, когда правильная последовательность $\{\overline{F}_m(z_m)\}$ сходится к простому концу Z последовательности $\{\sigma_m\} \to \sigma$, соответствующему простому концу $\overline{F}(z_0)$.*

Теорема 14.5 обобщает один результат Г. Д. Суворова [91].

В заключение установим теорему о сходимости последовательности функций, заданных в единичном круге и нормированных в трех граничных точках (простых концах).

Теорема 14.6 *Пусть $\sigma_m = (M_m, P_m, p_m)$, $m \geq 1$, последовательность односвязных римановых поверхностей гиперболического типа над $\overline{\mathbb{C}}$, которая нормально сходится к римановой поверхности $\sigma = (M, P, p)$. Пусть $\overline{H}_m : \overline{E} \to M_m \cup PE(M_m)$, $m \geq 1$, — некоторые гомеоморфизмы, конформные в E. Тогда*

I) *для любой последовательности точек $\{e^{i\vartheta_m}\}$ на ∂E существуют подпоследовательность $\overline{H}_{m_k}$ и простой конец Z_0 последовательности $\{\sigma_{m_k}\} \to \sigma$, такие, что правильная последовательность $\overline{H}_{m_k}(e^{i\vartheta_m})$ сходится к Z_0.*

Предположим, что $\{e^{i\vartheta_{km}}\}$, $k=1,\,2,\,3,$ — *три последовательности точек на* ∂E, *сходящиеся соответственно к трем различным точкам* $\{e^{i\vartheta_k}\}$, $k=1,\,2,\,3,$ *на* ∂E *и правильные последовательности* $\{\overline{H}_m(e^{i\vartheta_{km}})\}$ *сходятся соответственно к простым концам* Z_k *последовательности* $\{\sigma_m\}\to\sigma$, *соответствующим простым концам* X_k *предельной поверхности* σ, $k=1,\,2,\,3$.

II) *Если все три простых конца* Z_k, $k=1,\,2,\,3,$ *различны, то функции* $h_m=p_m\circ H_m$ *сходятся локально равномерно к* $h=p\circ H$ *при* $m\to\infty$, *где* $H=\overline{H}|_E$, $\overline{H}:\overline{E}\to M\cup PE(M)$ — *гомеоморфизм, конформный в* E, *переводящий точки* $e^{i\vartheta_k}$ *в простые концы* X_k, $k=1,\,2,\,3,$ *соответственно.*

III) *Если* $Z_1=Z_2\neq Z_3$, *то для любой точки* $\zeta_0\in\overline{E}\backslash\{e^{i\vartheta_3}\}$ *правильная последовательность* $H_m(\zeta_0)$ *сходится к* Z_1, *причем равномерно на компактах в* $\overline{E}\backslash\{e^{i\vartheta_3}\}$.

Доказательство. Пусть

$$F_m:(E,0)\to(M_m,P_m),\ m\geq 1,\quad F:(E,0)\to(M,P)$$

конформные отображения такие, что $f_m=p_m\circ F_m$ локально равномерно в E сходится к $f=p\circ F$ и $\overline{F}_m$, $m\geq 1$, $\overline{F}$ — их гомеоморфные продолжения на ∂E до соответствия простых концов. Тогда $T_m=(\overline{F}_m)^{-1}\circ\overline{H}_m:\overline{E}\to\overline{E}$ — дробно-линейные отображения.

I) Имеем $\overline{H}_m(e^{i\vartheta_m})=\overline{F}_m\circ T_m(e^{i\vartheta_m})$. Выберем из последовательности $T_m(e^{i\vartheta_m})$ подпоследовательность $T_{m_k}(e^{i\vartheta_{m_k}})$, сходящуюся к некоторой точке $e^{i\vartheta}\in\partial$E. Тогда по теореме 14.4 правильная последовательность $\overline{H}_{m_k}(e^{i\vartheta_{m_k}})$ сходится к простому концу последовательности $\{\sigma_{m_k}\}\to\sigma$, соответствующему простому концу $\overline{F}(e^{i\vartheta})$ и I) доказано.

Пусть теперь $\{\overline{H}_m(e^{i\vartheta_{km}})\}\to Z_k, k=1,2,3, m\to\infty$. По теореме 14.4 $e^{i\beta_{km}}=T(e^{i\vartheta_{km}})=(\overline{F}_m)^{-1}\circ\overline{H}_m(e^{i\vartheta_{km}})\to(\overline{F}_m)^{-1}(X_k)=e^{i\beta_k}$, $k=1,\,2,\,3$.

II) Если все три простых конца Z_k, $k=1,\,2,\,3,$ различны, то различны и X_k, а, значит, и $e^{i\beta_k}$, $k=1,\,2,\,3$. Так как

$$\frac{T_m(\zeta)-e^{i\beta_{1m}}}{T_m(\zeta)-e^{i\beta_{3m}}}\cdot\frac{e^{i\beta_{2m}}-e^{i\beta_{3m}}}{e^{i\beta_{2m}}-e^{i\beta_{1m}}}=\frac{\zeta-e^{i\vartheta_{1m}}}{\zeta-e^{i\vartheta_{3m}}}\cdot\frac{e^{i\vartheta_{2m}}-e^{i\vartheta_{3m}}}{e^{i\vartheta_{2m}}-e^{i\vartheta_{1m}}},\qquad(14.1)$$

то $T_m(\zeta)$ сходится равномерно в E к дробно-линейному отображению

$T(\zeta)$, такому, что

$$\frac{T(\zeta)-e^{i\beta_1}}{T(\zeta)-e^{i\beta_3}}\cdot\frac{e^{i\beta_2}-e^{i\beta_3}}{e^{i\beta_2}-e^{i\beta_1}}=\frac{\zeta-e^{i\vartheta_1}}{\zeta-e^{i\vartheta_3}}\cdot\frac{e^{i\vartheta_2}-e^{i\vartheta_3}}{e^{i\vartheta_2}-e^{i\vartheta_1}}.$$

Следовательно, T переводит точки $e^{i\vartheta_k}$ в $e^{i\beta_k}$, $k=1$, 2, 3 соответственно. Отсюда вытекает, что $h_m = p_m \circ H_m = p_m \circ F_m \circ T_m = f_m \circ T_m \to f \circ T = p \circ F \circ T = p \circ H = h$ локально равномерно в E, где $H = F \circ \mathrm{T}$. Так как $\overline{H}_m(e^{i\vartheta_k}) = \overline{F} \circ T(e^{i\vartheta_k}) = \overline{F}(e^{i\beta_k}) = X_k$, $k=1$, 2, 3, то утверждение II) доказано.

III) Если $Z_1 = Z_2 \neq Z_3$, то $e^{i\beta_1} = e^{i\beta_2} \neq e^{i\beta_3}$. Из (14.1) следует, что если $\zeta_0 \neq e^{i\vartheta_k}$, то $T_m(\zeta) \to e^{i\beta_1}$, т. е. $\overline{F}_m(\zeta_0) \to Z_1 = Z_2$, $m \to \infty$, причем равномерно на компактах в $\overline{E}\backslash\{e^{i\vartheta_3}\}$. Теорема 14.6 доказана.

Замечание 14.3 Если имеет место ситуация $Z_1 = Z_2 \neq Z_3$, то отсюда еще не следует, что функции $h_m = p_m \circ H_m$ сходятся к постоянной функции. Дело в том, что если вместо отмеченных точек $P_m = F_m(0)$, $m \geq 1$, взять точки $S_m = H_m(0)$, $m \geq 1$, то может оказаться, что римановы поверхности $\sigma_m(S_m)$ сходятся (нормально) к некоторой римановой поверхности $\sigma' = (M', P', p')$ и $h_m \to h$, $m \to \infty$, где $h = p' \circ H'$, а $H' : (E, 0) \to (M', P')$ — некоторое конформное отображение.

Пример 14.1 Римановы поверхности $\sigma_m = (E, (1-(1/m))i, p_m)$, где $p_m(\zeta) = 4\zeta^2[(1+i\zeta)^{-1} + m^{-1}(1+\zeta^2)^{-1}]^2$, $m \geq 1$, представляют собой двулистные поверхности, получающиеся из римановой поверхности функции $w = \sqrt{z}$ разрезанием вдоль двух дуг параболы $\{x+iy \in \mathbb{C} \mid x = y^2 - 1/4\}$ на одном из листов. Нетрудно проверить, что $\{\sigma_m\}$ сходится нормально к однолистной поверхности $\sigma = (D, -4, \mathrm{id}_D)$, где $D = \{x+iy \in \mathbb{C} \mid x < y^2 - 1/4\}$. Пусть $M_m = E$, $e^{i\vartheta_{1m}} = -1$, $e^{i\vartheta_{2m}} = 1$, $e^{i\vartheta_{3m}} = -i$, $H_m = \mathrm{id}_E$ — тождественное отображение, $m \geq 1$. Нетрудно проверить, что правильные последовательности $\{\overline{H}_m(e^{i\vartheta_{km}})\}$, $k = 1$, 2, сходятся к простому концу X последовательности $\{\sigma_m\} \to \sigma$, соответствующему бесконечно удаленной точке на ∂D, а $\{\overline{H}_m(e^{i\vartheta_{3m}})\}$ — к простому концу D, соответствующему точке $(-1/4)$. Однако

$$h_m(\zeta) = p_m \circ H_m(\zeta) = p_m(\zeta) \to p(\zeta) = 4\zeta^2/(1+i\zeta)^2 \not\equiv \mathrm{const},$$

поскольку последовательность $\{\sigma_m(0)\}$ сходится к римановой поверхности $\sigma' = (E, 0, p)$, $m \to \infty$.

ГЛАВА 5. ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА ЛЕВНЕРА-ХОПФА

§15. Гомотопические классы кривых на проколотой римановой поверхности

Введем некоторые необходимые в дальнейшем понятия.

Как известно, любая свободная группа ранга n изоморфна группе G_n, состоящей из классов эквивалентности $\overline{\mathcal{A}}$ слов $\mathcal{A}$, составленных из алфавита $\{x_1, \ldots, x_n, x_1^{-1}, \ldots, x_n^{-1}\}$ (см., напр., [54]). Пустое слово будем обозначать через $\emptyset$, длину слова $\mathcal{A}$ — через $|\mathcal{A}|$. По определению $|\emptyset| = 0$.

Один и тот же символ x_i^ε ($\varepsilon = \pm 1$, $i = 1, \ldots, n$) может входить в разные слова, а также по нескольку раз присутствовать в записи одного и того же слова $\mathcal{A}$. Пусть, например, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 x_i^\varepsilon \mathcal{A}_2$. Чтобы отличить это вхождение x_i^ε от других, будем указывать место вхождения $m = |\mathcal{A}_1| + 1$ и слово, куда входит символ x_i^ε. Таким образом, *вхождение d символа x_i^ε* есть тройка $d = (x_i^\varepsilon, m, \mathcal{A})$, где x_i^ε — *символ вхождения*, m — *место вхождения*, $\mathcal{A}$ — *слово вхождения*. Будем обозначать $x_i^\varepsilon = (d)$, $m = |d|$, $\mathcal{A} = w(d)$.

Отмеченным словом назовем совокупность $\mathfrak{A} = \{d_1, \ldots, d_m\}$, где $d_j = (x_{i(j)}^{\varepsilon(j)}, m_j, \mathcal{A})$, $j = 1, \ldots, k$, — различные вхождения. Если $|d_1| < |d_2| < \cdots < |d_k|$, то $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 x_{i(1)}^{\varepsilon(1)} \mathcal{A}_2 x_{i(2)}^{\varepsilon(2)} \mathcal{A}_3 \ldots x_{i(k)}^{\varepsilon(k)} \mathcal{A}_{k+1}$, где $\sum\limits_{j=1}^{l} (|A_j| + 1) = |d_l|$, $l = 1, \ldots, m$. Обратно, такой записи однозначно соответствует отмеченное слово $\mathfrak{A}$. Поэтому будем отождествлять $\mathfrak{A}$ с записью слова $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A}_1 * x_{i(1)}^{\varepsilon(1)} * \mathcal{A}_2 * x_{i(2)}^{\varepsilon(2)} * \mathcal{A}_3 * \cdots * x_{i(k)}^{\varepsilon(k)} * \mathcal{A}_{k+1},$$

где звездочки отмечают вхождения $x_{i(j)}^{\varepsilon(j)}$ в $\mathcal{A}$, $j = 1, \ldots, n$. В частности, если $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 x_i^\varepsilon \mathcal{A}_2$, $d = (x_i^\varepsilon, |\mathcal{A}_1| + 1, \mathcal{A})$, то $\{d\} = \mathcal{A}_1 * x_i^\varepsilon * \mathcal{A}_2$.

Пусть слово $\mathcal{A} = \prod_{i=1}^{p} x_{r(i)}^{\varepsilon_i}$, $p \geq 2$. Если $r(j) = r(j+1)$, $\varepsilon_j = -\varepsilon_{j+1}$ для некоторого $1 \leq j \leq p-1$, и слово $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \mathcal{T}_2$, где $\mathcal{T}_1 = \prod_{i=1}^{j-1} x_{r(i)}^{\varepsilon_i}$, $j \geq 2$, $\mathcal{T}_1 = \emptyset$, $j = 1$; $\mathcal{T}_2 = \prod_{i=j+i}^{p} x_{r(i)}^{\varepsilon_i}$, $j \leq p-1$, $\mathcal{T}_2 = \emptyset$, $j = p$, то совокупность $S = (\mathcal{A}, j, \mathcal{T})$ назовем *элементарным сокращением* слова $\mathcal{A}$ до слова $\mathcal{T}$ путем удаления вхождений $d_j = (x_{r(j)}^{\varepsilon_j}, j, \mathcal{A})$ и

$d_{j+1} = (x^{\varepsilon_{j+1}}_{r(j+1)}, j+1, \mathcal{A})$. Пусть $d_i = (x^{\varepsilon_i}_{r(i)}, i, \mathcal{A})$, $i = 1, \ldots, n$. Определим *S-образ вхождения* d_i как вхождение $S(d_i) = (x^{\varepsilon_i}_{r(i)}, i, \mathcal{T})$, если $i = 1, \ldots, j-1$, и $S(d_i) = (x^{\varepsilon_{i-2}}_{r(i-2)}, i-2, \mathcal{T})$, если $i = j+2, \ldots, p$. Если $\widetilde{d}_i = S(d_i)$, то d_i будем называть *S-прообразом вхождения* $\widetilde{d}_i$ и писать $d_i = S^{-1}(\widetilde{d}_i)$.

Пусть $S_i = (\mathcal{A}_i, j(i), \mathcal{A}_{i+1})$, $i = 1, \ldots, n$, — некоторая совокупность элементарных сокращений. Тогда

$$S = (\mathcal{A}_1, j(1), \mathcal{A}_2, j(2), \mathcal{A}_3, \ldots, j(n), \mathcal{A}_{n+1})$$

назовем *сокращением слова* $\mathcal{A}_1$ до $\mathcal{A}_{n+1}$. Если $\mathcal{A}_{n+1} \neq \emptyset$, то для любого вхождения $\widetilde{d}$, такого, что $w(\widetilde{d}) = \mathcal{A}_{n+1}$, определим его *$S$-прообраз* $S^{-1}(\widetilde{d}) = S_1^{-1} \circ S_2^{-1} \circ \ldots \circ S_n^{-1}(\widetilde{d})$. Для всех d, являющихся S-прообразами, определен *S-образ* $\widetilde{d} = S_n \circ S_{n-1} \circ \ldots \circ S_1(d)$. Если d не является S-прообразом ни для какого вхождения $\widetilde{d}$ в $\mathcal{A}_{n+1}$, то d назовем *S-сократимым.* Если S — сокращение слова $\mathcal{A}$ до $\mathcal{B}$, T — сокращение слова $\mathcal{B}$ до $\mathcal{C}$, то очевидным образом можно определить *суперпозицию* $T \circ S$, являющуюся сокращением слова $\mathcal{A}$ до $\mathcal{C}$.

Если вхождение d является S-сократимым, то существует такое k, $1 \leq k \leq n-1$, что для сокращения $S^{(k)} = S_k \circ S_{k-1} \circ \ldots \circ S_1$ слова $\mathcal{A}_1$ до слова $\mathcal{A}_{k+1}$ вхождение $d^{(k)} = S^{(k)}(d)$ является S_{k+1}-сократимым, т. е. $\mathcal{A}_{k+2}$ получается из $\mathcal{A}_{k+1}$ элементарным сокращением S_{k+1} путем удаления вхождения $d^{(k)}$ и некоторого вхождения $d_1^{(k)}$. Пусть вхождение $d_1 = (S^{(k)})^{-1}(d_1^{(k)})$. Назовем это вхождение *S-антиподом вхождения* d.

Если S_i — сокращение слова $\mathcal{A}$ до $\mathcal{B}_i$, и $\mathcal{B}_i$ приведены, т. е. не допускают элементарных сокращений, $i = 1, 2$, то $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$ (см., напр., [54]). Два слова $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ *эквивалентны* (пишем $\mathcal{A}_1 \sim \mathcal{A}_2$), если существует приведенное слово $\mathcal{B}$, такое, что либо $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \mathcal{B}$, либо существует сокращение слова $\mathcal{A}_i$ до слова $\mathcal{B}$, $i = 1, 2$. Таким образом, у любого класса эквивалентности $\overline{\mathcal{A}}$ слов $\mathcal{A}$ существует единственный представитель, являющийся приведенным и называющийся *приведенной записью* для $\overline{\mathcal{A}}$.

Лемма 15.1 *Если $\mathcal{C}$ — приведенное слово, S и T — некоторые сокращения слов $\mathcal{E}$ и $\mathcal{D}$ до $\mathcal{C}$ соответственно, то существует слово*

$\mathcal{F}$ и сокращения U и V слова $\mathcal{F}$ до слов $\mathcal{E}$ и $\mathcal{D}$ соответственно, такие, что для любого вхождения d в $\mathcal{C}$ имеем

$$(S \circ U)^{-1}(d) = (T \circ V)^{-1}(d).$$

Доказательство. Если $\mathcal{C} = \prod_{i=1}^{s} x_{k(i)}^{\varepsilon_i}$, то

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \prod_{i=1}^{s} (x_{k(i)}^{\varepsilon_i} \mathcal{E}_i), \quad \mathcal{D} = \mathcal{D}_0 \prod_{i=1}^{s} (x_{k(i)}^{\varepsilon_i} \mathcal{D}_i),$$

где

$$\Big(x_{k(i)}^{\varepsilon_i}, \sum_{l=0}^{i} (|\mathcal{E}_i| + 1), \mathcal{E}\Big) = T\Big(\Big(x_{k(i)}^{\varepsilon_i}, \sum_{l=0}^{i} (|\mathcal{D}_i| + 1), \mathcal{D}\Big)\Big) =$$

$$= (x_{k(i)}^{\varepsilon_i}, i, \mathcal{C}), \quad i = 1, \ldots, s.$$

Тогда слова $\mathcal{E}_i$, $\mathcal{D}_i$, $i = 0, \ldots, s$, эквивалентны пустому и слово

$$\mathcal{F} = \mathcal{E}_0 \mathcal{D}_0 \prod_{i=1}^{s} (x_{k(i)}^{\varepsilon_i} \mathcal{E}_i \mathcal{D}_i)$$

является искомым. Лемма 15.1 доказана.

Если $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 * \mathcal{B} * \mathcal{A}_2$, то любое сокращение S слова $\mathcal{A}$ индуцирует сокращение слова $\mathcal{B}$ и определено слово $S(\mathcal{B}) = \emptyset$, если любой элемент множества $Y = \{w(d) = A, |\mathcal{A}_1| + 1 \leq |d| \leq |\mathcal{A}_1| + |\mathcal{B}|\}$, является S-сократимым, и $S(\mathcal{B}) = \prod_{d \in Y} (S(d))$ в противном случае.

Пусть N — некоторая абстрактная риманова поверхность. *Гирляндой римановых поверхностей* над N назовем пару (X, p), где X — компактный двумерный полиэдр, $p : X \to N$ — непрерывное отображение, удовлетворяющее условиям:

1) p инъективно на каждом замкнутом симплексе в X (следовательно, p индуцирует на замкнутых 2-симплексах в X ориентацию с N);

2) каждый замкнутый 1-симплекс $\overline{s}_1$ принадлежит не более, чем двум замкнутым 2-симплексам; если $\overline{s}_1$ принадлежит двум 2-симплексам, то они индуцируют на $\overline{s}_1$ противоположные ориентации.

В дальнейшем вместо термина «замкнутый симплекс» будем использовать термин «симплекс». Если (X, p) — гирлянда над N, то в силу условия 2) все 1-симплексы гирлянды делятся на три типа:

внутренние, *граничные* и *чисто одномерные*, в зависимости от того, скольким 2-симплексам они принадлежат: двум, одному или ни одному.

Пусть (X_i, p_i), $i = 1, \ldots, k$, — гирлянды над N. ***Несвязной суммой*** $\sqcup_{i=1}^k (X_i, p_i)$ этих ***гирлянд*** назовем гирлянду (X, p), где $X = \sqcup_{i=1}^k X_i$ — несвязная сумма X_i, $p|_{X_i} = p_i$, $i = 1, \ldots, k$.

Определим операцию склеивания для гирлянды над N. Пусть (X, p) — гирлянда над N, не обязательно связная, A_1 и A_2 — подмножества в X такие, что $p(A_1) = p(A_2)$, и $A_1 \cap A_2$ состоит из не более, чем конечного числа точек, и выполняется одно из двух условий:

1) A_i — одноточечные множества, $i = 1, 2$;

2) $A_i = \bigcup_{j=1}^k \overline{s}_1^{ij}$ — объединение конечного числа 1-симплексов одного типа; существует простая кривая $\gamma = \prod_{j=1}^k \beta^{ij}$ в X такая, что $|\beta^{ij}| = \overline{s}_1^{ij}$, $p(\beta^{2j}) = (p(\beta^{1,k+1-j}))^-$ для всех i и j; если 1-симплексы, входящие в A_i — граничного типа, то γ_i обходит границы 2-симплексов в X в положительном направлении; $p(\gamma_i)$ — простая кривая при $i = 1, 2$.

Пусть X' — факторпространство X по отношению эквивалентности $P_1 \sim P_2$, если $P_1 = P_2$ или $P_1 \in A_i$, $P_2 \in A_j$, $i \neq j$, и $p(P_1) = p(P_2)$. Определим $p' : X' \to N$ как единственное отображение, удовлетворяющее условию $p' \circ h = p$, где $h : X \to X' := X/\sim$ — факторизующее отображение. Назовем (X', p') ***гирляндой*** над N, ***полученной в результате склеивания*** A_1 и A_2. Отметим, что триангуляция X может не индуцировать триангуляцию X'. Если при склеивании получается, что два различных 2-симплекса имеют на своей границе два общих симплекса на единицу меньшей размерности, то следует предварительно проделать барицентрическое подразделение триангуляции в X. Очевидна следующая

Лемма 15.2 *Если $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, то эйлеровы характеристики X и X' связаны неравенством $\chi(X') \geq \chi(X)$.*

Введем операцию разрезания гирлянды (X, p). Пусть $\overline{s}_2$ — 2-симплекс в X, граница которого содержит два внутренних 1-симплекса $\overline{s}_1'$ и $\overline{s}_1''$; третий — $\overline{s}_1'''$ может быть как внутренним, так и граничным. Пусть $X_1 = \overline{X \backslash \overline{s}_2}$, $p_1 = p|_{X_1}$; (X_2, p_2) — несвязная сумма (X_1, p_1) и $(\overline{s}_2, p|_{\overline{s}_2})$, $j_1 : X_1 \to X_2$ и $j_2 : \overline{s}_2 \to X_2$ — вложения. Если $\overline{s}_1'''$ — граничный, то склеиваем в (X_2, p_2) симплексы $j_1(\overline{s}_1''')$ и $j_2(\overline{s}_1''')$, а если $\overline{s}_1'''$ — внутренний, то склеиваем соответственно $j_1(\overline{s}_1'' \cup \overline{s}_1''')$ и $j_2(\overline{s}_1'' \cup \overline{s}_1''')$. В результате получаем гирлянду, которую назовем *гирляндой, полученной разрезанием* (X, p) *вдоль* $\overline{s}_1'$. Симплексы $j_1(\overline{s}_1')$ и $j_2(\overline{s}_1')$ назовем *берегами разреза* гирлянды (X, p) вдоль $\overline{s}_1'$. Ясно, что если $\overline{s}_1'''$ — граничный симплекс, то разрезание не меняет эйлеровой характеристики.

Аналогично можно определить разрез гирлянды вдоль простой дуги δ, состоящей из конечного числа внутренних 1-симплексов, соединяющей внутреннюю точку X с внутренней или граничной. Если дуга δ ориентирована, то имеет смысл говорить о правом δ^+ и левом δ^- берегах разреза.

Пусть (X, p) — гирлянда над N, $s_1, \dots, s_m$ — все 2-симплексы в X. В несвязной сумме $\sqcup_{i=1}^m (s_i, p|_{s_i})$ склеим все граничные 1-симплексы $\overline{s}_1'$ и $\overline{s}_1''$ 2-симплексов s_i и s_j, которые переходят в один и тот же симплекс при вложениях $s_i \to X$, $s_j \to X$. В результате получим гирлянду, которую назовем *разборкой гирлянды* (X, p). Если (X, p) не содержит чисто одномерных симплексов и изолированных точек, то ясно, что (X, p) получается из своей разборки склеиванием некоторых вершин.

Назовем подгирлянду (X_1, p_1) гирлянды (X, p) *чисто двумерной частью* (X, p), если все ее точки не изолированы, а все 1-симплексы — внутренние. *Чисто двумерная часть* называется *минимальной*, если она не содержит собственных чисто двумерных подчастей.

Теперь введем класс $\mathfrak{M}$ кривых на компактной римановой поверхности N, необходимый для формулировки основной теоремы следующего параграфа, и исследуем некоторые свойства кривых этого класса. Пусть ∞_N — некоторая фиксированная точка в N. Определим $\mathfrak{M}$ как множество замкнутых кривых β в N, удовлетворяющих условиям:

1) β локально проста, т. е. для любого пути $z : [0, 1] \to N$, представляющего β, 1-периодическое продолжение $\widetilde{z} : \mathbb{R} \to N$ отображения z локально инъективно;

2) носитель $|\beta|$ кривой β разбивает N на конечное число частей;

3) β не проходит через ∞_N;

4) если точки t_1, t_2, $t_3 \in [0, 1]$ таковы, что $z(t_1) = z(t_2) = z(t_3) = z_0 \in N$, и отображения $g_i : \mathbb{R} \to N$ определены по формуле $g_i(t) = \widetilde{z}((2t-1)r + t_i)$, $i = 1, 2, 3$, а $z_i : [0, 1] \to N$ — по формуле $z_i(t) = g_i(t)$, $0 \le t \le 1/2$, $z_i(t) = g_{i+1}(t)$, $1/2 \le t \le 1$, $i = 1, 2$, то кривые

α_1 и α_2 с представлениями z_1 и z_2 локально просты при малых $r > 0$ и существует кривая, подходящая к ним обеим «слева» в точке z_0.

Если $\beta \in \mathfrak{M}$, то $N \backslash |\beta|$ состоит из конечного числа компонент связности $D_0, \dots, D_l$. В силу условия 2) существует разве лишь конечное число точек на $|\beta|$, ни в какой окрестности которых $|\beta|$ не гомеоморфно отрезку вещественной оси. Выберем систему точек b_j, $j = 0, 1, \dots, m$, таких, что в каждой компоненте связности содержится по крайней мере одна из этих точек, при этом $b_0 = \infty$. Ясно, что существует конечное число кривых ω_k^j в D_j, разбивающих D_j на конечное число односвязных областей, каждая из которых содержит ровно одну из точек b_j. Пусть $G_0, G_1, \dots, G_m$ — все такие области. Можно считать, что $b_j \in G_j$, $j = 0, 1, \dots, m$.

Пусть $B = \bigcup_{j=0}^{m} \{b_j\}$, $A = N \backslash B$, точка a — начало кривой β, γ_0, $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ — простые петли в A с началом в точке a, попарно непересекающиеся (за исключением точки a), такие, что для любой кривой ω_k, соединяющей точку b_0 с точкой b_j, индекс пересечения $\kappa(\gamma_j, \omega_k) = \delta_{jk}$ (δ_{jk} — символ Кронеккера), $\kappa(\gamma_j, \omega_k) = -1$, $k = 1, \dots, m$ (по поводу индекса пересечения см., напр., [43], а также §4). Пусть $\rho = \rho_N$ — род поверхности N. В случае $\rho > 0$ пусть a_1, $b_1, \dots, a_\rho$, b_ρ — стандартный набор простых петель в A с началом в точке a, определяющий базис гомологий N. Тогда гомотопические классы $[\gamma_1], \dots, [\gamma_m]$, и, если $\rho > 0$, $[a_1], [b_1], \dots, [a_\rho], [b_\rho]$, образуют базис свободной группы $\pi_1(A, a)$, где $\pi_1(A, a)$ — фундаментальная группа A в точке a. Можно подобрать эти кривые так, чтобы $\prod_{j=0}^{m} [\gamma_j] = \prod_{i=1}^{\rho} [[a_i], [b_i]]$, если $\rho > 0$, $\prod_{j=0}^{m} [\gamma_j] = e$, если $\rho = 0$ (здесь и далее $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ — коммутатор элементов x и y).

Для любого непрерывного отображения $f : X \to Y$ через $f_\#$ будем обозначать индуцируемый f гомоморфизм фундаментальных групп. Справедлива

Лемма 15.3 *Пусть D — жорданова область в $\mathbb{C}$, $z_0 \in D$, η — простая замкнутая кривая, обходящая границу D в положительном направлении, непрерывное отображение $h : \overline{D} \backslash \{z_0\} \to A$ является аналитическим в $D \backslash \{z_0\}$, существует $\lim_{z \to z_0} h(z) = b_k$ и для некоторого локального параметра ζ в окрестности точки b_k*

$$\zeta(h(z)) = \sum_{j=l}^{\infty} c_j (z - z_0)^j, \quad c_l \neq 0, \ (l \geq 1),$$

причем $h(z_1) = a$, *где* z_1 *— начало кривой* η. *Тогда для некоторого* $[\alpha] \in \pi_1(A, a)$ *имеем* $h_{\#}([\eta]) = [\alpha][\gamma_k]^l[\alpha]^{-1}$.

