

Кабинет Министров Республики Татарстан
Министерство образования и науки Республики Татарстан
Министерство промышленности и торговли Республики Татарстан
Казанский научный центр Российской академии наук
Мэрия города Казани
ОАО «Казанская ярмарка»
Казанский национальный исследовательский технический
университет им. А.Н. Туполева-КАИ (КНИТУ-КАИ)

**НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ, МАТЕРИАЛЫ И ОБОРУДОВАНИЕ
РОССИЙСКОЙ АВИАКОСМИЧЕСКОЙ ОТРАСЛИ**

**ВСЕРОССИЙСКАЯ НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ
С МЕЖДУНАРОДНЫМ УЧАСТИЕМ**

10-12 августа 2016 г

АКТО-2016



СБОРНИК ДОКЛАДОВ

Казань 2016

ДИНАМИКА РАБОТЫ ТРЕХСТЕПЕННОГО ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ВОЗБУЖДАЕМОГО МОДУЛЯЦИОННОГО ГИРОСКОПА

Бахтиева Л.У.¹, Боголюбов В.М.²

(¹Казанский федеральный университет, ²Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева-КАИ)

Представлена линеаризованная математическая модель трехстепенного модуляционного роторного вибрационного гироскопа (МРВГ) для случая движения основания прибора с постоянной угловой скоростью. Приведены результаты численных расчетов, позволяющие сделать выводы о возможности повышения точности прибора, а также расширения его функциональной способности путем модуляции динамической жесткости чувствительного элемента.

Параметрическое возбуждение трехстепенного МРВГ (рис. 1), как колебательной системы на упругом подвесе [1], целесообразно осуществлять путем модуляции динамической жесткости этого подвеса, являющейся его энергоемким параметром.

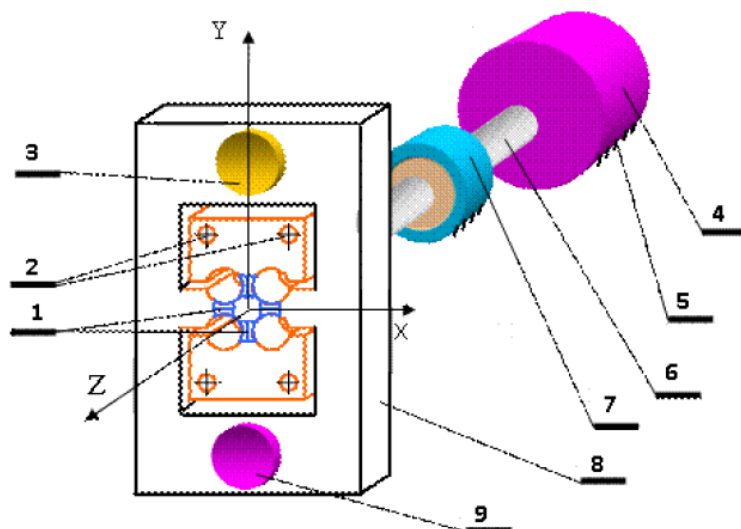


Рис. 1. Кинематическая схема трехстепенного МРВГ:

1 – торсионный подвес, 2 – крепежные отверстия чувствительного элемента, 3 – датчик угла, 4 – приводной двигатель, 5 – основание прибора, 6 – вал двигателя, 7 – генераторы опорных напряжений, 8 – чувствительный элемент, 9 – датчик момента

Модуляция динамической жесткости осуществляется изменением в небольших пределах частоты питающего напряжения бесколлекторного электродвигателя постоянного тока (БДПТ) или синхронного гистерезисного привода по закону:

$$\Omega_m(t) = \Omega + \Delta\Omega \cos(\omega_m t), \quad (1)$$

где Ω – номинальное значение частоты вращения вала двигателя, соответствующее настроенному режиму работы гироскопа, $\Delta\Omega$ – девиация

частоты, ω_m – частота модуляции.

Текущее значение фазы колебаний вала приводного двигателя относительно номинального значения определяется выражением:

$$\varphi_m(t) = \int \Omega_m(t) dt = \Omega t + m \sin(\omega_m t), \quad (2)$$

где $m = \Delta\Omega / \omega_m$ – индекс частотной модуляции.

На основе функций Бесселя первого рода для значений индекса модуляции $m \leq 0.1$, а также с учетом узкополосности амплитудно-частотной характеристики МРВГ и выражения (2) периодические функции $\sin(\Omega t + m \sin(\omega_m t))$ и $\cos(\Omega t + m \sin(\omega_m t))$ запишем в виде:

$$\begin{aligned} \sin(\varphi_m(t)) &= \sin(\Omega_m t) = \sin(\Omega t) + \frac{m}{2} (\sin(\Omega + \omega_m)t + \sin(\Omega - \omega_m)t), \\ \cos(\varphi_m(t)) &= \cos(\Omega_m t) = \cos(\Omega t) - \frac{m}{2} (\cos(\Omega - \omega_m)t - \cos(\Omega + \omega_m)t). \end{aligned} \quad (3)$$

Для описания движения МРВГ, установленного на подвижном основании, введем систему координат $O\xi^*\eta^*\zeta^*$ с началом отсчета в центре масс ротора гироскопа и осями, направленными на неподвижные звезды.

