

# ВСЕРОССИЙСКИЙ КОНКУРС

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ РАБОТ  
СТУДЕНТОВ И АСПИРАНТОВ  
В ОБЛАСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК



СБОРНИК  
РАБОТ  
ПОБЕДИТЕЛЕЙ



**Министерство образования и науки Российской Федерации**  
**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение**  
**высшего профессионального образования**  
**«Ульяновский государственный университет»**

**ВСЕРОССИЙСКИЙ КОНКУРС**  
**НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ РАБОТ**  
**СТУДЕНТОВ И АСПИРАНТОВ**  
**В ОБЛАСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК**

**Сборник работ победителей**

**Ульяновск 2012**

Наличие экспериментальной базы позволило бы более точно прогнозировать и исследовать воздействие свободных радикалов на организм человека с целью увеличения средней продолжительности жизни.

### **Литература**

1. Бажанова Т.В. Моделирование систем выбора компромиссных режимов свободно-радикального стресса: дис. канд. ф.-м. наук – Ульяновск. 2010.
2. Бутов А.А., Раводин К.О. Б 93 Теория случайных процессов: учебно-методическое пособие. – Ульяновск: УлГУ, 2009. – 62 с.
3. Gompertz B. On the Nature of the Function Expressive of the Law of Human Mortality, and on a New Mode of Determining the Value of Life Contingencies // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. 1825. Vol. 115, pp. 513–585.
4. Harman, D.: Aging: a theory based on free radical and radiation chemistry. J Gerontol, 11, 298-300 (1956)
5. Thomas B.L. Kirkwood (2005). «Understanding the Odd Science of Aging». *Cell* 120: 437–447.

## **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СВЕРХКРИТИЧЕСКОЙ ЭКСТРАКЦИИ МАСЛА ИЗ ПОЛИДИСПЕРСНОГО СЛОЯ МОЛОТОГО РАСТИТЕЛЬНОГО СЫРЬЯ**

**Саламатин А.А.**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет*

Новые технологии извлечения масла из молотых растительных семян на основе сверхкритической флюидной экстракции (СФЭ) заметно превосходят традиционные промышленные методы, как по качеству конечного продукта, так и по экологичности процесса. Это вызывает повышенный интерес к математическому моделированию процессов СФЭ масла из зернистого слоя измельченного растительного сырья.

Полная модель СФЭ должна включать в себя две подмодели: «внешнюю», макромасштабную, описывающую процессы переноса масла в аппарате-экстракторе, содержащем засыпку сырья; и «внутреннюю», в которой представлена кинетика извлечения масла из одиночной частицы за-

сыпки. Первая обычно формулируется как модель реактора идеального вытеснения. Вторая предполагает схематизацию формы и структуры зерен засыпки, конкретизацию процессов растворения и диффузионного переноса масла внутри частиц.

Зернистый слой, как правило, описывается в монодисперсном приближении, а при построении внутренней модели часто используют концепцию (SC – shrinking core) сужающегося ядра [1,2]. В рамках такого представления в зерне выделяются внутренняя маслосодержащая зона (ядро) и периферийная транспортная зона. Радиус ядра уменьшается со временем за счет диффузионного выноса содержащегося в ядре масла через выработанную транспортную зону в межзерновое пространство. Концентрация масла в ядре остается постоянной. Процесс извлечения масла из зерна заканчивается, когда радиус ядра обращается в нуль.

Применение SC-модели к расчету процессов экстракции масла из семян различных масличных культур показало, что схема сужающегося ядра, в целом, верно описывает динамику извлечения масла из частиц зернистого слоя. Однако в ряде экспериментов [3-5] наблюдается явно выраженный двухстадийный характер процесса экстракции с высоким начальным темпом извлечения и последующим резким замедлением выхода масла. Адекватное описание таких эффектов предполагает расширение модели SC на случай полидисперсного зернистого слоя [2].

Внутренняя и внешняя подмодели СФЭ в полидисперсном зернистом слое сводятся к системе двух уравнений относительно неизвестных функций  $R(t, z, a)$  (радиус сужающегося ядра) и  $C(t, z)$  (концентрация масла в поровом пространстве)

$$\theta_0 (a - R) \left( \frac{R}{a} \right) \frac{\partial R}{\partial t} = -D_{\text{eff}} (\theta_0 - C),$$

$$v \frac{\partial C}{\partial z} = -(1 - m) \theta_0 \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{R}{a} \right)^3 f(a) da$$

при следующих начальном и граничном условиях

$$R(0, z; a) = a, \quad C(t, 0) = 0.$$

Здесь  $t$  – время,  $z$  – пространственная координата, отсчитываемая от входного сечения вдоль оси экстрактора,  $m$  – пористость зернистого слоя,  $v$  – скорость фильтрации флюида,  $a$  радиус сферических частиц слоя,

$D_{\text{eff}}$  - эффективный коэффициент диффузии,  $\theta_0$  - отношение массы начальных запасов масла в частице к ее объему,  $\theta$  - равновесная концентрация масла во флюиде. Через  $f$  обозначается плотность, а через  $F$  - функция распределения частиц по размерам. По определению величина  $dF = f(a)da$  представляет собой объемную долю частиц с размером от  $a$  до  $a+da$ .

