



Общероссийский математический портал

Н. Р. Абубакиров, Л. А. Аксентьев, Прямые и обратные задачи для логарифмического потенциала простого слоя, *Изв. вузов. Матем.*, 2020, номер 11, 3–14

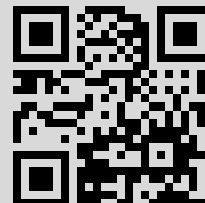
DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-11-3-14>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 178.213.240.13

2 февраля 2022 г., 16:03:41



Н.Р. АБУБАКИРОВ, Л.А. АКСЕНТЬЕВ

## ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА ПРОСТОГО СЛОЯ

*Аннотация.* С помощью интегралов типа Коши приведен новый вывод интегральных уравнений для решения задач логарифмического потенциала. Проанализирована обратная задача с двумя звездообразными решениями, содержащими меньшее число параметров, чем в более сложных аналогичных примерах И.М. Рапопорта. Доказан критерий обращения в тождественную постоянную внутреннего потенциала простого слоя.

*Ключевые слова:* логарифмический потенциал простого слоя, условия выпуклости и звездообразности, интеграл типа Коши.

УДК: 517.956

DOI: 10.26907/0021-3446-2020-11-3-14

**Введение.** Данная статья является продолжением исследований авторов [1]–[4]. В ней будут использованы результаты И.М. Рапопорта [5] по обратной задаче для потенциала простого слоя

$$v(z) = \int_L \ln |t - z|^2 |dt|,$$

где  $L$  — простая замкнутая кривая, которая делит комплексную плоскость на конечную и бесконечную области  $D^+$  и  $D^-$ . После статьи [5] традиционный путь исследования логарифмического потенциала связан с переходом к аналитической функции в форме градиента  $\frac{\partial v}{\partial z} = \alpha u(z)$  (например, [6]). Постоянная  $\alpha$  является несущественной и ее можно считать равной  $(-1)$ .

Интегральное представление для логарифмического потенциала после дифференцирования становится однозначным интегралом. В случае потенциала простого слоя этот интеграл выглядит так

$$u(z) = \int_L \frac{|dt|}{t - z}. \quad (1)$$

При  $z \in D^\pm$  для  $u(z)$  будем использовать обозначение  $u^\pm(z)$ .

В работах авторов [1]–[4] отмечена актуальность изучаемой тематики. Были указаны основополагающие работы И.М. Рапопорта, В.К. Иванова, В.Н. Страхова, А.В. Цирульского, их учеников и последователей, которые послужили базой для развития в статьях [1]–[4].

---

Поступила в редакцию 27.12.2019, после доработки 08.07.2020. Принята к публикации 01.10.2020.

Благодарности. Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, соглашение № 075-02-2020-1478.

Крупными достижениями по задачам логарифмического потенциала явились труды А.И. Прилепко и В.Г. Чередниченко. Подробная библиография этих работ указана в обзорной статье [7]. Два эффекта можно подчеркнуть в новых работах: отказ от знакопостоянства плотностей потенциалов и допущение расширенного класса несущих линий, в частности, фракталов [8].

Запишем такие постановки двух задач, которые являются традиционными (например, [9], [10]).

**Прямая задача.** При заданном аналитическом замкнутом контуре  $L$  найти по формуле (1) явный вид функции  $u^-(z)$ ,  $z \in D^-$ . Явный вид означает либо класс элементарных функций, либо класс определенных интегралов от них (табулированные функции).

**Обратная задача.** По заданной аналитической функции  $u^-(z)$  (в окрестности бесконечно удаленной точки) найти замкнутый аналитический контур  $L$ , для которого будет справедлива формула (1).

Желательно добиться такой же полноты анализа задач для потенциала простого слоя, как в случае областного логарифмического потенциала [4]. Сопоставление задач для двух видов логарифмического потенциала было предпринято А.А. Михеевой [11]. Другому подходу к полученным ею результатам посвятим часть нашей работы. (А.А. Михеева сменила фамилию. Несколько статей по близкой тематике были опубликованы ею под фамилией Чудинова А.А., [12], [13], [14].)

**1. Пример с двумя параметрами из класса И.М. Рапопорта.** Пусть  $L : z = f(\zeta)$ ,  $\zeta \in \partial E$ ,  $E = \{\zeta : |\zeta| < 1\}$ . Следуя [5], изучим класс отображающих функций в форме

$$f(\zeta) = \int_0^\zeta P_n^2(\omega) d\omega = \zeta Q_{2n}(\zeta)$$

— однолиственный в замкнутом единичном круге многочлен степени  $2n + 1$ ,

$$|f'(\zeta)| = |P_n(\zeta)|^2 = P_n(\zeta)\overline{P_n(\zeta)},$$

$$P_n(\zeta) = a_n\zeta^n + a_{n-1}\zeta^{n-1} + \dots + a_1\zeta + a_0,$$

$$\overline{P_n(\zeta)} = \bar{a}_n\bar{\zeta}^n + \bar{a}_{n-1}\bar{\zeta}^{n-1} + \dots + \bar{a}_1\bar{\zeta} + \bar{a}_0 = \frac{1}{\zeta^n}(\bar{a}_n + \bar{a}_{n-1}\zeta + \dots + \bar{a}_1\zeta^{n-1} + \bar{a}_0\zeta^n) = \frac{\tilde{P}_n(\zeta)}{\zeta^n} \text{ при } |\zeta| = 1.$$