С подвижным основанием свяжем систему координат $Ox_{об}y_{об}z_{об}$, ось $Oz_{об}$ которой совпадает с осью вращения ротора МРВГ (рис. 2а). Движение основания прибора будем считать известным, т.е. в каждое мгновение времени будет известна ориентация системы координат $Ox_{об}y_{об}z_{об}$ относительно инерциальной $O\xi^*\eta^*\zeta^*$, а проекции $\Phi'_x, \Phi'_y, \Phi'_z$ вектора абсолютной угловой скорости основания на оси системы $O\xi^*\eta^*\zeta^*$ являются заданными функциями времени.

Кроме вышеупомянутых систем необходимы еще две системы осей $Ox_B y_B z_B, Ox_P y_P z_P$, связанные соответственно с валом приводного двигателя, с главными осями инерции ротора (рис. 2б).

Начало отсчета системы осей $Ox_B y_B z_B, Ox_P y_P z_P$ лежит в центре масс МРВГ, а их положение относительно системы $Ox_{об}y_{об}z_{об}$ задано последовательными поворотами в положительном направлении соответствующими углами Ωt для $Ox_B y_B z_B$ и Θ_x, Θ_y для $Ox_P y_P z_P$.

В соответствии с приведенными системами координат выберем в качестве обобщенных координат углы поворота ротора $\Theta_x = \beta$ и $\theta_y = \alpha$, однозначно определяющие его положение, а в качестве обобщенных сил – моменты демпфирования и моменты упругости торсионов.

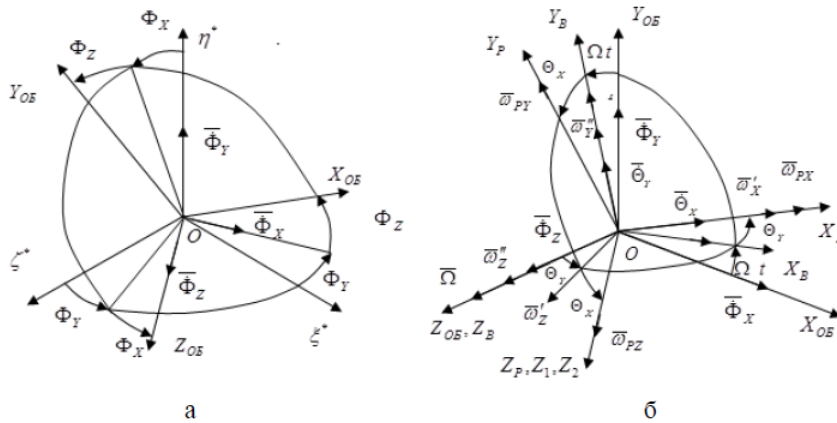


Рис. 2. Системы координат

Дифференциальные уравнения движения, полученные на основе уравнений Лагранжа (см., например, [2]) для случая постоянной угловой скорости вращения основания, после выполнения процедуры факторизации [3], последующего проведения линеаризации с помощью матрицы Якоби и учета обобщенных сил будут иметь вид

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \beta(t) \right) + \frac{\mu \left(\frac{\partial}{\partial t} \beta(t) \right)}{A} + \frac{(k + (C - B) \Omega (\Omega + 2 m \omega_m \cos(\omega_m t))) \beta(t)}{A} \\
 & - \frac{(A + B - C) (\Omega + m \omega_m \cos(\omega_m t)) \left(\frac{\partial}{\partial t} \alpha(t) \right)}{A} = \\
 & \frac{(A + C - B) \Omega (\Phi'_x \sin(\Omega t) - \Phi'_y \cos(\Omega t))}{A} \\
 & \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \alpha(t) \right) + \frac{\mu \left(\frac{\partial}{\partial t} \alpha(t) \right)}{B} + \frac{(k + (C - A) \Omega (\Omega + 2 m \omega_m \cos(\omega_m t))) \alpha(t)}{B} \\
 & + \frac{(A + B - C) (\Omega + m \omega_m \cos(\omega_m t)) \left(\frac{\partial}{\partial t} \beta(t) \right)}{B} = \\
 & \frac{(C + B - A) \Omega (\Phi'_x \cos(\Omega t) + \Phi'_y \sin(\Omega t))}{B}
 \end{aligned} \tag{4}$$

Особенностью системы дифференциальных уравнений (4) является наличие членов, связанных с периодическим изменением гироскопических и позиционных моментов:

$$\begin{aligned}
 & \frac{(A + B - C) m \omega_m \cos(\omega_m t)}{A} \frac{d}{dt} \alpha(t), \quad \frac{(A + B - C) m \omega_m \cos(\omega_m t)}{B} \frac{d}{dt} \beta(t), \\
 & \frac{2 m \omega_m (C - A) \Omega \cos(\omega_m t)}{B} \alpha(t), \quad \frac{2 m \omega_m (C - B) \Omega \cos(\omega_m t)}{B} \beta(t).
 \end{aligned}$$

Наличие таких периодически изменяющихся энергоемких параметров

МРВГ, как гироскопические моменты и динамические жесткости, входящие в состав соответствующих неоднородных дифференциальных уравнений, обеспечивает благоприятные условия для параметрического возбуждения механического контура рассматриваемого гироскопа на частоте $\omega_m = \Omega$ [4].

