Направление подготовки :

080100.62: «Экономика» (бакалавриат, I курс, 1 семестр; очное обучение)

Дисциплина: «**Математический анализ**»

Количество часов: 288 ч. (в том числе : лекции 62, практические занятия - 64 часа, самостоятельная работа – 126; форма контроля: экзамен (1-й семестр))

Темы: 1. Множества и операции над множествами. 2. Прямая линия на плоскости. 3. Кривые второго порядка. 4. Элементы аналитической геометрии в пространстве. 5. Функции одной переменной. 6. Предел последовательности. 7. Предел функции. 8. Непрерывность функции. 9. Производная функции. 10. Дифференциал функции. Производные и дифференциалы высших порядков. 11. Применение дифференциального исчисления для исследования функций. 12. Применение дифференциального исчисления в экономических исследованиях. 13. Функции многих переменных. 14. Экстремумы функций многих переменных. 15. Экономические задачи на условный экстремум функции двух переменных. 16. Неопределенный интеграл. 17. Методы интегрирования. 18. Определенный интеграл. 19. Приближенное вычисление определенного интеграла. 20. Несобственные интегралы. 21. Кратные интегралы. 22. Числовые ряды. 23. Функциональные ряды. 24. Применение рядов. 25. Дифференциальные уравнения. 26. Дифференциальные уравнения первого порядка и уравнения, допускающие понижение порядка. 27. Комплексные числа. 28. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка.

Ключевые слова: *функция, предел последовательности, предел функции, производная, дифференциал, интеграл, ряды, дифференциальные уравнения.*

Дата начала использования: **1 сентября 2013 г.**

Автор - составители:

Опокина Надежда Анатольевна, доцент кафедры математики и экономической информатики, к.ф.-м.н., e-mail**:** **opnadin@mail.ru**

Воронцова Валерия Леонидовна, доцент кафедры математики и экономической информатики., к.ф.-м.н., e-mail: **milen99@narod.ru**

Романова Елена Михайловна, доцент кафедры математики и экономической информатики, к.ф.-м.н., e-mail: **romanova1elena@rambler.ru**

Министерство образования и науки РФ

ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Институт экономики и финансов

В. Л. Воронцова

(лекции № 2,3,4,5,8,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31)

Н. А. Опокина

(лекции № 6,7,10,11,12,13,14,15,16)

Е. М. Романова

(лекции № 1,9,22)

Математический анализ

Краткий конспект лекций

Казань-2014

Воронцова В.Л., Опокина Н.А., Романова Е.М.

Математический анализ. Конспект лекций / В.Л. Воронцова, Н.А. Опокина, Е.М. Романова. :Каз.федер.ун-т. – Казань, 2014. –XX с.

Аннотация

В начале обучения в I семестре студенты экономических вузов изучают курс математического анализа, который служит фундаментальной базой экономического образования.

В предлагаемых лекциях изучаются вопросы следующих разделов: элементы аналитической геометрии, математический анализ, дифференциальное исчисление.

В разделе математического анализа как наиболее крупного и достаточно сложного раздела высшей математики рассмотрены понятия предела последовательности и предела функции, понятие производной и дифференциала, интегральное исчисление. Подготовленный материал можно изучать самостоятельно, выполняя предлагаемые задания и проводя самоконтроль усвоения материала.

Для этого курса имеется электронная версия – http://bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867

Принято на заседании кафедры математики и экономической информатики

Протокол № 1 от 29.08.2013

Лекция 1

Множества и операции над множествами. Элементы комбинаторики.

Аннотация. Данная тема раскрывает основные понятия теории множеств и раздела комбинаторики.

Ключевые слова. Множества, точка, окрестность точки, действия над множествами, число перестановок, число размещений, число сочетаний.

Методические рекомендации по изучению темы

- Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления по теме;
- В дополнение к лекции есть презентация, которую необходимо изучить, и ответить на вопросы.
- В качестве самостоятельной работы предлагается индивидуальные задания по вариантам;
- Для проверки усвоения темы имеется тест.

Вопросы для изучения:

1. Понятие множества, виды множеств.
2. Операции над множествами.
3. Типы комбинаций объектов.
4. Основные формулы комбинаторики.

Множество можно определить как совокупность объектов, объединённых по определённому признаку.

Множества, элементами (точками) которых являются числа, называются *числовыми.*

Интервалом называется числовое множество, заключенное между двумя какими-нибудь точками.

Симметричный относительно заданной точки a интервал длины 2ε называется *ε-окрестностью* точки a.

Точки, принадлежащие ε-окрестности точки a, удовлетворяют неравенству

$a-\varepsilon<x<a+\varepsilon$ или $|x-a|<\varepsilon$, а сам интервал можно записать в виде $x\epsilon\ (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

Суммой или *объединением* множеств X и Y называется совокупность элементов, входящих хотя бы в одно из этих множеств. Обозначение суммы множеств: $X+Y$.

Произведением или *пересечением* множеств X и Y называется совокупность элементов, входящих как в множество X, так и в множество Y.Обозначение произведения: $X \cdot Y$.

Разностью множеств X и Y называется множество, содержащее все элементы Z множества X, не содержащиеся в множестве Y. Обозначение: $X \backslash Y$.

Комбинаторика – это раздел математики, который изучает различные соединения объектов (элементов).

Число сочетаний из *«n»* элементов по *«m»* вычисляется по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}.$$

Вопросы для самоконтроля:

1. Как дается определение множества? Как определяются его элементы?
2. Какие множества существуют?
3. Как определяется ε-окрестность точки?
4. Какие операции над множествами определены? Объясните, как выполняются эти операции?
5. Что изучает раздел комбинаторики?
6. Какие комбинации называются перестановками? Как вычисляется число перестановок?
7. Что такое сочетание и размещение *«n»* элементов по *«m»*?
8. Как формулируются правила суммы и произведения в комбинаторике?

Рекомендуемые информационные ресурсы:

1. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.1. / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001.
2. http://bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867
3. Презентация

Лекция 2

Предел последовательности

Аннотация. Данная тема раскрывает основные понятия предела последовательности.

Ключевые слова. Последовательность, предел последовательности.

Методические рекомендации по изучению темы

- Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления по теме;
- В дополнение к лекции есть презентация, которую необходимо изучить, и ответить на вопросы.
- В качестве самостоятельной работы предлагается выполнить задания для практической работы;
- Для проверки усвоения темы имеется тест.

Вопросы для изучения:

1. Понятие необходимого и достаточного условий в математике.
2. Понятие числовой последовательности. Ограниченные и монотонные последовательности.
3. Предел последовательности, его геометрический смысл.
4. Свойство пределов последовательности: теорема о единственности предела, необходимый признак сходимости, достаточный признак сходимости. Арифметические действия над пределами (без док)
5. Число е, натуральные логарифмы.

Необходимым условием выполнения некоторого утверждения называется такое условие, без осуществления которого данное утверждение заведомо неверно.

Достаточным условием выполнения некоторого утверждения называется такое условие, при осуществлении которого данное утверждение заведомо верно.

Последовательностью называется числовая функция $a_n = f(n)$, заданная на множестве N натуральных чисел.

Последовательность $a_n = f(n)$ называется ***возрастающей*** (неубывающей), если $a_n < a_{n+1}$ ($a_n \leq a_{n+1}$) для любого n $\in$ N и ***убывающей*** (невозрастающей), если $a_n > a_{n+1}$ ($a_n \geq a_{n+1}$) для любого $n \in N$. Возрастающие и убывающие последовательности называются ***монотонными*** последовательностями.

Если с увеличением номера n значения $a_n = f(n)$ неограниченно приближаются к некоторому числу a, то это число a будет являться пределом последовательности $a_1, a_2, a_3,...,a_n,...$, что принято обозначать: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} f(n) = a$

Число ***a*** называется ***пределом последовательности*** $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, если для любого наперед заданного сколь угодно малого положительного числа ε можно найти такой номер N, что член последовательности с этим номером и все последующие члены отличаются от числа a меньше, чем на ε, то есть для всех $n > N$ значения a_n удовлетворяют неравенству $|a_n - a| < \varepsilon$.

Последовательность, имеющая предел, называется ***сходящейся***.

Геометрический смысл предела последовательности.

Если последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ имеет предел a, то для любого $\varepsilon > 0$ при всех $n > N$ выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$ или $-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$, или $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$.

Рассмотрим некоторые свойства пределов последовательностей.

1) Если последовательность (a_n) имеет конечный предел, то он ***единственный***, т.е. последовательность имеет только один конечный предел.

2) Если последовательность (a_n) имеет предел, то она ***ограничена***, то есть при всех $n \in N$ выполняется неравенство $m \le a_n \le M$, $n = 1,2,3,\ldots$

Данное свойство является только ***необходимым*** условием существования предела последовательности (необходимым признаком сходимости).