При  $z \in D^-$  получим

$$u^-(z) = \int_L \frac{|dt|}{t-z} = \int_0^{2\pi} \frac{|f'(e^{i\theta})|d\theta}{f(e^{i\theta})-z} = \left\{ e^{i\theta} = \tau, d\theta = \frac{d\tau}{i\tau} \right\} = -i \int_{|\tau|=1} \frac{P_n(\tau)\tilde{P}_n(\tau)d\tau}{(\tau Q_{2n}(\tau) - z)\tau^{n+1}}.$$

Учтем, что при  $\max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |Q_{2n}(e^{i\theta})| = M$  и  $|z| > M$  имеем

$$|\zeta Q_{2n}(\zeta) - z| \geq |z| - |\zeta Q_{2n}(\zeta)| > 0.$$

Поэтому единственной особой точкой функции  $\frac{P_n(\zeta)\tilde{P}_n(\zeta)}{(\zeta Q_{2n}(\zeta) - z)\zeta^{n+1}}$  в круге является  $\zeta = 0$  — полюс порядка  $n + 1$ . Значит,

$$u^-(z) = 2\pi \text{выч}_0 \frac{P_n(\zeta)\tilde{P}_n(\zeta)}{(\zeta Q_{2n}(\zeta) - z)\zeta^{n+1}} = \frac{2\pi}{n!} \left[ \frac{P_n(\zeta)\tilde{P}_n(\zeta)}{(\zeta Q_{2n}(\zeta) - z)} \right]^{(n)} \Big|_{\zeta=0} = \frac{A_1}{z} + \dots + \frac{A_{n+1}}{z^{n+1}}.$$

Полученная функция действует на всей комплексной плоскости в силу аналитического продолжения из области  $|z| > M$ .

**Замечание.** Если в обратной задаче будет известен градиент  $u^-(z)$ , т.е. величины  $A_k$ ,  $k = \overline{1, n+1}$ , то из последнего равенства получим

$$A_k = A_k(a_0, a_1, \dots, a_n), \quad k = \overline{1, n+1}.$$

Эта совокупность равенств служит системой уравнений для определения  $a_0, a_1, \dots, a_n$ , после нахождения которых (если это удастся сделать) запишется полином  $P_n(\zeta)$  и искомая отображающая функция  $f(\zeta) = \int_0^\zeta P_n^2(\omega) d\omega$ . Уравнение контура представится в форме  $z = f(e^{i\theta})$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Частный случай решения такой системы приведен в статье [5] со степенью  $f(\zeta)$ , равной пяти при  $n = 2$ .

Изучим более простой вариант с  $n = 1$ , на примере которого рассмотрим попадание однолистной функции  $f(\zeta)$  в подклассы выпуклых  $S^0$  и звездообразных  $S^*$  функций, а также неединственность решения сформулированной обратной задачи.

Итак, ищем  $f(\zeta)$  в виде

$$f(\zeta) = \int_0^\zeta (c_0 + c_1\omega)^2 d\omega = b \int_0^\zeta (1 + a\omega)^2 d\omega, \quad (2)$$

где  $b = c_0^2 > 0$ ,  $a = c_1/c_0 \in (0, 1]$ . При  $a > 1$  функция  $f'(\zeta)$  обращается в нуль в круге  $|\zeta| < 1$  и, значит,  $f(\zeta)$  неоднолистка. Так как параметр  $b$  определяет только подобие, то будем изучать функцию

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{b} f(\zeta) = \int_0^\zeta (1 + a\omega)^2 d\omega.$$

Проверим условие выпуклости ([15], с. 203):

$$\varphi(\zeta) \in S^0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} \frac{\zeta \varphi''(\zeta)}{\varphi'(\zeta)} \geq -1 \Leftrightarrow \operatorname{Re} \frac{2a\zeta}{1+a\zeta} \geq -1.$$

Круг  $|\zeta| < 1$  с помощью функции  $\omega(\zeta) = \frac{2a\zeta}{1+a\zeta}$  отображается на круг, лежащий в полуплоскости  $\operatorname{Re} \omega \geq \omega(-1) = -\frac{2a}{1-a}$ . Значит, неравенство  $-\frac{2a}{1-a} \geq -1 \Leftrightarrow a \leq 1/3$  обеспечивает выпуклость функции  $\varphi(\zeta)$ .

Выполним условие звездообразности ([15], с. 202):

$$\varphi(\zeta) \in S^* \Leftrightarrow \Phi(\zeta) := \operatorname{Re} \frac{\zeta \varphi'(\zeta)}{\varphi(\zeta)} \geq 0, \quad \zeta \in E.$$

Поскольку  $\Phi(\zeta)$  непрерывна в замкнутом круге  $\overline{E}$  и гармонична, достаточно установить, что  $\Phi(\zeta) \geq 0$  при  $\zeta = e^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Непосредственным счетом нетрудно убедиться, что неравенство  $\Phi(e^{i\theta}) \geq 0$  эквивалентно неравенству  $F(a, \cos \theta) \geq 0$ , где

$$F(a, \cos \theta) := 8a^2 \cos^2 \theta + (5a^3 + 9a) \cos \theta + a^4 + 2a^2 + 3,$$

и если обозначить  $x = \cos \theta$ , то

$$F(a, x) = 8a^2 \left( x^2 + \frac{5a^3 + 9a}{8a^2} x + \frac{a^4 + 2a^2 + 3}{8a^2} \right) = 8a^2 \left[ \left( x + \frac{5a^3 + 9a}{16a^2} \right)^2 + \frac{(7a^2 - 5)(a^2 - 3)}{256a^2} \right].$$

Условие  $F(a, x) \geq 0$  выполняется при всех  $x$ , если  $(7a^2 - 5)(a^2 - 3)/(256a^2) \geq 0$ , что при  $a \in (0, 1]$  дает условие  $0 < a \leq \sqrt{5/7} = a_0$ . Далее  $F(a, x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5a^3 + 9a}{16a^2} = -x_0$  и  $a = a_0$ . Знак равенства можно достичь при  $a > a_0$  за счет отрицательности второго слагаемого и положительности первого в квадратных скобках для  $x \neq -x_0$ . Но этот вариант нам не подходит, так как  $F(a, -x_0) < 0$  при  $a > a_0$ .