Результаты численных расчетов, проведенных с помощью математического пакета *Maple 9* при $\omega_m = \Omega$, приведены на рисунке 3.

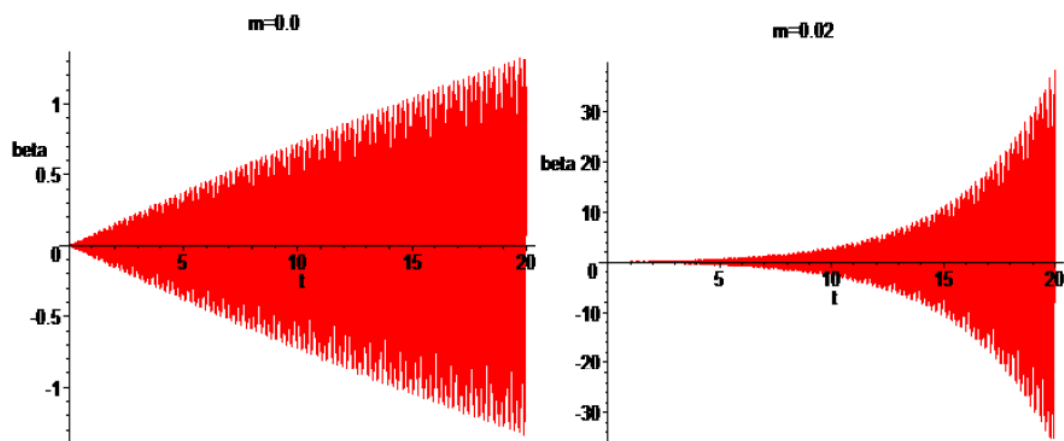


Рис. 3. График зависимости угла поворота чувствительного элемента от времени для различных значений индекса модуляции

Анализ полученных результатов показывает, что решение уравнений (4) существенным образом зависит от значения индекса модуляции m . Если при малых значениях индекса m решение устойчиво, то при $m \approx 0.02$ наблюдается резкое увеличение амплитуды решения (повышение чувствительности к измеряемой угловой скорости), т.е. наблюдается явление параметрического резонанса.

Критическое значение индекса модуляции для различных значений параметров, входящих в уравнения (4), может быть найдено как путем численных экспериментов, так и аналитически. Для этого, пользуясь рекомендациями монографии [5] и учитывая нулевые начальные значения, представим приближенное решение системы (4) в виде

$$\alpha = f_1(1 - e^{-\mu t}) \sin \omega t, \beta = f_2(1 - e^{-\mu t}) \sin \omega t.$$

Подставляя эти функции в систему (4), получим систему алгебраических уравнений для неизвестных функций f_1 и f_2 . Для того, чтобы найти значение критического индекса модуляции, т.е. такого его значения, при котором наступает явление резонанса, потребуем, чтобы определитель системы обратился в нуль. Минимизируя далее полученное значение m по переменной t , найдем величину критического индекса.

Таким образом, представленная математическая модель, описывающая динамику движения параметрически возбуждаемого МРВГ, позволяет не только иллюстрировать процесс работы гироскопа, но и находить значения параметров, при которых его работа наиболее эффективна.

Список литературы

1. Белугин В.Б., Бронников А.К. Чувствительный элемент роторного вибрационного гироскопа. А.С. № 282976 от 3.10.1988 (приоритет от 31.07.1987).

2. Бахтиева, Л.У., Тазюков, Ф.Х. Об устойчивости оболочек при импульсном нагружении / Л.У. Бахтиева, Ф.Х. Тазюков // Ученые записки Казанского университета. Серия физико-математические науки, 2014, т. 156, № 1, С. 5–11.

3. Сольницев Р.И. Вычислительные машины в судовой гироскопии. – Л.: Судостроение, 1977. – 312 с.

4. Боголюбов В.М. Исследование влияния модуляции динамической жесткости РВГ на его точность. – Сб. тезисов докладов и сообщений VIII НТК. Казань: 1993. С. 60.

5. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. – М.: Гостехиздат, 1956.

DYNAMICS OF THE PARAMETRICALLY EXCITED BY MODULATION THREE-DEGREE GYROSCOPE

Bakhtieva L.¹, Bogoljubov V.²

*(¹Kazan Federal University, ²Kazan National Research Technical
University named after A.N. Tupolev)*

The linearized mathematical model of the three-stage modulation of the rotor vibratory gyroscope in the case of movement of the base unit with a constant angular velocity is presented. The results of numerical calculations allow to draw conclusions about the possibility of expanding the measurement abilities and improve the accuracy of the device by modulating dynamic stiffness of the sensing element.