Симплекс метод решения задач линейного программирования: типичный пример и алгоритм

Понятие и алгоритм симплекс метода

Симплекс метод - это метод последовательного перехода от одного базисного решения (вершины многогранника решений) системы ограничений задачи линейного программирования к другому базисному решению до тех пор, пока функция цели не примет оптимального значения (максимума или минимума).

Симплекс-метод является универсальным методом, которым можно решить любую **задачу линейного программирования**, в то время, как графический метод пригоден лишь для системы ограничений с двумя переменными.

Симплекс метод был предложен американским математиком Р.Данцигом в 1947 году, с тех пор для нужд промышленности этим методом нередко решаются задачи линейного программирования с тысячами переменных и ограничений.

Перед тем, как перейти к алгоритму симплекс метода, несколько определений.

Всякое неотрицательное решение системы ограничений называется ***допустимым решением***.

Пусть имеется система m ограничений с n переменными ($m < n$).

Допустимым базисным решением является решение, содержащее m неотрицательных ***основных*** (***базисных***) переменных и n - m ***неосновных***. (небазисных, или ***свободных***) переменных. Неосновные переменные в базисном решении равны нулю, основные же переменные, как правило, отличны от нуля, то есть являются положительными числами.

Любые m переменных системы m линейных уравнений с n переменными называются ***основными***, если определитель из коэффициентов при них отличен от нуля. Тогда остальные n - m переменных называются ***неосновными*** (или ***свободными***).

Алгоритм симплекс метода

- **Шаг 1**. Привести задачу линейного программирования к канонической форме. Для этого перенести свободные члены в правые части (если среди этих свободных членов окажутся отрицательные, то соответствующее уравнение или неравенство умножить на - 1) и в каждое ограничение ввести дополнительные переменные (со знаком "плюс", если в исходном неравенстве знак "меньше или равно", и со знаком "минус", если "больше или равно").
- **Шаг 2**. Если в полученной системе m уравнений, то m переменных принять за основные, выразить основные переменные через неосновные и найти соответствующее базисное решение. Если найденное базисное решение окажется допустимым, перейти к допустимому базисному решению.
- **Шаг 3**. Выразить функцию цели через неосновные переменные допустимого базисного решения. Если отыскивается максимум (минимум) линейной формы и в её выражении нет неосновных переменных с отрицательными (положительными) коэффициентами, то критерий оптимальности выполнен и полученное базисное решение является оптимальным - решение окончено. Если при нахождении максимума (минимума) линейной формы в её выражении имеется одна или несколько неосновных переменных с отрицательными (положительными) коэффициентами, перейти к новому базисному решению.
- **Шаг 4**. Из неосновных переменных, входящих в линейную форму с отрицательными (положительными) коэффициентами, выбирают ту, которой соответствует наибольший (по модулю) коэффициент, и переводят её в основные. Переход к шагу 2.

Важные условия

- Если допустимое базисное решение даёт оптимум линейной формы (критерий оптимальности выполнен), а в выражении линейной формы через неосновные переменные отсутствует хотя бы одна из них, то полученное оптимальное решение - не единственное.
- Если в выражении линейной формы имеется неосновная переменная с отрицательным коэффициентом в случае её максимизации (с положительным - в случае минимизации), а во все уравнения системы ограничений этого шага указанная переменная входит также с отрицательными коэффициентами или отсутствует, то линейная форма не ограничена при данной системе ограничений. В этом случае её максимальное (минимальное) значение

записывают в виде $F_{max} = \infty \quad (F_{min} = -\infty)$.

Далее разберём всё же типичный пример, когда система ограничений является совместной и имеется конечный оптимум, причём единственный.

Симплекс метод с симплексными таблицами

Путём построения симплексных таблиц решить задачу линейного программирования намного проще, чем путём алгебраических преобразований, который показан в следующем параграфе. Симплексные таблицы очень наглядны. Существует несколько разновидностей правил работы с симплексными таблицами. Мы разберём правило, которое чаще всего называется правилом ведущего столбца и ведущей строки.

Пример. Найти максимум функции $F = x_1 + 2x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ x_1 + \quad x_2 \geq 4 \\ x_1 - \quad x_2 \leq 2 \\ \qquad\quad x_2 \leq 6 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, \quad x_2 \leq 0$

Решение.