Исследуем однолиственность функции

$$\varphi(\zeta) = \int_0^\zeta (1 + a\omega)^2 d\omega = \frac{1}{3a}(1 + a\zeta)^3 - \frac{1}{3a}.$$

Она будет однолистной тогда и только тогда, когда образ круга  $|\zeta| < 1$  под действием отображения  $s = 1 + a\zeta$  будет лежать в секторе  $|\arg s| \leq \frac{\pi}{3}$ . С помощью простых геометрических

построений это дает неравенство  $a \leq \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Подытожим наши рассуждения: функция (2) при любом  $b > 0$  и неотрицательных  $a$  будет выпуклой  $\Leftrightarrow a \leq 1/3$ , звездообразной  $\Leftrightarrow a \leq \sqrt{5/7}$ , однолистной  $\Leftrightarrow a \leq \sqrt{3}/2$ .

Градиент потенциала простого слоя для функции (2) имеет вид

$$\begin{aligned} u^-(z) &= \int_{|\zeta|=1} \frac{|f'(\zeta)||d\zeta|}{f(\zeta) - z} = \frac{1}{i} \int_{|\zeta|=1} \frac{b(1+a\zeta)(\zeta+a)d\zeta}{\left[b\left(\zeta + a\zeta^2 + \frac{a^2}{3}\zeta^3\right) - z\right]\zeta^2} = \\ &= 2\pi \text{выч}_0 \frac{b(1+a\omega)(\omega+a)}{\left[b\left(\omega + a\omega^2 + \frac{a^2}{3}\omega^3\right) - z\right]\omega^2} = 2\pi b \left[ \frac{(1+a\omega)(\omega+a)}{b\left(\omega + a\omega^2 + \frac{a^2}{3}\omega^3\right) - z} \right]'_{\omega=0} = \\ &= -2\pi b \left( \frac{a^2+1}{z} + \frac{ab}{z^2} \right) = \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2}. \end{aligned}$$

Получаем систему

$$A_1 = -2\pi b(a^2 + 1), \quad A_2 = -2\pi b^2 a.$$

Отсюда имеем  $a = -\frac{A_2}{2\pi b^2}$  и приходим к уравнению

$$2\pi b^3 A_1 + A_2^2 = -4\pi^2 b^4.$$

В данном случае прямая задача для градиента потенциала состоит в следующем: по известным  $a$  и  $b$  найти  $A_1$  и  $A_2$ . Обратная задача состоит в нахождении  $a$  и  $b$  по известным  $A_1$  и  $A_2$ .

Исследуем вопрос о числе положительных решений уравнения  $2\pi b^3 A_1 + A_2^2 = -4\pi^2 b^4$  при известных  $A_1, A_2 < 0$ . Введем функцию  $g(b) = b^4 - cb^3 + d$ , где

$$c = -\frac{A_1}{2\pi} > 0, \quad d = \left(\frac{A_2}{2\pi}\right)^2.$$

Ветви графика функции  $g(b)$  направлены вверх, точка  $b_1 = 3c/4$  является точкой минимума,  $b_2 = 0$  и  $b_3 = c/2$  — точки перегиба. Вывод: исследуемое уравнение относительно  $b$  не имеет положительных корней, если  $g(3c/4) > 0$ , имеет один положительный корень при  $g(3c/4) = 0$  и имеет два положительных корня при  $g(3c/4) < 0$ .

Возвращаясь к коэффициентам  $A_1$  и  $A_2$ , получим

- а) при  $4\pi^2 A_2^2 > (27/256)A_1^4$  обратная задача не имеет решений;
- б) при  $4\pi^2 A_2^2 = (27/256)A_1^4$  обратная задача имеет одно решение;
- с) при  $4\pi^2 A_2^2 < (27/256)A_1^4$  обратная задача имеет два различных решения.

Получим два звездообразных решения обратной задачи для  $A_1$  и  $A_2$ , которые соответствуют значениям  $b_1 = 2, b_2 = 3$ . Величины  $A_1, A_2$  найдем из системы

$$\begin{aligned} 2\pi 8A_1 + A_2^2 &= -4\pi^2 16, \\ 2\pi 27A_1 + A_2^2 &= -4\pi^2 81 \end{aligned} \Rightarrow A_1 = -2\pi \frac{65}{19}, \quad A_2 = -2\pi \sqrt{\frac{8 \cdot 27}{19}}.$$

Далее по  $b_1 = 2$  находим  $a_1 = 3\sqrt{3}/\sqrt{38}$  и по  $b_2 = 3$  находим  $a_2 = 2\sqrt{2}/\sqrt{57}$ . Пары  $(a_k, b_k)$ ,  $k = 1, 2$ , порождают решения  $f_1(\zeta) = 2 \int_0^\zeta \left(1 + \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{38}}\zeta\right)^2 d\zeta$  и  $f_2(\zeta) = 3 \int_0^\zeta \left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{57}}\zeta\right)^2 d\zeta$ .

Эти решения звездообразны, так как  $a_1, a_2 < \sqrt{5/7}$ .