Доказательство. Отображение $\zeta \circ h$ имеет в точке z_0 устранимую особенность. Хорошо известно, что в достаточно малой окрестности U точки z_0 существует однозначная ветвь $w = \varphi(z)$ функции $\sqrt[l]{\zeta(h(z))}$, которая является однолистной в U. Тогда $\zeta(h(z)) = [\varphi(z)]^l$, $z \in U$. Пусть γ — кривая, которая при отображении $w = \varphi(z)$ переходит в окружность $\{|w| = r^{1/l}\}$, $r > 0$. Тогда $\zeta(h(\gamma))$ есть l-кратно обходимая окружность $\{|\zeta| = r\}$, т. е. $\zeta(h(z)) = \delta^l$, где δ имеет представление

$$\zeta = \zeta(t) = r \exp[(2\pi t + \theta)i], \quad 0 \le t \le 1. \tag{15.1}$$

Будем считать, что r настолько мало, что $|\zeta^{-1}(\delta)| \cap |\gamma_k| = \emptyset$. Пусть ε — кривая, соединяющая в $\overline{D}\backslash\{z_0\}$ точку z_1 с началом c кривой γ, а D'_k — односвязная область в N, содержащая точку b_k и ограниченная кривой γ_k, ε' — кривая в $\overline{D}'_k\backslash\{b_k\}$, соединяющая точку a с точкой $h(c)$, и $\gamma' = \zeta^{-1}(\delta)$. Очевидно, что η гомотопна кривой $\varepsilon\gamma\varepsilon^-$ в $D\backslash\{z_0\}$, а γ_k — кривой $\varepsilon'\gamma'(\varepsilon')^-$, причем $h(\gamma) = \zeta^{-1}(\delta^l) = (\zeta^{-1}(\delta))^l = (\gamma')^l$. Значит,

$$h_{\#}([\eta]) = h_{\#}([\varepsilon\gamma\varepsilon^-]) = [h(\varepsilon)h(\gamma)h(\varepsilon)^-] = [h(\varepsilon)(\gamma')^l h(\varepsilon)^-] =$$

$$= [\alpha\varepsilon'(\gamma')^l(\varepsilon')^-\alpha^-] = [\alpha][\varepsilon'\gamma'(\varepsilon')^-]^l[\alpha]^{-1} = [\alpha][\gamma_k]^l[\alpha]^{-1},$$

где $[\alpha] = [h(\varepsilon)(\varepsilon')^-]$, что и требовалось доказать.

Лемма 15.4 a) *Множество* $W = |\beta| \cup \left(\cup_{k,j}|\omega_k^j|\right)$ *является сильным деформационным ретрактом для* A.
b) *Пусть* α *— петля в* A *с началом в точке* a, *точка* $b \in \partial G_k$. *Тогда кривая* $\gamma^{(\alpha)} = \alpha\gamma_k\alpha^-$ *гомотопна в* A *кривой* $\tau\sigma\tau^-$, *где* σ *— замкнутая локально простая кривая с началом в точке* b, *однократно обходящая границу области* G_k *в положительном направлении,* τ *— кривая в* W, *соединяющая точки* a *и* b.

Замечание. В фразе «однократно обходящая границу области G_k» граница понимается в топологии простых концов G_k.

Доказательство. a) Для любого j, $0 \le j \le m$, пусть Φ_j — конформное отображение односвязной области G_j на единичный круг E, при котором $\Phi_j(b_j) = 0$, а $H_j(z,t) = (1-t)\Phi_j(z) + t\Phi_j(z)|\Phi_j(z)|$, $z \in G_j\backslash\{b_j\}$. Тогда

$$F(z,t) = \begin{cases} z, & z \in W, \\ \Phi_j \circ H_j(z,t), & z \in G_j\backslash\{b_j\}, \end{cases} \quad (0 \le t \le 1)$$

является сильной деформационной ретракцией A в W. Непрерывность F нетрудно показать с помощью теории Каратеодори о соответствии границ при конформном отображении (см., напр., [30]).

b) Как и при доказательстве леммы 15.3, используем тот факт, что γ_j гомотопна в A кривой $\varepsilon'\gamma'(\varepsilon')^-$, где $\zeta(\gamma') = \delta$ имеет представление (15.1) (в обозначениях этой леммы). Так как функция $\Phi_j \circ \zeta^{-1}$ однолистна в окрестности начала координат, то при малых r кривая $\Phi_j(\gamma') = \Phi_j \circ \zeta^{-1}(\delta)$ звездна относительно начала координат (см., напр., [30], с.166). Пусть $\overline{\Phi}_j$ — продолжение Φ_j до гомеоморфизма простых концов. Выберем θ таким образом, чтобы $\varphi = \arg(\Phi_j \circ \zeta^{-1}(b_j + r\, e^{i\theta})) = \arg(\overline{\Phi}_j(\bar{b}))$, где $\bar{b}$ — любой из простых концов области G_j, носителем которого является точка b. Тогда $H_j(\gamma', 1)$ есть кривая γ'' с представлением

$$w = w(t) = \exp[i(2\pi t + \varphi)], \quad 0 \le t \le 1,$$

а $F(\gamma', 1)$ — кривая $\overline{\Phi}_j^{-1}(\gamma'')$, которая имеет началом точку b и однократно обходит ∂G_j в положительном направлении. Наконец, $\gamma^{(\alpha)}$ гомотопна кривой $\alpha\varepsilon'\gamma'(\alpha\varepsilon')^- = F(\alpha\varepsilon', 0)F(\gamma', 0)F(\alpha\varepsilon', 0)^-$, а та, в свою очередь, — кривой $F(\alpha\varepsilon', 1)F(\gamma', 1)F(\alpha\varepsilon', 1)^-$, откуда следует справедливость утверждения п. b) леммы с кривой $\tau = F(\alpha\varepsilon', 1)$. Лемма 15.4 доказана.

Пусть $\beta \in \mathfrak{M}$. Тогда в силу п. 1) определения множества $\mathfrak{M}$ существует конечное число простых кривых $\widetilde{\beta}_1, \ldots, \widetilde{\beta}_n$, таких, что $\beta = \prod_{j=1}^{n} \widetilde{\beta}_j$. В силу того что $|\beta|$ разбивает N на конечное число частей, пересечение $|\widetilde{\beta}_i| \cap |\widetilde{\beta}_j|$ состоит из не более, чем конечного числа точек и дуг. Поэтому, разбивая в случае необходимости кривые $\widetilde{\beta}_j$ на более мелкие части, можем считать, что при $i \ne j$ пересечение $|\widetilde{\beta}_i \cap |\widetilde{\beta}_j|$ либо пусто, либо состоит из одной точки, концевой как для $\widetilde{\beta}_i$, так и для $\widetilde{\beta}_j$, либо $|\widetilde{\beta}_i| = |\widetilde{\beta}_j|$. В последнем случае, применяя п.4) определения $\mathfrak{M}$, убеждаемся, что $\widetilde{\beta}_i$ и $\widetilde{\beta}_j$ ориентированы одинаково, т. е. $\widetilde{\beta}_i = \widetilde{\beta}_j$. Поэтому $\beta = \prod_{j=1}^{q} \beta_{r(j)}$, $1 \le r(j) \le t$, где $\beta_1, \ldots, \beta_t$ —

попарно различные кривые, $\beta_{r(j)} = \widetilde{\beta}_j$, $j = 1, \dots, n$. Обозначим кривые ω_k^j, $k = 1, \dots, N_j$, $j = 0, \dots, m$, через $\beta_{t+1}, \dots, \beta_\nu$. Разбивая эти кривые на более мелкие части, можем добиться того, чтобы они были простыми и пересекались между собой разве лишь в концевых точках.

Любой кривой α вида $\alpha = \prod_i \beta_{l(i)}^{\varepsilon_i}$ ($\varepsilon_i = \pm 1$) сопоставим слово $g(\alpha) = \prod_i x_{l(i)}^{\varepsilon_i}$ из алфавита $x_i^{\pm 1}$, $i = 1, \dots, \nu$. Через e будем обозначать единичный элемент группы $\pi_1(A, a)$.

Лемма 15.5 a) *Для любой замкнутой кривой γ в A с началом в точке a, не гомотопной нулю, существует кривая $\widetilde{\gamma} = \prod_{i=1}^s \beta_{l(i)}^{\varepsilon_i}$ ($\varepsilon_i = \pm 1$) такая, что $[\gamma] = [\widetilde{\gamma}]$ в $\pi_1(A, a)$.*

b) *Если γ', γ'' — замкнутые кривые в A с началом в точке a, такие, что $\widetilde{\gamma}' = \prod_{i=}^s \beta_{l(i)}^{\varepsilon_i}$, $\widetilde{\gamma}'' = \prod_{i=1}^u \beta_{k(i)}^{\eta_i}$, то $[\gamma'] = [\gamma'']$ в $\pi_1(A, a)$ тогда и только тогда, когда соответствующие им слова $g(\widetilde{\gamma}')$ и $g(\widetilde{\gamma}'')$ эквивалентны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. a) Разбиение W на части $|\beta_1|, \dots, |\beta_\nu|$ задает некоторую триангуляцию (K, f) для W, где $f : |K| \to W$ — гомеоморфизм пространства $|K|$ комплекса K на W (см. [87]). Рассмотрим группу ломаных $E(K, v_0)$ комплекса K с вершиной $v_0 = f^{-1}(a)$. Согласно [87], гл. 3, §6, группа $E(K, v_0)$ канонически изоморфна фундаментальной группе $\pi_1(|K|, v_0)$; обозначим этот иэоморфизм через ψ. Тогда $h = f_\# \circ \psi : E(K, v_0) \to \pi_1(W, a)$ — также изоморфизм. Пусть v_{j1} и v_{j2} — вершины K (точки $|K|$), соответствующие началу и концу кривой β_j при отображении f^{-1}. Обозначим $e_j^{(1)} = (v_{j1}, v_{j2})$, $e_j^{(-1)} = (v_{j2}, v_{j1})$, $e_j^{(0)} = (v_{j1}, v_{j1})$.

Так как h сюръективно, и в силу леммы 15.4 W — сильный деформационный ретракт для A, то для замкнутой кривой γ в A с началом в точке a существует ломаная такая, что $h([\zeta]) = [\gamma]$. Используя определение изоморфизма ψ (см. [87], с. 179), нетрудно проследить, что если ζ имеет вид $\zeta = \prod_{i=1}^r e_{n(i)}^{(k_i)}$ ($k_i = 0, \pm 1$), то $h([\zeta]) = \left[{}^* \prod_{i=1}^r \beta_{n(i)}^{k_i}\right]$, где знак * означает, что произведение берется по всем сомножителям, для которых $k_i \neq 0$. Поэтому $[\gamma] = \left[{}^* \prod_{i=1}^r \beta_{n(i)}^{k_i}\right]$, что и требовалось установить.

b) Если $[\gamma'] = [\gamma'']$ в $\pi_1(A,a)$, то $[\widetilde{\gamma}'] = [\widetilde{\gamma}'']$ в $\pi_1(W,a)$ и, значит, $[\zeta'] = h^{-1}([\widetilde{\gamma}']) = h^{-1}([\widetilde{\gamma}'']) = [\zeta'']$. Пусть $\zeta' = \prod_{i=1}^{s} e_{l(i)}^{(\varepsilon_i)}$, $\zeta'' = \prod_{i=1}^{u} e_{k(i)}^{(\eta_i)}$. Тогда ломаные ζ' и ζ'' эквивалентны. Следовательно, существует последовательность ломаных $\zeta' = \zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}, \zeta_n = \zeta''$ такая, что ζ_i и ζ_{i+1} просто эквивалентны, $i = 0, \ldots, n-1$ (см. [87], с. 177). Пусть $\zeta_i = \prod_{j=1}^{s(i)} e_{l(j,i)}^{\varepsilon(j,i)}$. Покажем, что слова

$$\mathfrak{A}_i = \prod_{j=1}^{s(i)} x_{l(j,i)}^{\varepsilon(j,i)} \quad \text{и} \quad \mathfrak{A}_{i+1} = \prod_{j=1}^{s(i+1)} x_{l(j,i+1)}^{\varepsilon(j,i+1)}$$

эквивалентны (считаем $x_k^0 = \emptyset$). Из определения простой эквивалентности ломаных следует, что одна из ломаных ζ_i, ζ_{i+1}, скажем ζ_{i+1}, получается из другой — ζ_i — заменой двух последовательных ребер $e'(v,v')$ и $e'' = (v', v'')$ на ребро $e = (v, v'')$, причем v, v' и v'' принадлежат одному симплексу s. Так как K одномерен, то s либо одномерен, либо нульмерен. Если $v = v'$, то $(v, v') = e_j^{(0)}$ для некоторого j, $(v', v'') = (v, v'')$ и $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}_{i+1}$. Аналогично рассматривается случай $v' = v''$. Если же $v = v'' \not\equiv v'$, то $e' = e_j^{(\varepsilon)}$, $e'' = e_j^{(-\varepsilon)}$ для некоторого j. Значит, $\mathfrak{A}_{i+1}$ получается из $\mathfrak{A}_i$ исключением символов x_j^{ε} и $x_j^{-\varepsilon}$, стоящих рядом, т. е. $\mathfrak{A}_i$ и $\mathfrak{A}_{i+1}$ эквивалентны, $i = 1, \ldots, n-1$. Поэтому эквивалентны слова $\mathfrak{A}_0$ и $\mathfrak{A}_n$.

Обратно, пусть слова $\mathfrak{A}' = g(\widetilde{\gamma}')$ и $\mathfrak{A}'' = g(\widetilde{\gamma}'')$ эквивалентны. Покажем, что $[\gamma'] = [\gamma'']$ в $\pi_1(A,a)$. Достаточно рассмотреть случай, когда $\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{A}''$ просто эквивалентны. Если $\mathfrak{A}''$ получается из $\mathfrak{A}'$ исключением символов x_j^{ε} и $x_j^{-\varepsilon}$, стоящих рядом, то ломаная ζ'' получается из ζ' заменой ребер $e_j^{(1)}$ и $e_j^{(-1)}$ на ребро $e_j^{(0)}$. Тогда очевидно, что ζ просто эквивалентна как ζ', так и ζ'', т. е. ломаные ζ' и ζ'' эквивалентны. Значит, $[\widetilde{\gamma}'] = h([\zeta']) = h([\zeta'']) = [\widetilde{\gamma}'']$ и, в силу п. а), $[\gamma'] = [\gamma'']$. Лемма 15.5 доказана.

Следствие 15.1 *Соответствие g_*, сопоставляющее элементу $[\gamma] \in \pi_1(A,a)$ элемент свободной группы, являющийся классом эквивалентности $[\mathfrak{A}]$ слова $\mathfrak{A} = g(\widetilde{\gamma})$, является мономорфизмом.*

Следствие 15.2 *Для любого $[\gamma] \in \pi_1(A,a), [\gamma] \neq e$, существует кривая $\beta = \prod_i \beta_{l(i)}^{\varepsilon_i} \in [\gamma]$ такая, что слово $\mathcal{C} = \prod_i x_{l(i)}^{\varepsilon_i}$ приведено.*

Обозначим $\mathcal{C} = \mathfrak{N}([\gamma])$. По определению полагаем $\mathfrak{N}(e) = \emptyset$.

§16. Основная теорема

Пусть $[\pi_1, \pi_1]$ — коммутант группы $\pi_1(A, a)$. Для любого $[\delta] \in \in [\pi_1, \pi_1]$ обозначим через $\Delta([\delta], \rho)$ множество наборов $d = \{[\delta_{ij}], i = 1, 2, j = 1, \ldots, \rho\}$ элементов из $\pi_1(A, a)$ таких, что $[\delta]$ представим в виде произведения ρ коммутаторов

$$[\delta] = \prod_{j=1}^{\rho} [[\delta_{1j}], [\delta_{2j}]] \,. \tag{16.1}$$

Если $[\delta] \neq e$, то по определению полагаем $\Delta([\delta], 0) = \emptyset$; для $[\delta] = e$ пусть $\Delta([\delta], 0) = \{e\}$. Теперь определим *степень элемента* $[\delta]$

$$\deg[\delta] = \min\{\rho \in \mathbb{Z}_+ \mid \Delta([\delta], \rho) \neq \emptyset\}.$$

Обозначим через $\pi_1^+(A, a)$ полугруппу в $\pi_1(A, a)$, порожденную элементами $[\alpha][\gamma_j][\alpha]^{-1}$, $j = 1, \ldots, m$, $[\alpha] \in \pi_1(A, a)$, а через $\pi_{1,0}^n(A, a)$ — множество элементов вида

$$\prod_{i=1}^{n} [\alpha_i][\gamma_0][\alpha_i]^{-1}, \quad [\alpha_i] \in \pi_1(A, a), \ i = 1, \ldots, n. \tag{16.2}$$

Пусть $\Sigma_n(\beta, \rho)$ — класс римановых поверхностей σ над N рода ρ, ограниченных кривой β, для которых $n_\sigma(\infty_N) = n$, и пусть

$$S_n(\beta, \rho_0) = \cup_{\rho \leq \rho_0} \Sigma_n(\beta, \rho).$$

Теорема 16.1 *Пусть $\beta \in \mathfrak{M}$, ρ_0, $n \in \mathbb{Z}_+$. Для того чтобы множество $S_n(\beta, \rho_0)$ было непусто, необходимо и достаточно, чтобы $[\beta]$ было представимо в виде*

$$[\beta] = [\beta^+][\beta_0][\delta], \tag{16.3}$$

где $[\beta^+] \in \pi_1^+(A, a)$, $[\beta_0] \in \pi_{1,0}^n(A, a)$, $[\delta] \in [\pi_1, \pi_1]$, $\deg[\delta] = \rho \leq \rho_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Пусть $\sigma = (M, p) \in \in \Sigma_n(\beta, \rho)$, $\rho \leq \rho_0$. Будем рассматривать случай $\rho > 0$, поскольку случай $\rho = 0$ разбирается вполне аналогично, только местами доказательство упрощается.

Пусть $\overline{\sigma} = (\overline{M}, \overline{p})$ — каноническое расширение σ, α — кривая на ∂M такая, что $\overline{p} \circ \alpha = \beta$, точка a' — начальная точка кривой α. Пусть δ'_{ij}, $i = 1, 2$, $j = 1, \ldots, \rho$, — система из (2ρ) простых петель на $\overline{M}$ в точке a', попарно непересекающихся (за исключением точки a'), индуцирующих базис гомологий в $\overline{M}$, причем $|\delta'_{ij}| \subset M \cup \{a'\}$, $p(|\delta'_{ij}|) \cap B = \emptyset$, $i = 1, 2$, $j = 1, \ldots, \rho$. Тогда $\sigma_1 = (M_1, p_1)$, где $M_1 = M \setminus \cup_{i,j} |\delta'_{ij}|$, $p_1 = p|_{M_1}$, — односвязная риманова поверхность. Как хорошо известно, кривые δ'_{ij} можно выбрать таким образом, чтобы σ_1 была ограничена кривой $\beta p(\omega)$, где

$$\omega = \prod\nolimits_{j=1}^{\rho} \delta'_{1j}\delta'_{2j}(\delta'_{1j})^{-}(\delta'_{2j})^{-}.$$

Пусть $\overline{\sigma}_1 = (\overline{M}_1, \overline{p}_1)$ — каноническое расширение σ_1 и α' — простая кривая, обходящая ∂M_1, точнее, $\alpha' = \beta' \prod_{j=1}^{\rho} \delta''_{1j}\delta''_{2j}\delta''_{3j}\delta''_{4j}$, где $\overline{p}_1(\beta') = \beta$, $\overline{p}_1(\delta''_{1j}) = \overline{p}_1(\delta''_{3j})^{-} = \overline{p}(\delta'_{1j})$, $\overline{p}_1(\delta''_{2j}) = \overline{p}_1(\delta''_{4j})^{-} = \overline{p}(\delta'_{2j})$, $j = 1, \ldots, \rho$.

Пусть a''_1 и a''_2 — соответственно начало и конец кривой β'; отображение $f : \overline{E} = \{|z| \leq 1\} \to \overline{M}_1$ — гомеоморфизм такой, что $f(1) = a''_1$, $f(-1) = a''_2$ и отображение $\kappa : \overline{E} \to \kappa(\overline{E}) = \overline{\Omega}$ задается формулой $\kappa(z) = \exp(\sqrt{-1}\,\pi z)$. Пусть $\overline{j} : \overline{M}_1 \to \overline{M}$ — непрерывное продолжение вложения $j : M_1 \to M$ (отметим, что $\overline{p}_1 = \overline{p} \circ \overline{j}$). Рассмотрим отображение $\varphi = \overline{p} \circ \overline{j} \circ f \circ \kappa^{-1} : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$. Так как $\kappa^{-1}(-1) = \{-1, 1\}$ и $\overline{j} \circ f(1) = \overline{j}(a''_1) = a' = \overline{j}(a''_2) = \overline{j} \circ f(-1)$, то φ непрерывно в $\overline{\Omega}$ и аналитично в $\Omega = \kappa(E)$. По теореме 5.2 множество $p^{-1}(B)$, совпадающее с $\overline{p}^{-1}(B)$, конечно и лежит в Ω. Так как $\overline{j} \circ f \circ \kappa^{-1}$ инъективно в Ω, то $B' = \varphi^{-1}(B)$ — конечно. Пусть $B' = \{b'_1, \ldots, b'_p\}$, а $\gamma'_1, \ldots, \gamma'_p$ — простые попарно непересекающиеся (за исключением точки $\zeta_0 = -1$) петли в $\Omega_1 = \overline{\Omega} \setminus B'$ с началом в точке $\zeta_0 = -1$ такие, что индекс кривой γ'_j относительно точки b'_i равен δ_i^j (δ_i^j — символ Кронеккера). Пусть ω — кривая на $\partial\Omega$ с представлением $t \mapsto \kappa(\exp(2\pi t\sqrt{-1}))$, $0 \leq t \leq 1$. Тогда, с точностью до нумерации кривых γ'_j, имеем $[\omega] = \prod_{j=1}^{p}[\gamma'_j]$ в фундаментальной группе $\pi_1(\Omega_1, \zeta_0)$ области Ω_1. Обозначим $\varphi_1 = \varphi|_{\Omega_1} : \Omega_1 \to A$. В окрестности точки b'_j для некоторого локального параметра ζ, определенного в окрестности точки $\varphi(b'_j) = b_{n(j)}$, функция $\zeta \circ \varphi_1$ имеет разложение $\zeta \circ \varphi_1 = \sum\limits_{i=l}^{\infty} c_i(z - b'_j)^i$, где $c_{l_j} \neq 0$, а $(l_j - 1)$ — порядок ветвления σ в точке $j \circ f \circ \kappa^{-1}(b'_j)$.

В силу леммы 15.3 в группе $\pi_1(A, a)$ имеем

$$(\varphi_1)_\#([\gamma'_j]) = [\alpha'_j][\gamma_{n(j)}]^{l_j}[\alpha'_j]^{-1}.$$

Следовательно,

$$(\varphi_1)_\#([\omega]) = (\varphi_1)_\# \left(\prod_{j=1}^{p} [\gamma'_j] \right) = \prod_{j=1}^{p} [\alpha'_j[\gamma_{n(j)}]^{l_j}[\alpha'_j]^{-1}.$$

Без ограничения общности можно считать, что

$$\{j \,|\, n(j) = 0\} = \{j \,|\, r+1 \leq j \leq p\}$$

для некоторого $r \geq 0$. Действительно, равенство

$$\prod_{j=1}^{p} [\alpha'_j][\gamma_{n(j)}]^{l_j}[\alpha'_j]^{-1} = \prod_{j=1}^{k-1} [\alpha'_j][\gamma_{n(j)}]^{l_j}[\alpha'_j]^{-1} \times$$

$$\times \prod_{j=k+1}^{p} [\alpha''_j][\gamma_{n(j)}]^{l_j}[\alpha''_j]^{-1}[\alpha'_k][\gamma_{n(k)}]^{l_k}[\alpha'_k]^{-1},$$

где $[\alpha''_j] = [\alpha'_k][\gamma_{n(k)}]^{l_j}[\alpha'_k]^{-1}[\alpha'_j]$, позволяет переставлять любой сомножитель вида $[\alpha'_k][\gamma_{n(k)}]^{l_j}[\alpha'_k]^{-1}$ с $n(k) = 0$ в конец, не меняя вида произведения. Таким образом, $(\varphi_1)_\#([\omega]) = [\beta^+][\beta_0]$, где

$$[\beta^+] = \prod_{j=1}^{r} [\alpha'_j][\gamma_{n(j)}]^{l_j}[\alpha'_j]^{-1} \in \pi_1(A, a), \tag{16.4}$$

$[\beta_0] = \prod_{j=r+1}^{p} [\alpha'_j][\gamma_0]^{l_j}[\alpha'_j]^{-1}$. Ясно, что

$$n_\sigma(\infty_N) = \sum\nolimits_{j=r+1}^{p} l_j = n,$$

т. е. $[\beta_0] \in \pi_{1,0}^n(A, a)$. С другой стороны,

$$(\varphi_1)_\#([\omega]) = [\varphi_1(\omega)] = [\overline{p} \circ \overline{j} \circ f \circ \kappa^{-1}(\omega)] =$$

$$= [\overline{p} \circ \overline{j}(\alpha')] = [\overline{p} \circ \overline{j}(\beta' \prod_{j=1}^{\rho} \delta''_{1j}\delta''_{2j}\delta''_{3j}\delta''_{4j})] =$$

$$= [\overline{p}(\alpha)\prod_{j=1}^{\rho}\overline{p}(\delta'_{1j})\overline{p}(\delta'_{2j})\overline{p}(\delta'_{1j})^{-}\overline{p}(\delta'_{2j})^{-}] = [\beta][\delta'],$$

где $[\delta'] = \prod_{j=1}^{\rho}[\overline{p}(\delta'_{1j}), \overline{p}(\delta'_{2j})]$. Значит,

$$[\beta] = (\varphi_1)_{\#}([\omega])([\delta'])^{-1} = [\beta^{+}][\beta_0][\delta],$$

где

$$[\delta] = [\delta']^{-1} = \prod_{j=1}^{\rho}[\overline{p}(\delta'_{2j}), \overline{p}(\delta'_{1j})] \in [\pi_1, \pi_1], \quad \deg[\delta] \le \rho,$$

т. е. имеет место (16.3).

Достаточность. Пусть имеет место (16.3), где сомножители имеют вид (16.1), (16.2) и (16.4), причем $l_j = 1$, $j = 1, \ldots, r$. Рассмотрим случай $\rho > 0$, т. к. случай $\rho = 0$ исследуется аналогично. Пусть $p = r + n$, $n(j) = 0$, $\alpha'_j = \alpha_{j-r}$, $j = r+1, \ldots, p$. В силу п. 3 леммы 15.4 и леммы 15.5 имеем

$$[\alpha'_j][\gamma_{n(j)}][\alpha'_j]^{-1} = [\tau_j][\xi_{n(j)}][\tau_j]^{-1},$$

где $[\tau_j] = e$ либо $\tau_j = \prod_{k=1}^{t(j)}\beta_{q(k,j)}^{\varepsilon(k,j)}$ — кривая на W, соединяющая точку a с началом кривой $\xi_{n(j)}$, а $\xi_{n(j)} = \prod_{k=1}^{t'(j)}\beta_{q'(k,j)}^{\varepsilon'(k,j)}$ — замкнутая кривая, однократно обходящая границу области $G_{n(j)}$ в положительном направлении. В силу леммы 15.4 можно считать, что $\delta_{ij} = \prod_{k=1}^{t(j,i)}\beta_{q(k,j,i)}^{\varepsilon(k,j,i)}$. Из утверждения п. b) леммы 15.5 следует, что слова $\mathfrak{A}'' = g(\beta)$ и

$$\mathfrak{A}' = \prod_{j=1}^{p} g(\tau_j)g(\xi_{n(j)})g(\tau_j^{-})\prod_{i=1}\rho g(\delta'_{1i})g(\delta'_{2i})g(\delta_{1i}^{-})g(\delta_{2i}^{-})$$

эквивалентны. Как отмечалось перед леммой 15.5, $\beta = \prod_{j=1}^{q}\beta_{r(j)}$ содержит в своей записи кривые β_i только «в степени $(+1)$», поэтому слово

$$g(\beta) = \prod_{j=1}^{q} x_{r(j)}$$

приведено. Поскольку слово $\mathfrak{A}'$ содержит некоторые x_j как в степени $(+1)$, так и в степени (-1), слово $\mathfrak{A}'$ не является приведенным. Следовательно, существует сокращение

$$(\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}_1, l(1), \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_t, l(t), \mathfrak{A}_{t+1} = \mathfrak{A}'')$$

слова $\mathfrak{A}'$ до слова $\mathfrak{A}''$. Пусть $\mathfrak{A}_i = \prod_{j=1}^{w(i)} x_{s(i,j)}^{\eta(i,j)}$, $i = 1, \ldots, t+1$.

Построим конечную последовательность гирлянд

$$\sigma_i = (X_i, p_i), \quad i = 1, \ldots, t+1,$$

над N, удовлетворяющих условиям:

1) На X_i существует кривая $\gamma^{(i)} = \prod_{j=1}^{w(i)} \widetilde{\beta}_{s(i,j)}$, носитель которой совпадает с объединением всех 1-симплексов в X_i граничного и чисто одномерного типа. Кривая $\gamma^{(i)}$ обходит каждый чисто одномерный симплекс дважды в противоположных направлениях, а каждый граничный — один раз в положительном направлении.

2) $p(\widetilde{\beta}_{s(i,j)}) = \beta_{s(i,j)}^{\eta(i,j)}$, а носитель $|\widetilde{\beta}_{s(i,j)}|$ состоит из 1-симплексов одного типа. Если $j \neq k$, то $|\widetilde{\beta}_{s(i,j)}|$ и $|\widetilde{\beta}_{s(i,k)}|$ либо совпадают, либо имеют не более двух общих точек, которые являются концевыми.

3) σ_i не содержит чисто двумерных подчастей.

4) Эйлеровы характеристики $\chi(X_i)$ полиэдров X_i удовлетворяют соотношениям: $\chi(X_1) = 1 - 2\rho$, $\chi(X_{i+1}) \geq \chi(X_i)$, $i = 1, \ldots, t$.

5) $n_i = \operatorname{card}(p_i^{-1}(\infty_N)) = n$, $i = 1, \ldots, t+1$.