3) Если последовательность ***монотонна и ограничена***, то она имеет предел. Это свойство является ***достаточным*** условием существования предела последовательности (достаточным признаком сходимости).

4)Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ и для любых $n \in N$ выполняется неравенство $a_n \le b_n, \quad то\ a \le b$.

5)Если члены последовательностей a_n, b_n, c_n при любых $n \in N$ удовлетворяют неравенствам $a_n \le b_n \le c_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$, то и последовательность (b_n) имеет тот же предел a: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

Теорема 1. Если последовательности a_n и b_n имеют конечные пределы: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b,$

то **сумма их также имеет конечный предел**: $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$.

Теорема 2. Если последовательности a_n и b_n имеют конечные пределы: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b,$ то **произведение их также имеет конечный предел**: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = ab.$

Теорема 3. Если последовательности a_n и b_n имеют конечные пределы: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b,$ причем $b \neq 0$, то **отношение их также имеет конечный предел**: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b.}$

Теорема 4. Постоянный множитель можно вынести за знак предела: $\lim\limits_{n\to\infty}(ca_n) = c\lim\limits_{n\to\infty} a_n.$

Теорема 5. Если последовательности a_n и b_n имеют конечные пределы: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = a^b.$

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется последовательностью?
2. Какая последовательность называется ограниченной, монотонной?
3. Какое из следующих утверждений является верным:

а) Если последовательность сходится, то она ограничена;

б) Если последовательность ограничена, то она сходится?

4. Сформулировать геометрический смысл предела последовательности.
5. Может ли последовательность иметь два предела?
6. В чем состоит достаточный признак сходимости последовательности?
7. Какие виды неопределенностей встречаются при вычислении пределов последовательностей?

Использованные информационные ресурсы:

1. http:// bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867
2. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.1 / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001.
3. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009.
4. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике.- М.: Изд-во Физико-математической литературы, 2004.

Лекция 3

Предел функции (занятие 1)

Аннотация. Данная тема раскрывает основные понятия предела функции.

Ключевые слова. Функция одной переменной, предел функции в точке, односторонний предел, бесконечно малые и бесконечно большие функции.

Методические рекомендации по изучению темы

- Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления по теме;
- В дополнение к лекции есть презентация, которую необходимо изучить, и ответить на вопросы.
- В качестве самостоятельной работы предлагается выполнить задания для практической работы;
- Для проверки усвоения темы имеется тест.

Вопросы для изучения:

1. Функция одной переменной.
2. Предел функции в точке. Односторонние пределы и предел на бесконечности.
3. Бесконечно малые и бесконечно большие функции, связь между ними.
4. Теоремы о функциях, имеющих предел в точке: о необходимом и достаточном условиях существования предела; об ограниченности, о сохранении знака, о предельном переходе в неравенствах, о пределе промежуточной функции.

Число *a* называется пределом функции *y=f(x)* при $x \to x_0$, если для всех значений *x*, достаточно мало отличающихся от x_0, соответствующие значения функции *f(x)* как угодно мало отличаются от числа *a*. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ *или* $f(x) \underset{x\to x_0}{\to} a$.

Пусть *x* стремится к x_0, оставаясь все время слева от x_0, то есть будучи меньше x_0. Если при этом условии значения функции *f(x)* стремятся к пределу, то он называется ***левосторонним*** или просто ***левым пределом*** функции *f(x)* в точке x_0: $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x<x_0)}} f(x) = f(x_0-0)$.

Пусть *x* стремится к x_0, оставаясь все время справа от x_0, то есть будучи больше x_0. Если при этом условии значения функции *f(x)* стремятся к пределу, то он называется ***правосторонним*** или просто ***правым пределом функции*** *f(x)* в точке x_0: $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x>x_0)}} f(x) = f(x_0+0)$

Если ***левый и правый пределы*** существуют и ***равны*** между собой, то функция имеет тот же ***предел*** при произвольном стремлении *x* к x_0. Обратное тоже справедливо: если функция имеет предел при произвольном стремлении *x* к x_0, то ***существуют ее левый и правый пределы*** и они ***равны*** между собой.

Число *a* или *b* называется ***пределом функции*** y=f(x) при $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$, если для всех достаточно больших положительных значений или достаточно малых отрицательных значений x соответствующие значения функции y=f(x) как угодно мало отличаются от числа *a* или *b*. И записывают так: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$ *или* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$

Если при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$ функция стремится к одному и тому же числу *a*, то для всех значений *x*, достаточно больших по абсолютной величине, соответствующие значения *f(x)* как угодно мало отличаются от числа *a*. И записывают так: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$

Функция, стремящаяся к нулю при $x \to x_0$ называется ***бесконечно малой функцией*** или бесконечно малой величиной при $x \to x_0$ и обозначается α(x): $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$. Пусть при $x \to x_0$ функция *y* =*f(x)* неограниченно возрастает по абсолютной величине. Тогда говорят, что функция *f(x)* при $x \to x_0$ является бесконечно большой величиной и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие виды неопределенностей встречаются при вычислении пределов?
2. Какие пределы называются односторонними пределами функции в точке?
3. Какие функции называются бесконечно малыми, бесконечно большими функциями в точке, как они связаны между собой?

Использованные информационные ресурсы:

1. http:// bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867
2. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.1 / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001.
3. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009.
4. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике.- М.: Изд-во Физико-математической литературы, 2004.

Лекция 4

Предел функции (занятие 2)

Вопросы для изучения:

Первый и второй замечательные пределы. Раскрытие неопределенностей при вычислении пределов

Предел функции $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ при $\alpha \to 0$ часто называют ***первым замечательным пределом:*** $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$.

Предел последовательности $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ при $n\to\infty$ называется числом **e:** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$

Исследование существования предела получило название раскрытия неопределенностей $\left(\frac{0}{0}\right), \left(\frac{\infty}{\infty}\right), (0\cdot\infty), (\infty-\infty), \left(1^{\infty}\right)$,

Вопросы для самоконтроля:

1. Какой вид неопределенности раскрывается с помощью

   а) первого замечательного предела; б) второго замечательного предела?
2. Вывести первый замечательный предел.
3. Сформулировать второй замечательный предел.

Использованные информационные ресурсы:

1. http:// bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867
2. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.1 / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001.
3. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009.
4. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике.- М.: Изд-во Физико-математической литературы, 2004.

Лекция 5

Непрерывность функции

Аннотация. Данная тема раскрывает основные понятия непрерывности функции.

Ключевые слова. Непрерывность функции в точке, непрерывность функции в интервале.

Методические рекомендации по изучению темы

- Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления по теме;
- В дополнение к лекции есть презентация, которую необходимо изучить, и ответить на вопросы.
- В качестве самостоятельной работы предлагается выполнить задания для практической работы;
- Для проверки усвоения темы имеется тест.

Вопросы для изучения:

1. Приращение аргумента и приращение функции, экономический смысл приращения. Теорема о необходимом и достаточном условиях непрерывности функции в точке, непрерывность сложной функции.
2. Непрерывность функции в точке, в интервале, на отрезке.
3. Точки разрыва и их классификация. Асимптоты кривых.
4. Гипербола (дробно-линейная функция). Свойства гиперболы.
5. Неполное исследование функции и построение эскиза графика.
6. Свойства функций, непрерывных на отрезке. Глобальные свойства непрерывных функций.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 и в некоторой окрестности этой точки, так что в ней функция принимает определенное значение $f(x_0) = y_0$.

Если аргументу x дадим приращение Δx, то $x = x_0 + \Delta x$. Тогда функция $y = f(x)$ тоже получит некоторое приращение Δy. Новое приращенное значение функции будет $y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x)$ (рис. 1).

Приращение функции Δy в точке x_0 определится формулой: $\Delta y = (y_0 + \Delta y) - y_0 = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Функция $y = f(x)$ называется **непрерывной в точке** x_0, если эта функция определена в какой-нибудь окрестности точки x_0 (вместе с самой точкой x_0) и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

Теорема о необходимом и достаточном условиях непрерывности функции в точке.

Функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции Δy.

Функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0, если она определена в какой-нибудь окрестности этой точки и предел функции при $x \to x_0$ существует и равен значению функции при $x = x_0$: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x) = f(x_0)$.

Вопросы для самоконтроля

1. Дать определение непрерывности функции в точке.
2. Привести правило предельного перехода для непрерывной функции.
3. Какая точка называется точкой разрыва функции?
4. Дать определение устранимой точки разрыва функции, точки разрыва 1-го и 2-го рода. Привести примеры функций, имеющих эти точки разрыва.
5. При каких условиях существует
   а) наклонная асимптота кривой;
   б) вертикальная асимптота кривой?
6. Привести схему неполного исследования функции и построения эскиза графика.