**2. Условия, при которых внутренний градиент тождественно равен нулю.** В книге Дэвиса [16] доказана формула для аналитической линии  $L$ ,  $|dt| = \sqrt{S'(t)}dt$ ,  $t \in L$ , в которой  $S(t)$  является функцией Шварца, причем  $L : \bar{t} = S(t)$ . Формула для  $|dt|$  ( $d\bar{t} = S'(t)dt \Rightarrow |dt|^2 = S'(t)(dt)^2 \Rightarrow |dt| = \sqrt{S'(t)}dt$ ) дает возможность записать градиент потенциала простого слоя в виде интеграла типа Коши

$$u(z) = \int_L \frac{|dt|}{t-z} = \int_L \frac{\sqrt{S'(t)}dt}{t-z}.$$

Используем известные формулы в случае замкнутых аналитических линий  $L$  и гёльдеровских функций  $\sqrt{S'(t)}$ . Именно,

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{2\pi i \sqrt{S'(t)}dt}{t-z}, \quad D^+ \cup L \cup D^- = \mathbf{C}, \quad \infty \in D^-.$$

В силу формул Сохоцкого предельные значения  $u^\pm$  функции  $u$  из областей  $D^\pm$  на контуре  $L$  удовлетворяют условию

$$u^+(t) - u^-(t) = 2\pi i \sqrt{S'(t)}. \quad (3)$$

Справедлива

**Теорема 1.** *В случае аналитического контура  $L$  с функцией Шварца  $S(z)$  внутренний градиент  $u^+(z) \equiv 0$  тогда и только тогда, когда  $\sqrt{S'(z)}$  будет функцией, регулярной в области  $D^-$  с нулем целого порядка в бесконечно удаленной точке.*

Для доказательства учтем, что из формулы (3) получаются такие эквивалентные переходы  $u^+(z) \equiv 0 \Leftrightarrow u^+(t) \equiv 0 \Leftrightarrow -u^-(t) = 2\pi i \sqrt{S'(t)} \Leftrightarrow \sqrt{S'(z)} = F^-(z)$  — функция, регулярная в области  $D^-$ . Кроме того, функция  $F^-(z)$  представлена интегралом типа Коши и поэтому имеет на бесконечности нуль целого порядка, большего или равного единице.

**Пример 1.** Для окружности  $|t| = R$  имеем  $\bar{t} = R^2/t = S(t)$  и

$$Rd\theta = |dt| = \sqrt{S'(t)}Re^{i\theta}id\theta = i\sqrt{S'(t)}td\theta \Rightarrow \sqrt{S'(t)} = -i\frac{R}{t}$$

— граничное значение функции  $-iR/z$ , регулярной в области  $|z| > 1$ . Поэтому  $u^+(z) \equiv 0$ .

К такому же результату можно прийти непосредственным вычислением интеграла через вычеты.

**Пример 2.** Для эллипса  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  имеем

$$\bar{t} = S(t) = \left[ (a^2 + b^2)t - 2ab\sqrt{t^2 - c^2} \right] / c^2.$$

Тогда  $S'(t) = \left[ (a^2 + b^2) - \frac{2abt}{\sqrt{t^2 - c^2}} \right] / c^2$  и

$$|dt| = \left[ (a^2 + b^2) - \frac{2abt}{\sqrt{t^2 - c^2}} \right]^{1/2} \frac{dt}{c}. \quad (4)$$

Другим путем формула (4) получена в книге Ю.В. Обносова ([17], с. 18, (1.8)).

Функция  $S'(z)$  обращается в нуль в двух вещественных точках:  $\pm(a^2 + b^2)/c$ , расположенных вне эллипса. Проверим это:

$$S'(z) = 0 \Rightarrow (z^2 - c^2)(a^2 + b^2)^2 = 4a^2b^2z^2, \quad z^2c^4 = (a^2 + b^2)^2, \quad z^2 = (a^2 + b^2)^2/c^2;$$

$$3a^2b^2 + b^4 > 0 \Rightarrow (a^2 + b^2)^2 > a^2c^2.$$

Следовательно, точки  $\pm(a^2 + b^2)/c$  будут точками ветвления функции  $\sqrt{S'(z)}$ , и поэтому она не может быть регулярной функцией вне эллипса. Значит, обращение в тождественный нуль  $u^+(z)$  для любого эллипса невозможно.

Покажем, как выглядит градиент потенциала простого слоя эллипса, который мало отличается от окружности. Рассмотрим эллипс с уравнением

$$\frac{x^2}{(1 + \varepsilon)^2} + \frac{y^2}{(1 - \varepsilon)^2} = 1.$$

Так как  $c^2 = (1 + \varepsilon)^2 - (1 - \varepsilon)^2 = 4\varepsilon$ , то его фокусы находятся в точках  $\pm 2\sqrt{\varepsilon}$ , точка на эллипсе

$$\tau = (1 + \varepsilon) \cos \theta + i(1 - \varepsilon) \sin \theta \Rightarrow |d\tau| = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon \cos 2\theta} d\theta.$$

Обозначая градиент потенциала простого слоя для данного эллипса через  $u(\varepsilon, z)$ , получим

$$u(\varepsilon, z) = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon \cos 2\theta} d\theta}{(1 + \varepsilon) \cos \theta + i(1 - \varepsilon) \sin \theta - z}. \quad (5)$$

Если  $e^{i\theta} = t$ , то

$$d\theta = \frac{dt}{it}, \quad \cos 2\theta = \frac{t^4 + 1}{2t^2}, \quad 1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon \cos 2\theta = -\varepsilon \frac{t^4 + 1}{t^2} + 1 + \varepsilon^2 = \frac{(t^2 - \varepsilon)(1 - \varepsilon t^2)}{t^2}.$$