Сначала определим σ_1. Пусть $\overline{E}_i = \overline{E}$ — замкнутый единичный круг, $f_i : \overline{E}_i \to \overline{G}_{n(i)}$ — непрерывное отображение $\overline{E}_i$ на $\overline{G}_{n(i)}$, конформное в E_i, причем $f_i(\eta_i) = \zeta_{n(i)}$, где η_i — кривая, однократно обходящая единичную окружность ∂E_i, а точка $a_i = 1 \in \overline{E}_i$, $i = 1, \ldots, p$. Если $[\tau_i] = e$, то пусть $T_i = \{1\}$, $a_i' = b_i = 1$, $g_i : T_i \to W$ — отображение, определенное формулой $g_i(1) = a$. В противном случае пусть $T_i = [0,1]$, $a_i' = 1$, $b_i = 0$ и $g_i : T_i \to W$ — представление кривой τ_i, $i = 1, \ldots, p$. Пусть $z_{ij} : [0,1] \to W$ — представление кривой δ_{ij}, S_{ij} — единичная окружность, а $p_{ij} :\to W$ — отображение, задаваемое формулой $z_{ij} = p_{ij} \circ \eta_{ij}$, где η_{ij} — кривая, однозначно обходящая S_{ij}, с началом в точке $b = 1$, $i = 1, 2$, $j = 1, \ldots, \rho$.

Разбиение W на части $|\beta_i|$, $i = 1, \ldots, \nu$, как уже отмечалось, задает триангуляцию W, которую можно продолжить до триангуляции N. Отображения f_i, g_i и p_{ij} индуцируют на $\overline{E}_i$, T_i, и S_{ij} некоторые триангуляции. Тогда $(\overline{E}_i, f_i)$, (T_i, g_i), $i = 1, \ldots, p$, и (S_{ij}, p_{ij}),

$i = 1,\ 2,\ j = 1, \ldots, \rho,$ — гирлянды над N. Отождествим (склеим) в несвязной сумме этих гирлянд пары точек $a_i \in \overline{E}_i$ и $a_i' \in T_i$ для каждого i, $1 \le i \le p$, а также отождествим между собой все $(p+2\rho)$ точек b_i, $i = 1, \ldots, p$, и b_{ij}, $i = 1,\ 2,\ j = 1, \ldots, \rho$. Поскольку $\chi(\overline{E}_i) = \chi(T_i) = 1$, $i = 1, \ldots, p$, $\chi(S_{ij}) = 0$, $i = 1,\ 2,\ j = 1, \ldots, \rho$, то эйлерова характеристика полученной гирлянды $\sigma_1 = (X_1, p_1)$ равна

$$\chi(X_1) = \sum_{i=1}^{p} [\chi(\overline{E}_i) + \chi(T_i) - 1] + \sum_{i=1}^{2} \sum_{i=1}^{\rho} \chi(S_{ij}) - (p+2\rho) + 1 = 1 - 2\rho.$$

Пусть $\widetilde{\eta}_i = \eta_i$, если $T_i = \{1\}$; в противном случае пусть $\widetilde{\eta}_i = \eta_i' \eta_i (\eta_i')^-$, где $\eta_i' : [0,1] \to [0,1] = T_i$ — тождественное отображение. Рассмотрим кривую $\gamma^{(1)} = \prod_{j=1}^{p} \widetilde{\eta}_i \prod_{i=1}^{\rho} (\eta_{1j} \eta_{2j} \eta_{1j}^- \eta_{2j}^-)$. Ясно, что

$$g_1(p_1(\gamma^{(1)})) = \mathfrak{A}', \quad p_1(\gamma^{(1)}) = \prod_{j=1}^{w(1)} \beta_{s(1,j)}^{\eta(1,j)}.$$

Так как $\beta_{s(1,j)}$ — простые кривые, то

$$\gamma^{(1)} = \prod_{j=1}^{w(1)} \widetilde{\beta}_{s(1,j)}, \quad \text{где} \quad p_1(\widetilde{\beta}_{s(1,j)}) = \beta_{s(1,j)}^{\eta(1,j)}.$$

Из построения гирлянды $\sigma_1 = (X_1, p_1)$ и кривой $\gamma^{(1)}$ непосредственно вытекает, что $\gamma^{(1)}$ обходит каждый замкнутый одномерный симплекс на ∂E_1 один раз, а 1-симплексы на S_{ij} и T_i (если $T_i \ne \{1\}$) — два раза в противоположных направлениях. Кроме того, p_1 инъективно на $|\widetilde{\beta}_{s(1,j)}|$. Таким образом, σ_1 удовлетворяет условиям 1)–4), а 5) следует из того, что $\mathrm{card}(p_1^{-1}(\infty_N)) = \mathrm{card}(\{j \mid n(j) = 0\}) = n$, т. к. $[\beta_0] \in \pi_{1,0}^n(A, a)$.

Пусть теперь построены гирлянды $(X_1, p_1), \ldots, (X_{k-1}, p_{k-1})$, удовлетворяющие условиям 1)–5) при $k = 2, \ldots, t+1$. Слово $\mathfrak{A}_k$ получается из слова $\mathfrak{A}_{k-1}$ сокращением $(\mathfrak{A}_{k-1}, j, \mathfrak{A}_k)$, где $j = l(k-1)$. Так как $x_{s(k-1,j)}^{\eta(k-1,j)} = x_{s(k-1,j+1)}^{-\eta(k-1,j+1)}$, то $(p_{k-1}(\widetilde{\beta}_{s(k-1,j)}))^- = p_{k-1}(\widetilde{\beta}_{s(k-1,j+1)})$. При этом возможны следующие случаи.

а) $|\widetilde{\beta}'| = |\widetilde{\beta}''| = G$, где $\widetilde{\beta}' = \widetilde{\beta}_{s(k-1,j)}$, $\widetilde{\beta}'' = \widetilde{\beta}_{s(k-1,j+1)}$. В этом случае, в силу условия 1), G состоит из чисто одномерных симплексов. Так как множества $\cup_{i<j} |\widetilde{\beta}_{s(k-1,i)}|$ и $\cup_{i>j+1} |\beta_{s(k-1,i)}|$ связны и конец кривой $\widetilde{\beta}_{s(k-1,j-1)}$ совпадает с началом $\widetilde{\beta}_{s(k-1,j+2)}$, то множество $F = \cup_{i\neq j,j+1}|\beta_{s(k-1,i)}|$ связно. Пусть G содержит q штук 1-симплексов и, следовательно, $(q+1)$ вершину триангуляции, а G' получается из G удалением всех $(q+1)$ вершин. Рассмотрим связную компоненту X_k в $X_{k-1}\backslash G'$, содержащую F. Любая другая связная компонента в $X_{k-1}\backslash G'$ может быть лишь точкой, одной из вершин в G. Действительно, все невнутренние 1-симплексы в $X_{k-1}\backslash G'$ содержатся в F, а так как в силу п. 3) X_{k-1} не содержит чисто двумерных частей, то любой 1-симплекс и 2-симплекс в $X_{k-1}\backslash G'$ содержатся в одной компоненте связности с некоторым невнутренним 1-симплексом, т. е. лежат в X_k. Поскольку по крайней мере одна из вершин G лежит в F, то $X_{k-1}\backslash G' = X_k \cup \{P_1,\ldots,P_t\}$, $t \leq q$. Следовательно, $\chi(X_{k-1}) = \chi(X_k) - t + q \geq \chi(X_{k-1})$. Наконец, определим $p_k = p_{k-1}|_{X_k}$.

б) $|\widetilde{\beta}'| \neq |\widetilde{\beta}''|$, причем одно из этих множеств состоит из 1-симплексов граничного или чисто одномерного типа, а другое — из чисто одномерных. Склеивая эти множества в X_{k-1}, получаем гирлянду (X_k, p_k). Имеем $\chi(X_k) \geq \chi(X_{k-1})$.

в) $|\widetilde{\beta}'| \neq |\widetilde{\beta}|$ и оба эти множества состоят из 1-симплексов граничного типа. Склеивая их, получаем гирлянду $(\widetilde{X}_k, \widetilde{p}_k)$. Если она не содержит чисто двумерных частей, то полагаем $(X_k, p_k) = (\widetilde{X}_k, \widetilde{p}_k)$. Как и в случае б), тогда $\chi(X_k) \geq \chi(X_{k-1})$. Если при склеивании образуется чисто двумерная часть (C, p_C), то других чисто двумерных частей в $(\widetilde{X}_k, \widetilde{p}_k)$ нет.

Действительно, если $(C', p_{C'})$ — двумерная часть в $(\widetilde{X}_k, \widetilde{p}_k)$, отличная от (C, p_C), то удалением в $(C', p_{C'})$ и (C, p_C) общие 2-симплексы, можно добиться, чтобы C и C' имели разве лишь конечное число общих точек. Пусть K и K' — подмножества в X_{k-1}, являющиеся объединением 2-симплексов, переходящих в 2-симплексы в C и C'. Тогда пересечение K и K' не более, чем конечно. Так как X_{k-1} в силу п. 3) не содержит чисто двумерных подчастей, то и K, и K' содержат граничные 1-симплексы, причем все такие 1-симплексы лежат в $|\widetilde{\beta}'| \cup |\widetilde{\beta}''|$. Так как кривые $\widetilde{\beta}'$ и $\widetilde{\beta}$ простые, то $|\widetilde{\beta}'| \cap |\widetilde{\beta}''|$ содержит по крайней мере две точки из K и две — из K'. Из простоты этих кривых также следует, что по крайней мере три из этих четырех точек различны. Это противоречит тому, что X_{k-1} удовлетворяет 2).

Итак, (C, p_C) — единственная чисто двумерная часть в $(\widetilde{X}_k, \widetilde{p}_k)$. Пусть $F = \cup_{i \neq j, j+1} |\widetilde{\beta}_{s(k-1,i)}|$, и $\widetilde{\widetilde{X}}_k$ является объединением F и всех 2-симплексов в $\widetilde{X}_k$, не лежащих в C. С использованием тех же рассуждений, что и в п. а), нетрудно убедиться, что $\widetilde{X}_k$ связно и $\widetilde{\widetilde{X}}_k \cap C = \widetilde{X}_k$. Так как $\widetilde{X}_k$ связно, то $\widetilde{\widetilde{X}}_k \cap C \neq \emptyset$. Пусть $\widetilde{\widetilde{X}}_k \cap C = \{Q_1, \ldots, Q_s\}$, $s \geq 1$. Разборка гирлянды (C, p_C) является компактной римановой поверхностью над N, поэтому $p_C(C) = N$. Очевидно, что $\widetilde{\widetilde{X}}_k$ содержит по крайней мере один 2-симплекс. Отсюда следует, что существуют простые кривые в C и $\widetilde{\widetilde{X}}_k$, имеющие одинаковые проекции на N. Разрезая в несвязной сумме $\left(\widetilde{\widetilde{X}}_k, \widetilde{p}_k|_{\widetilde{\widetilde{X}}_k}\right) \sqcup (C, p_C)$ гирлянды $(\widetilde{\widetilde{X}}_k, \widetilde{p}_k|_{\widetilde{\widetilde{X}}_k})$ и (C, p_C) вдоль этих кривых и склеивая берега разрезов «крест-накрест», получаем гирлянду (X_k, p_k) с эйлеровой характеристикой

$$\chi(X_k) = \chi(\widetilde{\widetilde{X}}_k) + \chi(C) - 1 \geq \left(\chi(\widetilde{X}_k) - \chi(C) + s\right) + \chi(C) - 2 \geq \chi(\widetilde{X}_k) - 1.$$

В силу доказанного выше $|\widetilde{\beta}'|$ и $|\widetilde{\beta}''|$ имеют две общие точки. Следовательно, $\chi(\widetilde{X}_k) = \chi(X_{k-1}) + 1$. Окончательно имеем $\chi(X_k) \geq \chi(X_{k-1})$.

Пусть $\widetilde{\beta}_{s(k,q)}$ — кривая в X_k, которая соответствует $\widetilde{\beta}_{s(k-1,q)}$ при $1 \leq q \leq j-1$ и $\widetilde{\beta}_{s(k-1,q-2)}$ при $j+2 \leq q \leq w(k-1)$, и $w(k) = w(k-1) - 2$. Тогда $\gamma^{(k)} = \prod_{q=1}^{w(k)} \widetilde{\beta}_{s(k,q)}$ — кривая в X_k, которая удовлетворяет 1) и 2). Ясно, что для (X_k, p_k) имеют место 3) и 5), а 4) уже установлено.

Итак, нужная последовательность гирлянд построена. Рассмотрим гирлянду (X_{t+1}, p_{t+1}). Так как $\mathfrak{A}_{t+1} = g(\beta) = \prod_{j=1}^{q} x_{r(j)}$, то все $\eta(t+1, j)$ равны единице, $1 \leq j \leq w(t+1) = q$. Отсюда и из условия 2) следует, что $p_{t+1}(\widetilde{\beta}_{s(t+1,j)}) = \beta_{s(t+1,j)}$. Следовательно, если кривая $\gamma^{(t+1)}$ обходит дважды замкнутый 1-симплекс, то этот обход происходит в одном направлении. В силу условия 1) X_{t+1} не содержит чисто одномерных симплексов.

Пусть $(\widetilde{X}, \widetilde{p})$ — разборка гирлянды (X_{t+1}, p_{t+1}), и $Y_1, \ldots, Y_k$ — связные компоненты $\widetilde{X}$. Как отмечалось выше, (X_{t+1}, p_{t+1}) получается из $(\widetilde{X}, \widetilde{p})$ склеиванием некоторых вершин. Кривая $\gamma^{(t+1)}$ представима в виде $\gamma'_1 \ldots \gamma'_s$, где γ'_i — кривая, которая является образом кривой $\widetilde{\gamma}_i$, лежащей на границе $Y_{u(i)}$ для некоторого $1 \le u(i) \le k$, причем $|\widetilde{\gamma}_i|$ и $|\widetilde{\gamma}_{i+1}|$, не пересекаются, $i = 1, \ldots, s-1$. Пусть P'_i и P''_i — начало и конец кривой $\widetilde{\gamma}_i$. Ясно, что точкам P''_i и P'_{i+1} (для любого $i = 1, \ldots, s$) и точкам P''_n и P'_1 соответствует одна и та же точка в X_{t+1}. Кроме того, множества $\{P'_i\}_{1\le i\le s}$ и $\{P''_i\}_{1\le i\le s}$ совпадают и содержат по s элементов.

Для каждого i существует единственное $j = \varphi(i)$, такое, что $P''_j = P'_i$. Обозначим $\psi(i) = \varphi(i) + 1$, если $\varphi(i) \ne s$, и $\psi(i) = 1$, если $\varphi(i) = s$. Отображение ψ определяет перестановку на множестве $\{1, 2, \ldots, s\}$. Пусть ψ имеет l циклов, в i-ом цикле содержится k_i элементов и $c = \sum\limits_{i=1}^{l}(k_i - 1)$. Рассмотрим некоторый цикл $Z = (n_1, \ldots, n_v)$. Поскольку $\psi(n_i) = \varphi(n_i) + 1 = n_{i+1}$, $i = 1, \ldots, v$ (полагаем $n_{v+1} = n_1$), $P''_{n_{i+1}+1} = P'_{n_i}$. Так как $P''_{n_{i+1}+1} = P'_{n_i}$ переходят в одну точку в X_{t+1}, то P'_{n_i} и $P'_{n_{i+1}}$ также переходят в одну точку. Отсюда следует, что $\chi(\widetilde{X}) \ge \chi(X_{t+1}) + c$.

Отметим, что в случае $s = 1$ имеем $c = 0$ и $(\widetilde{X}, \widetilde{p})$ является римановой поверхностью с краем, проектирущимся в β, с эйлеровой характеристикой $\chi(\widetilde{X}) \ge 1 - 2\rho$. Отсюда следует, что $(\widetilde{X}, \widetilde{p})$ — каноническое расширение искомой римановой поверхности, вызванное присоединением края. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $s > 1$. Так как $|\widetilde{\gamma}_i|$ и $|\widetilde{\gamma}_{i+1}|$ не пересекаются, то $P''_i \ne P'_{i+!}$, откуда следует, что $i \ne \varphi(i+1)$, т. е. $i + 1 \ne \psi(i+1)$, $i = 1, \ldots, s-1$. Значит, отображение ψ имеет не более одной неподвижной точки, которая может быть только единицей. Будем предполагать, что цикл Z нетривиален, т. е. $v > 1$.

Так как $\gamma^{(t+1)} = \gamma_1 \cdots \gamma_s$, то существуют точки

$$0 < x_0 < x_1 < \cdots < x_{s-1} < x_s = 1$$

такие, что кривая с представлением $\alpha_i(\tau) = \beta(x_{i-1} + \tau(x_i - x_{i-1}))$, $0 \le \tau \le 1$, совпадает с кривой $\widetilde{p}\circ\widetilde{\gamma}_i$. Фиксируем некоторое i, $1 \le i \le v$. Имеем

$$\beta(x_{n_i-1}) = \widetilde{p}(P'_{n_i}) = \widetilde{p}(P''_{\varphi(n_i)}) = \widetilde{p}(P''_{n_{i+1}-1}) = \beta(x_{n_{i+1}-1}) =$$

$$= \widetilde{p}(P'_{n_{i+1}}) = \widetilde{p}(P''_{\varphi(n_{i+1})}) = \widetilde{p}(P''_{n^-_{i+2}1}) = \beta(x_{n_{i+2}-1}).$$

Итак, $\beta(x_{n_i-1}) = \beta(x_{n_{i+1}-1}) = \beta(x_{n_{i+2}-1})$, причем $x_{n_{i+1}-1} \neq x_{n_i-1}$, $x_{n_{i+2}-1}$, т. к. $v > 1$. В силу условия 4) определения класса $\mathfrak{M}$ существует кривая $\delta = \delta_i^Z$ на N, подходящая к кривым $\alpha_{n_{i+1}-1}\alpha_{n_i}$ и $\alpha_{n_{i+2}-1}\alpha_{n_{i+1}}$ «слева» в точке $\beta(x_{n_{i-1}})$. Выберем такие кривые δ_i^Z для всех i и для всех нетривиальных циклов Z. Поскольку β разбивает N на конечное число компонент, то можно считать, что кривая δ_i^Z имеет с $|\beta|$ лишь одну общую точку — концевую, и разным парам (i, Z) соответствуют кривые δ_i^Z, имеющие не более одной общей точки, концевой для обеих.

С использованием теоремы 1 из [159] нетрудно показать, что для любой кривой $\delta = \delta_i^Z$ существуют локальные поднятия ее — δ' и δ'' — на $Y_{u(n_i)}$ и $Y_{u(n_{i+1})}$ из точек P'_{n_i} и $P'_{n_{i+1}}$ соответственно. Можно считать, что δ — простая кривая, и $\widetilde{p}(\delta') = \widetilde{p}(\delta'')$. Разрезая $Y_{u(n_i)}$ и $Y_{u(n_{i+1})}$ вдоль δ' и δ'' и склеивая берега разрезов «крест-накрест» для всех нетривиальных циклов Z и всех i, получаем гирлянду (X, p), которая является римановой поверхностью с краем — каноническим расширением римановой поверхности σ, ограниченной кривой β. Эйлерова характеристика X равна $\chi(\widetilde{X}) - c \geq \chi(X_{t+1}) \geq 1 - 2\rho$, откуда следует, что род σ не превосходит числа $\rho \leq \rho_0$. При этом $n_\sigma(\infty_N) = \mathrm{card}(p_{t+1}^{-1}(\infty_N)) = n$. Теорема полностью доказана.

Замечание 16.1 Если либо кривая β не проста, либо $n > 1$, и существует $\sigma \in \Sigma_n(\beta, \rho)$, $\rho < \rho_0$, то $\Sigma_n(\beta, \rho_0) \neq \emptyset$. Действительно, в этом случае существует область в N, накрываемая по крайней мере два раза, и можно увеличивать род на единицу, разрезая σ вдоль простых кривых, имеющих одинаковые проекции на N и склеивая берега разрезов «крест-накрест».

Пусть ω_i — любая кривая в N, соединяющая точки ∞_N и b_j, $1 \leq j \leq m$. Если кривая β гомологична нулю, то индекс пересечения $\kappa(\beta, \omega_j)$ не зависит от кривой ω_i (см. §4). Справедливо

Следствие 16.1 (ср. [125], теорема 3.4). *Пусть $\beta \in \mathfrak{M}$, $n \in \mathbb{N}$. Для того чтобы $\cup_{\rho \geq 0}\Sigma_n(\beta, \rho)$ было непусто, необходимо и достаточно, чтобы кривая β была гомологична нулю в N и выполнялись условия $\kappa(\beta, \omega_j) \geq -n$, $j = 1, \ldots, m$.*

Доказательство. Необходимость следует сразу из теоремы 16.1. Докажем достаточность. Рассмотрим случай, когда род $\rho_N > 0$ как более сложный. Так как $[\gamma_j]$, $j = 1, \dots, m$, $[a_i], [b_i]$, $i = 1, \dots, \rho_N$ образуют базис свободной группы $\pi_1(A, a)$, то $[\beta] = \prod_{i=1}^{q} [\xi_i]^{\varepsilon_i}$, где $[\xi_i]$ совпадает с некоторым из элементов этого базиса, $\varepsilon_i = \pm 1$, $i = 1, \dots, q$. Так как β гомологична нулю в N, то

$$\sum_{[\xi_i]=[a_j]} \varepsilon_i = \sum_{[\xi_i]=[b_j]} \varepsilon_i = 0, \quad j = 1, \dots, \rho_N.$$

Пусть $n_j = \sum\limits_{[\xi_i]=[\gamma_j]} \varepsilon_i$, $j = 1, \dots, m$. Из соотношения $\prod_{j=0}^{m} [\gamma_j] = \prod_{i=1}^{\rho} [[a_i], [b_i]]$ следует, что $[\gamma_0]^{-1} = \prod_{j=11}^{m} [\gamma_j] \prod_{i=1}^{\rho} [[b_i], [a_i]]$. Значит,

$$[\beta] = \prod_{j=1}^{m} [\gamma_j]^{n+n_j} [\gamma_0]^n [\delta],$$

где

$$[\delta] = \left(\prod_{j=1}^{m} [\gamma_j] \prod_{i=1}^{\rho} [[b_i], [a_i]] \right)^n \prod_{j=1}^{m} [\gamma_{m+1-j}]^{-(n+n_{j+1-m})} \prod_{i=1}^{q} [\xi_i]^{\varepsilon_i} \in [\pi_1, \pi_1],$$

так как любой элемент базиса входит в правую часть последнего равенства с нулевой кратностью. Пусть δ — кривая в A, представляющая $[\delta]$. Поскольку $[\delta] \in [\pi_1, \pi_1]$, индекс пересечения $\kappa(\delta, \omega_j) = 0$ для любой кривой ω_j, соединяющей ∞_N с b_j. Значит,

$$\kappa(\beta, \omega_j) = \sum_{k=1}^{m} (n + n_k) \kappa(\gamma_k, \omega_j) + n\kappa(\gamma_0, \omega_j) + \kappa(\delta, \omega_j) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} (n + n_k) \delta_k^j - n = (n + n_j) - n = n_j$$

(δ_k^j — символ Кронеккера), поэтому $n + n_j = \kappa(\beta, \omega_j) + n \geq 0$ по условию следствия 16.1, $j = 1, \dots, m$. Отсюда вытекает, что

$$[\beta^+] = \prod_{j=1}^{m} [\gamma_j]^{n+n_j} \in \pi_1^+(A, a) \quad \text{и} \quad [\beta] = [\beta^+][\beta_0][\delta],$$

где $[\beta_0] = [\gamma_0]^n \in \pi_{1,0}^n(A, a)$. По теореме 16.1 существует риманова поверхность класса $\Sigma_n(\beta, \rho)$ для некоторого $\rho \geq 0$. Следствие 16.6 доказано.

§17. Римановы поверхности с заданными проекциями точек ветвления

Возникает естественная задача с помощью развитого выше аппарата описать все римановы поверхности σ, ограниченные заданной кривой $\beta \in \mathfrak{M}$, множество точек ветвления которых $R(\sigma) = \{P|\operatorname{ord}(P,\sigma) \neq 0\}$ проектируется в множество $B = \{b_0, b_1, \dots, b_m\}$. Обозначим класс таких поверхностей через $\Sigma^B(\beta)$. Сначала сформулируем результат о факторизации гомотопического класса $[\beta]$ кривой β в $\pi_1(A,a)$ в случае, когда риманова поверхность известна.

Теорема 17.1 *Пусть $\beta \in \mathfrak{M}$, $\sigma = (M,p) \in \Sigma^B(\beta)$, $\rho = \rho_M$ и над точкой b_i лежит h_i точек кратностей $n_1^{(i)} - 1, \dots, n_{h_i}^{(i)} - 1$, $i = 0, \dots, m$. Тогда $[\beta]$ представимо в виде*

$$[\beta] = \prod_{i=0}^{m}\prod_{j=1}^{h_i}\left([\alpha_{ij}][\gamma_i]^{n_j^{(i)}}[\alpha_{ij}]^{-1}\right)[\delta], \tag{17.1}$$

где

$$[\delta] = \begin{cases} [e], & \text{если } \rho = 0, \\ \prod_{j=1}^{\rho}\left[[\delta_{1j}],[\delta_{2j}]\right], & \text{если } \rho > 0, \end{cases} \tag{17.2}$$

для некоторых кривых α_{ij}, δ_{ij}. При этом

$$\sum_{j=1}^{h_i} n_j^{(i)} = n_\sigma(b_i), \quad k = 0, \dots, m, \tag{17.3}$$

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=1}^{h_i}(n_j^{(i)} - 1) = (2 - 2\rho_N)n - (1 - 2\rho) + C, \tag{17.4}$$

где C — индекс вращения β, $n = n_\sigma(\infty_N)$.

Представление (17.1)–(17.2) может быть выбрано таким образом, чтобы подгруппа H в $\pi_1(A,a)$, порожденная элементами $[\alpha_{ij}][\gamma]^{n_j(i)}[\alpha_{ij}]^{-1}$, $j = 1, \dots, h_i$, $i = 0, \dots, m$, и, если $\rho > 0$, $[\delta_{ij}]$, $i = 1,\ 2$, $j = 1, \dots, \rho$, совпадала с $\check{p}_\#(\pi_1(\check{M}, \widetilde{a}))$, где

$$\check{M} = M \backslash p^{-1}(\check{B}), \quad \check{p} = p|_{\check{M}} : M \to A, \tag{17.5}$$

a — начало кривой α, обходящей край ∂M в положительном направлении и проектирующейся в β, $\check{p}_\# : \pi_1(\check{M}, \widetilde{a}) \to \pi_1(A, a)$ — гомоморфизм фундаментальных групп, индуцируемый $\check{p}$. Если $\rho > 0$, то в $\check{M}$ существуют такие кривые $\widetilde{\delta}_{ij}$, $i = 1,\ 2$, $j = 1, \ldots, \rho$, индуцирующие базис гомологий M, что $\check{p}_\#([\widetilde{\delta}_{ij}]) = [\delta_{ij}]$, $i = 1,\ 2$, $j = 1, \ldots, \rho$.

Справедливость большинства утверждений теоремы 17.1 немедленно следует из внимательного анализа доказательства необходимости теоремы 16.1. Соотношения (17.3) и (17.4) — это следствия теорем 4.1 и 5.2.

Представление (17.1)–(17.2) для β, обладающее всеми свойствами, описанными в теореме 17.5, назовем *σ-представлением.* Подгруппу H в $\pi_1(A, a)$, порожденную элементами

$$[\alpha_{ij}][\gamma]^{n_j^{(i)}}[\alpha_{ij}]^{-1}, \quad j = 1, \ldots, h_i,\ i = 0, \ldots, m,$$

и, если $\rho > 0$,

$$[\delta_{ij}], \quad i = 1, 2,\ j = 1, \ldots, \rho,$$

назовем *подгруппой представления* (17.1)–(17.2). Справедливо обращение теоремы 17.1.

Теорема 17.2 *Пусть $\rho \in \mathbb{Z}_+$, $\beta \in \mathfrak{M}$ и для некоторых натуральных чисел $n_j^{(i)}$ имеют место соотношения* (17.1), (17.2) *и* (17.4), *где $n = \sum\limits_{j=1}^{h_0} n_j^{(0)}$, C — индекс вращения кривой β. Если $h : (M', a') \to \to (A, a)$ — накрытие (A, a), соответствующее подгруппе H представления* (17.1)–(17.2), *то поднятие β на M' из точки a' разбивает M' на две части, одна из которых есть $(\check{M}, \check{p})$ для некоторой римановой поверхности $\sigma = (M, p) \in \Sigma^B(\beta)$ (см.* (17.5)). *При этом* (17.1)–(17.2) *— это σ-представление для $[\beta]$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как и при доказательстве теоремы 16.1 построим последовательность гирлянд $(X_1, p_1), \ldots, (X_{t+1}, p_{t+1})$ над N, однако при построении (X_1, p_1) будем использовать гирлянды $(\overline{E}_{ij}, \widetilde{f}_{ij})$, (T_{ij}, g_{ij}), $j = 1, \ldots, h_i$, $i = 0, \ldots, m$, и, если $\rho > 0$, (S_{ij}, p_{ij}), $i = 1,\ 2$, $j = 1, \ldots, \rho$, где $\overline{E}_{ij} = \overline{E}$ — замкнутый единичный круг, $\widetilde{f}_{ij} = f_{ij}(\zeta^{n_j^{(i)}})$, f_{ij} — непрерывное отображение $\overline{E}$ на $\overline{G}_i$, конформное в E, $f_{ij}(0) = b_i$, (T_{ij}, g_{ij}) и (S_{ij}, p_{ij}) строятся как и при доказательстве теоремы 16.1. Таким образом, $(\overline{E}_{ij}, \widetilde{f}_{ij})$ в случае, если $n_j^{(i)} > 1$ имеет одну точку ветвления порядка $n_j^{(i)} - 1$. Утверждается, что построенная таким образом гирлянда $(X_{t+1}, p_{t+1}) = \overline{\sigma}$, где $\sigma \in \Sigma^B(\beta)$, и над точкой b_i лежит h_i точек кратностей $n_1^{(i)}-1, \ldots, n_{h_i}^{(i)}-1$, $k = 0, \ldots, m$.