Использованные информационные ресурсы:

1. http:// bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867

2. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.1 / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001.

3. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009.

4. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике.- М.: Изд-во Физико-математической литературы, 2004.

Лекция №6

Производная функции

Аннотация. Данная тема раскрывает основные понятия предела функции.

Ключевые слова. Производная функции, уравнение касательной, уравнение нормали.

Методические рекомендации по изучению темы

•Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления по теме;

•В дополнение к лекции есть презентация, которую необходимо изучить, и ответить на вопросы.

•В качестве самостоятельной работы предлагается выполнить задания для практической работы;

•Для проверки усвоения темы имеется тест.

Вопросы для изучения

1. Производная функции, ее механический, экономический, геометрический смысл.

2. Основные правила и формулы дифференцирования.

3. Уравнение касательной и нормали.

4. Теорема о непрерывности дифференцируемой функции. Случаи недифференцируемости непрерывных функций: угловая точка графика, точка возврата и точка перегиба с вертикальной касательной.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, непрерывную в точке x_0 и в некоторой ее окрестности.

Определение. Если существует конечный предел отношения приращения функции к приращению аргумента при произвольном стремлении $\Delta x \to 0$, то этот предел называется **производной функции в точке** x_0 **и обозначается** $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (1)$$

Механический смысл производной: производная функции в точке x_0, есть скорость изменения функции в точке x_0.

Так как при различных значениях аргумента x скорость изменения функции различна, то производная функции является функцией от x: $y' = f'(x)$.

Введем понятие односторонних производных. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 и в правой полуокрестности точки x_0, например, в промежутке $[x_0; b)$.

Определение. Если существует конечный предел отношения приращения функции к приращению аргумента $\Delta x > 0$ при $\Delta x \to +0$, то этот предел называется **правосторонней производной функции в точке x_0** и обозначается:

$$y'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0 + 0).$$

Пусть теперь функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке $(a; x_0]$. Аргументу x_0 дадим отрицательное приращение $\Delta x < 0$ так, чтобы $x_0 + \Delta x \in (a; x_0]$.

Определение. Если существует конечный предел отношения приращения функции к приращению аргумента $\Delta x < 0$ при $\Delta x \to -0$, то этот предел называется **левосторонней производной функции в точке x_0** и обозначается:

$$y'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0 - 0).$$

Левосторонняя и правосторонняя производные функции в точке называются **односторонними** производными.

Если односторонние производные функции в точке x_0 конечны и равны между собой, то функция имеет в точке x_0, производную

$$y'(x_0) = f'(x_0)$$

Если функция имеет производную в точке x_0, то она называется **дифференцируемой** в точке x_0, а операция нахождения производной называется **дифференцированием** функции.

Случаи недифференцируемости непрерывных функций.

1.Угловая точка графика.

Определение. Если в точке x_0 левосторонняя $y'_-(x_0)$ и правосторонняя $y'_+(x_0)$ производные функции конечны, но не равны между собой, то точка $A(x_0; f(x_0))$ называется угловой точкой графика $y = f(x)$.

2. **Точка возврата с вертикальной касательной**.

Определение. Если в точке x_0 левосторонняя $y'_-(x_0)$ и правосторонняя $y'_+(x_0)$ производные бесконечны и имеют противоположные знаки, то точка *B(x₀;f(x₀))* называется точкой возврата с вертикальной касательной.

3. Точка перегиба с вертикальной касательной.

Определение. Точкой перегиба называется точка графика, в которой меняется направление выпуклости.

Определение. Если в точке x_0 левосторонняя $y'_-(x_0)$ и правосторонняя $y'_+(x_0)$ производные функции бесконечны и одного знака, то в этом случае говорят, что в точке x_0 функция имеет «бесконечную производную», а точка $C(x_0;f(x_0))$ называется точкой перегиба с вертикальной касательной.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется производной функции, как обозначаются производные?
2. Сформулируйте физический, геометрический и экономический смысл производной функции.
3. Какая функция называется дифференцируемой в точке, в промежутке?
4. Какие точки называются: угловой точкой, точкой возврата с вертикальной касательной, точкой перегиба с вертикальной касательной?
5. Формулы производных постоянной, суммы, произведения, частного.

Использованные информационное обеспечение

1. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.1 / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001.- с. 152-252
2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009. – с.55-63.
3. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике.- М.: Изд-во Физико-математической литературы, 2004.
4. http:// bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867

Лекция №7

Производная сложной функции

Аннотация. Данная тема раскрывает правила нахождения производной сложной функции.

Ключевые слова. Производная сложной функции, метод логарифмического дифференцирования, производная обратной функции, производная неявной функции.

Методические рекомендации по изучению темы

•Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления по теме;

•В дополнение к лекции есть презентация, которую необходимо изучить, и ответить на вопросы.

•В качестве самостоятельной работы предлагается выполнить задания для практической работы;

•Для проверки усвоения темы имеется тест.

Вопросы для изучения

1. Производная показательной и логарифмической функций. Метод логарифмического дифференцирования.

2. Производная обратной функции. Производные обратных тригонометрических функций.

3. Производная неявной функции.

Теорема. Если $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$ - дифференцируемые функции своих аргументов, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ является дифференцируемой функцией аргумента x, и производная ее равна

$$y' = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x).$$

Логарифмическое дифференцирование

Логарифмической производной функции $y = f(x)$ называется производная от логарифма этой функции, т.е $(\ln f(x))' = f'(x) / f(x)$.

Последовательное применение логарифмирования и дифференцирования функций называют **логарифмическим дифференцированием**. В некоторых случаях предварительное логарифмирование упрощает нахождение производной. Например, при нахождении производной показательно-степенной функции $y = u^v$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$, предварительное логарифмирование приводит к формуле

$$y' = u^v \ln u \cdot v' + v u^{v-1} \cdot u'$$

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некотором интервале $(a;b)$ и имеет в этом интервале обратную функцию $x = g(y)$.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в интервале $(a;b)$ и производная ее отлична от нуля $f'(x) \neq 0$, то производная обратной функции $x = g(y)$ равна: $x'_y = \frac{1}{y'_x}$.

Определение. Уравнение $F(x;y) = 0$ определяет *y* как неявную функцию $y = f(x)$, если каждому значению *x* из некоторого множества Х соответствует вполне определенное значение *y*, такое, что вместе с *x* оно удовлетворяет уравнению, то есть $F(x; f(x)) = 0$.

Для нахождения производной функции *y*, заданной неявно, нужно продифференцировать обе части уравнения по аргументу *x*, при этом считая *y* функцией от *x*, и затем из полученного равенства найти производную y'.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулировать правило дифференцирования сложной функции.
2. Какая формула связывает производные взаимно обратных функций?
3. Когда применяется метод логарифмического дифференцирования?
4. Какая функция называется неявной функцией? Можно ли утверждать, что всякое уравнение вида $\varphi(x;y) = 0$ определяет неявную функцию?
5. Как отыскивается производная неявной функции?

Использованные информационное обеспечение

1. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.1 / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001.- с.166-252

2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009. – 576 с.

3. http:// bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867

Лекция №8

Дифференциал функции. Производные и дифференциалы высших порядков.

Аннотация. Данная тема раскрывает основные понятия дифференциала функции, производные и дифференциалы высших порядков

Ключевые слова. Дифференциал функции, производные высших порядков, дифференциалы высших порядков

Методические рекомендации по изучению темы

- Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления по теме;
- В дополнение к лекции есть презентация, которую необходимо изучить, и ответить на вопросы.
- В качестве самостоятельной работы предлагается выполнить задания для практической работы;
- Для проверки усвоения темы имеется тест.

Вопросы для изучения

1. Производные высших порядков.
2. Дифференциал функции и его геометрический смысл и свойства. Инвариантность формы дифференциала I порядка.
3. Дифференциалы высших порядков.

Пусть функция y=f(x) дифференцируема в точке x_0 и непрерывна в некоторой окрестности этой точки. Для приращения дифференцируемой в точке функции справедливо представление: $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$, где $\alpha(\Delta x)$ - бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$.

Определение. Главная линейная часть $f'(x_0)\Delta x$ приращения дифференцируемой функции называется дифференциалом функции и обозначается

$$dy = f'(x_0)\Delta x \qquad (1)$$

Дифференциал *dy* функции равен произведению ее производной и дифференциала независимой переменной: $dy = y'dx = f'(x)dx$, поэтому справедливо равенство $y' = \frac{dy}{dx}$.

Операция нахождения дифференциала функции так же, как и операция нахождения производной, называется дифференцированием функции.