Подставляя все в (5), имеем

$$u(\varepsilon, z) = \frac{1}{i} \int_{|t|=1} \frac{\sqrt{(t^2 - \varepsilon)(1 - \varepsilon t^2)} dt}{(t^2 + 1)(1 + \varepsilon) + (t^2 - 1)(1 - \varepsilon) - 2tz} \frac{2t}{t^2} = \frac{1}{i} \int_{|t|=1} \frac{\sqrt{(t^2 - \varepsilon)(1 - \varepsilon t^2)} dt}{t(t - z) + \varepsilon} \frac{dt}{t}.$$

Разложим функцию

$$F(\varepsilon; t, z) = \frac{\sqrt{(t^2 - \varepsilon)(1 - \varepsilon t^2)}}{t[t(t - z) + \varepsilon]}$$

в ряд по степеням  $\varepsilon$ :  $F(\varepsilon; t, z) = F(0; t, z) + \varepsilon F'_\varepsilon(0; t, z) + \frac{\varepsilon^2}{2} F''_{\varepsilon\varepsilon}(0; t, z) + \dots$ . Этот ряд сходится при

$$\varepsilon < \min_{t, z} \left( |t|^2, \frac{1}{|t|^2}, \frac{1}{|t(t - z)|} \right).$$

С помощью теорем о вычетах найдем

$$u^+(\varepsilon, z) = -\pi z \varepsilon - \frac{\pi z^3}{2} \varepsilon^2 + \dots, \quad z \in D^+,$$

$$u^-(\varepsilon, z) = -\frac{2\pi}{z} - \frac{3\pi}{z^3} \varepsilon + \dots, \quad z \in D^-.$$

Кроме эллипса, можно отметить еще множество замкнутых аналитических линий  $L$ , для которых  $u^+(z) \neq 0$ . Эти линии характеризуются такими функциями Шварца  $S(z)$ , которые имеют изолированные точки ветвления в области  $D^-$ , причем  $S(D^-)$  — конечнолистная риманова поверхность. Тогда у  $\sqrt{S'(z)}$  точки ветвления перейдут от  $S(z)$  и возможно добавятся новые точки ветвления в  $D^-$ . Поэтому  $\sqrt{S'(z)}$  не может быть регулярной функцией в  $D^- \Rightarrow u^+(z) \neq 0$ .

Остается проанализировать вариант, когда у  $S(z)$  в области  $D^-$  нет точек ветвления, но имеются нули у  $S'(z)$  с поведением  $S'(z) = (z - a)^n f_a(z)$ ,  $f_a(a) \neq 0$ , около точки  $a$ . При нечетном  $n = 2m + 1$  у функции  $\sqrt{S'(z)}$  будет точка ветвления, значит,  $\sqrt{S'(z)}$  не будет регулярной функцией и  $u^+(z) \neq 0$ .

Если же  $n = 2m$ , то  $a$  не будет точкой ветвления для  $\sqrt{S'(z)}$ . Примеры потенциалов с такими  $n$  авторами пока не построены.

В заключение отметим, что два нуля у  $S'(z)$  для эллипса имеют порядок  $n = 1$ , так как

$$S''\left(\frac{a^2 + b^2}{c}\right) = c^5/4a^2b^2 \neq 0.$$

**3. Случай неоднолистной области  $D$ , приводящей к  $u^+(z) \equiv 0$ .** Исследуем вопрос о равенстве  $u^+(z) \equiv 0$  для класса функций, рассмотренных И.М. Рапо-портом. Среди линий  $L$  с уравнением

$$t = f(\tau) = \int_0^\tau P_n^2(\omega) d\omega, \quad \tau = e^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad (6)$$

где  $P_n(\zeta) = a_n \zeta^n + \dots + a_1 \zeta + a_0$ , найдем те, для которых

$$u^+(z) = \int_L \frac{|dt|}{t - z} \equiv 0 \quad (7)$$

при  $z \in D^+$ ,  $\partial D^+ = L$ . Неоднолистную функцию нельзя назвать решением обратной задачи, но можно считать неоднолистным расширением формулы (6).

Так как

$$\frac{1}{t - z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{t^{k+1}},$$

причем этот ряд сходится при всех  $t \in L$  в круге  $|z| < \varepsilon$  при достаточно малом  $\varepsilon$ , то равенство (7) будет выполнено, если окажутся нулями все интегралы  $J_k = \int_L \frac{|dt|}{t^{k+1}}$ ,  $k = 0, 1, \dots$

В случае функций (6) эти интегралы запишутся в виде

$$\begin{aligned} J_k &= \frac{1}{i} \int_{|\tau|=1} \frac{|P_n(\tau)|^2 d\tau}{\left(\int_0^\tau P_n^2(\omega) d\omega\right)^{k+1}} = \left\{ \overline{P_n(\tau)} = \bar{a}_n \bar{\tau}^n + \bar{a}_{n-1} \bar{\tau}^{n-1} + \dots + \bar{a}_1 \bar{\tau} + \bar{a}_0 = \tau^{-n} \tilde{P}_n(\tau), \right. \\ &\quad \left. \tilde{P}_n(\tau) = \bar{a}_n + \dots + \bar{a}_1 \tau^{n-1} + \bar{a}_0 \tau^n \right\} = \frac{1}{i} \int_{|\tau|=1} \frac{P_n(\tau) \tilde{P}_n(\tau) d\tau}{(\tau Q_{2n}(\tau))^{k+1} \tau^n} = \\ &= -2\pi \text{выч}_\infty \frac{P_n(\zeta) \tilde{P}_n(\zeta)}{Q_{2n}^{k+1}(\zeta) \zeta^{n+k+1}} = 0, \end{aligned}$$