Действительно, (X_{t+1}, p_{t+1}) получается из (X_1, p_1) за конечное число операций типа а), б), в), описанных при доказательстве теоремы 16.1. Нетрудно убедиться, что эти операции не уменьшают суммарную кратность ветвления. Таким образом, если $\big(Y_j, p_{t+1}|_{Y_j}\big)$ — связные компоненты разборки гирлянды (X_{t+1}, p_{t+1}), то суммарная кратность V их точек ветвления не меньше, чем $\sum\limits_{i=0}^{m} \sum\limits_{j=1}^{h_i} (n_j^{(i)} - 1)$, что совпадает с $(2 - 2\rho_N)n - (1 - 2\rho) + C$ в силу (17.4). Построим как при доказательстве теоремы 16.1 риманову поверхность σ рода $\rho_\sigma \leq \rho$, склеивая гирлянды $\big(Y_j, p_{t+1}|_{Y_j}\big)$, разрезанные вдоль подходящих кривых. Суммарная кратность точек ветвления $V(\sigma) \geq V$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда разборка гирлянды (X_{t+1}, p_{t+1}) совпадает с $\overline{\sigma}$. В силу теоремы 5.2

$$V(\sigma) = (2 - 2\rho_N)n - (1 - 2\rho_\sigma) + C.$$

С другой стороны,

$$V(\sigma) \geq V \geq (2 - 2\rho_N)n - (1 - 2\rho) + C \geq V(\sigma).$$

Таким образом, $V(\sigma) = V$, откуда следует, что разборка гирлянды (X_{t+1}, p_{t+1}) есть $\overline{\sigma}$. Отметим, что мы также показали, что

$$V = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=1}^{h_i} (n_j^{(i)} - 1), \tag{17.6}$$

все точки ветвления σ являются внутренними и $\rho_\sigma = \rho$.

Так как $\chi(X_{t+1}) \geq 1 - 2\rho$, $\chi(\overline{\sigma}) = 1 - 2\rho_\sigma = 1 - 2\rho$ и при разборке эйлерова характеристика не уменьшается, то $\chi(X_{t+1}) = \chi(\overline{\sigma}) = 1 - 2\rho$, откуда следует, что $(X_{t+1}, p_{t+1}) = \overline{\sigma}$.

Теперь подробнее проанализируем операции а), б), в), упомянутые выше. В результате них либо отбрасываются открытые 1-симплексы и некоторые из их концевых точек (операция а)), либо склеиваются два 1-симплекса, причем при операции в) происходит частичная разборка и подклейка чисто двумерных подчастей, если они образуются. Так как при такой подклейке число точек ветвления увеличивается, то образование таких подчастей противоречило бы равенству (17.6). Итак, при операциях типа в) чисто двумерных частей не образуется.

Рассмотрим теперь операцию а). Так как

$$1-2\rho=\chi(X_{t+1})\geq\chi(X_t)\geq\cdots\geq\chi(X_1)=1-2\rho,$$

то $\chi(X_i)=\chi(X_{i+1})$, $i=1,\dots,t$, т. е. при переходе от $\chi(X_i)$ к $\chi(X_{i+1})$ эйлерова характеристика не меняется. Отсюда следует, что отбрасываемые части должны быть гомеоморфны полуоткрытому интервалу $[0,1)$. Назовем их отростками. Итак, X_{i+1} получается из X_i либо склеиванием двух 1-симплексов, либо отбрасыванием отростка. Следовательно, структура точек ветвления римановой поверхности с краем $\overline{\sigma}$ — точно такая же, как и у (X_1,p_1), т. е. точки ветвления σ проектируются в множество B, причем над точкой b_i лежит h_i точек кратностей $n_1^{(i)}-1,\dots,n_{h_i}^{(i)}-1$, $i=0,\dots,m$.

Так как $\chi(X_{i+1})=\chi(X_i)$, то склеиваемые при операциях участки имеют ровно одну общую точку. Отсюда нетрудно заключить, что фундаментальные группы X_{i+1} и X_i изоморфны. Более того, если $\check{X}_i=X_i\backslash p_i^{-1}(B)$, $\check{p}_i=p_i|_{\check{X}_i}$, то фундаментальные группы $\check{X}_{i+1}$ и $\check{X}_i$ изоморфны. Таким образом, $(\check{X}_{t+1},\check{p}_{t+1})$ можно получить из некоторой проколотой гирлянды (Y,q) отбрасыванием отростков, где (Y,q) получена из $(\check{X}_1,\check{p}_1)$ отождествлением конечного числа 1-симплексов. Если $\varphi:(\check{X}_1,\check{p}_1)\to(Y,q)$ — склеивающее отображение, а функция $j:(\check{X}_{t+1},\check{p}_{t+1})\to(Y,q)$ осуществляет вложение, то коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
(\check{X}_1,a_1) \arrow[r,"\varphi"] \arrow[dr,"\check{p}_1"'] & (Y,a_{t+1}) \arrow[r,"j"] \arrow[d,"q"'] & (\check{X}_{t+1},a_{t+1}) \arrow[dl,"\check{p}_{t+1}"] \\
& (A,a) &
\end{tikzcd}$$

где a_1 и a_{t+1} — начальные точки кривых $\gamma^{(1)}$ и $\gamma^{(t+1)}$ соответственно, причем отображения φ и j индуцируют изоморфизмы $\varphi_\#$ и $j_\#$ фундаментальных групп. Очевидно, что $(\check{p}_1)_\#(\pi_1(\check{X}_1, a_1)) = H$, поэтому

$$(\check{p}_{t+1})_\#(\pi_1(\check{X}_{t+1}, a_{t+1})) = q_\# \circ j_\#(\pi_1(\check{X}_{t+1}, a_{t+1})) = q_\#(\pi_1(Y, a_{t+1})) =$$
$$= q_\# \circ \varphi_\#(\pi_1(\check{X}_1, a_1)) = (\check{p}_1)_\#(\pi_1(\check{X}_1, a_1)) = H.$$

Пусть $h : (M', a') \to (A, a)$ — некоторое накрытие (A, a), соответствующее подгруппе H группы $\pi_1(A, a)$. Так как имеет место включение

$$(\check{p}_{t+1})_\#(\pi_1(\check{X}_{t+1}, a_{t+1})) \subset H,$$

то согласно [87], теорема 2.4.5, существует такое непрерывное отображение $f : (\check{X}_{t+1}, a_{t+1}) \to (M', a')$, что $h \circ f = \check{p}_{t+1}$.

Ясно, что f локально инъективно. Покажем, что f инъективно. Согласно следствию 16.1 β гомологична нулю. По теореме 5.1 существует риманова поверхность σ' без граничных точек ветвления, ограниченная β^-. Склеивая $\overline{\sigma}$ и $\overline{\sigma}'$ вдоль их краев, получаем компактную риманову поверхность $\tau = (Z, \psi)$. Поскольку каждая компонента связности множества $N \backslash |\beta|$ содержит по крайней мере одну точку из множества B, то можно добиться движением точек ветвления σ' того, чтобы точки ветвления τ проектировались бы в множество B. Пусть $\check{Z} = Z \backslash \psi^{-1}(B)$, $\check{\psi} = \psi|_{\check{Z}}$. Тогда $\check{\psi} : (\check{Z}, a_{t+1}) \to (A, a)$ — накрытие, соответствующее некоторой подгруппе G группы $\pi_1(A, a)$. Так как $(\check{Z}, a_{t+1})$ содержит $(\check{X}_{t+1}, a_{t+1})$, то G содержит H. Согласно лемме 6.3 из [56], гл.V, существует накрытие $g : (M', a') \to (\check{Z}, a_{t+1})$, такое, что $\check{\psi} \circ g = h$. Тогда $g \circ f : (\check{X}_{t+1}, a_{t+1}) \to (\check{Z}, a_{t+1})$ — локально инъективное отображение, сохраняющее проекции: $\check{\psi} \circ (g \circ f) = \check{p}_{t+1}$. Пусть $i : (\check{X}_{t+1}, a_{t+1}) \to (\check{Z}, a_{t+1})$ — вложение. Следовательно, тогда $\check{\psi} \circ i = \check{p}_{t+1}$. Рассмотрим диаграмму и докажем ее коммутативность.

$$\begin{tikzcd}
(\check{X}_{t+1}, a_{t+1}) \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, dotted, "i"] \arrow[dr, "\check{p}_{t+1}"'] & (M', a') \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & (\check{Z}, a_{t+1}) \arrow[dl, "\check{\psi}"] \\
& (A, a) &
\end{tikzcd}$$

Так как $\check{\psi} : (\check{Z}, a_{t+1}) \to (A, a)$ — накрытие, то оно обладает свойством единственности накрывающего пути ([87], с. 91). Согласно лемме 2.2.4 из [87] оно обладает свойством единственности поднятия для любого линейно связного пространства. Так как $\check{X}_{t+1}$ линейно связно, а отображения $g \circ f, i : (\check{X}_{t+1}, a_{t+1}) \to\to (\check{Z}, a_{t+1})$ являются поднятиями отображения (относительно $\check{\psi}$), то они совпадают: $g \circ f = i$. Следовательно, f инъективно, откуда вытекают утверждения теоремы 17.2.

Замечание 17.1 Пусть выполняются условия теоремы 17.2. Тогда риманову поверхность $\overline{\sigma} = (X_{t+1}, p_{t+1})$ можно построить, склеивая 1-симплексы в (X_1, p_1) по правилу, индуцируемому сокращением слова, соответствующего факторизации (17.1)–(17.2), до приведенного и отбрасывая отростки. Это дает комбинаторный способ построения σ.

Замечание 17.2 *Вместо «упорядоченных» представлений вида* (17.1) – (17.2) *можно использовать «неупорядоченные» представления*

$$[\beta] = \prod_j \left([\alpha_j][\gamma_{i(j)}]^{n_j}[\alpha_j]^{-1}\right)[\delta], \quad \text{где} \sum_{i(j)=0} n_j = n.$$

Замечание 17.3 Из теоремы 17.2 вытекает, что риманова поверхность σ, ограниченная β, является компактно вложенной в некоторое разветвленное накрытие поверхности N, которое получается из (M', a') удалением проколов. Однако (M', a'), как правило, не компактна и бесконечнолистна. Следующая теорема дает способ вложения σ в компактную риманову поверхность над N.

Теорема 17.3 *Пусть $\beta \in \mathfrak{M}$, числа ρ, $\rho_1 \in \mathbb{Z}_+$ и для некоторых натуральных чисел $n_j^{(i)}$ имеют место соотношения* (17.1), (17.2) *и* (17.4)*, где $n = \sum_{j=1}^{h_0} n_j^{(0)}$. Предположим также, что $[\beta]^{-1}$ представимо в виде*

$$[\beta]^{-1} = \prod_{i=0}^{m}\prod_{j=1}^{r_k}\left([\alpha'_{ij}][\gamma_i]^{m_j^{(i)}}[\alpha'_{ij}]^{-1}\right)[\delta'], \tag{17.7}$$

где

$$[\delta'] = \begin{cases} [e], & \text{*если*} \quad \rho' = 0, \\ \prod_{j=1}^{\rho'} [[\delta'_{1j}], [\delta'_{2j}]], & \text{*если*} \quad \rho' > 0, \end{cases} \tag{17.8}$$

причем

$$\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=1}^{r_i} (m_j^{(i)} - 1) = (2 - 2\rho_N)n' - (1 - 2\rho') - C,$$

где C *— индекс вращения* β, $n' = \sum\limits_{j=1}^{r_0} m_j^{(0)}$. *Пусть* H *— подгруппа представления* (17.1), (17.2), H' *— подгруппа представления* (17.7), (17.8) *и* G *— подгруппа в* $\pi_1(A, a)$, *порожденная элементами* H *и* H'. *Построим накрытие* $f : (X, x) \to (A, a)$, *соответствующее подгруппе* G. *Тогда существует компактная риманова поверхность* $(\widetilde{X}, g)$ *над* N *такая, что* $X = \widetilde{X} \backslash g^{-1}(B)$, $f = g|_X$ *и поднятие кривой* β *из точки* x *на* $\widetilde{X}$ *разбивает* $\widetilde{X}$ *на две римановы поверхности* σ *и* σ'. *При этом* (17.1), (17.2) *есть* σ*-представление, а* (17.7), (17.8) *—* σ'*-представление.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 17.2.

В заключение опишем, как некоторые из полученных выше результатов могут быть распространены на случай нескольких граничных кривых.

Пусть заданы кривые $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$ на N. Будем писать $(\beta_1, \ldots, \beta_\nu) \in \in \mathfrak{M}_\nu$, если выполняются условия:

1) кривые $\beta_i \in \mathfrak{M}$, $i = 1, \ldots, \nu$;

2) $\cup_{i=1}^{\nu} |\beta_i|$ разбивает N на конечное число частей;

3) если $z^{(i)} : [0, 1] \to N$ — некоторое представление кривой β_i и $\widetilde{z}^{(i)}$ — периодическое продолжение отображения $z^{(i)}$ на $\mathbb{R}$, и если для некоторых k_1, k_2, $k_3 \in \{1, \ldots, \nu\}$ и точек t_1, t_2, $t_3 \in [0, 1]$ имеет место равенство $z^{(k_1)}(t_1) = z^{(k_2)}(t_2) = z^{(k_3)}(t_3) = z_0 \in N$, и отображения $g_i : \mathbb{R} \to N$ определены по формуле $g_i(t) = \widetilde{z}^{(i)}((2t - 1)r + t_i)$, $i = 1$, 2, 3, а $z_i : [0, 1] \to N$ — по формуле $z_i(t) = g_i(t)$, $0 \le t \le 1/2$, $z_i(t) = = g_{i+1}(t)$, $1/2 \le t \le 1$, $i = 1$, 2, то кривые α_1 и α_2 с представлениями z_1 и z_2 при малых $r > 0$ локально просты и существует кривая, подходящая к ним обеим «слева» в точке z_0.

Фиксируем точку $a \in N$. Соединим точку a с началом a_i кривой β_i простой дугой β_i'. Пусть $\widetilde{\beta}_i = \beta_i'\beta_i(\beta_i')^-$ — петля в точке a. Выберем точки $b_0 = \infty$, $b_1, \ldots, b_m$ так, чтобы в каждой компоненте связности множества $N \setminus \cup_{i=1}^{\nu} |\beta_i|$ содержалась по крайней мере одна из точек множества $B = \{b_0, b_1, \ldots, b_m\}$ и $B \subset N \setminus \cup_{i=1}^{\nu} |\widetilde{\beta}_i|$. Определим $A = N \setminus B$, образующие в $\pi_1(A,a)$; $\pi_1^+(A,a)$, $\pi_{1,0}^n(A,a)$ аналогично тому, как это было сделано для одной кривой. ***Несвязной римановой поверхностью*** над N назовем пару $\sigma = (M,p)$, где $X = \sqcup_{i=1}^{q} M_i$ — несвязная сумма поверхностей M_i, $\sigma_i = (M_i, p|_{M_i})$ — риманова поверхность над N, $i = 1, \ldots, n$. Если σ_i ограничена кривыми $\beta_1^{(i)}, \ldots, \beta_{\nu_i}^{(i)}$, $i = 1, \ldots, q$, то будем говорить, что σ ограничена кривыми $\beta_j^{(i)}$, $j = 1, \ldots, \nu_i$, $i = 1, \ldots, q$. Как и в случае $\nu = 1$ определим классы $\Sigma_n(\beta_1, \ldots, \beta_\nu, \rho)$, $S_n(\beta_1, \ldots, \beta_\nu, \rho)$ римановых поверхностей над N, ограниченных кривыми $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$. Пусть $\Sigma_n^c(\beta_1, \ldots, \beta_\nu, \rho)$, $S_n^c(\beta_1, \ldots, \beta_\nu, \rho)$ — их подклассы, состоящие из связных поверхностей. Справедливо обобщение теоремы 16.1.

Теорема 17.4 *Пусть* $(\beta_1, \ldots, \beta_\nu) \in \mathfrak{M}_\nu$, n, $\rho \in \mathbb{Z}_+$. *Для того чтобы* $S_n(\beta_1, \ldots, \beta_\nu, \rho)$ *было непусто, необходимо и достаточно, чтобы существовали* $[\alpha_1], \ldots, [\alpha_\nu] \in \pi_1(A,a)$, *такие, что*

$$\prod_{i=1}^{\nu} [\alpha_i][\widetilde{\beta}_i][\alpha_i]^{-1} = [\beta^+][\beta_0][\delta],$$

где $[\beta^+] \in \pi_1^+(A,a)$, $[\beta_0] \in \pi_{1,0}^n(A,a)$, $[\delta] \in [\pi_1, \pi_1]$, $\deg[\delta] = \rho \le \rho_0$. *Если* $\cup_{i=1}^{\nu} |\widetilde{\beta}_i|$ *связно, то*

$$S_n^c(\beta_1, \ldots, \beta_\nu, \rho) \ne \emptyset \Longleftrightarrow S_n(\beta_1, \ldots, \beta_\nu, \rho) \ne \emptyset.$$

Следующие теоремы 17.9 и 17.10 обобщают, развивают и уточняют результаты статей [4], [5], [125] и др.

Теорема 17.5 *Пусть* $(\beta_1, \ldots, \beta_\nu) \in \mathfrak{M}_\nu$, $n \in \mathbb{Z}_+$. *Для того чтобы* $\cup_{\rho \ge 0} \Sigma_n(\beta_1, \ldots, \beta_\nu, \rho)$ *было непусто, необходимо и достаточно, чтобы цикл* $\sum_{i=1}^{\nu} \beta_i$ *был гомологичен нулю и выполнялись неравенства* $\sum_{i=1}^{\nu} \kappa(\beta_i, \omega_j) \ge -n$, $j = 1, \ldots, m$, *где* ω_j *— некоторая фиксированная кривая в* N, *соединяющая точки* ∞_N *и* b_j, $j = 1, \ldots, m$.

Если цикл $\sum\limits_{i=1}^{\nu}\beta_i$ *гомологичен нулю и* $n=-\min_j\sum\limits_{i=1}^{\nu}\kappa(\beta_i,\omega_j)$, *то*

$$\bigcup_{\rho\geq 0}\Sigma_n^c(\beta_1,\ldots,\beta_\nu,\rho)\neq\emptyset,\quad \textit{если } \cup_{i=1}^{\nu}|\beta_i| \textit{ связно},$$

$$\bigcup_{\rho\geq 0}\Sigma_{n+1}^c(\beta_1,\ldots,\beta_\nu,\rho)\neq\emptyset,\quad \textit{если } \cup_{i=1}^{\nu}|\beta_i| \textit{ несвязно}.$$

Теорема 17.6 *Пусть* $\beta_1,\ldots,\beta_\nu$ *— квази- локально простые кривые на* N. *Для того чтобы существовала компактная риманова поверхность* $\sigma=(M,p)$ *над* N *и простые замкнутые кривые* $\widetilde{\beta}_1,\ldots,\widetilde{\beta}_\nu$ *на* M, *разбивающие* M *на две части и проектирующиеся в кривые* $\beta_1,\ldots,\beta_\nu$ *при отображении* p, *необходимо и достаточно, чтобы цикл* $\sum\limits_{i=1}^{\nu}\beta_i$ *был гомологичен нулю. Если, кроме того,* $(\beta_1,\ldots,\beta_\nu)\in\mathfrak{M}_\nu$ *и* $-n\leq\sum\limits_{i=1}^{\nu}\kappa(\beta_i,\omega_j)\leq l$ *для некоторой кривой* ω_j *в* N, *соединяющей точки* ∞_N *и* b_j, $j=1,\ldots,m$, *то существует такая поверхность* σ *с* $n_\sigma(\infty_N)=l+n$.

Отметим, что последнее утверждение не требует связности множества $\cup_{i=1}^{\nu}|\beta_i|$.

§18. Метод базисных наборов

Из теорем 17.1, 17.2 следует, что для описания всех римановых поверхностей класса $\Sigma^B(\beta)$ следует перечислить все возможные подгруппы представлений (17.1), (17.2) гомотопического класса $[\beta]$ в $\pi_1(A,a)$, удовлетворяющих условию (17.4), где $n = \sum\limits_{j=1}^{h_0} n_j^{(0)}$. Если ограничиться только римановыми поверхностями $\sigma \in \Sigma^B(\beta)$ с числом листов над бесконечно удаленной точкой $n_\sigma(\infty_N) = 0$, то решение этой задачи может быть получено комбинаторным способом с использованием вводимого ниже понятия базисного набора и топологического способа нахождения всевозможных представлений элементов из коммутанта свободной группы в виде произведения ρ коммутаторов, найденного независимо Каллером [118] и А. Ю. Ольшанским [75].

Итак, определим понятие базисного набора. Хорошо известно, что группа $\pi_1(A,a)$ свободна и в качестве образующих ее можно взять элементы $[\gamma_1],\dots,[\gamma_m]$, и если $\rho = \rho_M > 0$, также $[a_1],[b_1],\dots$ $\dots,[a_\rho],[b_\rho]$. Поэтому она изоморфна группе X, состоящей из классов эквивалентности $\overline{\mathfrak{A}}$ слов $\mathfrak{A}$, составленных из символов алфавита $\{x_1^\pm,\dots,x_{m+2\rho}^\pm\}$, причем изоморфизм $f : X \to \pi_1(A,a)$ можно выбрать таким образом, чтобы

$$f(\overline{x}_i^\pm) = \begin{cases} [\gamma_i]^{\pm1}, & i = 1,\dots,m,\\ [a_{i-m}]^{\pm1}, & i = m+1,\dots,m+\rho,\\ [b_{i-m-\rho}]^{\pm1}, & i = m+\rho+1,\dots,m+2\rho. \end{cases}$$

В дальнейшем для простоты обозначений часто будем опускать черту над $x_i^\pm$. Пусть $g = f^{-1}$.

Пусть элемент $x \in X$. Объединяя в приведенной записи все символы x_i, стоящие рядом и имеющие одинаковые индексы, получаем запись

$$x = \prod_{i=1}^{s} x_{n(i)}^{k_i}, \qquad (18.1)$$

которую будем называть *несократимой записью элемента x*.

Пусть теперь $\beta \in \mathfrak{M}$, и $[\beta] = [\beta^+][\delta]$, где $[\beta^+] \in \pi_1^+(A,a)$, $[\delta] \in$ $\in [\pi_1,\pi_1]$, и $x = g([\beta])$. Тогда $l_j = \sum\limits_{n(i)=j} k_i \geq 0$, $j = 1,\dots,m$. Обозначим через C индекс вращения кривой β. Пусть $u = \sum\limits_{j=1}^{m} l_j - C + 1$, $\rho \in \mathbb{Z}_+$, $u - 2\rho > 0$. *Базисным набором κ степени ρ* для элемента x назовем совокупность чисел $p_i \in \mathbb{Z}_+$, $i = 1, \ldots, s$ таких, что

1) $p_i = 0$, если $k_i \leq 0$ в (18.1);

2) $\sum\limits_{p_i \neq 0} 1 = u - 2\rho$;

3) элемент $d_\kappa = \prod_{i=1}^{S} x_{n(i)}^{k_i - p_i} \in [X, X]$ и $\deg(d_\kappa) = \rho$.

Если κ — базисный набор степени ρ, то элемент x можно записать в виде

$$x = \prod_{i=1}^{s} (y_i x_{n(i)}^{p_i} y_i^{-1}) d_\kappa, \quad \text{где } y_i = \prod_{j=1}^{i} x_{n(j)}^{k_j - p_j},\ i = 1, \ldots, s. \tag{18.2}$$

Множество базисных наборов степени ρ для элемента x обозначим через $K(x, \rho)$. Отметим что на практике фиксация базисного набора означает выбор способа вычеркивания некоторых элементов, входящих в (18.1) в положительной степени или замены положительных степеней меньшими или отрицательными, происходящего таким образом, что после его осуществления остается элемент из коммутанта степени ρ.

Пусть $\kappa = (p_1, \ldots, p_s)$ — некоторый базисный набор для элемента $x = g([\beta])$. Поскольку $[\delta] = f(d_\kappa) \in [\pi_1, \pi_1]$, то при $\deg[\delta] = \rho > 0$ множество $\Delta([\delta], \rho)$ наборов

$$d = \{[\delta_{ij}],\ i = 1, 2,\ j = 1, \ldots, \rho\} \tag{18.3}$$

элементов из $\pi_1(A, a)$, таких, что $[\delta]$ представим в виде произведения ρ коммутаторов $[\delta] = \prod_{j=1}^{\rho} [[\delta_{1j}], [\delta_{2j}]]$ непусто. Фиксируем в этом случае некоторый набор d вида (18.3). Обозначим через $H(\kappa, d)$ подгруппу в $[\pi_1, \pi_1]$, порожденную элементами $f(y_i x_{n(i)}^{p_i} y_i^{-1})$, где y_i определены в (18.2), $i =, \ldots, s$, и, если $\deg[\delta] = \rho > 0$, также и элементами из d.

Теорема 18.1 *Пусть выполняются условия теоремы* 17.1 *и число $h_0 = 0$. Тогда существуют базисный набор κ степени ρ и $d \in \Delta([\delta], \rho)$ такие, что ненулевые элементы p_i в κ с $n(i) = k$ получаются из набора $(n_1^{(i)}, \ldots, n_{h_i}^{(i)})$ некоторой перестановкой, $i =$*

$= 1, \ldots, m$, *и подгруппа* $H(\kappa, d)$ *совпадает с подгруппой* H *представления* (17.1)–(17.2).

Доказательство этого факта вытекает из следующего предложения.

Предложение 18.1 *В условиях теоремы* 18.1 *слово* $\mathfrak{A}$ — *приведенную запись элемента* $x = g([\beta])$ *в* X *можно представить в виде*

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 x_{r(1)} \mathfrak{A}_2 x_{r(2)} \cdots \mathfrak{A}_k x_{r(k)} \mathfrak{A}_{k+1},$$

где слова $\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_{k+1}$ *таковы, что элементы* $[\nu_j] = f(\overline{\mathfrak{A}}_j)$, $j = 1, \ldots, k+1$, *удовлетворяют условиям:*

I) *существует набор натуральных чисел* $(q_1, \ldots, q_k)$, *получающийся перестановкой из набора* $(n_1^{(k)}, \ldots, n_{h_k}^{(k)},\ k = 1, \ldots, m)$, *такой, что элемент* $[\widetilde{\delta}] = \prod_{i=1}^{k}([\nu_i][\gamma_{r(i)}]^{1-q_i}) \cdot [\nu_{k+1}]$ *содержится в* $[\pi_1, \pi_1]$ *и* $\deg[\widetilde{\delta}] \le \rho$;

II) *существует набор* $\widetilde{d} = \{[\widetilde{\delta}_{ij}],\ i = 1, 2,\ j = 1, \ldots, \rho\} \in \Delta([\widetilde{\delta}], \rho)$ *такой, что* $[\widetilde{\delta}_{ij}] \in H$, $i = 1,\ 2$, $j = 1, \ldots, \rho$;

III) *элементы* $[\omega_t] \in H$, $t = 1, \ldots, k$, *где*

$$[\omega_t] = [\mu_t][\gamma_{r(t)}]^{q_t}[\mu_t]^{-1}, \quad [\mu_t] = \prod_{i=1}^{t-1}([\nu_i][\gamma_{r(i)}]^{1-q_i}) \cdot [\nu_t], \quad t = 1, \ldots, k.$$

Доказательство. Рассмотрим случай $\rho > 0$ как более сложный. Построим последовательность слов $\mathfrak{A}^{(1)}, \cdots, \mathfrak{A}^{(n)}$ таких, что

a) каждое $\mathfrak{A}^{(i)}$ можно представить в виде

$$\mathfrak{A}^{(i)} = \mathfrak{A}_1^{(i)} x_{r(1)} \mathfrak{A}_2^{(i)} x_{r(2)} \cdots \mathfrak{A}_k^{(i)} x_{r(k)} \mathfrak{A}_{k+1}^{(i)} \tag{18.4}$$

(индексы $r(1), \ldots, r(k)$ зависят, вообще говоря, от i), причем слова $\mathfrak{A}_j^{(i)}$, $j = 1, \ldots, k$, приведены и для $[\nu_j] = f(\overline{\mathfrak{A}}_j^{(i)})$, $j = 1, \ldots, k+1$, выполняются условия I)–III);

b) если $\mathfrak{A}^{(i)}$ не приведено, то $\mathfrak{A}^{(i+1)}$ получается из $\mathfrak{A}^{(i)}$ некоторым сокращением, в противном случае $\mathfrak{A}^{(i+1)} = \mathfrak{A}^{(i)}$;

c) $\overline{\mathfrak{A}}^{(i)} = g([\beta])$, $i \ge 1$.

Если такая последовательность построена, то, начиная с некоторого номера, $\mathfrak{A}^{(i)} = \mathfrak{A}$ не зависит от i и является несократимой записью $g([\beta])$, удовлетворяющей всем необходимым требованиям.

В качестве $\mathfrak{A}^{(1)}$ возьмем слово

$$\mathfrak{A}^{(1)} = \mathfrak{A}_1^{(1)} x_{r(1)} \mathfrak{A}_2^{(1)} x_{r(2)} \cdots \mathfrak{A}_k^{(1)} x_{r(k)} \mathfrak{A}_{k+1}^{(1)},$$

где $\mathfrak{A}_1^{(1)}, \mathfrak{A}_2^{(1)}, \cdots, \mathfrak{A}_k^{(1)}, \mathfrak{A}_{k+1}^{(1)}$ — приведенные записи элементов

$$g([\alpha_{11}][\gamma_1]^{n_1^{(1)}-1}), \quad g([\alpha_{11}]^{-1}[\alpha_{12}][\gamma_1]^{n_2^{(1)}-1}), \cdots,$$

$$g([\alpha_{m,h_m-1}]^{-1}[\alpha_{m,h_m}][\gamma_m]^{n_{h_m-1}^{(m)}-1}), g([\alpha_{m,h_m}]^{-1}[\delta])$$

(см. (17.1)). Кроме того, имеет место (17.2). Нетрудно видеть, что $[\nu_j] = \mathfrak{A}_j^{(1)}$ удовлетворяют условиям I)–III), где

$$q_1 = n_1^{(1)}, \ldots, q_k = n_{h_m}^{(m)}, \quad r(1) = 1, \ldots, r(k) = m,$$

$$[\widetilde{\delta}_{ij}] = [\delta_{ij}],\ i = 1, 2, j = 1, \ldots, \rho.$$

Предположим теперь, что построена конечная последовательность слов $\mathfrak{A}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{A}^{(i)}$, удовлетворяющих условиям a)–c). Покажем, как определить $\mathfrak{A}^{(i+1)}$ в случае, когда $\mathfrak{A}^{(i)}$ не приведено. Поскольку все слова $\mathfrak{A}_j^{(i)}$, $j = 1, \ldots, k$, приведены, то для некоторого j в (18.4) либо $\mathfrak{A}_j^{(i)} = \mathfrak{A}'_j x_{r(j)}^{-1}$, либо $\mathfrak{A}_{j+1}^{(i)} = x_{r(j)}^{-1} \mathfrak{A}''_{j+1}$. Пусть, для определенности, имеет место вторая возможность. В дальнейшем условимся для простоты обозначений верхний индекс у всех объектов, связанных со словом $\mathfrak{A}^{(i)}$, опускать. Объекты же, соответствующие определяемому слову $\mathfrak{A}^{(j+1)}$, будем снабжать верхним индексом.