Вводим добавочные неотрицательные переменные x_3, x_4, x_5, x_6 и сводим данную систему неравенств к эквивалентной ей системе уравнений

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 + x_5 = 2 \\ x_2 + x_6 = 6 \end{cases}$$

$x_j \geq 0 \quad (j = 1,\ 2, \ldots,\ 6)$.

Это было сделано с соблюдением следующего правила: если в первоначальном ограничении знак "меньше или равно", то добавочную переменную нужно прибавлять, а если "больше или равно", то добавочную переменную нужно отнимать.

Введённые добавочные переменные принимаем за основные (базисные). Тогда x_1 и x_2 - неосновные (свободные) переменные.

Выразив основные (базисные) переменные через неосновные (свободные), получим

$$\begin{cases} x_3 = -2 - (x_1 - 2x_2) \\ x_4 = -4 - (-x_1 - x_2) \\ x_5 = 2 - (x_1 - x_2) \\ x_6 = 6 - (x_2) \end{cases}$$

Функцию цели также выразим через неосновные (свободные) переменные:

$$F = 0 - (-x_1 - 2x_2)$$

Из коэффициентов при переменных (неизвестных) построим первую симплексную таблицу.

Таблица 1				
Базисные неизвестные	Свободные члены	Свободные неизвестные		Вспомогательные коэффициенты
		X1	X2	
X3	-2	1	-2	
X4	-4	-1	-1	
X5	2	1	-1	
X6	6	0	1	
F	0	-1	-2	

Последнюю строку таблицы, в которой записаны функция цели и коэффициенты при свободных переменных в ней, будем называть в индексной строкой.

Полученное решение не оптимально, так как в индексной строке коэффициенты при свободных переменных отрицательны. То есть оптимальным будет то решение, в котором коэффициенты при свободных переменных в индексной строке будут больше или равны нулю.

Для перехода к следующей таблице найдём наибольшее (по модулю) из чисел $|-1|$ и $|-2|$. Это число 2. Поэтому ведущий столбец - тот столбец, в котором записано x_2

Для определения ведущей строки находим минимум отношений свободных членов к элементам ведущего столбца, причём если в числителе положительное число, а в знаменателе отрицательное, отношение считается равным бесконечности.

Итак,

$$\min\{2,\ 4,\ \infty,\ 6\} = 2.$$

Поэтому ведущая строка - та, в которой записано x_3

Ведущим элементом, таким образом, является -2.

Составляем вторую симплексную таблицу.

Новый базисный элемент x_2 вписываем первой строкой, а столбец, в котором стояло x_2, вписываем новую свободную переменную x_3

Заполняем первую строку. Для этого все числа, стоящие в ведущей строке таблицы 1, делим на ведущий элемент и записываем в соответствующий столбец первой строки таблицы 2, кроме числа, стоящего в ведущем столбце, куда записывается величина, обратная ведущему элементу (то есть, единица, делённая на ведущий элемент).

Заполняем столбец вспомогательных коэффициентов. Для этого числа ведущего столбца таблицы 1, кроме ведущего элемента, записываем с противоположными знаками в графу вспомогательных коэффициентов таблицы 2.

Таблица 2

Базисные неизвестные	Свободные члены	Свободные неизвестные		Вспомогательные коэффициенты
		X1	X3	
X2	1	-1/2	-1/2	
X4	-3	-3/2	-1/2	1
X5	3	1/2	-1/2	1
X6	5	1/2	1/2	-1
F	2	-2	-1	2

Для получения остальных строк таблицы 2 числа, уже стоящие в первой строке этой таблицы, умножаем на вспомогательный коэффициент, стоящий в заполняемой строке, и к результату прибавляем число из таблицы 1, стоящее в той же строке при соответствующей переменной.

Например, для получения свободного члена второй строки число 1 умножаем на 1 и прибавляем из таблицы 1 число -4. Получаем -3. Коэффициент при x_1 во второй строке находим так же: $-\frac{1}{2}\bullet 1-1=-\frac{3}{2}$. Так как в предыдущей таблице отсутствует столбец с новой свободной переменной x_3, то коэффициент второй строки в столбце новой свободной переменной x_3 будет $-\frac{1}{2}\bullet 1+0=-\frac{1}{2}$ (то есть из таблицы 1 прибавляем 0, так как в таблице 1 столбец с x_3 отсутствует).