если все нули полинома  $Q_{2n}(\zeta)$  степени  $2n$  расположены в круге  $|\zeta| < 1$ . Так как в круге  $|\zeta| < 1$  у функции  $f(\zeta) = \zeta Q_{2n}(\zeta)$  находится не менее трех нулей ( $1 + 2n \geq 3$  при  $n \geq 1$ ), то функция  $f(\zeta)$  будет не менее чем трехлистной. Поэтому образ круга  $|\zeta| < 1$  под действием  $f(\zeta)$  будет неоднолистной областью, ее граница окажется кривой с самопересечениями.

Авторами пока не найдены линии  $L$  без самопересечений, которые решают поставленный вопрос о  $u^+(z) \equiv 0$ .

**4. Новый вывод интегрального уравнения для градиента потенциала простого слоя.** Дадим вывод уравнения А.А. Михеевой, более прозрачный, чем в статье [11].

Пусть  $z = z(t)$  — функция, отображающая круг  $E = \{|t| < 1\}$  на область  $D$ ,  $\partial D = L$ . Предполагаем, что  $z(0) = 0$ ,  $z'(0) = c_1 > 0$ . Обозначим  $z(\tau) = \zeta$ ,  $z(\tilde{\tau}) = \tilde{\zeta}$  для  $\tau, \tilde{\tau} \in \partial E = \Gamma$ .



Градиент потенциала простого слоя с постоянной плотностью  $\nu$  представим в виде интеграла типа Коши

$$u^\pm(z) = \int_L \frac{\nu |d\tilde{\zeta}|}{\tilde{\zeta} - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{2\pi i \nu \left( |d\tilde{\zeta}|/d\tilde{\zeta} \right) d\tilde{\zeta}}{\tilde{\zeta} - z}$$

при  $z \in D^\pm$ .

Запишем известную формулу для разности граничных значений интеграла типа Коши

$$u^+(\zeta) - u^-(\zeta) = 2\pi i \nu \frac{|d\zeta|}{d\zeta} \Rightarrow u^+(\zeta)d\zeta - u^-(\zeta)d\zeta = 2\pi i \nu |d\zeta|.$$

Перейдем от  $\zeta \in L$  к  $\tau \in \Gamma$  по формуле  $\zeta = z(\tau)$ ,  $\tau = e^{i\theta}$ . Умножаем полученное равенство в форме

$$u^+(z(\tau))z'(\tau)d\tau - u^-(z(\tau))z'(\tau)d\tau = 2\pi i \nu |z'(\tau)||d\tau|$$

на  $\frac{1}{2\pi i} \frac{\tau}{\tau-t} (\sqrt{z'(0)} = \sqrt{c_1})$  и интегрируем по  $\Gamma$ . Получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{u^+(z(\tau))\tau\sqrt{z'(\tau)}d\tau}{\tau-t} - \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{u^-(z(\tau))\tau\sqrt{z'(\tau)}d\tau}{\tau-t} = \int_\Gamma \frac{\nu\sqrt{z'(\tau)}\tau|d\tau|}{\tau-t}.$$

Если  $|t| > 1$ , то первый интеграл в левой части последнего равенства будет равен нулю по теореме Коши.

Введем обозначение  $h(t) = z'(1/\bar{t})$ . Тогда интеграл в правой части легко выразить через вычеты, если ввести функцию  $\sqrt{h(t)}$ , регулярную при  $|t| > 1$ , причем  $\sqrt{h(t)}|_{t=\infty} = \sqrt{c_1}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \frac{\sqrt{z'(\tau)}\tau|d\tau|}{\tau-t} &= \frac{1}{i} \int_\Gamma \frac{\sqrt{h(\tau)}d\tau}{\tau-t} = -2\pi \left[ \text{выч}_t \frac{\sqrt{h(\omega)}}{\omega-t} + \text{выч}_\infty \frac{\sqrt{h(\omega)}}{\omega-t} \right] = \\ &= -2\pi \left( \sqrt{h(t)} - \sqrt{c_1} \right). \end{aligned}$$

После этой процедуры интегральное уравнение приобретает вид

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{u^-(z(\tau))\tau\sqrt{z'(\tau)}d\tau}{\tau-t} = 2\pi \nu \left( \sqrt{h(t)} - \sqrt{c_1} \right). \quad (8)$$

Полученное уравнение несущественно (постоянным множителем в правой части) отличается от уравнения А.А. Михеевой [11].

**5. Дополнения к результатам А.А. Михеевой.** Уравнение (8) используем для доказательства результата А.А. Михеевой [11], дополненного следствием.

**Теорема 2.** Если  $u^-(z)$  является полиномом степени  $n+1$  от  $1/z$  и решение обратной задачи существует, то это решение имеет вид  $L = z(\partial D)$ ,  $\partial E = \{e^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$  с функцией  $z = \int_0^\zeta P_n^2(\omega)d\omega$ , где  $P_n(\zeta)$  — полином степени  $n$  от  $\zeta$ .

Наоборот, если функция, отображающая круг  $E = \{\zeta : |\zeta| < 1\}$  на область  $D$ , имеет указанный вид с полиномом  $P_n(\zeta)$ , то  $u^-(z)$  в виде (1) с  $L = \partial D$  является полиномом степени  $n+1$  от  $1/z$ .