Рассмотрим слово

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{A}_1 x_{r(1)}^{1-q_1} \mathfrak{A}_2 x_{r(2)}^{1-q_2} \cdots \mathfrak{A}_j x_{r(j)}^{1-q_j} x_{r(j)}^{-1} \mathfrak{A}''_{j+1} x_{r(j+1)}^{1-q_{j+1}} \mathfrak{A}_{j+2} \cdots \mathfrak{A}_k x_{r(k)}^{1-q_k} \mathfrak{A}_{k+1}.$$

Так как слово $\mathfrak{A}^{(i)}$ удовлетворяет I), II), то

$$f(\overline{\mathfrak{L}}) = [\widetilde{\delta}] = \prod_{j=1}^{\rho} \left[[\widetilde{\delta}_{1j}], [\widetilde{\delta}_{2j}] \right],$$

и, значит, $\overline{\mathfrak{L}} = \prod_{j=1}^{\rho} \left[[\overline{\mathfrak{D}}_{1j}], [\overline{\mathfrak{D}}_{2j}]\right]$, где $\mathfrak{D}_{ij}$ — приведенная запись элемента $g([\widetilde{\delta}_{ij}])$, $i = 1,\ 2,\ j = 1, \ldots, \rho$. Пусть $\mathfrak{C}$ — приведенная запись элемента $\overline{\mathfrak{L}}$. Тогда $\mathfrak{C}$ получается из $\mathfrak{L}$ некоторым сокращением S. Возможны два случая.

Случай I. Вхождение $d = (x_{r(j)}^{-1}, n_0, \mathfrak{L})$, где

$$n_0 = \sum_{t=1}^{j} (|\mathfrak{A}_t| + |q_t - 1|) + 1,$$

является S-сократимым (см. § 15). Тогда у d есть S-антипод $d_1 = (x_{r(j)}, n_1, \mathfrak{L})$. Значит, некоторое $\mathfrak{A}_l$ имеет вид $\mathfrak{A}_l = \mathfrak{A}'_l x_{r(j)} \mathfrak{A}''_l$, причем $1 + |\mathfrak{A}'_l| + \sum\limits_{i=1}^{l-1} (|\mathfrak{A}_i| + |q_i - 1|) = n_1$. Без ограничения общности можно считать, что $l < j$. В качестве $\mathfrak{A}^{(i+1)}$ возьмем тогда слово

$$\mathfrak{A}^{(i+1)} = \mathfrak{A}_1 x_{r(1)} \mathfrak{A}_2 x_{r(2)} \cdots \mathfrak{A}_{l-1} x_{r(l-1)} \mathfrak{A}'_l x_{r(j)} \mathfrak{A}''_l x_{r(l)} \times$$
$$\times \mathfrak{A}_{l+1} \cdots \mathfrak{A}_{j-1} x_{r(j-1)} \widetilde{\mathfrak{A}}_j x_{r(j+1)} \mathfrak{A}_{j+2} \cdots \mathfrak{A}_k x_{r(k)} \mathfrak{A}_{k+1}, \qquad (18.5)$$

где $\widetilde{\mathfrak{A}}_j$ — приведенная запись слова $\mathfrak{A}_j \mathfrak{A}''_{j+1}$. Итак,

$$\mathfrak{A}_s^{(i+1)} = \mathfrak{A}_s,\ s < l,\ s > j + 1,$$
$$\mathfrak{A}_l^{(i+1)} = \mathfrak{A}'_l,\ \mathfrak{A}_{l+1}^{(i+1)} = \mathfrak{A}''_l,\ \mathfrak{A}_{j+1}^{(i+1)} = \widetilde{\mathfrak{A}}_j, \qquad (18.6)$$
$$\mathfrak{A}_s^{(i+1)} = \mathfrak{A}_{s-1},\ l + 1 < s < j + 1,$$
$$r^{(i+1)}(s) = r(s),\ s < l,\ s > j + 1,$$
$$r^{(i+1)}(l) = r(j),\ r^{i+1}(s) = r(s-1),\ l < s < j + 1. \qquad (18.7)$$

Определим, согласно (18.6),

$$q_s^{(i+1)} = q_s,\ s < l, s > j, \quad q_l^{(i+1)} = q_j, \quad q_s^{(i+1)} = q_{s-1},\ l+1 < s < j+1.$$

Покажем, что $\mathfrak{A}^{(i+1)}$ удовлетворяет условиям I)–III). Имеем

$$[\widetilde{\delta}^{(i+1)}] = [\xi][\nu'_l][\gamma_{r(j)}]^{1-q_j}[\nu''_l][\gamma_{r(l)}][\xi']^{1-q_l}[\nu_j][\nu''_{j+1}][\xi''], \qquad (18.8)$$

где

$$[\xi]=\prod_{s=1}^{l-1}([\nu_s][\gamma_{r(s)}]^{1-q_s}),\quad [\xi']=\prod_{s=l+1}^{j-1}([\nu_s][\gamma_{r(s)}]^{1-q_s}),$$

$$[\xi'']=\prod_{s=j+1}^{k}([\gamma_{r(s)}]^{1-q_s}[\nu_{s+1}]),$$

$[\nu_l']=f(\overline{\mathfrak{A}}_l'),\ [\nu_l'']=f(\overline{\mathfrak{A}}_l''),\ [\nu_{j+1}'']=f(\overline{\mathfrak{A}}_{j+1}'')=[\gamma_{r(j)}][\nu_{j+1}]$.

Так как d и d_1 — S-антиподы, то слово $\mathfrak{A}_l''x_{r(l)}^{1-q_l}\cdot\prod_{s=l+1}^{j}(\mathfrak{A}_s x_{r(s)}^{1-q_s})$ эквивалентно пустому. Значит,

$$[\nu_l''][\gamma_{r(l)}]^{1-q_l}\prod_{s=l+1}^{j}([\nu_s][\gamma_{r(s)}]^{1-q_s})=[e].$$

Следовательно,

$$[\nu_l''][\gamma_{r(l)}]^{1-q_l}[\xi'][\nu_j][\gamma_{r(j)}]^{1-q_j}=[e]$$

и

$$\begin{gathered}[\gamma_{r(j)}]^{1-q_j}[\nu_l''][\gamma_{r(l)}]^{1-q_l}[\xi'][\nu_j]=[e]=\\=[\gamma_{r(j)}][\nu_l''][\gamma_{r(l)}]^{1-q_l}[\xi'][\nu_j][\gamma_{r(j)}]^{1-q_j}[\gamma_{r(j)}]^{-1}.\end{gathered}\tag{18.9}$$

Используя (18.9), из (18.8) получаем

$$[\widetilde{\delta}^{(i+1)}]=[\xi][\nu_l'][\gamma_{r(j)}][\nu_l''][\gamma_{r(l)}]^{1-q_l}[\xi'][\nu_j][\gamma_{r(j)}]^{1-q_j}[\nu_{j+1}''][\xi'']=$$

$$=[\widetilde{\delta}]=\prod_{j=1}^{\rho}\left[[\widetilde{\delta}_{1j}],[\widetilde{\delta}_{2j}]\right],$$

и в качестве $[\widetilde{\delta}_{ij}^{(i+1)}]$ можно взять $[\widetilde{\delta}_{ij}]$, $i=1,\,2,\ j=1,\dots,\rho$. Так как $[\widetilde{\delta}_{ij}]\in H$, $i=1,\,2,\ j=1,\dots,\rho$, то $\mathfrak{A}^{(i+1)}$ удовлетворяет условиям I) и II).

Для того чтобы установить справедливость III) для $\mathfrak{A}^{(i+1)}$, выразим $[\mu_t^{(i+1)}]$, через элементы $[\mu_t]$, $[\nu_t]$, $l=1,\dots,k$. Имеем

$$[\mu_t^{(i+1)}]=[\mu_t],\ t=1,\dots,l-1,\quad [\mu_l^{(i+1)}]=[\xi][\nu_l'],$$

$$[\mu_t^{(i+1)}] = [\xi][\nu_l'][\gamma_{r(j)}]^{1-q_j}[\nu_l''] \prod_{s=l}^{t-2}([\gamma_{r(s)}]^{1-q_s}[\nu_{s+1}]),\ t = l+1, .., j,$$

$$[\mu_t^{(i+1)}] = [\xi][\nu_l'][\gamma_{r(j)}]^{1-q_j}[\nu_l''][\gamma_{r(l)}]^{1-q_l}[\xi'][\nu_j][\nu_{j+1}'']\times$$
$$\times \prod_{s=j+1}^{t-1}[\gamma_{r(s)}]^{1-q_s}[\nu_{s+1}]),\ t = j+1, \ldots, k.$$

С использованием (18.9) нетрудно показать, что

$$[\mu_t^{(i+1)}] = [\mu_t], \quad t = 1, \ldots, l-1,\ t = j+1, \ldots, k,$$
$$[\mu_l^{(i+1)}] = [\mu_j][\gamma_{r(j)}]^{-q_j}, \quad t = 1, \ldots, l-1,$$

а при $t = l+1, \ldots, j$,

$$[\mu_t^{(i+1)}] = [\xi][\nu_l'][\gamma_{r(j)}]^{-q_j}[\nu_l']^{-1}[\xi]^{-1}\times$$
$$\times[\xi][\nu_l'][\gamma_{r(j)}][\nu_l''] \prod_{s=l}^{t-2}([\gamma_{r(s)}]^{1-q_s}[\nu_{s+1}]) =$$
$$= [\mu_l^{(i+1)}][\gamma_{r(j)}]^{-q_j}[\mu_l^{(i+1)}]^{-1} \prod_{s=1}^{t-2}([\nu_s][\gamma_{r(s)}]^{1-q_s}) \cdot [\nu_{t-1}] =$$
$$= [\mu_j][\gamma_{r(j)}]^{-q_j}[\mu_j]^{-1}[\mu_{t-1}] = [\omega_j]^{-1}[\mu_{t-1}].$$

Поэтому

$$[\omega_t^{(i+1)}] = [\omega_t], \quad t = 1, \ldots, l-1,\ t = j+1, \ldots, k, \quad [\omega_l^{(i+1)}] = [\omega_j],$$
$$[\omega_t^{(i+1)}] = [\omega_j]^{-1}[\omega_{t-1}][\omega_j], \quad t = l+1, \ldots, j.$$

Так как $[\omega_t] \in H$, $t = 1, \ldots, k$, то и $[\omega_t^{(i+1)}] \in H$, $t = 1, \ldots, k$, и рассмотрение случая I закончено.

Случай II. Пусть вхождение d является S-несократимым. Тогда слово $\mathfrak{C}$ непусто и содержит вхождение $S(d)$. С другой стороны, $\overline{\mathfrak{L}} = \overline{\mathfrak{D}}$, где $\mathfrak{D} = \prod_{j-1}^{\rho}(\mathfrak{D}_{1j}\mathfrak{D}_{2j}\mathfrak{D}_{1j}^{-1}\mathfrak{D}_{2j}^{-1})$, поэтому $\mathfrak{C}$ является приведенной записью элемента $\overline{\mathfrak{D}}$, т. е. $\mathfrak{C}$ получается из $\mathfrak{D}$ некоторым сокращением T. Определим для любого вхождения $\overline{d}$ в слово

$\mathfrak{D}$ понятие сопряженного вхождения $(\overline{d})^*$. Ясно, что существует u, $1 \le u \le \rho$, такое, что для $\widetilde{n} = |\overline{d}|$ выполняется одно из следующих четырех условий:

$$\begin{gathered} a)\ |\mathfrak{D}_u| < \widetilde{n} \le |\mathfrak{D}_u| + |D_{1u}|, \\ b)\ |\mathfrak{D}_u| + |D_{1u}| < \widetilde{n} \le |\mathfrak{D}_u| + |\mathfrak{D}_{1u}| + |\mathfrak{D}_{2u}|, \\ c)\ |\mathfrak{D}_u| + |\mathfrak{D}_{1u}| + |\mathfrak{D}_{2u}| < \widetilde{n} \le |\mathfrak{D}_u| + 2|\mathfrak{D}_{1u}| + |\mathfrak{D}_{2u}|, \\ d)\ |\mathfrak{D}_u| + 2|\mathfrak{D}_{1u}| + |\mathfrak{D}_{2u}| < \widetilde{n} \le |\mathfrak{D}_u| + 2(|\mathfrak{D}_{1u}| + |\mathfrak{D}_{2u}|), \end{gathered} \tag{18.10}$$

где $\mathfrak{D}_u = \prod_{j=1}^{u-1}(\mathfrak{D}_{1j}\mathfrak{D}_{2j}\mathfrak{D}_{1j}^{-1}\mathfrak{D}_{2j}^{-1})$. Если имеет место a), то $\mathfrak{D}_{1u} = \mathfrak{D}'_{1u}x_k^{\varepsilon}\mathfrak{D}''_{1u}$, $\varepsilon = \pm 1$, причем $\widetilde{n} = |\mathfrak{D}_u| + |\mathfrak{D}'_{1u}| + 1$, и существует вхождение $(\overline{d})^* = (x_k^{-\varepsilon}, \widetilde{n}^*, \mathfrak{D})$, где $\widetilde{n}^* = |\mathfrak{D}_u| + |\mathfrak{D}_{1u}| + |\mathfrak{D}_{2u}| + |\mathfrak{D}''_{1u}| + 1$. Если выполняется c), то $\mathfrak{D}_{1u}^{-1} = \mathfrak{D}'_{1u}x_k^{\varepsilon}\mathfrak{D}''_{1u}$, причем $\widetilde{n} = |\mathfrak{D}_u| + |\mathfrak{D}_{1u}| + |\mathfrak{D}_{2u}| + |\mathfrak{D}'_{1u}| + 1$, и тогда $(\overline{d})^* = (x_k^{-\varepsilon}, \widetilde{n}^*, \mathfrak{D})$, где $\widetilde{n}^* = |\mathfrak{D}_u| + |\mathfrak{D}''_{1u}| + 1$. Аналогично определяется сопряженное вхождение в случаях b), d).

Пусть $d_1 = T^{-1}(S(d))$. Определим $d_2 = (\overline{d}_1)^*$. Если d_2 является T-сократимым, то существует его T-антипод d_3. Пусть $d_4 = (\overline{d}_3)^*$. Продолжая этот процесс, в результате получаем последовательность вхождений $d_1, d_2, \ldots$ в слово $\mathfrak{D}$, таких, что для любого $t \ge 1$ выполняются условия:

α) $d_{2t} = (d_{2t-1})^*$;

β) если d_{2t} является T-сократимым, то d_{2t+1} — его T-антипод.

Покажем, что все d_i различны. Поскольку $(d_{2t}) = x_{r(j)}$, $(d_{2t+1}) = x_{r(j)}^{-1}$, то из условия $d_s = d_t$, $s \le t$, следует, что $s \equiv t \pmod 2$. Тогда с использованием условий α) и β) нетрудно показать, что $d_l = d_{t-s+l}$ для любого $l = 1, \ldots, s$. В частности, $d_1 = d_{1+2q}$, где $2q = t - s$. Если $q > 0$, то в силу β) вхождение d_1 имеет T-антипод d_{2q}, однако d_1 является T-несократимым, т. к. $T(d_1) = S(d)$. Итак, все d_i попарно различны. Так как $|\mathfrak{D}| < \infty$, то число попарно различных вхождений в слово $\mathfrak{D}$ конечно, т. е. для некоторого $v \ge 1$ вхождение d_{2v} является T-несократимым. Пусть $d' = S^{-1}(T(d_{2v}))$. Тогда

$$\{d'\} = \prod_{s=1}^{l-1}(\mathfrak{A}_s x_{r(s)}^{1-q_s})\mathfrak{A}'_l * x_{r(j)} * \mathfrak{A}''_l \prod_{s=l}^{k}(x_{r(s)}^{1-q_s}\mathfrak{A}_{s+1}).$$

Без ограничения общности можно считать, что $l \le j$. Пусть слово $\mathfrak{A}^{(i+1)}$ имеет вид (18.5). Покажем, что тогда $\mathfrak{A}^{(i+1)}$ удовлетворяет условиям I)–III).

Для доказательства этого заметим, что если запись (18.4) удовлетворяет условиям I)–III), то запись

$$\widetilde{\mathfrak{A}} = \widetilde{\mathfrak{A}}_1^{(i)} x_{r(1)} \widetilde{\mathfrak{A}}_2^{(i)} x_{r(2)} \cdots \widetilde{\mathfrak{A}}_k^{(i)} x_{r(k)} \widetilde{\mathfrak{A}}_{k+1}^{(i)},$$

где $\widetilde{\mathfrak{A}}_s^{(i)}$ эквивалентны словам $\mathfrak{A}_s^{(i)}$, также удовлетворяет условиям I)–III); q_s, $[\widetilde{\delta}_{ij}]$ и $[\omega_s]$ при этом, конечно, не меняются.

Теперь выберем слово $\mathfrak{F}$ и сокращения U и V этого слова до слов $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{D}$ соответственно согласно лемме 15.1. Тогда $S \circ U = T \circ V$ и $\mathfrak{F}$ имеет вид

$$\mathfrak{F} = \widetilde{\mathfrak{A}}_1 x_{r(1)}^{1-q_1} \widetilde{\mathfrak{A}}_2 x_{r(2)}^{1-q_2} \cdots \widetilde{\mathfrak{A}}_k x_{r(k)}^{1-q_k} \widetilde{\mathfrak{A}}_{k+1},$$

причем $U(\widetilde{\mathfrak{A}}_i) = \mathfrak{A}_i$, $i = 1, \ldots, k+1$, а запись

$$\mathfrak{A} = \widetilde{\mathfrak{A}}_1 x_{r(1)} \widetilde{\mathfrak{A}}_2 x_{r(2)} \cdots \widetilde{\mathfrak{A}}_k x_{r(k)} \widetilde{\mathfrak{A}}_{k+1}$$

удовлетворяет условиям I)–III), т. к. $\widetilde{\mathfrak{A}}_i$ эквивалентны словам $\mathfrak{A}_i$, $i = 1, \ldots, k+1$. Пусть $\widetilde{d}_t = V(d_t)$, $t = 1, \ldots, 2v$. Тогда

$$U(\widetilde{d}_{2v}) = U \circ V^{-1}(d_{2v}) = U \circ V^{-1} \circ T^{-1} \circ T(d_{2v}) = S^{-1} \circ T(d_{2v}) = d'.$$

Значит, справедливо равенство

$$\widetilde{\mathfrak{A}}_l = \widetilde{\mathfrak{A}}_l' x_{r(j)} \widetilde{\mathfrak{A}}_l'', \quad \text{где} \quad U(\widetilde{\mathfrak{A}}_l') = \mathfrak{A}_l',\ U(\widetilde{\mathfrak{A}}_l'') = \mathfrak{A}_l''.$$

Вернемся к рассмотрению слова $\mathfrak{A}^{(i+1)}$. Покажем, что $[\omega_t^{(i+1)}] \in H$, $t = 1, \ldots, k$. Введем элементы

$$[\widetilde{\omega}_t^{(i+1)}] = [\tau_t^{(i+1)}][\omega_t^{(i+1)}][\tau_t^{(i+1)}]^{-1}, \quad [\widetilde{\omega}_t] = [\tau_t][\omega_t][\tau_t]^{-1}, \tag{18.11}$$

где

$$[\tau_t^{(i+1)}] = \prod_{s=1}^{t-1} [\omega_s^{(i+1)}], \quad [\tau_t] = \prod_{s=1}^{t-1} [\omega_s],\ t = 1, \ldots, k.$$

Ясно, что $\tilde{\omega}_t \in H$, $t = 1, \ldots, k$. Непосредственным подсчетом убеждаемся, что

$$[\tilde{\omega}_t] = [\eta_t][\gamma_{r(t)}]^{q(t)}[\eta_t]^{-1}, \quad [\tilde{\omega}_t^{(i+1)}] = [\eta_t^{(i+1)}][\gamma_{r(t)}]^{q(t)}[\eta_t^{(i+1)}]^{-1},$$

где

$$[\eta_t] = \prod_{i=1}^{t-1} \big([\nu_i][\gamma_{r(i)}]\big) \cdot [\nu_t], \quad [\eta_t^{(i+1)}] = \prod_{i=1}^{t-1} \Big([\nu_i^{(i+1)}][\gamma_{r(i)}]\Big) \cdot [\nu_t^{(i+1)}].$$

Так как

$$[\eta_t^{(i+1)}] = [\eta_t], \quad t = 1, \ldots, l-1, \ t = j+1, \ldots, k,$$
$$[\eta_t^{(i+1)}] = [\eta_{t-1}], \quad t = j+1, \ldots, k,$$

то

$$[\widetilde{\omega}_t^{(i+1)}] = [\widetilde{\omega}_t], \quad t = 1, \ldots, l-1, \ t = j+1, \ldots, k,$$
$$[\widetilde{\omega}_t^{(i+1)}] = [\widetilde{\omega}_{t-1}], \quad t = l+1, \ldots, j. \tag{18.12}$$

Из равенств

$$\prod_{s=1}^{t-1} [\omega_t^{(i+1)}] = \prod_{s=1}^{t-1} [\widetilde{\omega}_{t-s}^{(i+1)}],$$

и (18.11) следует, что

$$[\omega_t^{(i+1)}] = [\tau_t^{(i+1)}]^{-1} [\widetilde{\omega}_t^{(i+1)}][\tau_t^{(i+1)}], \text{ где } [\tau_t^{(i+1)}] = \prod_{s=1}^{t-1} [\widetilde{\omega}_{t-s}^{(i+1)}], \tag{18.13}$$

$t = 1, \ldots, k$. Из (18.12) следует, что $[\widetilde{\omega}_t^{(i+1)}] \in H$, $t \neq l$.

В частности, $[\widetilde{\omega}_t^{(i+1)}] \in H$, $t = 1, \ldots, l$, откуда $[\tau_l^{(i+1)}] \in H$. Если мы покажем, что $[\omega_l^{(i+1)}] \in H$, то тогда $[\widetilde{\omega}_l^{(i+1)}] \in H$ в силу (18.11). Значит, будем иметь $[\widetilde{\omega}_t^{(i+1)}] \in H$, $t = 1, \ldots, k$, и из (18.13) будет следовать, что $[\tau_t^{(i+1)}]$, а, следовательно, $[\omega_t^{(i+1)}] \in H$, $t = 1, \ldots, k$, т. е. будет установлено III) для $\mathfrak{A}^{(i+1)}$. Итак, докажем, что элемент $[\omega_l^{(i+1)}] \in H$.

Пусть $\{\widetilde{d}_t\} = \widetilde{\mathfrak{D}}'_t * x_{r(j)}^{\varepsilon(t)} * \widetilde{\mathfrak{D}}''_t$, $\{d_t\} = \mathfrak{D}'_t * x_{r(j)}^{\varepsilon(t)} * \mathfrak{D}''_t$, где $\varepsilon(t) = (-1)^t$, $t = 1, \ldots, 2v$. Покажем, что

$$\mathfrak{F}_t = f(\overline{\widetilde{\mathfrak{D}}'_t})[\gamma_{r(j)}]^{q_j} (f(\overline{\widetilde{\mathfrak{D}}'_t}))^{-1} \in H, \quad t = 1, \ldots, 2v.$$

Тогда при $t = 2v$ отсюда будем иметь

$$[\omega_l^{(i+1)}] = [\mu_l^{(i+1)}][\gamma_{r(j)}]^{q_j} [\mu_l^{(i+1)}]^{-1} = \mathfrak{F}_{2v} \in H,$$

т. к.

$$f(\overline{\widetilde{\mathfrak{D}}'_{2v}}) = f(\overline{U(\widetilde{\mathfrak{D}}'_{2v})}) = f(\overline{\mathfrak{D}'_{2v}}) = f\left(\prod_{s=1}^{l-1}\overline{(\mathfrak{A}_s x_{r(s)}^{1-q_s})}\,\overline{\mathfrak{A}'_l}\right) = [\mu_l^{(i+1)}].$$

Доказательство проведем по индукции. При $t=1$ имеем

$$U(\widetilde{d}_1) = U\circ V^{-1}(d_1) = T\circ S^{-1}(d_1) = d.$$

Поэтому $U(\widetilde{\mathfrak{D}}'_1) = \prod_{s=1}^{j}(\mathfrak{A}_s x_{r(s)}^{1-q_s})$ и

$$f(\overline{\widetilde{\mathfrak{D}}'_1}) = \prod_{s=1}^{j}([\nu_s][\gamma_{r(s)}]^{1-q_s}) = [\mu_j][\gamma_{r(j)}]^{1-q_j}.$$

Следовательно, $\mathfrak{F}_1 = [\mu_j][\gamma_{r(j)}]^{q_j}[\mu_j]^{-1} = [\omega_j]\in H$. Предположим теперь, что $\mathfrak{F}_s\in H$, $s=1,\dots,2t-1$, где $t\le v$. Покажем, что $\mathfrak{F}_{2t}\in H$, и, в случае $t<v$, $\mathfrak{F}_{2t+1}\in H$. По условию α) вхождение $d_{2t}=V(\widetilde{d}_{2t})$ сопряжено с $d_{2t-1}=V(\widetilde{d}_{2t-1})$. Для $\widetilde{n}=n_{2t-1}=|d_{2t-1}|$ имеет место одна из четырех возможностей (18.10). Пусть, для определенности, имеет место случай c) (остальные случаи рассматриваются аналогично). Тогда $\mathfrak{D}'_{2t-1}=\mathfrak{D}_u\mathfrak{D}_{1u}\mathfrak{D}_{2u}\mathfrak{D}'_{1u}$, $\mathfrak{D}'_{2t}=\mathfrak{D}_u(\mathfrak{D}''_{1u})^{-1}$, и

$$f(\overline{\widetilde{\mathfrak{D}}'_{2t}}) = f(\overline{V(\widetilde{\mathfrak{D}}'_{2t})}) = f(\overline{\mathfrak{D}'_{2t}}) =$$

$$= f(\overline{\mathfrak{D}}_u)f(\overline{\mathfrak{D}''_{1u}})^{-1} = f(\overline{\mathfrak{D}}_u)f(\overline{\mathfrak{D}_{1u}})f(\overline{\mathfrak{D}'_{1u}x_{r(j)}^{-1}});$$

аналогично

$$f(\overline{\widetilde{\mathfrak{D}}'_{2t-1}}) = f(\overline{\mathfrak{D}'_{2t-1}}) = f(\overline{\mathfrak{D}}_u)f(\overline{\mathfrak{D}}_{1u})f(\overline{\mathfrak{D}}_{2u})f(\overline{\mathfrak{D}'_{1u}x_{r(j)}^{-1}})f(\overline{x_{r(j)}}).$$

Значит, $f(\overline{\widetilde{\mathfrak{D}}'_{2t}}) = [\widetilde{\delta}_u]f(\overline{\widetilde{\mathfrak{D}}'_{2t-1}})[\gamma_{r(j)}]$, где

$$[\widetilde{\delta}_u] = f(\overline{\mathfrak{D}}_u)f(\overline{\mathfrak{D}}_{1u})f((\overline{\mathfrak{D}}_{2u})^{-1})f((\overline{\mathfrak{D}}_{1u})^{-1})f((\overline{\mathfrak{D}}_u)^{-1}) =$$

$$= [\widetilde{\delta}'_u][\widetilde{\delta}_{1u}][\widetilde{\delta}_{2u}][\widetilde{\delta}_{1u}]^{-1}[\widetilde{\delta}'_u]^{-1}, \quad [\widetilde{\delta}'_u] = \prod_{s=1}^{u-1}[[\widetilde{\delta}_{1s}][\widetilde{\delta}_{2s}]].$$

Ясно, что $[\widetilde{\delta}'_u] \in H$, откуда следует, что $[\widetilde{\delta}_u] \in H$. Окончательно получаем

$$\mathfrak{F}_{2t} = [\widetilde{\delta}_u] f(\overline{\mathfrak{D}'_{2t-1}})[\gamma_{r(j)}]^{qj} f(\overline{\mathfrak{D}'_{2t-1}})^{-1}[\widetilde{\delta}_u]^{-1} = [\widetilde{\delta}_u]\mathfrak{F}_{2t-1}[\widetilde{\delta}_u]^{-1} \in H,$$

т. к. $\mathfrak{F}_{2t-1} \in H$ по предположению индукции.

Пусть $t < v$. Так как $\widetilde{d}_{2t}$ и $\widetilde{d}_{2t+1}$ являются T-антиподами, то $\widetilde{d}_{2t} = V^{-1}(d_{2t})$ и $\widetilde{d}_{2t+1} = V^{-1}(d_{2t+1})$ являются $V \circ T$-антиподами. Тогда, рассуждая так же, как при доказательстве равенства $[\omega_l^{(i+1)}] = [\omega_j]$ в случае I), показываем, что $\mathfrak{F}_{2t+1} = \mathfrak{F}_{2t} \in H$. Итак, мы показали, что $\mathfrak{F}_t \in H$, $t = 1, \ldots, 2s$, следовательно, $[\omega_l^{(i+1)}] \in H$, и тогда $[\omega_s^{(i+1)}] \in H$, $s = 1, \ldots, k$, т. е. III) доказано.

Осталось показать, что $[\widetilde{\delta}^{(i+1)}]$ представимо в виде

$$[\widetilde{\delta}^{(i+1)}] = \prod_{s=1}^{\rho} [[\widetilde{\delta}_{1s}^{(i+1)}], [\widetilde{\delta}_{2s}^{(i+1)}]],$$

где $[\widetilde{\delta}_{ts}^{(i+1)}] \in H$, $t = 1,\ 2$, $s = 1, \ldots, \rho$.