Так же заполняется и индексная строка:

$$1\bullet 2+0=2$$

$$-\frac{1}{2}\bullet 2-1=-2$$

$$-\frac{1}{2}\bullet 2+0=-1.$$

Полученное таким образом решение вновь не оптимально, так как в индексной строке коэффициенты при свободных переменных вновь отрицательны.

Для перехода к следующей симплексной таблице найдём наибольшее (по модулю) из чисел $|-2|$ и $|-1|$, то есть, модулей коэффициентов в индексной строке. Это число 2. Поэтому ведущий столбец - тот столбец, в котором записано x_1.

Для поиска ведущей строки найдём минимум отношений свободных членов к элементам ведущей строки. Получаем:

$$\min\{\infty,\ 2,\ 6,\ 10\} = 2.$$

Следовательно, ведущая строка - та, в которой записано x_4, а ведущим элементом является -3/2.

Составляем третью симплексную таблицу

Новую базисную переменную x_1 записываем первой строкой. В столбец, в котором было x_1, вписываем новую свободную переменную x_4.

Первая строка:

$$-3:\left(-\frac{3}{2}\right) = 2$$

$$1:\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{2}{3}$$

$$-\frac{2}{2}:\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{3}.$$

Вспомогательные коэффициенты:

$$\frac{1}{2};\ -\frac{1}{2};\ -\frac{1}{2};\ 2$$

Таблица 3				
Базисные неизвестные	Свободные члены	Свободные неизвестные		Вспомогательные коэффициенты
		X4	X3	
X1	2	-2/3	1/3	
X2	2	-1/3	-1/3	1/2
X5	2	1/3	-2/3	-1/2
X6	4	1/3	1/3	-1/2
F	6	-4/3	-1/3	2

Вычисление остальных строк на примере второй строки:

$$2 \bullet \frac{1}{2} + 1 = 2$$

$$-\frac{2}{3} \bullet \frac{1}{2} + 0 = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} \bullet \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}.$$

Полученное решение вновь не оптимальное, поскольку коэффициенты при свободных неизвестных в индексной строке вновь отрицательные.

Для перехода к четвёртой симплексной таблице найдём наибольшее из чисел $\left|-\frac{4}{3}\right|$ и $\left|-\frac{1}{3}\right|$. Это число $\frac{4}{3}$.

Следовательно, ведущий столбец - тот, в котором записано x_4.

Для нахождения ведущей строки найдём минимум модулей отношений свободных членов к элементам ведущего столбца:

$$\min\{\infty,\ \infty,\ 6,\ 12\} = 6.$$

Поэтому ведущая строка - та, в которой записано x_5, а ведущий элемент 1/3.

В четвёртой симплексной таблице новую базисную переменную x_4 записываем первой строкой. В столбец, где было x_4, записываем новую свободную переменную x_5.

Первая строка:

$$2 : \frac{1}{3} = 6$$

$$1 : \frac{1}{3} = 3$$

$$-\frac{2}{3} : \frac{1}{3} = -2.$$

Вспомогательные коэффициенты:

$$\frac{2}{3};\ \frac{1}{3};\ -\frac{1}{3};\ \frac{4}{3}.$$

Таблица 4				
Базисные неизвестные	Свободные члены	Свободные неизвестные		Вспомогательные коэффициенты
		X5	X3	
X4	6	3	-2	
X1	6	2	-1	2/3

X2	4	1	-1	1/3
X6	2	-1	1	-1/3
F	14	4	-3	4/3

Вычисление остальных строк на примере второй строки:

$$6 \bullet \frac{2}{3} + 2 = 6$$

$$3 \bullet \frac{2}{3} + 0 = 2$$

$$-2 \bullet \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = -1.$$

Полученное решение так же не оптимально, но оно уже лучше предыдущих, так как один из коэффициентов при свободных переменных в индексной строке неотрицателено.

Для улучшения плана перейдём к следующей симплексной таблице.

Найдём наибольшее из чисел 4 и $|-3|$. Это число 4. Следовательно, ведущий столбец x_5.

Для нахождения ведущей строки найдём

$$\min\{2,\ 3,\ 4,\ \infty\} = 2.$$

Следовательно, ведущая строка - та, в которой записано x_4. Но x_3 и x_4 уже были вместе среди свободных переменных. Поэтому для перевода очередной переменной из свободных в базисные выбираем другой ведущий столбец - тот, в котором записано x_3.

$$\min\{\infty,\ \infty,\ \infty,\ 2\} = 2.$$

Следовательно, ключевая строка - та, в которой записано x_6, а ведущий элемент 1.