*Доказательство.* Первое утверждение теоремы доказывается подстановкой в формулу (8) выражения

$$u^-[z(\zeta)] = \frac{A_1}{z(\zeta)} + \dots + \frac{A_{n+1}}{z(\zeta)^{n+1}}.$$

Функция  $F(\zeta) = u^-[z(\zeta)]\zeta\sqrt{z'(\zeta)}/(\zeta - t)$  при  $|t| > 1$  будет иметь в круге  $E$  полюс порядка  $n$  в нуле. Поэтому

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial E} F(\tau) d\tau = \frac{1}{(n-1)!} [F(\zeta)\zeta^n]^{(n-1)}|_{\zeta=0} = \frac{\tilde{a}_1}{t} + \dots + \frac{\tilde{a}_n}{t^n}.$$

Из формулы (8) выразим

$$\sqrt{h(t)} = \sqrt{c_1} + \frac{a_1}{t} + \dots + \frac{a_n}{t^n}, \quad a_k = \frac{\tilde{a}_k}{2\pi\nu}, \quad k = \overline{1, n}.$$

После этого получим

$$z'(\zeta) = (\sqrt{c_1} + \bar{a}_1\zeta + \dots + \bar{a}_n\zeta^n)^2 = P_n^2(\zeta)$$

и, окончательно,  $z = \int_0^\zeta P_n^2(\omega) d\omega$ . Второе утверждение теоремы 2 доказано в пункте 1 данной статьи.  $\square$

**Следствие.** Если  $z'(\zeta)$  не представляется в виде квадрата многочлена, то градиент потенциала (1) не может быть многочленом по степеням  $1/z$ . Наоборот, если градиент (1) является бесконечным рядом по степеням  $1/z$ , то соответствующая отображающая функция не может иметь производную в виде квадрата многочлена.

*Доказательство* получается способом от противного с использованием теоремы 2.

**6. Связь результатов В.К. Иванова и А.А. Михеевой.** Обоснование теоремы 2 аналогично обоснованию результата В.К. Иванова [18] о полиномах в качестве решения обратной задачи для областного логарифмического потенциала. Центральным моментом в доказательстве является интегральное уравнение В.К. Иванова. Вывод этого уравнения можно дать с помощью формулы для предельных значений интеграла типа Коши (аналогично выводу уравнения (8)).

Запишем градиент областного потенциала в виде интеграла типа Коши [4]

$$u(z) = -\frac{2}{\pi} \int \int_D \frac{ds_\tau}{\tau - z} = -\frac{1}{\pi i} \int_{\partial D} \frac{\bar{\tau} d\tau}{\tau - z}.$$

Используем известную формулу, связывающую крайевые значения этого интеграла

$$u^+(\omega) - u^-(\omega) = -2\bar{\omega}, \quad \omega \in \partial D. \quad (9)$$

Перейдем от (9) к уравнению на окружности  $|t| = 1$  с помощью функции  $\omega(\tau)$ , конформно отображающей круг  $|\tau| < 1$  на область  $D \ni 0$  с нормировкой  $\omega(0) = 0$ . Граничные значения  $\omega(\tau)$  этой функции подставим в (9):

$$u^+[\omega(t)] - u^-[\omega(t)] = -2\bar{\omega}(t) = -2\overline{\omega(1/\bar{t})}.$$

Полученное равенство вставим в интегральное соотношение

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{u^+[\omega(t)] dt}{t - \tau} - \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{u^-[\omega(t)] dt}{t - \tau} = -\frac{2}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\overline{\omega(1/\bar{t})} dt}{t - \tau},$$

где  $\Gamma$  — единичная окружность  $\partial E$ , а  $\omega^{-1}(\bar{D}) = \bar{E}$ . Рассмотрим функцию  $\omega^*(t) = \overline{\omega(1/\bar{t})}$ , заданную во внешности единичного круга. Тогда по теореме Коши первый интеграл в левой

части равен нулю, а интеграл в правой части окажется равным  $\omega^*(\tau) = \overline{\omega(1/\bar{\tau})}$ , так как  $\omega^*(\infty) = \omega(0) = 0$ . Получим уравнение

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{u^-[\omega(t)]dt}{t - \tau} = 2\omega^*(\tau), \quad (10)$$

которое отличается от уравнения В.К. Иванова [18] множителем  $(-2)$ . Совпадение с уравнением в [18] будет обеспечено, если  $u(z)$  взять в форме

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{\bar{\tau}d\tau}{\tau - z}.$$

С помощью интегрального уравнения (10) В.К. Ивановым получен следующий великолепный результат.

**Теорема 3** ([19]). Пусть  $u^-(z)$  — рациональная функция, имеющая полюсы кратностей  $k_1, k_2, \dots, k_s$  ( $k_1 + \dots + k_s = n$ ) в точках  $z_1, z_2, \dots, z_s$  и для нее существует решение обратной задачи с областным логарифмическим потенциалом. Тогда для отображающей функции  $z(\zeta)$ ,  $z(E) = D$  — искомая область, справедлива формула

$$\overline{h(\zeta)} = \frac{P_{n-1}(\zeta)}{(\zeta - \zeta_1)^{k_1} \dots (\zeta - \zeta_s)^{k_s}}, \quad |\zeta| > 1, \quad (11)$$

где  $P_{n-1}(\zeta)$  — полином степени  $n - 1$ , а  $\zeta_k$  — прообразы  $z_k$  при конформном отображении  $z(\zeta)$ ,  $k = \overline{1, s}$ .