Упорядочим $\widetilde{d}_s$, $s = 1, \ldots, 2v$, по величине мест вхождения, т. е. будем считать, что для некоторой перестановки индексов P имеют место неравенства $|\widetilde{d}_{P(s)}| < |\widetilde{d}_{P(t)}|$, $1 \le s < t \le 2v$. Пусть $P(k') = 1$, $P(k'') = 2v$. Так как по предположению $|\widetilde{d}_1| > |\widetilde{d}_{2v}|$, то $k' > k''$. Имеем

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_1 x_{r(j)} \mathfrak{E}_2 x_{r(j)}^{-1} \mathfrak{E}_3, \quad \text{где} \quad \mathfrak{E}_1 = \prod_{s=1}^{l-1} (\mathfrak{A}_s x_{r(s)}^{1-q_s}) \mathfrak{A}'_l,$$

$$\mathfrak{E}_2 = \mathfrak{A}''_l \prod_{s=l+1}^{j} (\mathfrak{A}_s x_{r(s)}^{1-q_s}), \quad \mathfrak{E}_3 = \mathfrak{A}''_{j+1} \prod_{s=j+1}^{k} (x_{r(s)}^{1-q_s} \mathfrak{A}_{s+1}).$$

Используя (18.8), получаем, что

$$[\widetilde{\delta}^{(i+1)}] = f(\overline{\mathfrak{E}}'),$$

где $\mathfrak{E}' = \mathfrak{E}_1 x_{r(j)}^{1-q_j} \mathfrak{E}_2 x_{r(j)}^{q_j-1} \mathfrak{E}_3$.

Пусть

$$\{d_{P(1)}, d_{P(1)}, \ldots, d_{P(2v)}\} = \mathfrak{B}_1 * x_{r(j)}^{\varepsilon_1} * \mathfrak{B}_2 * x_{r(j)}^{\varepsilon_2} * \cdots * \mathfrak{B}_{2v} * x_{r(j)}^{\varepsilon_{2v}} * \mathfrak{B}_{2v+1},$$

$\varepsilon_i = \pm 1$. Покажем, что $\mathfrak{E}'$ эквивалентно слову

$$\mathfrak{E}^* = \prod_{s=1}^{2v}(\mathfrak{B}_s x_{r(j)}^{\varepsilon_s(q_j-1)})\mathfrak{B}_{2v+1}.$$

Так как

$$\{d', d\} = \mathfrak{E}_1 * x_{r(j)} * \mathfrak{E}_2 * x_{r(j)}^{-1} * \mathfrak{E}_3,$$

$$\{d_{2v}, d_1\} = \mathfrak{B}^{(1)} * x_{r(j)} * \mathfrak{B}^{(2)} * x_{r(j)}^{-1} * \mathfrak{B}^{(3)},$$

$$\{\widetilde{d}_{2v}, \widetilde{d}_1\} = \widetilde{\mathfrak{B}}^{(1)} * x_{r(j)} * \widetilde{\mathfrak{B}}^{(2)} * x_{r(j)}^{-1} * \widetilde{\mathfrak{B}}^{(3)},$$

где

$$\mathfrak{B}^{(1)} = \prod_{s=1}^{k''-1}(\mathfrak{B}_s x_{r(j)}^{\varepsilon_s})\mathfrak{B}_{k''}, \quad \mathfrak{B}^{(2)} = \prod_{s=k''+1}^{k'-1}(\mathfrak{B}_s x_{r(j)}^{\varepsilon_s})\mathfrak{B}_{k'},$$

$$\mathfrak{B}^{(3)} = \prod_{s=k'+1}^{2v}(\mathfrak{B}_s x_{r(j)}^{\varepsilon_s})\mathfrak{B}_{2v+1},$$

то $\mathfrak{E}_j = U(\widetilde{\mathfrak{B}}^{(j)}) \sim V(\widetilde{\mathfrak{B}}^{(j)}) = \mathfrak{B}^{(j)}$, $i = 1,\ 2,\ 3$. Следовательно,

$$\mathfrak{E}' \sim \mathfrak{B}^{(1)} * x_{r(j)}^{1-q_j} * \mathfrak{B}^{(2)} * x_{r(j)}^{q_j-1} * \mathfrak{B}^{(3)}.$$

Покажем, что

$$\mathfrak{B}^{(1)} \sim \hat{\mathfrak{B}}^{(1)} := \prod_{s=1}^{k''-1}(\mathfrak{B}_s x_{r(j)}^{\varepsilon_s(1-q_j)})\mathfrak{B}_{k''},$$

$$\mathfrak{B}^{(2)} \sim \hat{\mathfrak{B}}^{(2)} := \prod_{s=k''+1}^{k'-1}(\mathfrak{B}_s x_{r(j)}^{\varepsilon_s(1-q_j)})\mathfrak{B}_{k'},$$

$$\mathfrak{B}^{(3)} \sim \hat{\mathfrak{B}}^{(3)} := \prod_{s=k'+1}^{2v}(\mathfrak{B}_s x_{r(j)}^{\varepsilon_s(1-q_j)})\mathfrak{B}_{2v+1}.$$

Рассмотрим для примера первое слово $\mathfrak{B}^{(1)}$. Пусть $d'_{P(j)}$ — вхождение в $\mathfrak{B}^{(1)}$ такое, что $|d'_{P(j)}| = |d_{P(j)}|$, $j = 1, \ldots, k''$. Тогда

$$\{d'_{P(1)}, \ldots, d'_{P(k'')}\} = \mathfrak{B}_1 * x_{r(j)}^{\varepsilon_1} * \mathfrak{B}_2 * \cdots * x_{r(j)}^{\varepsilon_{k''-1}} * \mathfrak{B}_{k''}.$$

Так как вхождение $d_{P(k'')}$ является T-несократимым, то для любого j, $1 \leq j \leq k''-1$, существует $l = l(j)$, $1 \leq l(j) \leq k-1$, такое, что $d_{P(j)}$ и $d_{P(l)}$ — T-антиподы. Тогда существует индуцированное сокращение $T^{(1)}$ слова $\mathfrak{B}^{(1)}$, такое, что $d'_{P(j)}$ и $d'_{P(l)}$ — T-антиподы. Поэтому $\mathfrak{B}^{(1)}$ эквивалентно слову $\prod_{s=1}^{k''-1}(\mathfrak{B}_s\mathfrak{H}_s)\mathfrak{B}_{k''}$, где слова $\mathfrak{H}_j$ и $\mathfrak{H}_l$ при $l = l(j)$ взаимно обратны. В частности, беря в качестве $\mathfrak{H}_s$ слово $x_{r(j)}^{\varepsilon_s(q_j-1)}$, получаем, что $\mathfrak{B}^{(1)} \sim \hat{\mathfrak{B}}^{(1)}$.

Тогда $\mathfrak{E}' \sim \hat{\mathfrak{B}}^{(1)} x_{r(j)}^{1-q_j} \hat{\mathfrak{B}}^{(2)} x_{r(j)}^{q_j-1} \hat{\mathfrak{B}}^{(3)} = \mathfrak{E}^*$. Так как

$$\mathfrak{D} = \prod_{s=1}^{2v}(\mathfrak{B}_s x_{r(j)}^{\varepsilon_s})\mathfrak{B}_{2v+1} = \prod_{j=1}^{\rho}(\mathfrak{D}_{1j}\mathfrak{D}_{2j}\mathfrak{D}_{1j}^{-1}\mathfrak{D}_{2j}^{-1}),$$

то вхождения d_s, $s = 1, \ldots, v$, индуцируют вхождения $d_{u+1}^{r,s}, \ldots, d_{u+t}^{r,s}$ в слово $\mathfrak{D}_{rs}$, $r = 1, 2, \ldots, \rho$,

$$\{d_{u+1}^{r,s}, \ldots, d_{u+t}^{r,s}\} = \mathfrak{D}_{rs}^1 * x_{r(j)}^{\varepsilon_u} * \mathfrak{D}_{rs}^2 * x_{r(j)}^{\varepsilon_{u+1}} * \mathfrak{D}_{rs}^3 * \cdots * \mathfrak{D}_{rs}^{t+1}$$

(u и t зависят, вообще говоря, от r и s), такие, что

$$|d_q^{1,s}| + 2\sum_{w=1}^{s-1}(|\mathfrak{D}_{1w}| + |\mathfrak{D}_{2w}|) = |d_{P(q)}|,$$

$$|d_q^{2,s}| + 2\sum_{w=1}^{s-1}(|\mathfrak{D}_{1w}| + |\mathfrak{D}_{2w}|) + |\mathfrak{D}_{1s}| = |d_{P(q)}|,$$

$(P(q) = P(q, r, s))$, $q = u+1, \ldots, u+t$. Тогда нетрудно видеть, что

$$\mathfrak{E}^* = \prod_{s=1}^{\rho}\left(\mathfrak{D}_{1s}^*\mathfrak{D}_{2s}^*(\mathfrak{D}_{1s}^*)^{-1}(\mathfrak{D}_{2s}^*)^{-1}\right),$$

где $\mathfrak{D}_{rs}^* = \prod_{w=1}^{t}\left(\mathfrak{D}_{rs}^w x_{r(j)}^{\varepsilon_{u+w}(q_j-1)}\right)\mathfrak{D}_{rs}^{t+1}$. Значит,

$$[\widetilde{\delta}^{(i+1)}] = f(\overline{\mathfrak{E}}') = f(\overline{\mathfrak{E}}^*) = \prod_{s=1}^{\rho}\left[[\widetilde{\delta}_{1s}^{(i+1)}], [\widetilde{\delta}_{2s}^{(i+1)}]\right],$$

где $[\widetilde{\delta}_{rs}^{(i+1)}] = f(\overline{\mathfrak{D}}_{rs}^*)$, $r = 1, 2$, $s = 1, \ldots, \rho$.

Осталось показать, что $[\widetilde{\delta}_{rs}^{(i+1)}] \in H$, $r = 1, 2$, $s = 1, \ldots, \rho$. Рассмотрим случай $r = 1$ (случай $r = 2$ рассматривается аналогично). Так как $d_q^{1,s}$ соответствует вхождению $d_{P(q)}$, то

$$\prod_{w=1}^{s-1} (\mathfrak{D}_{1w}\mathfrak{D}_{2w}\mathfrak{D}_{1w}^{-1}\mathfrak{D}_{2w}^{-1}) \prod_{w=1}^{q-u-1} (\mathfrak{D}_{1s}^{w} x_{r(j)}^{\varepsilon_{u+w}}) \mathfrak{D}_{1s}^{q-u} = \mathfrak{D}'_{P(q)}. \tag{18.14}$$

Поэтому

$$\prod_{w=1}^{s-1} \Big[[\widetilde{\delta}_{1w}], [\widetilde{\delta}_{2w}]\Big] [\widetilde{\delta}_{1w}^{(i+1)}][\widetilde{\delta}_{2w}][\widetilde{\delta}_{1w}]^{-1}[\widetilde{\delta}_{2w}]^{-1} \prod_{w=s+1}^{\rho} \Big[[\widetilde{\delta}_{1w}], [\widetilde{\delta}_{2w}]\Big] =$$

$$= \prod_{q=u+1}^{u+t} \big([\delta'_q][\gamma_{r(j)}]^{-\varepsilon_q q_j}[\delta'_q]^{-1}\big) \prod_{w=1}^{\rho} \Big[[\widetilde{\delta}_{1w}], [\widetilde{\delta}_{2w}]\Big], \tag{18.15}$$

где

$$[\delta'_q] = \prod_{w=1}^{s-1} \Big[[\widetilde{\delta}_{1w}], [\widetilde{\delta}_{2w}]\Big] \prod_{w=1}^{q-u-1} ([\delta_{1s}^{w}][\gamma_{r(j)}]^{\varepsilon_{u+w}})[\delta_{1s}^{q-u}] = f(\overline{\mathfrak{D}}'_{P(q)})$$

в силу (18.14) и равенства $[\delta_{1s}^{w}] = f(\overline{\mathfrak{D}}_{1s}^{w})$. Учитывая, что

$$[\delta'_q][\gamma_{r(j)}]^{-\varepsilon_q q_j}[\delta'_q]^{-1} = \Big(f(\overline{\mathfrak{D}}'_{P(q)})[\gamma_{r(j)}]^{q_j} f(\overline{\mathfrak{D}}'_{P(q)})^{-1}\Big)^{-\varepsilon_q} = (\mathfrak{F}_{P(q)})^{-\varepsilon_q},$$

из (18.15) получаем, что

$$[\widetilde{\delta}_{1w}^{(i+1)}] = \left(\prod_{w=1}^{s-1} \Big[[\widetilde{\delta}_{1w}], [\widetilde{\delta}_{2w}]\Big]\right)^{-1} \prod_{q=u+1}^{u+t} (\mathfrak{F}_{P(q)})^{-\varepsilon_q} \times$$

$$\times \prod_{w=1}^{\rho} \Big(\Big[[\widetilde{\delta}_{1w}], [\widetilde{\delta}_{2w}]\Big] [\delta_{2w}]^{-1}[\delta_{1w}][\delta_{2w}]\Big) \prod_{w=s+1}^{\rho} \Big[[\delta_{1w}], [\widetilde{\delta}_{2w}]\Big] \in H,$$

т. к. $[\widetilde{\delta}_{rs}] \in H$, $r = 1, 2$, $s = 1, \ldots, \rho$, $\mathfrak{F}_s \in H$, $s = 1, \ldots, 2v$. Это завершает доказательство предложения 18.1.

Из теоремы 18.1 следует, что для получения всех римановых поверхностей $\sigma \in \Sigma^B(\beta)$ заданного рода ρ с $n_\sigma(\infty_N) = 0$ следует перебрать все базисные наборы κ степени ρ и в случае, когда $\rho > 0$, для каждого элемента $[\delta_\kappa] = f(\overline{d}_\kappa)$ перебрать все возможные подгруппы H_1 в $\pi_1(A, a)$, обладающие свойством: существует представление элемента $[\delta_\kappa]$ в виде произведения $[\delta_\kappa] = \prod_{j=1}^{\rho} [[\delta_{1j}], [\delta_{2j}]]$ такое, что элементы $[\delta_{1j}]$, $[\delta_{2j}]$, $j = 1, \ldots, \rho$, порождают H_1. В случае $\rho = 1$ вопрос полностью решается чисто алгебраическим способом.

Теорема 18.2 (об обрамленном коммутаторе) *В свободной группе X элемент x является коммутатором тогда и только тогда, когда слово $\mathfrak{A}$ — приведенную запись элемента x через образующие $x_1, \ldots, x_m, \ldots$ — можно представить в виде (скобки поясняют название теоремы):*

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{H}\{\mathfrak{C}(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2)\mathfrak{C}^{-1}\}\{\mathfrak{D}(\mathfrak{A}_1^{-1}\mathfrak{A}_2^{-1})\mathfrak{D}^{-1}\}\mathfrak{H}^{-1}, \tag{18.16}$$

где некоторые из слов $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$ могут быть пустыми. Более того, если $x = [y, z]$, то представление (18.16) *можно подобрать таким образом, что подгруппа в X, порожденная элементами y_1 и z_1, соответствующими словам $\mathfrak{H}\mathfrak{C}\mathfrak{A}_1\mathfrak{D}^{-1}\mathfrak{H}^{-1}$ и $\mathfrak{H}\mathfrak{D}\mathfrak{A}_2\mathfrak{C}^{-1}\mathfrak{H}^{-1}$, совпадает с подгруппой, порожденной элементами y и z. При этом $x = [y_1, z_1]$.*

Теорема 18.2 — это по существу переформулировка одной теоремы из [55]. В случае $\rho > 1$ можно воспользоваться результатами Каллера [118] и А. Ю. Ольшанского [75], которые сформулируем в удобной для нас форме. Сначала введем несколько определений.

Рассмотрим свободную группу X, элементы которой будем отождествлять с классами эквивалентности слов $\mathfrak{A}$, составленными из букв некоторого алфавита.

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\cup_{k=1}^{n}\{r_{1k}, r_{2k}\} = \{i \in \mathbb{N} \mid 1 \le i \le 2n\}$ — некоторое разбиение множества первых $(2n)$ натуральных чисел на пары. Обозначим это разбиение через $\mathcal{M}$. Будем говорить, что разбиение приведенного слова $\mathfrak{A}$ на подслова $\mathfrak{A} = \prod_{i=1}^{2n} \mathfrak{A}_i$ есть *разбиение типа* $\mathcal{M}$, если $\mathfrak{A}_{r_{2k}} = \mathfrak{A}_{r_{1k}}^{-}$ для любого k, $1 \le k \le n$. Пусть $\mathcal{M} = \cup_{k=1}^{n}\{r_{1k}, r_{2k}\}$ — некоторый тип разбиения. Рассмотрим на плоскости замкнутый многоугольник Π со сторонами $a_1, \ldots, a_{2n}$ и отображение склеивания h, отождествляющее стороны $a_{r_{1k}}$ и $a_{r_{2k}}^{-}$, $k = 1, \ldots, n$. В результате склеивания получаем компактную риманову поверхность Π' рода ρ. Назовем Π' *римановой поверхностью, соответствующей типу* $\mathcal{M}$, а число ρ — *родом типа* $\mathcal{M}$. Пусть

$\partial\Pi$ — граница Π, кривая γ_i обходит сторону a_i многоугольника Π в положительном направлении, P — точка стыка сторон a_1 и a_{2n}.

Так как для любой точки $Q \in \Pi' \backslash h(\partial\Pi)$ образ границы $h(\partial\Pi)$ является сильным деформационным ретрактом для $\Pi' \backslash \{Q\}$, то любой элемент ω из фундаментальной группы $\pi_1(\Pi' \backslash \{Q\}, P)$ проколотой поверхности $\Pi' \backslash \{Q\}$ в точке P представим в виде $\prod_{i=1}^{l} h(\gamma_{p(i)})$. Пусть приведенное слово $\mathfrak{A}$ допускает разбиение $\mathfrak{A} = \prod_{i=1}^{2n} \mathfrak{A}_i$ типа $\mathcal{M}$. Сопоставим элементу $\omega \in \pi_1(\Pi' \backslash \{Q\}, P)$ элемент $g(\omega)$ свободной группы X, представителем которого является слово $\prod_{i=1}^{l} \mathfrak{A}_{p(i)}$. Это определение корректно (см., напр., [54]). Подгруппу $g(\pi_1(\Pi' \backslash \{Q\}, P))$ в X назовем *подгруппой разбиения* $\mathfrak{A} = \prod_{i=1}^{2n} \mathfrak{A}_i$ типа $\mathcal{M}$ и обозначим через $H(\prod_{i=1}^{2n} \mathfrak{A}_i, \mathcal{M})$. Обозначим через α кривую $h(\gamma_1 \cdots \gamma_{2n})$. Теперь сформулируем упомянутый выше результат.

Теорема 18.3 *Элемент x из коммутатора $[X, X]$ свободной группы X имеет степень ρ тогда и только тогда, когда слово $\mathfrak{A}$ — приведенная запись элемента x — допускает разбиение типа $\mathcal{M}$, где $\mathcal{M}$ имеет род ρ, и не допускает разбиений меньшего рода. Если, кроме того, $x = \prod_{i=1}^{\rho} [y_{1i}, y_{2i}]$, то разбиение $\mathfrak{A} = \prod_{i=1}^{2n} \mathfrak{A}_i$ типа $\mathcal{M}$ можно выбрать таким образом, чтобы подгруппа $H(\prod_{i=1}^{2n} \mathfrak{A}_i, \mathcal{M})$ совпадала с подгруппой в X, порожденной элементами y_{1i}, y_{2i}, $i = 1, \ldots, \rho$. Более того,*

1) *существуют такие образующие ω_{ji} группы $\pi_1(\Pi' \backslash \{Q\}, P)$, что*

$$x = \prod_{i=1}^{\rho} [g(\omega_{1i}), g(\omega_{2i})];$$

2) *$x = g([h(\alpha)])$.*

В силу теоремы 18.3 алгебраическая задача сводится к топологической, которая может быть легко решена чисто комбинаторными методами.

Развитые выше подходы могут быть применены к задаче Гурвица о числе неэквивалентных накрытий над заданной компактной поверхностью N с заданным типом ветвления.

Пусть $\sigma = (M, p)$ — компактная риманова поверхность над N рода ρ. Тогда σ является n-листным разветвленным накрытием поверхности N для некоторого $n \in \mathbb{N}$, причем множество точек ветвления σ конечно. Пусть $B = \{b_0, b_1, \dots, b_m\}$ — множество, состоящее из проекций точек ветвления σ на N. Над каждой точкой b_k лежит h_k точек кратностей $n_1^{(k)} - 1, \dots, n_{h_k}^{(k)} - 1$, $k = 0, \dots, m$, причем

$$\sum_{j=1}^{h_k} n_j^{(k)} = n, \quad k = 0, \dots, m, \tag{18.17}$$

$$\sum_{k=0}^{m} \sum_{j=1}^{h_k} (n_j^{(k)} - 1) = (2 - 2\rho_N)n - (2 - 2\rho). \tag{18.18}$$

Отметим, что соотношение (18.17) выражает тот факт, что над точками b_k лежит n точек с учетом кратности ветвления $k = 0, \dots, m$, а (18.18) — это классическая формула Римана-Гурвица.

Задача Гурвица о существовании безграничного накрытия с заданным типом ветвления состоит в следующем (см., напр., [60]).

Пусть заданы числа $n_j^{(k)}$, $j = 1, \dots, h_k$, $k = 0, \dots, m$, удовлетворяющие соотношениям (18.17), (18.18), и конечное множество $B = \{b_0, b_1, \dots, b_m\} \subset N$. Определить, существует ли компактная риманова поверхность σ над N, для которой множество точек ветвления проектируется в множество B и над каждой точкой b_k лежит h_k точек кратностей $n_1^{(k)} - 1, \dots, n_{h_k}^{(k)} - 1$, $k = 0, \dots, m$.

Представляет интерес также задача об определении числа различных (неэквивалентных) накрытий поверхности N с заданным типом ветвления

$$(n_j^{(k)}, \quad j = 1, \dots, h_k, \quad k = 0, \dots, m).$$

Эти задачи имеют давнюю историю и исследовались впервые Гурвицем [145], а затем Г. Вейлем [206], Ллойдом [154], А. Д. Медных [57]–[61] и др. . В частности, в [60] получено их решение, формулирующееся в терминах, связанных с характерами симметрических групп.

Покажем, как разработанный выше подход позволяет свести дело к алгебраическим задачам для свободных групп. Пусть, как и выше, $A = N \backslash B$ и a — произвольная фиксированная точка из A, как и в случае римановых поверхностей, ограниченных кривыми. Выберем базис фундаментальной группы $\pi_1(A, a)$, как и в § 15. Рассмотрим всевозможные представления единичного элемента $[e] \in \pi_1(A, a)$ в виде произведения

$$[e] = \prod_{k=0}^{m} \prod_{j=1}^{h_k} \left([\alpha_{kj}][\gamma_k]^{n_j^{(k)}} [\alpha_{kj}]^{-1} \right) [\delta], \tag{18.19}$$

где $[\delta]$ имеет вид (17.2). Подгруппу H в $\pi_1(A, a)$, порожденную элементами $[\alpha_{kj}][\gamma]^{n_j^{(k)}}[\alpha_{kj}]^{-1}$, $j = 1, \ldots, h_k$, $k = 0, \ldots, m$, и, если $\rho > 0$, $[\delta_{ij}]$, $i = 1, 2$, $j = 1, \ldots, \rho$, назовем *подгруппой представления* (18.19), (17.2). Назовем два представления элемента $[e]$ вида (18.19), (17.2) *эквивалентными*, если соответствующие этим представлениям подгруппы сопряжены в группе $\pi_1(A, a)$. Справедлива

Теорема 18.4 1) *Пусть $\sigma = (M, p)$ — компактная риманова поверхность над N с типом ветвления $(n_j^{(k)}$, $j = 1, \ldots, h_k$, $k = 0, \ldots, m)$. Если $\check{M} = M \backslash p^{-1}(\check{B})$, $\check{p} = p|_{\check{M}} : \check{M} \to A$, и $\widetilde{a}$ — любая точка из $p^{-1}(a)$, то существует представление вида* (18.19), (17.2) *элемента $[e]$ с подгруппой $H = \check{p}_{\#}(\pi_1(\check{M}, \widetilde{a}))$.*

2) *Пусть $\mathcal{F}(\sigma)$ есть класс эквивалентности представления, описанного в п.* 1). *Тогда $\mathcal{F}$ осуществляет биективное соответствие между множеством компактных римановых поверхностей над N с заданным типом ветвления $(n_j^{(k)}$, $j = 1, \ldots, h_k$, $k = 0, \ldots, m)$ и множеством классов эквивалентности представлений элемента $[e]$ вида* (18.19), (17.2).

Доказательство теоремы 18.4 нетрудно получить с использованием теорем 17.1 и 17.2. Пусть U — односвязная окрестность точки b_0 в N, ограниченная простой кривой γ, такой, что $\overline{U} \cap B = \{b_0\}$. Существует соответствие между компактными римановыми поверхностями σ над N с заданным типом ветвления $(n_j^{(k)}, j = 1, \ldots, h_k, k = 0, \ldots, m)$ и римановыми поверхностями σ' над N, ограниченными кривой $(\gamma^{n_1^{0)}})^-$, осуществляемое следующим образом. Следует исключить из σ обобщенный односвязный $n_1^{(0)}$-листный круг, расположенный над U и содержащий одну из точек ветвления поверхности σ порядка $n_1^{(0)} - 1$. Без ограничения общности можно считать, что точка a лежит на $|\gamma|$. Если σ' получается из σ таким образом, то, применяя теорему 17.1 к σ', получаем, что

$$[\gamma]^{-n_1^{(0)}} = [(\gamma^{n_1^{(0)}})^-] = \prod_{j=2}^{h_0} \Big([\alpha_{0j}][\gamma_0]^{n_j^{(0)}}[\alpha_{0j}]^{-1}\Big) \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{m}\prod_{j=1}^{h_k} \Big([\alpha_{kj}][\gamma_k]^{n_j^{(k)}}[\alpha_{kj}]^{-1}\Big)[\delta],$$

где $[\delta]$ имеет вид (17.2). Ясно, что элементы $[\gamma]$ и $[\gamma_0]$ сопряжены в $\pi_1(A,a)$, поэтому $[\gamma] = [\alpha_{01}][\gamma_0][\alpha_{01}]^{-1}$ для некоторого элемента $[\alpha_{01}] \in \pi_1(A,a)$. Следовательно, справедливо (18.19). Обратно, если имеет место представление (18.19), (17.2), то

$$[(\gamma_0)^{-n_1^{(0)}}] = [\gamma_0]^{-n_1^{(0)}} = \prod_{j=2}^{h_0} \Big([\alpha'_{0j}][\gamma_0]^{n_j^{(0)}}[\alpha'_{0j}]^{-1}\Big) \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{m}\prod_{j=1}^{h_k} \Big([\alpha'_{kj}][\gamma_k]^{n_j^{(k)}}[\alpha'_{kj}]^{-1}\Big)[\delta],$$

где $[\alpha'_{kj}] = [\alpha_{01}]^{-1}[\alpha_{kj}][\alpha_{01}]$, и по теореме 17.2 существует риманова поверхность σ', ограниченная кривой $(\gamma_0)^{-n_1^{(0)}}$ (кривую γ_0 можно выбрать простой) с типом ветвления $(n_j^{(0)}, j = 1,\dots,h_0, n_j^{(k)}, j = 1,\dots,h_k, k = 1,\dots,m)$. Присоединяя к $\overline{\sigma}'$ обобщенный односвязный $n_1^{(0)}$-листный круг с краем, расположенный над областью U в N, ограниченной кривой γ_0, получаем компактную риманову поверхность σ с типом ветвления $(n_j^{(k)}, j = 1,\dots,h_k, k = 0,\dots,m)$. Остальные утверждения теоремы 17.2 очевидны.

Отметим, что в случае накрытий сферы поверхностями рода 0 аналогичное утверждение получено в работе [137].

В заключение приведем два примера, иллюстрирующих понятие базисного набора и применение теоремы 18.3.

Пример 18.1. Рассмотрим кривую β на плоскости, изображенную на рис. 18.1. Поставим вопрос о существовании односвязной римановой поверхности σ над $\mathbb{C}$, ограниченной β. Нетрудно подсчитать, что число оборотов касательной к этой кривой при ее положительном обходе равно 1. Таким образом, индекс вращения C кривой β равен 1. Тогда, согласно формуле (5.2), поскольку род σ равен нулю, число точек ветвления σ должно равняться $V(\sigma) = C - 1 = 0$.

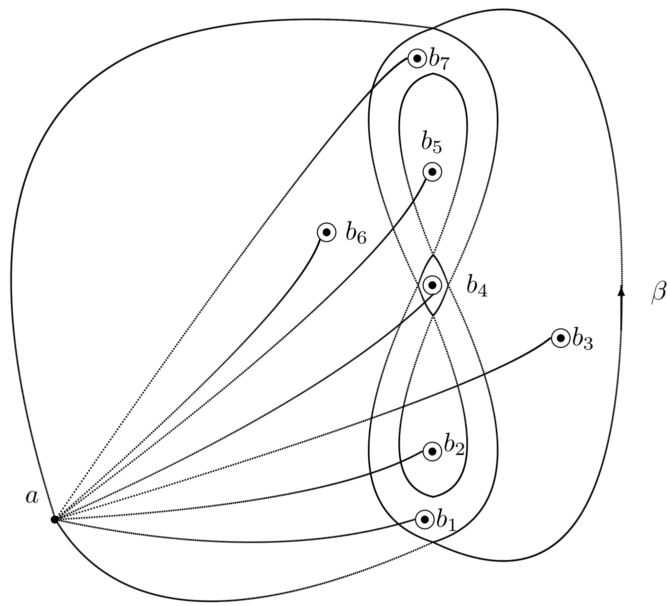

Рис. 18.1

Выберем точки b_j, $1 \leq j \leq 7$, внутри ограниченных компонент связности дополнения носителя (см. рис. 18.1), построим достаточно малые окружности вокруг этих точек и соединим фиксированную точку a на $|\beta|$ с некоторыми точками этих окружностей. В результате получим, как описано в § 15, систему кривых γ_j, гомотопические классы $[\gamma_j]$ которых дают образующие фундаментальной группы плоскости, проколотой в точках b_j, $1 \leq j \leq 7$. Обозначим $x_j = f([\gamma_j])$, $1 \leq j \leq 7$.