Свойства дифференциала *(u=u(x);v=v(x))*

$$1. dC = 0\ (C = const)$$

$$2. d(u \pm v) = du \pm dv$$

$$3. d(uv) = vdu + udv$$

$$4. d(Cu) = Cdu$$

$$5. d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

Дифференциал от дифференциала функции называется дифференциалом второго порядка и обозначается:

$$d^2y = d(f'(x))dx = ((f'(x))'dx)dx = f''(x)(dx)^2$$

или $d^2y = f''(x)(dx)^2$.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется дифференциалом функции? Сформулируйте геометрический смысл дифференциала.
2. Как связаны между собой дифференциал и производная функции? В чем различие между ними?
3. Сформулируйте свойства (арифметические операции) дифференциала.
4. В чем состоит свойство инвариантности дифференциала 1-го порядка?
5. Как определяется производная n-го порядка функции?
6. Запишите формулы дифференциалов 1-го, 2-го, 3-го, …, n-го порядков функции.

Использованные информационное обеспечение

1. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.1 / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001.
2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009.
3. http://bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867

Лекция 9

Основные теоремы дифференциального исчисления.

Аннотация. Данная тема раскрывает основные теоремы дифференциального исчисления и дает их практические приложения.

Ключевые слова. Производная функции, касательная прямая, секущая, предел функции, точки экстремума.

Методические рекомендации по изучению темы

- Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления по теме;
- В дополнение к лекции есть презентация, которую необходимо изучить, и ответить на вопросы.
- В качестве самостоятельной работы предлагается индивидуальные задания по вариантам;
- Для проверки усвоения темы имеется тест.

Вопросы для изучения:

1. Экстремумы функции.
2. Теорема Ферма и ее геометрический смысл.
3. Теорема Ролляи ее геометрический смысл.
4. Правило Лопиталя.

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна в некотором интервале $(a;b)$, x_0- внутренняя точка этого интервала.

Опр.1 **.**Функция $f(x)$ имеет в точкеx_0*максимум (max)*,если для всех x из некоторой окрестности точкиx_0выполняется неравенство$f(x_0) \geq f(x)$.

Опр.2 **.**Функция $f(x)$ имеет в точке x_0*минимум (min)*,если для всех x из некоторой окрестности точки x_0выполняется неравенство$f(x) \geq f(x_0)$.

*Теорема Ферма.*Пусть $f(x)$определена и дифференцируема на некотором интервале (a,b) и в точке $c\in(a,b)$ принимает наибольшее (наименьшее) значение. Тогда $f'(c)=0$.

Геометрическая интерпретация теоремы Ферма: Согласно вышеприведенной теореме, касательная прямая, проведенная в точке экстремума к графику функции, параллельна оси абсцисс.

Теорема Ролля. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема на интервале (a,b) и на концах отрезка $[a,b]$ принимает равные значения $f(a)=f(b)$. Тогда существует точка $c\in(a,b)$ такая, что $f'(c)=0$.

Геометрическая интерпретация теоремы Ролля: На дуге АВ графика функции с концами в точках А(*a, f(a))* и В(*b, f(b*)), соответствующих концам отрезка $[a,b]$, найдется точка *С*(*с, f(c))*, в которой касательная к графику параллельна оси абсцисс.

Теорема Лагранжа. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на интервале (a,b). Тогда существует точка $c\in(a,b)$ такая, что $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

Геометрическая интерпретация теоремы Лагранжа: Из теоремы Лагранжа вытекает, что найдется точка, в которой касательная к графику функции будет параллельна секущей, проходящей через точки А(*a, f(a))* и В(*b, f(b*)).

Вопросы для самоконтроля:

1. Какими свойствами должна обладать функция в точке x_0 и в ее окрестности для того, чтобы в ней можно было применить теорему Ферма? Как называется точка, если в ней выполняется теорема Ферма для функции *y=f(x)?*

2. Сформулируйте условия, при которых на отрезке [a, b] к функции *y=f(x)* применима теорема Ролля?

3. В чем состоит геометрический смысл теоремы Лагранжа?

4. В каких случаях при вычислении пределов можно применять правило Лопиталя?

5. Выберите верное утверждение:

а) Если в точке дифференцируемая функция имеет экстремум, то в этой точке производная функции равна нулю;

б) Если в точке производная функции равна нулю, то в этой точке функция имеет экстремум.

Рекомендуемые информационные ресурсы:

1. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.1. / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001.
2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009.
3. http://bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867

Лекция №10

Применение дифференциального исчисления для исследования функций

(Занятие 1)

Аннотация. Данная тема описывает применение дифференциального исчисления для исследования функций

Ключевые слова. Возрастание и убывание функции, экстремум функции.

Методические рекомендации по изучению темы

- Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления по теме;
- В дополнение к лекции есть презентация, которую необходимо изучить, и ответить на вопросы.
- В качестве самостоятельной работы предлагается выполнить задания для практической работы;
- Для проверки усвоения темы имеется тест.

Вопросы для изучения

1. Экстремум функции. Достаточные условия существования экстремума функции.
2. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.

Точка x_1 называется точкой **локального максимума (минимума)** функции $y = f(x)$, если для любых достаточно малых $\Delta x \neq 0$ справедливо неравенство $f(x_1 + \Delta x) > f(x_1)$ $(f(x_1 + \Delta x) < f(x_1))$. Точки максимума и минимума называют **точками экстремума** функции, а максимумы и минимумы функции – ее **экстремальными** значениями.

Необходимое условие существования экстремума функции

Пусть функция *y=f(x)* непрерывна в некотором промежутке *(a;b)*, а x_0– внутренняя точка этого промежутка. Если в точке x_0 функция имеет экстремум, то производная ее в этой точке:

1) $f'(x_0) = 0$ или 2) $f'(x_0)$ *не существует* .

Точки, в которых для функции выполняется необходимое условие существования экстремума, называются ***критическими точками*** на экстремум.

Для отыскания экстремумов функции находят все **критические точки**, а затем исследуют каждую из них (в отдельности) с целью выяснения, будет ли в этой точке максимум или минимум, или же экстремума в ней нет.

Достаточные условия существования экстремума.

Теорема 1. (первый достаточный признак локального экстремума). Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в некотором интервале, содержащем критическую точку $x = x_0$, и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, может быть, самой точки x_0). Если $f'(x)$ при $x < x_0$ положительна, а при $x > x_0$ отрицательна, то при $x = x_0$ данная функция имеет **максимум**. Если же $f'(x)$ при $x < x_0$ отрицательна, а при $x > x_0$ положительна, то при $x = x_0$ данная функция имеет **минимум**.

Теорема 2 (второй достаточный признак локального экстремума функции). Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема и $f'(x_0) = 0$. Тогда в точке $x = x_0$ функция имеет **локальный максимум**, если $f''(x_0) < 0$ и **локальный минимум**, если $f''(x_0) > 0$.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие условия должны выполняться для функции f(x), чтобы ее точка была критической?
2. Сформулируйте достаточные условия существования экстремума функции(1-е и 2-е правила).

Использованные информационное обеспечение

1. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.1. / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001.- с. 219-254
2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009. – с.91-104.
3. [http:// bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867](http://bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867)

Лекция №11

Применение дифференциального исчисления для исследования функций

(Занятие 2)

Аннотация. Данная тема описывает применение дифференциального исчисления для исследования функций

Ключевые слова. Выпуклость и вогнутость кривых, точки перегиба, темпы изменения функций

Методические рекомендации по изучению темы

•Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления по теме;

•В дополнение к лекции есть презентация, которую необходимо изучить, и ответить на вопросы.

•В качестве самостоятельной работы предлагается выполнить задания для практической работы;

•Для проверки усвоения темы имеется тест.

Вопросы для изучения

1. Выпуклость и вогнутость кривых. Точки перегиба.
2. Схема полного исследования функции и построение графиков.
3. Темпы изменения функций.

Кривая, заданная функцией $y = f(x)$, называется **выпуклой** в интервале (a,b), если все точки кривой лежат ниже любой ее касательной в этом интервале, и **вогнутой** в интервале (a,b), если все ее точки лежат выше любой ее касательной в этом интервале.

Точка кривой $M(x_0, f(x_0))$, отделяющая выпуклую ее часть от вогнутой, называется **точкой перегиба** кривой. Предполагается, что в точке ***M*** существует касательная.

Теорема 3 (достаточное условие выпуклости (вогнутости) графика функции). Если во всех точках интервала (a,b) вторая производная функции $y = f(x)$ отрицательна (положительна), т.е. $f''(x) < 0$ $(f''(x) > 0)$, то кривая в этом интервале **выпукла (вогнута)**.

В точке перегиба, отделяющей промежуток выпуклости от промежутка вогнутости, вторая производная функции **изменяет свой знак**, поэтому в таких точках вторая производная функции или обращается в нуль, или не существует.

Теорема 4 (достаточный признак перегиба). Если в точке $x = x_0$ $f''(x) = 0$ или $f''(x)$ не существует и при переходе через эту точку производная $f''(x)$ меняет знак, то точка с абсциссой $x = x_0$ кривой $y = f(x)$ - **точка перегиба**.