Действуя по схеме, аналогичной предложенной В.К. Ивановым в доказательстве теоремы 3, А.А. Михеева [11] получила для случая потенциала простого слоя переход

$$u^-(z) = \frac{Q_{n-1}(z)}{(z - z_1)^{n_1} \dots (z - z_n)^{n_s}} \Rightarrow \sqrt{h(t)} = \sqrt{c_1} + \frac{P_{n-1}(t)}{(t - t_1)^{n_1} \dots (t - t_n)^{n_s}}$$

с полиномами  $Q_{n-1}(z)$  и  $P_{n-1}(t)$  степени  $n - 1$ .

После этого перехода в статье [11] делается **неправильный** вывод о том, что  $z(\zeta)$  будет рациональной функцией. На самом деле, в выражении для  $z(\zeta)$  кроме рациональной части будет и логарифмическая часть. Для сохранения однозначности функции  $z(\zeta)$  нужно выполнить условие

$$\sum_{k=1}^s \text{выч}_{t_k} z'(t) = 0,$$

получающееся при интегрировании функции  $z'(\zeta)$ . Рациональность функции  $z(\zeta)$  в теореме 3 следует из формулы (11) нетрудной заменой  $1/\zeta$  на  $\omega$ . Именно

$$z(\omega) = \frac{\omega^n P_{n-1}(1/\omega)}{(1 - \bar{\zeta}_1 \omega)^{k_1} \dots (1 - \bar{\zeta}_s \omega)^{k_s}}.$$

Такую формулу для потенциала простого слоя получить нельзя.

Авторы благодарят рецензента за конструктивные замечания, учтенные в окончательном варианте статьи.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Абубакиров Н.Р., Аксентьев Л.А. *О конечных решениях обратной задачи логарифмического потенциала*, Изв. вузов. Матем., №10, 65–69 (2016).
- [2] Abubakirov N.R., Aksentev L.A. *Classes of finite solutions to the inverse problem of the logarithmic potential*, Lobachevskii J. Math., **39**, 151–160 (2018).

- [3] Абубакиров Н.Р., Аксентьев Л.А. *О прямых и обратных задачах логарифмического потенциала с конечным числом параметров*, Изв. вузов. Матем., №8, 75–82 (2018).
- [4] Abubakirov N.R., Aksentev L.A. *On Solvabilities of Schwarz Function in the Problems of Logarithmic Potential*, Lobachevskii J. Math., **40** (8), 1146–1156 (2019).
- [5] Рапопорт И.М. *Об одной задаче теории потенциала*, Укр. матем. журн., **2** (2), 48–55 (1950).
- [6] Иванов В.К. *Избранные научные труды. Математика* (Физматлит, М., 2008).
- [7] Прилепко А.И., Чередниченко В.Г. *Об одном классе обратных краевых задач для аналитических функций*, Дифференц. уравнения, **17** (10), 1900–1907 (1981).
- [8] Пономарев С.П. *О логарифмическом потенциале, определяемом кривой Ван Коза*, СМЖ, **50** (5), 1137–1147 (2009).
- [9] Жданов М.С. *Аналоги интеграла типа Коши в теории геофизических полей* (Наука, М., 1984).
- [10] Цирульский А.В. *Функции комплексного переменного в теории и методах потенциальных геофизических полей*, УрО АН СССР, Свердловск, 1990.
- [11] Михеева А.А. *Интегральное уравнение обратной задачи логарифмического потенциала простого слоя*, Учен. зап. Уральск. гос. ун-та, вып. 23, 10–14 (1960).
- [12] Иванов В.К., Чудинова А.А. *Об одном способе нахождения гармонических моментов возмущающих масс*, Изв. АН СССР, Физика Земли, №3, 55–62 (1966).
- [13] Чудинова А.А. *Обратная задача потенциала простого слоя для тела, близкого данному*, Изв. вузов. Матем., №5, 140–150 (1965).
- [14] Чудинова А.А. *Обратная задача электроразведки*, Изв. вузов. Матем., №6, 150–155 (1965).
- [15] Голузин Г.М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного* (Наука, М., 1966).
- [16] Davis Ph.J. *The Schwarz function and its applications*, Carus Math. Monographs, №17 (1974).
- [17] Обносов Ю.В. *Краевые задачи теории гетерогенных сред* (Казань, 2009).
- [18] Иванов В.К. *Интегральное уравнение обратной задачи логарифмического потенциала*, ДАН СССР, **105** (3), 409–411 (1955).
- [19] Иванов В.К. *О разрешимости обратной задачи логарифмического потенциала в конечном виде*, ДАН СССР, **106** (4), 598–599 (1956).

Наиль Ренатович Абубакиров

Казанский федеральный университет,  
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,  
e-mail: nail.abubakirov@kpfu.ru

Леонид Александрович Аксентьев

Казанский федеральный университет,  
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,  
e-mail: laksente@gmail.com

N.R. Abubakirov and L.A. Aksent'ev

### Direct and inverse problems for the simple layer logarithmic potential

*Abstract.* With the help of Cauchy-type integrals, a new derivation of integral equations for solving logarithmic potential problems is given. The inverse problem is analyzed with two star-shaped solutions containing a smaller number of parameters than in the more difficult similar examples of I.M. Rapoport. The criterion of conversion to the identical constant of the internal potential of a simple layer is proved.

*Keywords:* logarithmic potential of a simple layer, convexity and star-like conditions, Cauchy-type integral.

Nail' Renatovich Abubakirov

Kazan Federal University,  
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,  
e-mail: nail.abubakirov@kpfu.ru

*Leonid Aleksandrovich Aksent'ev*

*Kazan Federal University,  
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,*

e-mail: laksente@gmail.com