Сформулированная задача допускает аналитическое решение. Ограничимся тем, что представим результаты вычисления основной безразмерной характеристики  $Y(t)$ , представляющей собой накопленную к моменту времени  $t$  добычу масла из аппарата высотой  $L$ .

Не меняя обозначений, определим безразмерные аналоги времени, нормируя  $t$  на  $t_{\text{sc}}$ , и радиуса частиц, нормируя  $a$  на  $a_{\text{sc}}$

$$t_{\text{sc}} = \frac{L(1-m)\theta_0}{v\theta}, \quad a_{\text{sc}} = \sqrt{\frac{2nL(1-m)D_{\text{eff}}}{v}}$$

Во введенных переменных кривая выхода масла (КВМ)  $Y(t)$  имеет три участка. При  $t < t_-$  концентрация выходящего из реактора флюида равна равновесной,  $Y(t) = t$ . При  $t > t_+$  все масло в реакторе выработано,  $Y(t) = 1$ . На нелинейном участке  $t_- < t < t_+$  экстракции КВМ задается формулой

$$1 = \int_{t_-}^t \frac{d\tau}{k(\tau)}, \quad k(\tau) = \int_0^1 F \left[ \sqrt{\frac{\tau}{3(1-(1-s)^{2/3}) - 2s}} \right] ds.$$

Безразмерные времена  $t_-, t_+$  определяются соотношениями ( $a_{\text{max}}$  - максимальный размер зерен)

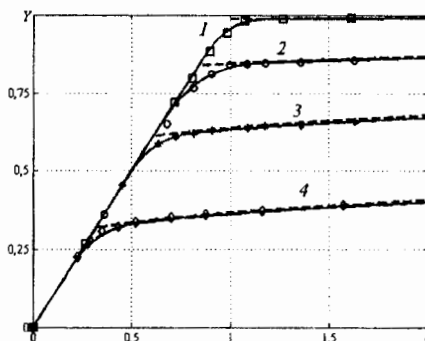
$$1 = \int_0^t \frac{d\tau}{k(\tau)}, \quad t_+ = 1 + a_{\text{max}}^2.$$

Полученные общие формулы конкретизировались для полидисперсных сред с различным фракционным составом. Особо выделены бимодальные среды для которых плотность  $f(a)$  распределения частиц имеет два локальных максимума, один из которых лежит в области малых, а второй - в области больших значений  $a$ . Для таких сред в представляющем основной практический интерес диапазоне умеренных времен получена асимптотика КВМ вида

$$Y = \min \left\{ t, \alpha + \frac{2}{3} \varepsilon \left( t^{3/2} - (t - \alpha)^{3/2} \right) + O(\varepsilon^2) \right\}$$

Здесь через  $\alpha$  обозначена доля мелкой фракции, малый параметр  $\varepsilon$  - величина, обратная радиусу крупной фракции.

Именно бимодальные среды являлись тем классом в котором удалось с высокой точностью описать наблюдаемый двухстадийный характер процесса экстракции масла из косточек абрикоса [3], семян тыквы [4] и подсолнечника [5]. На приведенном рисунке маркерами обозначены экспериментальные данные, соответствующие косточкам абрикоса при разной степени дробления сырья, сплошными линиями изображены теоретические КВМ, построенные по аналитическому решению, пунктирные линии отвечают асимптотической формуле.



В заключение данной работы обсуждаются пути решения обратной задачи построения функции распределения по экспериментальным кривым выхода масла.

### Литература

1. M. Goto, B.C. Roy, T. Hirose Shrinking-core leaching model for supercritical fluid extraction // *J. of Supercritical Fluids*. 1996. V. 9. P. 128 – 133.
2. Егоров А.Г., Мазо А.Б., Максудов Р.Н. Экстракция полидисперсного зернистого слоя молотых семян масличных культур сверхкритическим диоксидом углерода // *Теоретические основы химической технологии*. 2010. Т. 44. № 5. С. 498–506
3. S.G. Ozkal, M.E. Yener, L. Bayındırlı Mass transfer modeling of apricot kernel oil extraction with supercritical carbon dioxide // *J. of Supercritical Fluids*. 2005. V. 35. P. 119. –127
4. Ugur Salgin, Hasan Korkmaz A green separation process for recovery of healthy oil from pumpkin seed // *J. of Supercritical Fluids*. 2011. V. 58. P. 239 – 248
5. Luca Fiori Supercritical extraction of sunflower seed oil: Experimental data and model validation // *J. of Supercritical Fluids*. 2009. V. 50. P. 218 – 224/