Теорема 5 (необходимое условие существования точки перегиба)

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в интервале (a,b), x_0- внутренняя точка (a,b). Если точка x_0 является точкой перегиба графика *f(x)*, то в этой точке:

либо 1) $f'(x_0) = \infty$ (точка перегиба с вертикальной касательной);

либо 2) $f''(x_0) = 0$ (точка перегиба с наклонной касательной).

Необходимые условия существования точки перегиба с горизонтальной касательной: 1) $f'(x_0) = 0$; 2) $f''(x_0) = 0$.

Вопросы для самоконтроля

1. Какая кривая называется выпуклой (вогнутой) в интервале (a, b)?
2. Какая точка графика называется точкой перегиба?
3. Сформулируйте достаточные условия выпуклости, вогнутости кривых, необходимые условия существования точки перегиба.
4. Назовите виды точек перегиба и сформулируйте условия, при которых имеет место тот или иной вид точки перегиба.

Использованные информационное обеспечение

1. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.1. / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001.- с. 219-254
2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009. – с.91-104.
3. http:// bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867

Лекция №12

Функции многих переменных (Занятие 1)

Аннотация. Данная тема дает основные понятия для функций многих переменных.

Ключевые слова. Предел и непрерывность функции нескольких переменных, частные производные I порядка, полный дифференциал I порядка.

Методические рекомендации по изучению темы

•Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления по теме;

•В дополнение к лекции есть презентация, которую необходимо изучить, и ответить на вопросы.

•В качестве самостоятельной работы предлагается выполнить задания для практической работы;

•Для проверки усвоения темы имеется тест.

Вопросы для изучения

1. Плоские точечные множества.

2. Понятие функции двух переменных и функции нескольких переменных. Область определения, график функции двух переменных.

3. Предел и непрерывность функции нескольких переменных, функции двух переменных.

4. Частные производные и полный дифференциал I порядка.

Круг радиуса δ с центром в точке M_0 называется δ **-окрестностью** точки M_0 и обозначается $U(M_0;\delta)$. Точка $M(x; y)$ называется **внутренней точкой** множества E, если она входит в это множество вместе со сколь угодно малой окрестностью.

Плоское множество, состоящее только из внутренних точек, называется **открытым** множеством, например, круг без окружности:

$x^2 + y^2 < R^2$ (рис.2).

Точка $P(x; y)$ (рис.1) называется **граничной** точкой множества E, если в ее сколь угодно малой окрестности имеются точки как принадлежащие, так и не принадлежащие множеству E.

Совокупность всех граничных точек множества (области)называется **границей области**. Открытое множество вместе с границей образует **замкнутую** область.

Плоское множество называется **ограниченным**, если его можно полностью поместить в круг конечного радиуса с центром в начале координат. В противном случае множество называется неограниченным.

Если каждой точке *M(x; y)* плоского множества *E* по некоторому закону можно поставить в соответствие вполне определенное число *z* из множества Z, то *z* называется **функцией** $z=f(x;y)$ **двух независимых переменных** ***x* и *y*** .

Областью определения функции двух переменных называется множество всех допустимых упорядоченных пар чисел *x* и *y*, при которых функция *z* принимает действительные значения.

Число А называется **пределом функции** *f(x;y)* в точке $M_0(x_0;.y_0)$, если для любой последовательности точек $\{M_n(x_n;y_n)\}$, сходящейся к точке $M_0\ (x_0;y_0)$, последовательность соответствующих значений функции $\{f(x_n;y_n)\}$сходится к числу А.

Предел функции *f(x;y)* в точке $M_0(x_0;y_0)$ обозначается так:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y)=A$$

Вопросы для контроля

1. Дайте определения открытого и замкнутого, ограниченного и не ограниченного плоских множеств.
2. Дайте определение функции двух переменных.
3. Что представляет собой график функции двух переменных?
4. Как вычисляются пределы функции двух переменных?
5. Сформулируйте правила нахождения частных производных 1-го порядка функции двух переменных.
6. Напишите формулу полного дифференциала 1-го порядка функции двух переменных.

Использованные информационное обеспечение

1. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.1. / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001.- с. 257-274, с. 298 - 301.
2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009. – с.114-123.
3. http:// bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867

Лекция №13

Функции многих переменных (Занятие 2)

Аннотация. Данная тема дает основные понятия для функций многих переменных.

Ключевые слова. Частные производные II порядка, полный дифференциал II порядка, градиент функции нескольких переменных, производная по направлению, квадратичные формы.

Методические рекомендации по изучению темы

•Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления по теме;

•В дополнение к лекции есть презентация, которую необходимо изучить, и ответить на вопросы.

•В качестве самостоятельной работы предлагается выполнить задания для практической работы;

•Для проверки усвоения темы имеется тест.

Вопросы для изучения

1. Частные производные и полный дифференциал II порядка.
2. Градиент функции нескольких переменных.
3. Производная по направлению.
4. Квадратичные формы.

Пусть функция $z=f(x;y)$ дифференцируема в точке $M(x;y)$, то есть в этой точке существуют непрерывные частные производные $z_x'=f_x'(x;y)$ $z_y'=f_y'(x;y)$.

Определение. Частная производная по x от z'_x и частная производная по y от z'_y называются **частными производными второго порядка** от функции $z=f(x;y)$ и обозначаются:

$$z''_{xx}=\left(z'_x\right)'_x=\left(f_x'(x;y)\right)'_x=f_{xx}''(x;y);$$

$$z''_{yy}=\left(z'_y\right)'_y=\left(f_y'(x;y)\right)'_y=f_{yy}''(x;y).$$

Определение. Частная производная по y от z'_x и частная производная по x от z'_y называются **смешанными производными функции второго порядка** и обозначаются:

$$z''_{xy}=(z'_x)'_y=\left(f_x'(x;y)\right)'_y=f_{xy}''(x;y),\quad z''_{yx}=(z'_y)'_x=\left(f_y'(x;y)\right)'_x=f_{yx}''(x;y).$$

Смешанные производные второго порядка z_{xy}'' и z_{yx}'' равны между собой: $z_{xy}''= z_{yx}''$.

Следовательно, функция двух переменных имеет три различных частных производных второго порядка: $z''_{xx}; z''_{yy}; z''_{xy}$.

Определение. Полный дифференциал от полного дифференциала функции двух переменных называется **полным дифференциалом второго порядка** и обозначается

$$d^2z=d(dz)=d\left(z_x'dx+z_y'dy\right).$$

Градиентом функции $z=f(x;y)$ называется вектор $grad\, z$ с началом в точке $M_0(x_0;y_0)$, координаты которого равны соответствующим частным производным $z'_x=\frac{\partial z}{\partial x}$ и $z'_y=\frac{\partial z}{\partial y}$, вычисленным в точке $M_0(x_0;y_0)$: $grad\, z=(z'_x, z'_y)$

Вопросы для контроля

1. Дайте определение градиента функции нескольких переменных.
2. Напишите формулу производной функции двух переменных по направлению.
3. Сколько различных производных 2-го порядка имеет дифференцируемая функция двух переменных? Как они определяются?
4. Напишите формулу полного дифференциала 2-го порядка функций двух переменных.
5. Дайте определение квадратичной формы и назовите типы квадратичных форм.

Использованные информационное обеспечение

1. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.1. / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001.- с. 274-277
2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009. – с.127-136.
3. http:// bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867

Лекция№14

Экстремумы функции двух переменных (Занятие 1)

Аннотация. Данная тема раскрывает основные понятия экстремума функций многих переменных и условия их нахождения.

Ключевые слова. Экстремум функции двух переменны, безусловный экстремум функции двух переменных

Методические рекомендации по изучению темы

- Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления по теме;
- В дополнение к лекции есть презентация, которую необходимо изучить, и ответить на вопросы.
- В качестве самостоятельной работы предлагается выполнить задания для практической работы;
- Для проверки усвоения темы имеется тест

Вопросы для изучения

1. Понятие экстремума функции двух переменных. Безусловный экстремум функции двух переменных. Необходимое условие существования экстремума.
2. Достаточное условие существования безусловного экстремума.
3. Условный экстремум функции двух переменных. Метод множителей Лагранжа.

Пусть функция $z=f(x;y)$ непрерывна в точке $M_0(x_0;y_0)$ и в ее δ -окрестности $U(M_0;\delta)$.

Определение. Функция $z = f(x;y)$ имеет в точке $M_0(x_0;y_0)$ **максимум** (сокращенно «max») (рис.1), если для всех точек $M(x;y)$ окрестности точки $M_0(x_0;y_0)$: $f(x;y) \le f(x_0;y_0)$ или $\Delta z = f(x;y) - f(x_0;y_0) \le 0$.

