

УДК 519.116

## ОБ ИДЕАЛЬНЫХ И СОВЕРШЕННЫХ РАЗБИЕНИЯХ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

**КИНДЕР М.И.**

*ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет», Казань, Россия (420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18.), e-mail: [mkinder@rambler.ru](mailto:mkinder@rambler.ru)*



Разбиение натурального числа называется идеальным, если каждое меньшее число можно единственным образом представить в виде линейной комбинации частей этого разбиения с коэффициентами  $-1$ ,  $0$  или  $1$ . Указанное разбиение связано с известной задачей о взвешивании с помощью набора гирь, которые можно ставить на обе чашки весов. В статье предлагается простое доказательство вычислительных рекуррентных формул, связанных с подсчётом количества упорядоченных факторизаций натурального числа. С помощью аппарата производящих функций удастся получить простое доказательство явной формулы МакМагона для подсчёта упорядоченных факторизаций натуральных чисел, а также некоторые новые соотношения в случае, когда канонические разложения чисел не содержат квадратов простых множителей. Для натуральных чисел, в разложении которых каждый простой множитель входит только один раз, установлена связь количества упорядоченных факторизаций с экспоненциальными числами Белла и Стирлинга второго рода.

Ключевые слова: совершенное разбиение числа, идеальное разбиение числа, упорядоченная факторизация, числа Белла и числа Стирлинга второго рода.

## ON SUB-PERFECT AND PERFECT PARTITIONS OF INTEGERS

**KINDER M.I.**

*Kazan (Volga region) Federal University, Kazan, Russia (420008, Kazan, Kremlin street, 18.), e-mail: [mkinder@rambler.ru](mailto:mkinder@rambler.ru)*

A perfect partition of a natural number is one which contains one, and only one, partition of every lower number. A sub-perfect partition of a number is such that, taking its parts positively or negatively, it is possible to compose in only one manner every lower number. Our results include explicit enumeration formulas and some combinatorial identities. The purpose of the research is to give a simple proof recurrence relations that count the number of ordered factorizations of natural numbers. Using the method of generating functions, we obtain a simple proof of an explicit formula for calculating McMahon ordered factorizations of natural numbers, and some new recurrence relations when these numbers have only two prime factors. For such natural numbers we found the relationship between the number of ordered factorizations and exponential Bell numbers and Stirling numbers of the second kind.

Keywords: perfect partition of integers, sub-perfect partition of integers, ordered factorization, Bell numbers and Stirling numbers of the second kind.

**ВВЕДЕНИЕ.** Всякое представление натурального числа суммой натуральных чисел называется разбиением числа. Разбиения изучаются в задачах, прежде всего, комбинаторного и теоретико-числового характера. К классическим комбинаторным относятся задачи подсчета и перечисления разбиений данного типа, в теории чисел решают проблемы об аддитивных представлениях чисел с арифметическими ограничениями на слагаемые. В этой статье мы изучаем вопросы, связанные с подсчетом числа так называемых *совершенных* и *идеальных разбиений* натурального числа, устанавливаем новые рекуррентные соотношения для подсчета числа таких разбиений для чисел специального вида.