Тогда

$$f([\beta]) = x_1 x_2 x_4 x_5^{-1} x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_6^{-1} x_2^{-1} x_4 x_5 x_6 x_7. \qquad (18.20)$$

Таким образом, приведенная запись (18.20) элемента $f([\beta])$ содержит 17 сомножителей $x_j^{\pm 1}$.

Рассмотрим базисный набор $P = (p_1, p_2, \ldots, p_{17})$ степени 0. Из определения P следует, что $p_4 = p_{12} = p_{13} = 0$ (поскольку на соответствующих местах в (18.1) стоят образующие в степени (-1)), а остальные p_j равны либо нулю, либо единице. Так как образующие x_1, x_3, x_4, x_7 стоят только в положительных степенях, то

$$p_1 = p_3 = p_5 = p_7 = p_8 = p_{11} = p_{14} = p_{17} = 1.$$

Таким образом, осталось найти p_2, p_6, p_9, p_{10}, p_{15}, p_{16} так, чтобы

$$x_2^{1-p_2} x_5^{-1} x_2^{1-p_6} x_5^{1-p_9} x_6^{1-p_{10}} x_6^{-1} x_2^{-1} x_5^{1-p_{15}} x_6^{1-p_{16}} = e.$$

Нетрудно видеть, что $p_{10} = 0$, $p_{16} = 1$, а для остальных p_j возможны два случая:

а) $p_2 = p_9 = 1$, $p_6 = p_{15} = 0$,

б) $p_2 = p_9 = 0$, $p_6 = p_{15} = 1$.

В случае а) представление (18.2) имеет вид

$$x = x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot x_5^{-1} x_1 x_5 \cdot (x_5^{-1} x_2) x_3 (x_5^{-1} x_2)^{-1} \cdot (x_5^{-1} x_2) x_4 (x_5^{-1} x_2)^{-1} \times$$
$$\times (x_5^{-1} x_2) x_5 (x_5^{-1} x_2)^{-1} \cdot (x_5^{-1} x_2 x_6) x_7 (x_5^{-1} x_2 x_6)^{-1} \cdot x_5^{-1} x_4 x_5 \cdot x_6 \cdot x_7,$$

а в случае б) —

$$x = x_1 \cdot x_2 x_4 x_2^{-1} \cdot (x_2 x_5^{-1}) x_1 (x_2 x_5^{-1})^{-1} \cdot (x_2 x_5^{-1}) x_2 (x_2 x_5^{-1})^{-1} \times$$
$$\times (x_2 x_5^{-1}) x_3 (x_2 x_5^{-1})^{-1} \cdot (x_2 x_5^{-1}) x_4 (x_2 x_5^{-1})^{-1} \times$$
$$\times (x_2 x_6) x_7 (x_2 x_6)^{-1} \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7.$$

Нетрудно убедиться, что соответствующие подгруппы представления различны, следовательно, различны построенные по ним римановы поверхности.

Таким образом, существуют две различные односвязные римановы поверхности без точек ветвления, ограниченные кривой β.

Пример 18.2. Рассмотрим кривую β на плоскости, изображенную на рис. 18.2 (пример такой кривой приведен в [198], рис. 1).

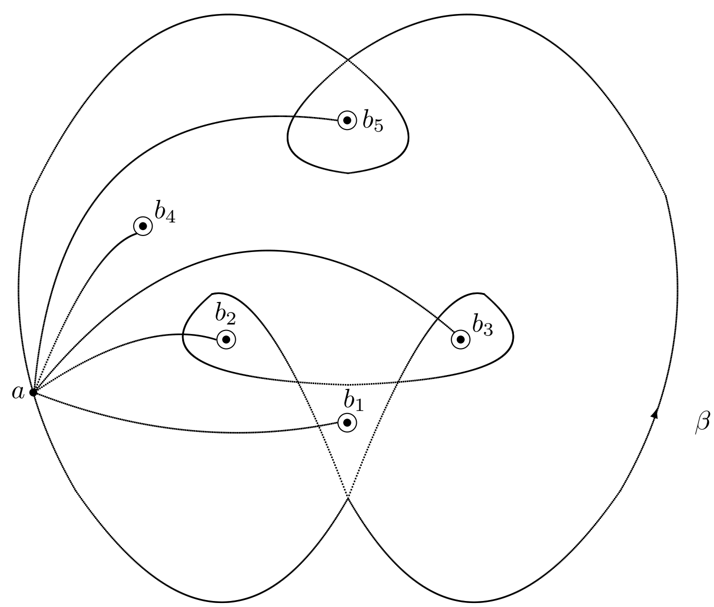

Рис. 18.2

Построим риманову поверхность σ над $\mathbb{C}$ минимально возможного рода ρ, ограниченную кривой β.

Фиксируем образующие фундаментальной группы плоскости, проколотой в пяти точках b_j, которые содержатся в компонентах связности дополнения носителя кривой β (см. рис.18.2).

Запишем образ $f([\beta])$ гомотопического класса кривой β через образующие $x_j = f([\beta_j])$:

$$f([\beta]) = x_1 x_2 x_3^{-1} x_2^{-2} x_1 x_2 x_3 x_4 x_5^2.$$

Индекс вращения C кривой β равен 0. Согласно формуле (5.2) число точек ветвления σ равно $V(\sigma) = 2\rho - 1$. Таким образом, $\rho \geq 1$. Докажем, что можно построить риманову поверхность рода 1. Для этого покажем, что существует базисный набор $(p_1, p_2, \ldots, p_9)$ степени 1. Если дополнительно потребовать, чтобы точки ветвления лежали над точками b_j, то в силу того, что $V(\sigma) = 2\rho - 1 = 1$, поверхность σ содержит единственную точку ветвления над b_1 (остальные точки покрываются не более одного раза и не могут быть точками ветвления).

Очевидно, что $p_2 = p_3 = p_4 = p_6 = p_7 0$, $p_8 = 1$, $p_9 = 2$. Тогда элемент

$$x_1^{1-p_1} x_2 x_3^{-1} x_2^{-2} x_1^{1-p_5} x_2 x_3^1$$

должен являться элементом коммутанта степени 1. При этом одно из чисел p_1, p_5 должно равняться нулю, а другое — двум.

а) Пусть $p_1 = 2$, $p_5 = 0$. Тогда элемент

$$y = x_1^{-1} x_2 x_3^{-1} x_2^{-2} x_1 x_2 x_3$$

является коммутатором элементов $x_1^{-1} x_2$ и $x_3^{-1} x_2^{-1}$ — это очевидно. Однако мы продемонстрируем на этом простом примере применение теоремы 17.6.

Рассмотрим восьмиугольник $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7 A_8$ со стороны которого снабжены метками x_1^{-1}, x_2, x_3^{-1}, x_2^{-1}, x_2^{-1}, x_1, x_2, x_3 (рис. 18.3). Склеим попарно стороны, снабженные метками x_j и x_j^{-1}, так, чтобы получилась ориентируемая поверхность. Нетрудно видеть, что таких способов два, и подсчет рода поверхности через эйлеровы характеристики дает, что в одном случае получается поверхность рода 1 (тор), в другом — рода 2.

Нас интересует первый случай. При склеивании отождествляются точки A_1, A_3, A_5 и A_7, а также A_2 и A_6, A_4 и A_8. Образующими фундаментальной группы полученного тора являются гомотопические классы кривых, которые получаются из кривых, соответствующих кривым, обходящим ломаные $A_1 A_2 A_3$ и $A_3 A_4 A_5$. Им соответствуют элементы $x_1^{-1} x_2$ и $x_3^{-1} x_2^{-1}$. Значит,

$$y = [x_1^{-1} x_2, x_3^{-1} x_2^{-1}].$$

Окончательно имеем факторизацию

$$f([\beta]) = x_1^2 \cdot y x_4 y^{-1} \cdot y x_5^2 y^{-1} \cdot [x_1^{-1} x_2, x_3^{-1} x_2^{-1}].$$

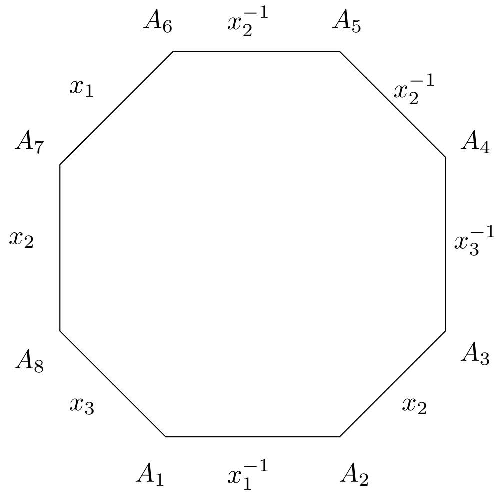

Рис. 18.3

Образы элементов x_2^2, yx_4y^{-1}, $yx_5^2y^{-1}$ $x_1^{-1}x_2$, $x_3^{-1}x_2^{-1}$ при отображении g являются образующими подгруппы соответствующего представления.

б) Пусть $p_1 = 0$, $p_5 = 2$. Аналогичные рассуждения показывают, что для этого базисного представления

$$f([\beta]) = zx_1^2z^{-1} \cdot yx_4y^{-1} \cdot yx_5^2y^{-1} \cdot y,$$

где

$$z = x_1x_2x_3^{-1}x_2^{-2}, \quad y = x_1x_2x_3^{-1}x_2^{-2}x_1^{-1}x_2x_3.$$

Элемент y является коммутатором:

$$y = [x_1x_2, x_3^{-1}x_2^{-1}].$$

Подгруппы представлений в случаях а) и б) совпадают, следовательно, поверхность рода 1 над $\mathbb{C}$, ограниченная β, определяется единственным образом.

§19. Неориентируемый случай

Пусть N — компактная неориентируемая поверхность (без края), $\overline{M} = M \cup \partial M$ — компактная поверхность с краем, $p : \overline{M} \to N$ — непрерывное внутреннее в смысле Стоилова (см., например, [90], гл. V) отображение. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu$ — кривые, которые обходят компоненты края ∂M в положительном направлении: $\beta_1 = p(\alpha_1), \ldots$ $\ldots, \beta_\nu = p(\alpha_\nu)$. Как и в ориентируемом случае, будем говорить, что пара $\sigma = (\overline{M}, p)$ есть *поверхность над N, ограниченная кривыми* $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$. Представляет интерес нахождение условий, которым должны удовлетворять кривые $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$, для того, чтобы существовала ориентируемая поверхность $\sigma = (\overline{M}, p)$ над N.

Эзелль [125] исследовал эту задачу комбинаторными методами. Дадим для случая одной граничной кривой решение задачи, формулирующееся в алгебраических терминах.

Пусть ∞_N — фиксированная точка из N. Введем множество $\mathfrak{M}^*$ замкнутых кривых на компактной поверхности N точно так же, как вводилось множество $\mathfrak{M}$ в § 15, только в п. 4) подходы «справа» и «слева» будем понимать относительно некоторой фиксированной ориентации в окрестности точки z_0.

Пусть $\sigma = (\overline{M}, p)$ есть поверхность над N, ограниченная кривой β. Как и в § 5, нетрудно показать, что для любой точки $P \in N \backslash |\beta|$ число прообразов P при отображении p конечно. В достаточно малой окрестности любой точки $Q \in p^{-1}(P)$ внутреннее отображение p по теореме Стоилова [90], стр. 152, топологически эквивалентно степенному отображению $z \mapsto z^n$ в окрестности начала координат комплексной плоскости. Число $\operatorname{ord}(Q, \sigma) = n - 1$ назовем *кратностью ветвления* поверхности σ в точке Q. По определению, *число листов* поверхности σ над точкой P (с учетом кратности ветвления) есть $n_\sigma(P) = \sum_{Q \in p^{-1}(P)} [\operatorname{ord}(Q, \sigma) + 1]$.

Рассмотрим двулистное ориентируемое накрытие $\widetilde{N}$ поверхности N с накрывающим отображением $\psi : \widetilde{N} \to N$. Пусть $a' \in M$, $a \in N$, $\widetilde{a} \in \widetilde{N}$ — точки, для которых $\psi(\widetilde{a}) = a = p(a')$. Тогда нетрудно видеть, что существует такое накрывающее отображение $\varphi : \overline{M} \to \widetilde{N}$, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} \overline{M} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & & \widetilde{N} \arrow[dl, "\psi"] \\ & N & \end{tikzcd}$$

Диагр. 19.1

коммутативна и $\varphi(a') = \widetilde{a}$.

Замкнутую кривую β в N назовем *кривой, сохраняющей ориентацию,* если ее поднятие на $\widetilde{N}$ замкнуто. Кривую, не сохраняющую ориентацию, будем называть *кривой, меняющей ориентацию.*

Пусть $\beta \in \mathfrak{M}^*$, тогда β разбивает N на $(l+1)$ область $G_0, \ldots, G_l$. В каждой из областей G_j выберем по точке: $\infty_N = b_0 \in G_0, \ldots, b_l \in G_l$. Положим a — начало кривой β, $A = N \backslash \{b_0, \ldots, b_l\}$, $\gamma_0, \ldots, \gamma_l$ — простые петли в A с началом в точке a, сохраняющие ориентацию, попарно не пересекающиеся (за исключением точки a), причем каждая из кривых γ_i ограничивает в N некоторую жорданову область D_i, которая содержит точку b_i и не содержит других точек b_j при $i \neq j$.

Фиксируем некоторую ориентацию на $\widetilde{N}$. Пусть $\psi^{-1}(a) = \{\widetilde{a}, \widetilde{\widetilde{a}}\}$ Обозначим через $\gamma_i^{(1)}$ и $\gamma_i^{(2)}$ кривые, получающиеся поднятием кривой γ_i на $\widetilde{N}$ из точек $\widetilde{a}$ и $\widetilde{\widetilde{a}}$ соответственно. Так как область D_i односвязна, то $\psi^{-1}(D_i) = D_i^{(1)} \bigsqcup D_i^{(2)}$, причем область $D_i^{(1)}$ ограничена кривой $\gamma_i^{(1)}$, а $D_i^{(2)}$ — кривой $\gamma_i^{(2)}$. Пусть $b_i^{(1)} \in D_i^{(1)}$, $b_i^{(2)} \in D_i^{(2)}$ — прообразы точки b_i; $\widetilde{A} = \widetilde{N} \backslash \{b_i^{(1)}, b_i^{(2)} | i = 0, \ldots, l\}$.

Выберем направление обхода кривых $\gamma_0, \ldots, \gamma_l$ так, чтобы кривая $\gamma_i^{(1)}$ обходила границу области $D_i^{(1)}$ в положительном направлении. Тогда очевидно, что кривая $\gamma_i^{(2)}$ обходит границу области $D_i^{(2)}$ в отрицательном направлении.

Пусть $[\pi_1, \pi_1]$ — коммутант группы $\pi_1(A, a)$. Для любого $[\delta] \in [\pi_1, \pi_1]$ определена его степень $\deg[\delta]$ (см. § 16). Обозначим через $\pi_1^+(A, a)$ полугруппу в $\pi_1(A, a)$, порожденную элементами вида $[\xi][\gamma_j][\xi]^{-1}$, $j = 1, \ldots, l$, где $[\xi] \in \pi_1(A, a)$ и ξ сохраняет ориентацию, а также элементами вида $[\eta][\gamma_j]^{-1}[\eta]^{-1}$, $j = 1, \ldots, l$, где η меняет ориентацию. Пусть $\pi_{1p}^n(A, a)$ — множество элементов вида $\prod\limits_{i=1}^{n}[\xi_i][\gamma_0][\xi_i]^{-1}$, где $[\xi] \in \pi_1(A, a)$ и ξ_i сохраняют ориентацию; $\pi_{1r}^n(A, a)$ — множество элементов вида $\prod\limits_{i=1}^{n}[\eta_i][\gamma_0]^{-1}[\eta_i]^{-1}$, где $[\eta_i] \in \pi_1(A, a)$ и η_i меняют ориентацию.

Обозначим через $\Sigma_n(\beta, \rho)$ класс ориентируемых поверхностей σ над N рода ρ, ограниченных кривой β, для которых число листов над бесконечно удаленной точкой (с учетом кратности ветвления) $n_\sigma(\infty_N) = n$, и положим по определению

$$S_n(\beta, \rho_0) = \bigcup_{\rho \le \rho_0} \Sigma_n(\beta, \rho).$$

Справедлив аналог теоремы 16.1.

Теорема 19.1. *Пусть $\beta \in \mathfrak{M}^*$, ρ_0, $n \in \mathbb{Z}_+$. Для того чтобы $S_n(\beta, \rho_0)$ было непусто, необходимо и достаточно, чтобы либо $[\beta]$, либо $[\beta]^{-1}$ было представимо в виде*

$$[\beta^+][\beta_p][\beta_r][\delta],$$

где

$$[\beta^+] \in \pi_1^+(A, a), \quad [\beta_p] \in \pi_{1p}^{n_1}(A, a),$$

$$[\beta_r] \in \pi_{1r}^{n_2}(A, a), \quad [\delta] \in [\operatorname{im}(\psi_\sharp), \operatorname{im}(\psi_\sharp)],$$

причем $\deg[\delta] = \rho \le \rho_0$ *и* $n_1 + n_2 = n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Предположим, что существует поверхность $\sigma = (\overline{M}, p)$ над N такая, что $\overline{M}$ имеет род $\rho \le \rho_0$ и $p : \overline{M} \to N$ накрывает точку ∞_N ровно n раз с учетом кратности ветвления. Тогда существует накрытие $\varphi : \overline{M} \to N$, такое, что коммутативна диаграмма 19.1. Предположим, что отображение φ сохраняет ориентацию.

Пусть ω — некоторая кривая в N, имеющая началом точку $\widetilde{a}$, а концом — точку $\widetilde{\widetilde{a}}$ (значит, $\psi(\omega)$ необходимо меняет ориентацию), тогда $\omega(\gamma_i^{(2)})^{-}\omega^{-}$ имеет начало в точке $\widetilde{a}$ и состоит из кривой, обходящей границу области $D_j^{(2)}$ в положительном направлении, дополненной разрезом вдоль ω.

Так как $p : \overline{M} \to N$ накрывает n раз точку $b_0 = \infty_N$ (с учетом кратности ветвления), то φ накрывает n_1 раз $b_0^{(1)}$ и n_2 раз $b_0^{(2)}$ (с учетом кратности ветвления), где $n_1 + n_2 = n$.

Обозначим через $\widetilde{\beta}$ поднятие кривой β на $\widetilde{N}$. Нетрудно проверить, что $\widetilde{\beta} \in \mathfrak{M}$, где класс $\mathfrak{M}$ кривых на ориентируемой поверхности $\widetilde{N}$, который вводится как и в § 15. Пусть $\widetilde{A} = \psi^{-1}(A) = \widetilde{N} \backslash \{b_j^{(1)}, b_{(j)}^2, j = 0, \ldots, l\}$. Тогда в силу теоремы 16.1

$$[\widetilde{\beta}] = [\widetilde{\beta}^{+}][\widetilde{\beta}_0][\widetilde{\delta}],$$

где

$$[\widetilde{\beta}^{+}] \in \pi_1^{+}(\widetilde{A}, \widetilde{a}), \quad [\widetilde{\beta_0}] \in \pi_{1,0}^{n}(\widetilde{A}, \widetilde{a}),$$

$$[\widetilde{\delta}] \in [\pi_1(\widetilde{A}, \widetilde{a}), \pi_1(\widetilde{A}, \widetilde{a})], \quad \deg[\widetilde{\delta}] = \rho \leq \rho_0;$$

$\pi_1^{+}(\widetilde{A}, \widetilde{a})$ — полугруппа, порожденная элементами вида $[\widetilde{\xi}][\gamma_j^{(1)}][\widetilde{\xi}]^{-1}$ и $[\widetilde{\eta}][\omega][\gamma_j^{(2)}]^{-1}[\omega]^{-1}[\widetilde{\eta}]^{-1}$, $j = 1, \ldots, l$, $[\widetilde{\xi}]$, $[\widetilde{\eta}] \in \pi_1(\widetilde{A}, \widetilde{a})$;

$$\pi_{1,0}^{n}(\widetilde{A}, \widetilde{a}) \doteqdot \Biggl\{ \prod_{i=1}^{n_1} [\widetilde{\xi}_i][\gamma_0^{(1)}][\widetilde{\xi}_i]^{-1} \prod_{j=1}^{n_2} [\widetilde{\eta}_j][\omega][\gamma_0^{(2)}]^{-1}[\omega]^{-1}[\widetilde{\eta}_j]^{-1} :$$

$$[\widetilde{\xi}_i], [\widetilde{\eta}_j] \in \pi_1(\widetilde{A}, \widetilde{a}),\ n_1 + n_2 = n \Biggr\}.$$

При этом мы используем равенство

$$[\widetilde{\eta}][\omega][\gamma_j^{(2)}]^{-1}[\omega]^{-1}[\widetilde{\eta}]^{-1} \cdot [\widetilde{\xi}][\gamma_j^{(1)}][\widetilde{\xi}]^{-1} =$$

$$= [\widetilde{\xi}][\gamma_j^{(1)}][\widetilde{\xi}]^{-1} \cdot [\widetilde{\eta}'][\omega][\gamma_j^{(2)}]^{-1}[\omega]^{-1}[\widetilde{\eta}']^{-1}, \tag{19.1}$$

где $[\widetilde{\eta}'] = [\widetilde{\xi}][\gamma_j^1][\widetilde{\xi}]^{-1}[\widetilde{\eta}]$, позволяющее ставить множители вида $[\widetilde{\xi}][\gamma_j^1][\widetilde{\xi}]^{-1}$ перед множителями вида $[\widetilde{\eta}'][\omega][\gamma_j^2]^{-1}[\omega]^{-1}[\widetilde{\eta}']^{-1}$, Применяя $\psi_\sharp$ и учитывая (19.1), имеем

$$\psi_\sharp([\widetilde{\beta}]) = [\beta] = [\beta^+][\beta_p][\beta_r][\delta],$$

где

$$\begin{aligned}
[\beta^+] &= \psi_\sharp([\widetilde{\beta}^+]) \in \pi_1^+(A,a),\\
[\beta_p] &= \psi_\sharp\left(\prod_{i=1}^{n_1}[\widetilde{\xi}_i][\gamma_0^{(1)}][\widetilde{\xi}_i]^{-1}\right) \in \pi_{1p}^{n_1}(A,a),\\
[\beta_r] &= \psi_\sharp\left(\prod_{i=1}^{n_2}[\widetilde{\eta}_i][\omega][\gamma_j^2]^{-1}[\omega]^{-1}[\widetilde{\eta}_i]^{-1}\right) \in \pi_{1r}^{n_2}(A,a),
\end{aligned}$$

т. к. $\psi(\omega)$ меняет ориентацию, $[\delta] = \psi_\sharp([\widetilde{\delta}])$ и $\deg[\delta] \le \rho$.

Если отображение φ меняет ориентацию, то аналогичные рассуждения можно провести для кривой β^-.

Достаточность. Без ограничения общности можно считать, что $[\beta] = [\beta^+][\beta_p][\beta_r][\delta]$, где $[\beta^+]$, $[\beta_p]$, $[\beta_r]$, $[\delta]$ подчиняются условиям, указанным в формулировке теоремы. Очевидно, что $[\beta^+]$, $[\beta_p]$, $[\beta_r]$, $[\delta] \in \mathrm{im}(\psi_\sharp)$, причем

$$[\delta] = \psi_\sharp([\widetilde{\delta}]),\ \text{где}\ [\widetilde{\delta}] \in [\pi_1(\widetilde{A},\widetilde{a}), \pi_1(\widetilde{A},\widetilde{a})],\ \deg[\widetilde{\delta}] \le \rho_0.$$

Поднимем кривые β^+, β_p, β_r на $\widetilde{N}$ из точки $\widetilde{a}$. Так как гомотопические классы кривых вида $\xi_i\gamma_i\xi_i^-$ и $\eta_i\gamma_i^-\eta_i^-$ (ξ_i сохраняют, а η_i меняют ориентацию) при отображении $(\psi_\sharp)^{-1}$ ($\psi_\sharp$ — мономорфизм, см., напр., [125]) переходят соответственно в гомотопические классы кривых вида $\widetilde{\xi}_i\gamma_0^{(1)}\widetilde{\xi}_i^-$ и $\widetilde{\eta}_i\omega\gamma_i^{(2)}\omega^-\widetilde{\eta}_i^-$, где ω — некоторая кривая, соединяющая точки $\widetilde{a}$ и $\widetilde{\widetilde{a}}$, то $[\beta^+] = \psi_\sharp([\widetilde{\beta}^+])$, $[\widetilde{\beta}^+] \in \pi_1^+(\widetilde{A},\widetilde{a})$, где полугруппа $\pi_1^+(\widetilde{A},\widetilde{a})$ определялась в § 16. Аналогично $[\beta_p] = \psi_\sharp([\widetilde{\beta}_p])$, $[\beta_r] = \psi_\sharp([\widetilde{\beta}_r])$, где

$$[\widetilde{\beta}_p] = \prod_{i=1}^{n}[\widetilde{\xi}_i][\gamma_0^{(1)}][\widetilde{\xi}_i]^{-1};\ [\widetilde{\beta}_r] = \prod_{i=1}^{n}[\widetilde{\eta}_i][\omega][\gamma_0^{(2)}][\omega]^{-1}[\widetilde{\eta}_i]^{-1}.$$

Имеем $[\widetilde{\beta}] = (\psi_\sharp)^{-1}[\beta] = [\widetilde{\beta}^+][\widetilde{\beta}_p]\ [\widetilde{\beta}_r][\widetilde{\delta}]$ и, следовательно, согласно результатам для ориентируемого случая, существует риманова поверхность $\widetilde{\sigma} = (\overline{M}, \varphi)$ над $\overline{N}$ рода не больше, чем ρ_0, накрывающая точки $b_0^{(1)}$ и $b_0^{(2)}$ соответственно n_1 и n_2 раз с учетом кратности ветвления. Взяв композицию $\psi \circ \varphi = p : \overline{M} \to N$, получим риманову поверхность $\sigma = (\overline{M}, p)$ рода не больше ρ , n раз накрывающую точку $b_0 = \infty_N$ с учетом кратности ветвления и ограниченная кривой β. Теорема доказана.

Итак, исходная задача сведена к чисто алгебраической задаче о факторизации гомотопического класса $[\beta]$ данной кривой β в группе $\pi_1(A, a)$ (отметим, что эта группа является свободной, что существенно облегчает задачу). Проверка условий теоремы на практике в общем случае представляет собой открытую проблему. Тем не менее, в случае $n = 0$ с использованием аппарата, развитого в § 17, можно предложить алгоритм, позволяющий за конечное число шагов определить, допускает ли $[\beta]$ факторизацию нужного вида.

Список литературы

[1] *Авхадиев Ф.Г.* Достаточные условия однолистности квазиконформных отображений // Матем. заметки. – 1975. – № 6. – С. 793–802.

[2] *Авхадиев Ф.Г.* Конформные отображения и краевые задачи. – Казань: Казанский фонд «Математика», 1996. – 216 с.

[3] *Авхадиев Ф.Г., Аксентьев Л.А., Елизаров А.М., Насыров С.Р.* Научный семинар по геометрической теории функций: основные результаты двух последних десятилетий // Труды Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т.14. – Казань: Казанское математическое общество, 2002. – С. 7–38.

[4] *Авхадиев Ф.Г., Насыров С.Р.* Необходимые условия существования римановой поверхности с заданной границей // Тр. семин. по краев. задачам. Вып. 22. – Казань, 1985. – С. 6–15.

[5] *Авхадиев Ф.Г., Насыров С.Р.* Построение римановой поверхности по ее границе // Изв. вузов. Математика. – 1986. – № 5. – С. 3–11.

[6] *Аксентьев Л.А.* Об индексах функций на римановых поверхностях // Докл. АН СССР. – 1963. – Т. 152, № 1. – С. 9–12.

[7] *Аксентьев Л.А.* Индексы функций на римановых поверхностях и их приложения // Изв. вузов. Математика. – 1964. – № 4. – С. 3–8.

[8] *Аксентьев Л.А.* Обратные краевые задачи для аналитических функций на римановых поверхностях // Тр. семин. по краев. задачам. Вып. 1. – Казань, 1964. – С. 3–13.

[9] *Аксентьев Л.А.* Приложение к обратным краевым задачам индексов функций на римановых поверхностях // Тр. семин. по краев. задачам. Вып. 3. – Казань, 1966. – С. 5–10.

[10] *Аксентьев Л.А.* Геометрические свойства решений краевых задач для аналитических функций / Дис. . . . докт. физ.–мат. наук. – Казань, 1971. – 296 с.

[11] *Аксентьев Л.А., Ильинский Н.Б., Нужин М.Т., Салимов Р.Б., Тумашев Г.Г.* Теория обратных краевых задач для аналитических функций и ее приложения // Матем. анализ. Т. 18 (Итоги науки и техники). – М.: ВИНИТИ. – 1980. – С. 69–126.

[12] *Александров И.А.* Параметрические продолжения в теории однолистных функций. – М.: Наука, 1976. – 343 с.

[13] *Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А.* Общая топология. – М.: Высш. шк., 1979. – 336 с.

[14] *Альфорс Л.* Лекции по квазиконформным отображениям. – М.: Мир, 1964. – 134 с.

[15] *Бильченко Г.Г., Каюмов И.Р., Насыров С.Р., Садыков М.Ф.* Разветвленные накрытия неориентируемых поверхностей ориентируемыми с заданной проекцией края // Матем. заметки. – 1998. – Т. 63, вып. 2. – С. 292–294.

[16] *Богатырев А.Б.* Экстремальные многочлены и римановы поверхности. – М.: МЦНМО, 2005. – 176 с.

[17] *Болибрух А.А.* Проблема Римана–Гильберта // УМН. – 1990. – Т. 45, вып. 2(272). – С. 3–47.

[18] *Болибрух А.А.* О достаточных условиях положительной разрешимости проблемы Римана–Гильберта // Матем. заметки. – 1992. – Т. 51, вып. 2. – С. 9–19.

[19] *Бронза С.Д.* Профили разветвленных накрытий над римановой поверхностью рода нуль и их применение к теории алгебраических функций / Автореф дис.... канд. физ.–мат. наук. – Харьков, 1987. – 15 с.

[20] *Бронза С.Д., Таирова В.Г.* Конструирование римановых поверхностей класса F_q^* // Теория функций, функц. анализ и их приложения. Вып. 40. – Харьков, 1983. – С. 23–33.