Определение. Функция $z = f(x;y)$ имеет в точке $M_0(x_0;y_0)$ **минимум** (сокращенно «min») (рис.2), если для всех точек $M(x;y)$ окрестности точки $M_0(x_0;y_0)$ $f(x;y) \ge f(x_0;y_0)$ или $\Delta z = f(x;y) - f(x_0;y_0) \ge 0$.

Максимум и минимум функции двух переменных называются ее **экстремумами** и являются локальными понятиями, то есть связанными с конкретной точкой и ее сколь угодно малой окрестностью.

Таким образом, если в точке $M_0(x_0;y_0)$ функция $z=f(x;\ y)$ имеет экстремум, то в окрестности точки $M_0(x_0;y_0)$ полное приращение Δz имеет постоянный знак, причем

$\Delta z \le 0$, если в точке M_0 функция имеет **максимум**;

$\Delta z \ge 0$, если в точке M_0 функция имеет **минимум**.

Необходимые условия существования экстремума функции двух переменных.

Пусть функция $z=f(x;\ y)$ непрерывна в области E и $M_0(x_0;y_0)$ - внутренняя точка области E.

Теорема. Если функция $z=f(x;y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0;y_0)$ и имеет в этой точке экстремум, то обе частные производные ее в точке M_0 равны нулю:

$$\begin{cases} f'_x(x_0;y_0)=0, \\ f'_y(x_0,y_0)=0. \end{cases}$$

Вопросы для контроля

1. Дайте определение безусловных максимума и минимума функции двух переменных.
2. Какие точки называются критическими точками функции двух переменных?
3. Можно ли утверждать, что критические точки – это точки экстремума функции двух переменных?
4. Сформулируйте достаточное условие существования безусловного экстремума функции двух переменных.

Использованные информационное обеспечение

1. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.1. / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001.- с. 277 – 302.
2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009. – с.130-132.
3. http:// bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867

Лекция№15

Экстремумы функции двух переменных (Занятие 2)

Аннотация. Данная тема раскрывает понятие условного экстремума функций многих переменных и его метод нахождения.

Ключевые слова. Условный экстремум функции двух переменны.

Методические рекомендации по изучению темы

•Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления по теме;

•В дополнение к лекции есть презентация, которую необходимо изучить, и ответить на вопросы.

•В качестве самостоятельной работы предлагается выполнить задания для практической работы;

•Для проверки усвоения темы имеется тест

Вопросы для изучения

1. Условный экстремум функции двух переменных.
2. Метод множителей Лагранжа.

Пусть функция $z=f(x;\ y)$ определена в области D и в некоторой точке области D имеет экстремум. Если независимые переменные x и y при этом не связаны между собой никакими соотношениями, то этот экстремум называется **безусловным экстремумом**.

Предположим теперь, что в области D дана линия $Г$, уравнение которой $\varphi(x;y)=0$, и требуется найти только те экстремумы, которые достигаются в точках, принадлежащих линии Г. Такие экстремумы называются **условными** экстремумами функции $z\ =f(x;y)$ на линии Г. Уравнение $\varphi(x;y)=0$ определяет y как неявную функцию от x и называется **уравнением связи**. Оно показывает, что x и y теперь не являются независимыми переменными, а связаны условием .

Определение. Функция $z\ =f(x;y)$ имеет в точке $M_0(x_0;\ y_0)$ **условный максимум**, если для всех точек $M(x;\ y)$ из окрестности точки $M_0(x_0;y_0)$ выполняется неравенство $f(x;y)\leq f(x_0;y_0)$ при условии, что $\varphi(x;y)=0$.

Определение. Функция $z=f(x;y)$ имеет в точке $M_0(x_0;\ y_0)$ ***условный минимум,*** если для всех точек $M(x;\ y)$ из окрестности точки $M_0(x_0;y_0)$ выполняется неравенство $f(x;y)\geq f(x_0;y_0)$ при условии, что $\varphi(x;y)=0$.

2.Метод множителей Лагранжа.

Необходимые и достаточные условия существования условного экстремума. Метод множителей Лагранжа.

Если $M_0(x_0; y_0)$ - точка условного экстремума функции $z = f(x;y)$, то, в силу необходимого условия существования экстремума функции, полный дифференциал первого порядка в этой точке равен нулю:

$dz = f_x'dx + f_y'dy = 0$.

Дифференцируя обе части уравнения связи , имеем

$$d\varphi = \varphi_x' dx + \varphi_y' dy = 0$$

Необходимые условия существования **условного экстремума** функции $z = f(x; y)$ при условии $\varphi(x; y) = 0$:

$$\begin{cases} f_x' + \lambda\varphi_x' = 0, \\ f_y' + \lambda\varphi_y' = 0 \\ \varphi(x; y) = 0. \end{cases}$$

Условия совпадают с **необходимыми условиями существования безусловного экстремума** функции трех независимых переменных, которая называется **функцией Лагранжа**:

$$L(x; y; \lambda) = f(x; y) + \lambda\varphi(x; y),$$

Действительно, необходимыми условиями существования безусловного экстремума функции (15) являются условия:

$$L_x' = 0, L_y' = 0, L_\lambda' = 0..$$

Достаточным условием существования безусловного экстремума функции является постоянство знака дифференциала второго порядка в точке $M_0(x_0;y_0)$:

$$d^2L(x_0; y_0) = L''_{xx}(x_0; y_0)dx^2 + 2L''_{xy}(x_0; y_0)dxdy + L''_{yy}(x_0; y_0)dy^2 =$$

$$= dx^2\left[L''_{xx}(x_0; y_0) + 2L''_{xy}(x_0; y_0)\frac{dy}{dx} + L''_{yy}(x_0; y_0)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right]$$

Значение $\dfrac{dy}{dx} = y'(x_0; y_0)$ вычисляется как значение производной неявной функции, определяемой уравнением связи . Так как $dx^2 > 0$, то знак $d^2L(x_0; y_0)$ совпадает со знаком выражения в квадратных скобках.

Если $d^2L(x_0; y_0) < 0$, то функция Лагранжа $L(x;y)$ имеет в точке $M_0(x_0;y_0)$ **максимум**, а функция $z=f(x;y)$-условный максимум.

Если $d^2L(x_0;y_0) > 0$, то функция $L(x;y)$ имеет в точке $M_0(x_0;y_0)$ **минимум**, а функция $f(x;y)$ - условный минимум.

Определив точки условного экстремума, вычисляют значения функции в этих точках, то есть $z_{min\ усл}$ и $z_{max\ усл}$.

Замечание. Метод множителей Лагранжа можно применить и для функций любого числа *n* независимых переменных.

Предположим, что требуется найти условные экстремумы функции $z = f(x_1, x_2,..., x_n)$ при условиях, где $i = 1,2,... ,m$ (m< n).

В этом случае функция Лагранжа имеет вид:

$$L(x_1, x_2,..., x_n, \lambda_1, \lambda_2,..., \lambda_m) = f_1(x_1, x_2,..., x_n) +$$
$$+\lambda_1\varphi_1(x_1, x_2,..., x_n) + \lambda_2\varphi_2(x_1, x_2,..., x_n) + ... + \lambda_n\varphi_n(x_1, x_2,..., x_n)$$

Критические точки и неизвестные множители Лагранжа $\lambda_1, \lambda_2,..., \lambda_m$ определяются из решения n+m уравнений:

$$\begin{cases} L'_{x_1} = f'_{x_1} + \lambda_1\varphi'_{1x_1} + \lambda_2\varphi'_{2x_1} + ... + \lambda_m\varphi'_{mx_1} = 0, \\ L'_{x_2} = f'_{x_2} + \lambda_1\varphi'_{1x_2} + \lambda_2\varphi'_{2x_2} + ... + \lambda_m\varphi'_{mx_2} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ L'_{x_n} = f'_{x_n} + \lambda_1\varphi'_{1x_n} + \lambda_2\varphi'_{2x_n} + ... + \lambda_m\varphi'_{mx_n} = 0 \\ \varphi_i(x_1, x_2,..., x_n) = 0 \\ (i = 1,2,..., m). \end{cases}$$

Вопросы для контроля

1. В чем отличие условного экстремума функции двух переменных от безусловного?
2. Какое уравнение называется уравнением связи?
3. Запишите функцию Лагранжа и сформулируйте *а*) необходимое условие существования условного экстремума; *б*) достаточное условие существования условного экстремума.

Использованные информационное обеспечение

1. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.1. / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001.- с. 277 – 302.
2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009. – с.130-132.
3. http:// bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867

Лекция №16

Неопределенный интеграл

Аннотация. Данная тема раскрывает понятие неопределенного интеграла и основные методы интегрирования.

Ключевые слова. Первообразная функции, неопределенный интеграл, методы интегрирования.

Методические рекомендации по изучению темы

- Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления по теме;
- В дополнение к лекции есть презентация, которую необходимо изучить, и ответить на вопросы.
- В качестве самостоятельной работы предлагается выполнить задания для практической работы;
- Для проверки усвоения темы имеется тест

Вопросы для изучения

1. Первообразная функции и ее свойства.
2. Понятие неопределенного интеграла. Свойства неопределенного интеграла.
3. Таблица формул интегрирования.
4. Методы интегрирования: метод разложения, подведения под знак дифференциала.

Вопросы для контроля

1. Какая формула связывает функцию и ее первообразную?
2. Сколько первообразных имеет непрерывная функция?
3. Дайте определение неопределенного интеграла и сформулируйте его свойства.
4. В чем состоит свойство инвариантности формул интегрирования?
5. Таблица формул интегрирования.
6. «Неберущиеся» интегралы.

Использованные информационное обеспечение

1. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.1. / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001.- с. 331 – 346

2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009. – с.137-145.

3. http:// bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867

Лекция 17

Методы интегрирования (занятие 1)

Аннотация. Данная тема раскрывает основные приемы интегрирования по частям и замены переменной.

Ключевые слова. Интегрирование по частям.

Методические рекомендации по изучению темы

- Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления по теме;
- В дополнение к лекции есть презентация, которую необходимо изучить, и ответить на вопросы.
- В качестве самостоятельной работы предлагается выполнить задания для практической работы;
- Для проверки усвоения темы имеется тест.

Вопросы для изучения:

1. Метод замены переменной.
2. Интегрирование по частям.

Вопросы для самоконтроля

1. На каких свойствах неопределенного интеграла основан метод разложения?
2. Какие свойства дифференциала функции применяются при подведении функций под знак дифференциала?
3. Изложите основы метода замены переменной.
4. В каких случаях применяется метод интегрирования по частям?

Использованные информационные ресурсы:

1. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.1 / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001.
2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009.

3. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике.- М.: Изд-во Физико-математической литературы, 2004.

4. http:// bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867

Лекция 18

Методы интегрирования (занятие 2)

Аннотация. Данная тема раскрывает основные приемы интегрирования простейших и рациональных дробей.

Ключевые слова. Интегрирование по частям.

Методические рекомендации по изучению темы

•Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления по теме;

•В дополнение к лекции есть презентация, которую необходимо изучить, и ответить на вопросы.

•В качестве самостоятельной работы предлагается выполнить задания для практической работы;

•Для проверки усвоения темы имеется тест.

Вопросы для изучения:

1. Интегрирование простейших дробей.
2. Интегрирование рациональных дробей.

Вопросы для самоконтроля:

1. Какая алгебраическая дробь называется правильной? Неправильной? Приведите примеры.

2. Какие дроби называются простейшими? Приведите примеры.

3. Когда и как производится разложение правильной дроби на простейшие? Приведите примеры.

Использованные информационные ресурсы:

1. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.1 / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001.

2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009.

3. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике.- М.: Изд-во Физико-математической литературы, 2004.

4. http:// bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867

Лекция 19

Методы интегрирования (занятие 3)

Аннотация. Данная тема раскрывает основные приемы интегрирования тригонометрических функций и иррациональных функций.

Ключевые слова. Интегрирование тригонометрических функций, интегрирование иррациональных функций.

Методические рекомендации по изучению темы

- Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления по теме;
- В дополнение к лекции есть презентация, которую необходимо изучить, и ответить на вопросы.
- В качестве самостоятельной работы предлагается выполнить задания для практической работы;
- Для проверки усвоения темы имеется тест.

Вопросы для изучения:

1. Интегрирование тригонометрических функций.
2. Интегрирование простейших иррациональностей.

Вопросы для самоконтроля:

1. Какая алгебраическая дробь называется правильной? Неправильной? Приведите примеры.
2. Какие дроби называются простейшими? Приведите примеры.
3. Когда и как производится разложение правильной дроби на простейшие? Приведите примеры.

Использованные информационные ресурсы:

1. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.1 / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001.
2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009.
3. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике.- М.: Изд-во Физико-математической литературы, 2004.

4. http://bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867

Лекция 20

Определенный интеграл

Аннотация. Данная тема раскрывает основные приемы интегрирования определенного интеграла.

Ключевые слова. Определенный интеграл, формула Ньютона-Лейбница, метод замены переменной в определенном интеграле.

Методические рекомендации по изучению темы

- Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления по теме;
- В дополнение к лекции есть презентация, которую необходимо изучить, и ответить на вопросы.
- В качестве самостоятельной работы предлагается выполнить задания для практической работы;
- Для проверки усвоения темы имеется тест.

Вопросы для изучения:

1. Определенный интеграл как предел интегральных сумм.
2. Свойства определенного интеграла. Классы интегрируемых функций.
3. Теорема о среднем значении определенного интеграла и среднее значение функции на отрезке.
4. Формула Ньютона-Лейбница.
5. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.
6. Вычисление площадей криволинейных фигур с помощью определенного интеграла.

Вопросы для самоконтроля:

1. Что называется интегральной суммой данной функции f(x)на данном отрезке [a;b]?
2. Что называется определенным интегралом от данной функции на данном отрезке?
3. В чем состоит свойство сохранения знака определенного интеграла?
4. В чем состоит свойство аддитивности определенного интеграла?
5. Разъясните смысл формулы Ньютона-Лейбница.
6. В чем состоит метод замены переменной и интегрирования по частям в определенном интеграле?

Использованные информационные ресурсы:

1. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.1 / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001.

2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009.

3. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике.- М.: Изд-во Физико-математической литературы, 2004.

4. http:// bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867

Лекция 21

Несобственные интегралы

Аннотация. Данная тема раскрывает основные приемы интегрирования несобственных интегралов.

Ключевые слова. Несобственный интеграл.

Методические рекомендации по изучению темы

•Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления по теме;

•В дополнение к лекции есть презентация, которую необходимо изучить, и ответить на вопросы.

•В качестве самостоятельной работы предлагается выполнить задания для практической работы;

•Для проверки усвоения темы имеется тест.

Вопросы для изучения:

1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами от непрерывных функций.
2. Понятие сходимости несобственных интегралов I рода.

Вопросы для самоконтроля:

1. Дайте определение несобственного интеграла от непрерывной функции по бесконечному промежутку, приведите примеры.
2. Какие интегралы относятся к несобственным интегралам I рода?
3. Какие несобственные интегралы называются сходящимися; расходящимися?

Использованные информационные ресурсы:

1. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.1 / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001.
2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009.

3. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике.- М.: Изд-во Физико-математической литературы, 2004.
4. http:// bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867

Лекция 22

Кратные интегралы.

Аннотация. Данная тема раскрывает понятие двойного интеграла и дает его применение.

Ключевые слова. Область на плоскости, функция двух переменных, интегральная сумма, двойной интеграл.

Методические рекомендации по изучению темы

- Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления по теме;
- В дополнение к лекции есть презентация, которую необходимо изучить, и ответить на вопросы.
- Для проверки усвоения темы имеется тест.

Вопросы для изучения:

1. Понятие двойного интеграла.
2. Изменение порядка интегрирования.
3. Геометрический смысл и применение двойного интеграла.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение двойного интеграла.
2. Сформулируйте свойства двойного интеграла.
3. Как свести двойной интеграл к повторному?
4. Каков геометрический смысл двойного интеграла?
5. Какие приложения двойного интеграла вы знаете?

Рекомендуемые информационные ресурсы:

1. Красс М.С. Математика для экономических специальностей. Учебник. – М.: ИНФРА-М, 1998.
2. http://bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867
3. Презентация

Лекция 23

Числовые ряды (занятие 1)

Аннотация. Данная тема раскрывает основные понятия числового ряда, сходимости ряда, признаки сходимости рядов.

Ключевые слова. Числовой ряд, сходимость ряда, сумма ряда, признаки сходимости рядов.

Методические рекомендации по изучению темы

•Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления по теме;

•В дополнение к лекции есть презентация, которую необходимо изучить, и ответить на вопросы.

•В качестве самостоятельной работы предлагается выполнить задания для практической работы;

•Для проверки усвоения темы имеется тест.

Вопросы для изучения:

1. Понятие числового ряда.
2. Понятие сходимости и суммы ряда.
3. Свойства сходящихся числовых рядов.
4. Необходимый признак сходимости числовых рядов.
5. Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами : **Вопросы для самоконтроля:**

1. Дайте определение числового ряда.

2. Какой ряд называется сходящимся; расходящимся? Дайте определение частичной суммы, суммы ряда.

3. В чем отличие конечного суммирования от бесконечного?

1. Сформулируйте необходимый признак сходимости ряда.