[21] *Бронза С.Д., Таирова В.Г.* Конструирование римановых поверхностей класса F_q^*, 2 // Теория функций, функц. анализ и их приложения. Вып. 41. – Харьков, 1984. – С. 25–35.

[22] *Букур И., Деляну А.* Введение в теорию категорий и функторов. – М.: Мир, 1972. – 259 с.

[23] *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции. – М.: Физматгиз, 1959. – 628 с.

[24] *Винберг Э.Б.* Вещественные целые функции с предписанными критическими значениями // Вопросы теории групп и гомологические алгебры. – Ярославль, 1989. – С. 127–138.

[25] *Винберг Э.Б., Шварцман О.В.* Римановы поверхности // Алг. топология и геометрия. Т. 16 (Итоги науки и техники). – М.: ВИНИТИ, 1978. – С. 191–245.

[26] *Волковыский Л.И.* Сходящиеся последовательности римановых поверхностей//Матем. сб. – 1948. – Т. 23(65), № 1. – С. 361–382.

[27] *Волковыский Л.И.* Исследования по проблеме типа односвязной римановой поверхности // Тр. МИАН СССР. Т. 34. – М.-Л., 1950. –172 с.

[28] *Гахов Ф.Д., Зверович Э.И., Самко С.Г.* Обобщенный принцип аргумента // Вестник АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1975, № 1. – С. 5–16.

[29] *Гахов Ф.Д., Крикунов Ю.М.* Топологические методы теории функций комплексного переменного и их приложения к обратным краевым задачам // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1956. – Т. 20, № 2. – С. 207–240.

[30] *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1965. – 628 с.

[31] *Гольдберг А.А.* Об одном классе римановых поверхностей // Матем. сб. – Т. 49(91), № 4. – С. 448–458.

[32] *Гольдберг А.А.* Считающие функции последовательностей – точек для целых функций // Сиб. матем. ж. – 1978. – Т. XIX, № 1. – С. 28–36.

[33] *Гольдберг А.А., Заболоцкий Н.В.* Об a–точках функций, мероморфных в круге // Сиб. матем. ж. – 1983. – Т. XXIV, № 3. – С. 34–46.

[34] *Гольдберг А.А., Островский И.В.* Распределение значение мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. – 592 с.

[35] *Григорчук Р.И.* О топологических и метрических типах поверхностей, регулярно накрывающих замкнутую поверхность // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1989. – Т. 53, № 3. – С. 498–536.

[36] *Гурвиц А., Курант Р.* Теория функций. – М.: Наука, 1968. – 648 с.

[37] *Джураев О.* Об одном способе эффективного построения поля алгебраических функций, соответствующего n–листному накрытию сферы // Вестник АН БССР. Сер. физ.–мат. наук. – 1988, № 5. – С. 27–33.

[38] *Дольд А.* Лекции по алгебраической топологии. – М.: Мир, 1976. – 463 с.

[39] *Ентов В.М.* Решение задач фильтрации с предельным градиентом в случае неоднолистности отображения // Изв. АН СССР. Сер. мех. жидкости и газа. – 1972. – № 1. – С. 45–49.

[40] *Зверович Э.И.* Алгебраический метод построения основных функционалов римановой поверхности, заданной в виде конечнолистной накрывающей сферы // Сиб. матем. ж. – 1987. – Т. 28, № 6. – С. 32–43.

[41] *Зверович Э.И.* О построении поля алгебраических функций, соответствующих заданному накрытию сферы // Докл. АН БССР. – 1985. – Т. XXIX, № 2. – С. 104–107.

[42] *Здразковская С.* Топологическая классификация полиномиальных отображений // УМН. – 1970. – Т. XXV, вып. 4(154). – С. 179–180.

[43] *Зейферт Г., Трельфалль В.* Топология. – М.-Л.: ГОНТИ, 1938. – 400 с.

[44] *Ильинский Н.Б., Насыров С.Р.* Задача определения подземного контура по эпюре противодавления при наличии прямолинейного водоупора // Изв. вузов. Математика. – 1984. – № 2. – С. 34–42.

[45] *Ильинский Н.Б., Шешуков Е.Г.* Задача нелинейной фильтрации с неоднолистной областью годографа скорости // Изв. вузов. Математика. – 1972. – № 10. – С. 34–40.

[46] *Коллингвуд Э., Ловатер А.* Теория предельных множеств. – М.: Мир, 1971. – 312 с.

[47] *Коллинз Д., Цишанг Х.* Комбинаторная теория групп и фундаментальные группы // Совр. проб. мат. Фунд. напр. Т. 58 (Итоги науки и техники). – М.: ВИНИТИ, 1990. – С. 5–190.

[48] *Коломийцева Т.А.* О топологических методах теории функций комплексного переменного и некоторых их приложениях к обратным краевым задачам // Изв. вузов. Математика. – 1959. – № 3. – С. 97–111.

[49] *Кра И.* Автоморфные функции и клейновы группы. – М.: Мир, 1975. – 296 с.

[50] *Красносельский М.А., Забрейко П.П., Перов А.И., Поволоцкий А.И.* Векторные поля на плоскости. – М.: Физматгиз, 1963. – 245 с.

[51] *Кроуэлл Р., Фокс Р.* Введение в теорию узлов. – М.: Мир, 1967. – 348 с.

[52] *Куратовский К.* Топология, т. 2. – М.: Мир, 1969. – 624 с.

[53] *Куфарев Б.П.* Метризация пространства всех простых концов областей семейства $\mathfrak{B}$ // Матем. заметки. – 1969. – Т. 6, № 5. – С. 607–618.

[54] *Линдон Р., Шупп П.* Комбинаторная теория групп. – М.: Мир, 1980. – 447 с.

[55] *Мальцев А.И.* Об уравнении $zxyx^{-1}y^{-1}z^{-1} = aba^{-1}b^{-1}$ в свободной группе // Алгебра и логика. – 1962. – Т. 1, № 5. – С. 45–50.

[56] *Масси У., Столлингс Дж.* Алгебраическая топология. Введение. – М.: Мир, 1970. – 343 с.

[57] *Медных А.Д.* Определение числа неэквивалентных накрытий над компактной римановой поверхностью// Докл. АН СССР. – 1978. – Т. 239, № 2. – С. 269–271.

[58] *Медных А.Д.* О неразветвленных накрытиях компактных римановых поверхностей// Докл. АН СССР. – 1979. – Т. 244, № 3. – С. 529–532.

[59] *Медных А.Д.* К решению задачи Гурвица о числе неэквивалентных накрытий над компактной римановой поверхностью// Докл. АН СССР. – 1981. – Т. 261, № 3. – С. 529–532.

[60] *Медных А.Д.* Неэквивалентные накрытия римановых поверхностей с заданным типом ветвления// Сиб. матем. ж. – 1984. – Т. 25, № 4. – С. 120–142.

[61] *Медных А.Д.* Новый метод подсчета числа накрытий над многообразием с конечно порожденной фундаментальной группой // Докл. РАН. – 2006. – Т. 409, № 2. – С. 158–162.

[62] *Монахов В.Н.* Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. – Новосибирск, 1977. – 424 с.

[63] *Монтель П.* Нормальные семейства аналитических функций. – М.-Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1936. – 240 с.

[64] *Морс М.* Топологические методы теории функций комплексного переменного. – М.: ИЛ, 1951. – 248 с.

[65] *Насыров С.Р.* Построение конечных римановых поверхностей по граничной кривой // Докл. АН СССР. – 1987. – Т. 297, № 6. – С. 1311–1314.

[66] *Насыров С.Р.* Топологическое пространство римановых поверхностей, связанное со сходимостью к ядру // Докл. АН УССР, сер. А. – 1988. – № 5. – С. 19–22.

[67] *Насыров С.Р.* Смешанная обратная краевая задача на римановых поверхностях // Изв. вузов. Математика. – 1990. – № 10. – С. 25–36.

[68] *Насыров С.Р.* Бикомпактность пространств римановых поверхностей в топологии, индуцированной сходимостью к ядру // Тр. семин. по краевым задачам. Вып. 24. – Казань, 1990. – С. 174–187.

[69] *Насыров С.Р.* Сходимость к ядру римановых поверхностей и их универсальных накрытий // Тр. семин. по краевым задачам. Вып. 27. – Казань, 1992. – С. 82–95.

[70] *Насыров С.Р.* Разветвленные накрытия римановых поверхностей с заданной проекцией края // Алгебра и анализ. – 1993. – Т. 5, № 3. – С. 212–237.

[71] *Насыров С.Р.* Метрическое пространство римановых поверхностей над сферой // Матем. сб. – 1994. – Т. 185, № 7. – С. 89–108.

[72] *Насыров С.Р.* Метрическое пространство римановых поверхностей над сферой // Докл. РАН. – 1995. – Т. 343, № 5. – С. 603–606.

[73] *Насыров С.Р.* Римановы поверхности, ограниченные кривыми, с заданными проекциями точек ветвления // Изв. вузов. Математика. – 2004. – № 8. – С. 48–61.

[74] *Натанзон С.М.* Модули римановых поверхностей, вещественных алгебраических кривых и их супераналоги. – М.: МЦНМО, 2003. – 176 с.

[75] *Ольшанский А.Ю.* Диаграммы гомоморфизмов групп поверхностей // Сиб. матем. ж. – 1989. – Т. 30, № 6. – С. 152–171.

[76] *Ольшанский А.Ю.* Геометрия определяющих соотношений в групах. – М.: Наука, 1989. – 448 с.

[77] *Пехлецкий И.Д., Русских Л.В.* К теории простых концов на римановой поверхности с однолистно достижимой границей // Уч. зап. Пермск. пединст-та. – 1966. – Вып. 131. – С. 13–29.

[78] *Поволоцкий А.И.* Определение углового порядка локально простой кривой // Докл. АН СССР. – 1959. – Т. 124, № 3.– С. 524–526.

[79] *Поволоцкий А.И.* Индексы особых точек псевдоаналитических функций // Докл. АН СССР. – 1959. – Т. 129, № 2. – С. 265–267.

[80] *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа. Т. II. – М.: Наука, 1978. – 431 с.

[81] *Полубаринова-Кочина П.Я.* Теория движения грунтовых вод. – М.: Наука, 1977. – 664 с.

[82] *Протопопов А.Н.* Гомеоморфизмы разветвленных накрытий двумерной сферы // Докл. АН СССР. – 1986. – Т. 290, № 4. – С. 792–795.

[83] *Риман Б.* Сочинения. – М.-Л.: ОГИЗ, 1948. – 543 с.

[84] *Русских Л.В.* Простые концы конечносвязных областей, принадлежащих римановой поверхности и сходящихся к невырожденному ядру // Уч. зап. Пермск. госун-та. – 1966. – Вып. 131. – С. 33–43.

[85] *Русских Л.В.* Простые концы последовательности областей на открытой римановой поверхности // Уч. зап. Пермск.召 пединст-та. – 1966. – Вып. 131. – С. 3–12.

[86] *Сетько Е.А.* Римановы поверхности правильных $6n$-угольников // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. – 1991. – № 2. – С. 49–53.

[87] *Спеньер Э.* Алгебраическая топология. Введение. – М.: Мир, 1977. – 688 с.

[88] *Спрингер Т.* Введение в теорию римановых поверхностей. – М.: ИЛ, 1960. – 343 с.

[89] *Степанов Г.Ю.* Гидродинамика решеток турбомашин. – М.: Физматгиз, 1962. – 512 с.

[90] *Стоилов С.* Лекции о топологических принципах теории аналитических функций. – М.: Наука, 1964. – 227 с.

[91] *Суворов Г.Д.* Простые концы последовательности плоских областей, сходящейся к ядру // Матем. сб. – 1953. – Т. 33, № 1. – С. 73–100.

[92] *Суворов Г.Д.* Метрическая теория простых концов и граничные свойства плоских отображений с ограниченными интегралами Дирихле. – Киев: Наукова думка, 1981. – 168 с.

[93] *Суворов Г.Д.* Простые концы и последовательности плоских отображений. – Киев: Наукова думка, 1986. – 189 с.

[94] *Таирова В.Г.* Критические точки и граничный индекс функций на конечнолистных римановых поверхностях // Докл. АН Арм. ССР. – 1962. – Т. 34, № 1. – С. 13–18.

[95] *Трохимчук Ю.Ю.* К теории последовательностей римановых поверхностей// Укр. матем. ж. – 1952. – Т. IV, № 1. – С. 49–56.

[96] *Трохимчук Ю.Ю.* О последовательностях аналитических функций и римановых поверхностей // Укр. матем. ж. – 1952. – Т. IV, № 4. – С. 431–435.

[97] *Трохимчук Ю.Ю.* Непрерывные отображения и условия моногенности. – М.: Физматгиз, 1963. – 212 с.

[98] *Форстер О.* Римановы поверхности. – М.: Мир, 1980. – 240 с.

[99] *Цишанг Х., Фогт Э., Колдевай Х.-Д.* Поверхности и разрывные группы. – М.: Наука, 1978. – 685 с.

[100] *Чеботарев Н.Г.* Теория алгебраических функций. – М.-Л., 1948.

[101] *Шевалле К.* Введение в теорию алгебраических функций от одной переменной. – М.: ИЛ, 1959.

[102] *Шокуров В.В.* Римановы поверхности и алгебраические кривые // Совр. проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 23. (Итоги науки и техники). – М.: ВИНИТИ, 1988. – С. 5–171.

[103] *Accola D.M.* Topics in the theory of Riemann surfaces. — Lecture Notes in Math. – V. 1595. – Berlin–Heidelberg–New York: Springer Verlag, 1994. – 105 p.

[104] *Ahlfors L.V., Sario O.* Riemann surfaces. – Princeton: Princeton Univ. Press, 1960. – 382 p.

[105] *Andrean Cazacu C.* Ramification of Klein surfaces // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. – 1985. – № 10. – P. 47–52.

[106] *Bailey K.D.* Extending closed plane curves to immersions of the disk with n handles // Trans. Amer. Math. Soc. – 1975. – V. 206. – P. 1–24.

[107] *Bernstein I., Edmonds A.L.* On the classification of generic branched coverings of surfaces // Ill. J. Math. – 1984. – V. 28, № 1. – P. 64–82.

[108] *Blanc S.* Extending immersions of the circle. – Dissertation, Brandeis University, 1967.

[109] *Bochner S.* Fortsetzung Riemannsche Flächen // Math. Ann. – 1927. – Bd. 98.

[110] *Bruce J.W., Giblin P.T.* Projections of surfaces with boundary // Proc. London Math. Soc. – 1990. – V. 60, № 2. – P. 392–416.

[111] *Bryant R.P., Singerman D.* Foundations of the theory of maps on surfaces with boundary // Quart. J. Math. Oxford (2). – 1985. – V. 36. – P. 17–41.

[112] *Burgess C.E.* Classification of surfaces // Amer. Math. Monthly. – 1985. – V. 92, № 5. – P. 349–354.

[113] *Burns R.G., Edmunds C.C., Faronqi I.H.* On commutator equalities and stabilizers in free groups // Canad. Math. Bull. – 1976. – V. 19. – P. 263–267.

[114] *Carathéodory C.* Untersuchungen über die konformen Abbildungen von festen und veränderlichen Gebieten // Math. Ann. – 1912. – Bd. 72. – S. 107–144.

[115] *Carter J.S.* Classifying immersed curves // Proc. Amer. Math. Soc. – 1991. – V. 111, № 2. – P. 281–287.

[116] *Chillingworth D.R.J.* Winding numbers on surfaces, I // Math. Ann. – 1972. – Bd. 296. – S. 218–249.

[117] *Chillingworth D.R.J.* Winding numbers on surfaces, II // Math. Ann. – 1972. – Bd. 299. – S. 131–153.

[118] *Culler M.* Using surfaces to solve equations in free groups // Topology. – 1981. – V. 20. – P. 133–145.

[119] *Curley C., Wolitzer D.* Branched immersions of surfaces // Mich. Math. J. – 1986. – V. 33. – P. 131–144.

[120] *Edmonds A.L., Kulkarni R.S., Stong R.E.* Realizability of branched coverings of surfaces // Trans. Amer. Math Soc. – 1984. – V. 282, № 2. – P. 773–790.

[121] *Edmunds C.C., Comerford L.P.* Quadratic equations over free groups and free products // J. Algebra. – 1981. – V. 68, № 2. – P. 276–297.

[122] *Ezell C.L.* Branched point structure of covering maps onto nonorientable surface // Trans. Amer. Math Soc. – 1978. – V. 243. – P. 123–133.

[123] *Ezell C.L.* Observations on the construction of covers using permutation voltage assignments // Discrete Math. – 1979. – V. 28, № 1. – P. 7–20.

[124] *Ezell C.L.* Branched extensions of curves in compact surfaces // Trans. Amer. Math. Soc. – 1980. –V. 259, № 2. – P. 533–546.

[125] *Ezell C.L., Marx M.L.* Branched extensions of curves in orientable surfaces // Trans. Amer. Math. Soc. – 1980. – V. 259, № 2. – P. 514–532.

[126] *Farkas H.M., Kra I.* Riemann surfaces. – Berlin: Springer, 1981. – 337 p.

[127] *Francis G.K.* Null genus realizability criterion for abstract intersection sequences // J. Combinatorial theory. – 1969. – V. 7, № 4. – P. 331–341.

[128] *Francis G.K.* The folded ribbon theorem. A contribution to the study of immersed circles // Trans. Amer. Math. Soc. – 1969. – V. 141(199), № 2. – P. 514–532.

[129] *Francis G.K.* Extensions to the disk of properly nested plane immersion of the circles // Mich. Math. J. –1970. – V. 17. – P. 377–383.

[130] *Francis G.K.* Titus' homotopies of normal curves // Proc. Amer. Math Soc. – 1971. – V. 30, № 3. – P. 511–518.

[131] *Francis G.K.* General homotopies of immersions // Indiana Univ. Math. J. – 1972. – V. 21, № 12. – P. 1101–1112.

[132] *Francis G.K.* Spherical curves that bound immersed disks // Proc. Amer. Math Soc. – 1973. – V. 41. – P. 87–93.

[133] *Francis G.K.* Branched and folded parametrization of the sphere// Bull. Amer. Math Soc. – 1974. – V. 80. – P. 72–76.

[134] *Francis G.K.* Assembling compact Riemann surfaces with given boundary curves and branch points on the sphere // Ill. J. Math. – 1976. – V. 20, № 2. – P. 198–217.

[135] *Francis G.K.* Polymersions with nontrivial targets // Ill. J. Math. – 1978. – V. 22, № 1. – P. 61–170.

[136] *Francis G.K., Troyer S.F.* Exellent maps with given folds and cusps // Houston J. Math. – 1977. – V. 3, № 2. – P. 165–194.

[137] *Gersten S.M.* On branched covers of the 2-sphere by the 2-sphere// Proc. Amer. Math. Soc. – 1987. – V. 101, № 4. – P. 761–766.

[138] *Gramain A.* Bounding immersions of codimension 1 in the Euclidean space // Bull. Amer. Math Soc. – 1970. – V. 76. – P. 361–365.

[139] *Gross G.L., Tucker T.W.* Generating all graph coverings by permutation voltage assignments // Discrete Math. – 1977. – V. 18, № 3. – P. 273–283.

[140] *Haefliger A.* Quelques remarques sur les applications differentiables d'une surface dans le plan // Ann. Inst. Fourier. – 1960. – V. 10. – P. 47–60.

[141] *Halsch H.* Die Theorie der Grundkurven und das Äquivalenzproblem bei der Darstellung Riemannsche Flächen // Mitt. Math. Semin. Giessen. – 1952. – № 42. – S. 1–51.

[142] *Hejhal D.A.* Universal covering maps for variable regions // Math. Z. – 1974. – V. 137. – P. 7–20.

[143] *Hiense M.H.* On continuation of a Riemann surface //Ann. of Math. – 1942. – V. 43.

[144] *Humphries S.P., Johnson D.* A generalization of winding number functions on surfaces // Proc. London Math. Soc. – 1989. – V. 58, № 2. – P. 366–368.

[145] *Hurwitz A.* Über Riemannsche Flächen mit gegeben Verzweigungpunkten// Math. Ann. – 1891. – V. 39. – S. 1–61.

[146] *Hurwitz A.* Über die Anzahl der Riemannsche Flac̆hen mit gegeben Verzweigungpunkten// Math. Ann. – 1902. – V. 55. – S. 53–66.

[147] *Jemett J.* Differentiable approximations to light interior transformations // Duke Math. J. – 1956. – P. 111–124.

[148] *Jorgensen T., Nautanen M.* Surfaces of genus 2: fundamental polygons of a common type// Quart. J. Math. – 1982. – V. 33, № 132. – P. 451–461.

[149] *Kazec W.* On equivalences of branched coverings and their action on homology // Pacific J. Math. – 1985. – V. 118, № 1. – P. 133–157.

[150] *Kligenberg W.* Closed curves on S^2 with bounded winding number // Geom. Dedic. – 1983. – V. 14, № 1. – P. 1–11.

[151] *Levy H.* Über die Darstellung ebener Kurven mit Doppelpunkten // Nachr. Acad. Wiss. Göttingen, II. Math.-phys. K1. – 1981. – № 4. – S. 109–130.

[152] *Lines D.* Revetements ramifies // Enseign Math. – 1980. – V. 20, № 1–2. – P. 173–182.

[153] *Lyndon R.C., Wicks M.J.* Commutators in free groups // Canad. Math. Bull. – 1981. – V. 24, № 1. – P. 101–106.

[154] *Lloyd E.* Riemann surface transformation groups// J. Combinatorial Theory (A). – 1972. – V. 13. – P. 17–27.

[155] *Lovasz L., Marx M.L.* A forbidden substructure characterization of Gauss codes//Acta sci. math. – 1976. – V. 38, № 1–2. – P. 115–119.

[156] *Luroth J.* Note uber Verzweigungsschnitte und Querschnitte in einer Riemann'schen Fläche // Math. Ann. – 1871. – V. 4. – S. 181–184.

[157] *Magajana Z., Mohar B.* Non-realizable branching arrays // Series Dept. Math. Preprint. – 1985. – V. 23, № 138. – P. 345–368.

[158] *Magajana Z., Mohar B.* Existence of branched coverings of surfaces // Series Dept. Math. Preprint. – 1985. –V. 23, № 138. – P. 345–368.

[159] *Marx M.L.* Normal curves, arising from light open mappings of the annulus // Trans. Amer. Math. Soc. – 1965. – V. 120. – P. 45–56.

[160] *Marx M.L.* The branched point structure of extension of interior boundaries// Trans. Amer. Math. Soc. – 1968. – V. 131. – P. 79–98.

[161] *Marx M.L.* Whyburn's conjecture for C^2 maps // Proc. Amer. Math. Soc. – 1968. – V. 19, № 3. – P. 660–661.

[162] *Marx M.L.* Light open mappings on a torus with a disk removed // Mich. Math. J. – 1968. – V. 15. – P. 449–456.

[163] *Marx M.L.* The Gauss realizability problem // Proc. Amer. Math. Soc. – 1968. – V. 22, № 3. – P. 610–613.

[164] *Marx M.L.* Extensions of normal immersions of S^1 into $\mathbb{R}^2$ // Trans. Amer. Math. Soc. – 1974. – V. 187. – P. 309–326.

[165] *Marx M.L.* A combinatorial invariant that characterizes normal immersions of S^1 into $\mathbb{R}^2$ // Duke Math. J. – 1974. – V. 41, № 1. – P. 145–149.

[166] *Marx M.L.* La méthode des sous–structures interdites et la solution de Resenstiehl au problème de Gauss sur les courbes fermée du plan // C. R. Acad. Sci. – 1977. – V. 285, № 3. – P. A85–A87.

[167] *Marx M.L., Verhey R.F.* Interior and polynomial extensions of immersed circles // Proc. Amer Math Soc. – 1970. – V. 24. – P. 41–49.

[168] *Maskit B.* The conformal group of a plane domain // Amer. J. Math. – 1968. – V. 90. – P. 718–722.

[169] *Massy W.S.* Finite covering spaces of 2–manifolds with boundary // Duke Math. J. – 1974. – V. 41. – P. 875–887.

[170] *Mednykh A.D.* Branched coverings of Riemann surfaces whose branch orders coincide with the multiplicity // Commun. Algebra. – 1990. – V. 18, № 5. – P. 1517–1533.

[171] *Micha E.* Imbedding and immersion numbers of manifolds with boundary // Topology Appl. – 1989. – V. 31, № 3. – P. 277–283.

[172] *Nasyrov S.R.* Generalized Riemann–Hurwitz formula //Rev. Romain Acad. Sci. – 1995. – V. 40, № 2. – P. 177–194.

[173] *Nevanlinna R.* Über die Riemannschen Fläche einer analytischen Funktion //Verhandl. Internat. Mathematiker Kongr. Zurich. – 1932. – Bd. 1.

[174] *Nevanlinna R.* Über Riemannschen Fläche mit endlichvielen Windungspunkten // Acta Math. – 1932. – V. 58. – S. 295–373.

[175] *Patterson J.S.* Ramified coverings of Riemann surfaces // Arch. Math. – 1977. – V. 28. – P. 281–286.

[176] *Picard E.* Traité d'Analyse, V. 2. – Paris: Gauthier–Villars, 1905. – 585 p.

[177] *Poenaru E.* Expose 342, seminaire Bourbaki, 1967–1968. – Benjamin: New York, 1969.

[178] *Pommerenre Ch.* Univalent functions. – Göttingen: Springer Verlag, 1975. – 376 p.

[179] *Possel R. de* Sur le prolongement der surfaces de Riemann // C. R. Acad. Sci. de Paris. – 1927. – V. 186. – P. 1092–1095.

[180] *Possel R. de* Sur le prolongement der surfaces de Riemann // C. R. Acad. Sci. de Paris. – 1928. – V. 187. – P. 98–106.

[181] *Possel R. de* Quelques questions de représentation conform. Théses. – Paris, 1932.

[182] *Quine J.R.* On the self–intersections of the image of the unit circle under a polynomial mapping // Proc. Amer. Math. Soc. – 1973. – V. 39, № 1. – P. 135–140.

[183] *Quine J.R.* Homotopies and intersection sequences // Pacific J. Math. – 1976. – V. 64, № 1. – P. 75–78.

[184] *Quine J.R.* The geometry of $p(S^1)$ // Pacific J. Math. – 1985. – V. 64, № 2. – P. 551–557.

[185] *Quine J.R.* On positively turning immersions //Proc. Amer. Math. Soc. – 1976. – V. 61, № 1. – P. 69–72.

[186] *Quine J.R.* Some consequences of the algebraic nature of $p(e^{i\theta})$ // Trans. Amer. Math. Soc. – 1976. – V. 224, №2. – P. 437–442.

[187] *Quine J.R.* Tangent winding numbers and branched mappings // Pacific J. Math. – 1977. – V. 73. – P. 161–167.

[188] *Quine J.R.* A global theorem for singularities of maps between oriented 2-manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. – 1978. – V. 236. – P. 307–314.

[189] *Radó T.* Über die nichtfortsetzbare Riemannsche Mannigfaltigkeit // Math. Z. – 1924. – Bd. 20. – S. 1–6.

[190] *Rohrl H.* Unbounded coverings of Riemann surfaces and extensions of rings of meromorphic functions. // Trans. Amer. Math. Soc. – 1963. – V. 107, № 2. – P. 320–343.

[191] *Shepardson C.B.* Hurwitz–Riemann formulas. Ph.D. Thesis. – Syracuse: Syracuse Univ, 1973.

[192] *Shepardson C.B.* Generalized Hurwitz–Riemann formulas // Indiana Univ. Math. J. – 1973. – V. 23. – P. 271–285.

[193] *Singerman D.* Maps on surfaces with boundary // Ars. Combin. – 1983. – V. 16. – P. 227–238.

[194] *Skora R.* Maps between surfaces // Trans. Amer. Math. Soc. – 1985. – V. 291, № 2. – P. 669–679.

[195] *Speiser A.* Über Riemannschen Flächen // Comment. Math. Helv. – 1930. – V. 2.

[196] *Stephenson K.* Analytic functions sharing level curves and tracts // Ann. Math. – 1986. – V. 123, № 1. – P. 107–144.

[197] *Thom R.* L'équivalence d'une fonction différentiable et d'un polynôme // Topology. – 1965. – № 3, suppl. 2. – P. 297–307.

[198] *Titus C.J.* The combinatorial topology of analytic functions on the boundary of a disk //Acta Math. – 1961. – V. 106. – P. 45–64.

[199] *Titus C.J.* Extensions through codimension one to sense preserving mappings // Ann. Inst. Fourier. – 1973. – V. 23. – P. 215–227.

[200] *Titus C.J.* Bounding properties of normal curves on spheres // Bull. Inst. Math. Acad. Sinica. – 1974. – V. 2. – P. 135–141.

[201] *Troyer S.* Extending a boundary immersions to the disk with n holes. – Dissertation, Northeastern University, 1973.

[202] *Tsuji M.* On non-prolongable Riemann surfaces //Proc. Imp. Acad. Japan. – 1943. – V. 19.

[203] *Tsuji M.* Potential theory in modern functions theory. – Tokyo: Maruzen Co., Ltd, 1959. – 590 p.

[204] *Verhey R.F.* Diffeomorphic invariants of immersed circles // Trans. Amer. Math. Soc. – 1972. – V. 163. – P. 47–63.

[205] *Weyl H.* Die Idee der Riemannschen Flächen. – Stuttgart: Teubner, 1955.

[206] *Weyl H.* Über das Hurwitzsche Problem der Bestimmung der Anzahl Riemannscher Flächen von gegebener Verzweigungsart // Comment. Math. Helv. – 1931. – V. 3. – P. 103–113.

[207] *Whitney H.* On regular closed curves in the plane // Compositio Math. – 1937. – V. 4. – P. 276–284.

[208] *Wicks M.J.* Commutators in free products // J. London Math. Soc. – 1962. – V. 37, № 4. – P. 433–444.

Предметный указатель

Оглавление

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Учебное издание

Насыров Семен Рафаилович

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ
ТЕОРИИ РАЗВЕТВЛЕННЫХ НАКРЫТИЙ
РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Подписано в печать с оригинал-макета 01.11.2008. Формат $60 \times 84/16$.
Бумага офсетная. Печ. л. 17,5. Тираж 500 экз.

Издательство «Магариф». 420059, Казань, Оренбургский тракт, 20а.
Тел./факс (843)277-52-88; 277-52-62.

E-mail: magarif@mail.ru