2. Можно ли утверждать, что ряд сходится, если общий член ряда стремится к нулю при n→∞? Приведите пример.

3. Можно ли утверждать, что ряд расходится, если предел общего члена ряда не равен нулю при n→∞? Приведите пример.

4. Сформулируйте достаточный признак расходимости ряда.

5. Перечислите свойства сходящихся рядов.

Использованные информационные ресурсы:

1. http:// bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867

2. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.1 / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001.

3. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009.

4. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике.- М.: Изд-во Физико-математической литературы, 2004.

Лекция 24

Числовые ряды (занятие 2)

Аннотация. Данная тема содержит признаки сходимости рядов, понятие знакочередующегося ряда и признак сходимости знакочередующегося ряда, понятие абсолютной и условной сходимости рядов.

Ключевые слова. Знакочередующийся ряд, абсолютная и условная сходимость ряда.

Методические рекомендации по изучению темы

- Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления по теме;
- В дополнение к лекции есть презентация, которую необходимо изучить, и ответить на вопросы.
- В качестве самостоятельной работы предлагается выполнить задания для практической работы;
- Для проверки усвоения темы имеется тест.

Вопросы для изучения:

1. Признак Даламбера, алгебраический признак Коши, интегральный признак Коши.
2. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.
3. Абсолютная и условная сходимость числовых рядов с произвольными членами.

Вопросы для самоконтроля:

1. Какие достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами Вы знаете? Сформулируйте их.

2. Какой ряд называется знакочередующимся? Каким признаком пользуются для выяснения сходимости таких рядов? Сформулируйте его.

3. Дайте понятие абсолютной и условной сходимости числовых рядов?

4. Перечислите свойства абсолютно сходящихся рядов.

Использованные информационные ресурсы:

1. http:// bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867

2. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.1 / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001.

3. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009.

4. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике.- М.: Изд-во Физико-математической литературы, 2004.

Лекция 25

Функциональные ряды

Аннотация. Данная тема содержит понятия функционального ряда, степенного ряда, области сходимости степенного ряда, интервала и радиуса сходимости степенного ряда.

Ключевые слова. Функциональный ряд, степенной ряд, область сходимости степенного ряда, интервал и радиус сходимости степенного ряда.

Методические рекомендации по изучению темы

•Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления по теме;

•В дополнение к лекции есть презентация, которую необходимо изучить, и ответить на вопросы.

•В качестве самостоятельной работы предлагается выполнить задания для практической работы;

•Для проверки усвоения темы имеется тест.

Вопросы для изучения:

1. Понятие функционального ряда. Степенной ряд.
2. Область сходимости степенного ряда.
3. Теорема Абеля. Интервал и радиус сходимости степенных рядов.
4. Свойства сходящихся степенных рядов.

Вопросы для самоконтроля:

1. Какой ряд называется функциональным? Что называется областью сходимости функционального ряда. Приведите примеры.
2. Какой ряд называется степенным?
3. Что называется интервалом сходимости степенного ряда? Приведите примеры.
4. Можно ли утверждать, что область сходимости степенного ряда совпадает с интервалом сходимости?
5. Сформулируйте теорему Абеля. Что называется радиусом сходимости степенного ряда?
6. Как проводится дифференцирование и интегрирование степенных рядов?

Рекомендуемые информационные ресурсы:

1. http://bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867
2. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.1 / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001.
3. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009.
4. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике.- М.: Изд-во Физико-математической литературы, 2004.
5. Презентация

Лекция 26

Применение рядов

Аннотация. Данная тема содержит понятия рядов Тейлора и Маклорена.

Ключевые слова. Функция разложимая в степенной ряд. Ряд Тейлора, ряд Маклорена.

Методические рекомендации по изучению темы

•Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления по теме;

•В дополнение к лекции есть презентация, которую необходимо изучить, и ответить на вопросы.

•В качестве самостоятельной работы предлагается выполнить задания для практической работы;

•Для проверки усвоения темы имеется тест.

Вопросы для изучения:

1. Ряды Тейлора и Маклорена.
2. Примеры разложения функций в ряды Маклорена.
3. Применение рядов в приближенных вычислениях.

Вопросы для самоконтроля:

1. Какой ряд называется рядом Тейлора?

1. Сформулируйте условия разложимости функций в ряд Тейлора.
2. Какой ряд называется рядом Маклорена?
3. Разложите в ряд Маклорена функции: e^x, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^m$, $\ln(1+x)$, $\operatorname{arctg} x$.

Рекомендуемые информационные ресурсы:

1. http://bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867

2. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.1 / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001.

3. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009.

4. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике.- М.: Изд-во Физико-математической литературы, 2004.

Лекция 27

Дифференциальные уравнения

Аннотация. Данная тема содержит понятия общего и частного решения дифференциального уравнения, понятие особого решения, понятие уравнения с разделяющимися переменными.

Ключевые слова. Общее решение дифференциального уравнения. Частное решение дифференциального уравнения. Особое решение дифференциального уравнения. Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

Методические рекомендации по изучению темы

- Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления по теме;
- В дополнение к лекции есть презентация, которую необходимо изучить, и ответить на вопросы.
- В качестве самостоятельной работы предлагается выполнить задания для практической работы;
- Для проверки усвоения темы имеется тест.

Вопросы для изучения:

1. Основные понятия и определения.
2. Понятие общего и частного решений, геометрическая интерпретация решения дифференциального уравнения.
3. Теорема существования и единственности частного решения. Понятие особого решения.
4. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.

Вопросы для самоконтроля:

1. Какие уравнения называются дифференциальными?

2. Дайте определение и геометрическую интерпретацию общего и частного решений дифференциального уравнения.

3. Какое решение дифференциального уравнения называется особым?

4. Сформулируйте задачу Коши, теорему Коши о существовании и единственности частного решения дифференциального уравнения 1-го порядка.

5. Дайте определение дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.

1. http://bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867

2. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.1 / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001.

3. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009.

4. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике.- М.: Изд-во Физико-математической литературы, 2004.

Лекция 28

Дифференциальные уравнения первого порядка и уравнения, допускающие понижение порядка.

Аннотация. Данная тема содержит понятия однородных, линейных дифференциальных уравнений и уравнений Бернулли.

Ключевые слова. Однородное дифференциальное уравнение. Линейное дифференциальное уравнение. Уравнение Бернулли.

Методические рекомендации по изучению темы

•Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления по теме;

•В дополнение к лекции есть презентация, которую необходимо изучить, и ответить на вопросы.

•В качестве самостоятельной работы предлагается выполнить задания для практической работы;

•Для проверки усвоения темы имеется тест.

Вопросы для изучения:

1. Однородные уравнения
2. Линейные уравнения
3. Уравнения Бернулли
4. Уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

Вопросы для самоконтроля:

1. Какая функция называется однородной функцией k-го порядка; 0-го порядка?

2. Дайте определение однородного дифференциального уравнения.

3. К какому виду можно преобразовать однородные дифференциальные уравнения?

4. Какая подстановка позволяет преобразовать однородное дифференциальное уравнение к уравнению с разделяющимися переменными?

5. Какие уравнения называются линейными дифференциальными уравнениями, уравнениями Бернулли?

6. Каким методом решаются линейные дифференциальные уравнения и уравнения Бернулли?

7. Какие дифференциальные уравнения 2-го порядка допускают понижение порядка?

Рекомендуемые информационные ресурсы:

1. http://bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867
2. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.1 / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001.
3. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009.

Лекция 29

Линейные дифференциальные уравнения второго порядка

Аннотация. Данная тема содержит понятия характеристического уравнения, линейных однородных и неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Ключевые слова. Характеристическое уравнение. Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка. Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка.

Методические рекомендации по изучению темы

- Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления по теме;
- В дополнение к лекции есть презентация, которую необходимо изучить, и ответить на вопросы.
- В качестве самостоятельной работы предлагается выполнить задания для практической работы;
- Для проверки усвоения темы имеется тест.

Вопросы для изучения:

1. Линейные однородные дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.
2. Характеристическое уравнение.
3. Формулы общих решений линейных однородных

дифференциальных уравнений второго порядка.

4. Линейные неоднородные дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

5. Общее и частное решения линейного однородного дифференциального

Вопросы для самоконтроля:

1. Дайте определение однородного и неоднородного линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

2. Какое уравнение называется характеристическим?

3. Запишите формулы общих решений линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами для различных случаев решений характеристического уравнения.

4. В каких случаях частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами может быть определено по виду правой части уравнения?

5. Какой метод используется для отыскания частного решения по виду правой части уравнения?

Рекомендуемые информационные ресурсы:

1. http://bars.kpfu.ru/course/view.php?id=867

2. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.1 / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001.

3. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009.

4. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике.- М.: Изд-во Физико-математической литературы, 2004.