В пятой симплексной таблице новую базисную переменную x_3 записываем первой строкой. В столбец, где было x_3, записываем новую свободную переменную x_6.

Первая строка:

$$\frac{2}{1} = 2$$

$$-\frac{1}{1} = -1$$

$$\frac{1}{1} = 1.$$

Вспомогательные коэффициенты:

$2;\ 1;\ 1;\ 3.$

Таблица 5				
Базисные неизвестные	Свободные члены	Свободные неизвестные		Вспомогательные коэффициенты
		X5	X6	
X3	2	-1	1	
X4	10			2
X1	8			1
X2	6			1
F	20	1	3	3

Попробуем сразу узнать, не является ли решение оптимальным. Поэтому для остальных строк вычислим только свободные члены (чтобы узнать значения базисных переменных при равенстве свободных переменных нулю) и коэффициенты при свободных переменных в индексной строке.

Свободные члены:

- во второй строке $2 \bullet 2 + 6 = 10$;

- в третьей строке $2 \bullet 1 + 6 = 8$;

- в четвёртой строке $2 \bullet 1 + 4 = 6$.

Индексная строка:

$$2 \bullet 3 + 14 = 20$$
$$-1 \bullet 3 + 4 = 1$$
$$1 \bullet 3 + 0 = 3.$$

Смотрим в симплексную таблицу 5. Видим, что получено оптимальное решение, так как коэффициенты при свободных неизвестных в индексной строке неотрицательны.

Ответ:

$$F_{\max} = 8 + 2 \bullet 6 = 20$$
$$x_1 = 8$$
$$x_2 = 6.$$

Симплекс метод с алгебраическими преобразованиями

Решим алгебраическими преобразованиями тот же пример, что и в предыдущем параграфе. Следует отметить, что при решении этой разновидностью симплекс метода лучше не записывать функцию цели в виде $F = 0 - (-x_1 - 2x_2)$, так как при этом легко запутаться в знаках. Но в этом случае пункт алгоритма, определяющий критерий оптимальности, будет модифицирован следующим образом.

Если отыскивается максимум (минимум) линейной формы и в её выражении нет неосновных переменных с положительными (отрицательными) коэффициентами, то критерий оптимальности выполнен и полученное базисное решение является оптимальным - решение окончено. Если при нахождении максимума (минимума) линейной формы в её выражении имеется одна или несколько неосновных переменных с положительными (отрицательными) коэффициентами, перейти к новому базисному решению.

Пример. Найти максимум функции $F = x_1 + 2x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ x_1 + \quad x_2 \geq 4 \\ x_1 - \quad x_2 \leq 2 \\ \qquad\quad x_2 \leq 6 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \leq 0$$

Решение.

Шаг I. Вводим добавочные неотрицательные переменные x_3, x_4, x_5, x_6 и сводим данную систему неравенств к эквивалентной ей системе уравнений

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 + x_5 = 2 \\ x_2 + x_6 = 6 \end{cases}$$

$x_j \geq 0 \quad (j = 1, \ 2, \ldots, \ 6)$.

Введённые добавочные переменные принимаем за основные, так как в этом случае базисное решение системы легко находится. Тогда x_1 и x_2 - неосновные переменные.

Выразив основные переменные через неосновные, получим

$$\begin{cases} \boxed{x_3 = -2 - x_1 + 2x_2} \\ x_4 = -4 + x_1 + x_2 \\ x_5 = \ 2 - x_1 + x_2 \\ x_6 = \ 6 \qquad - x_2 \end{cases}$$

Следовательно, данному разбиению переменных на основные и неосновные соответствует базисное решение $(0; \ 0; \ -2; \ -4; \ 2; \ 6)$, которое является недопустимым (две переменные отрицательны), а поэтому оно не оптимальное. От этого базисного решения перейдём к улучшенному.

Чтобы решить, какую переменную следует перевести из неосновных в основные, рассмотрим любое из двух имеющихся уравнений последней системы с отрицательными свободными членами, например второе. Оно показывает, что в основные переменные можно перевести x_1 и x_2, так как в этом уравнении они имеют положительные коэффициенты (следовательно, при их увеличении, а это произойдёт, если переведём любую из них в основные переменные, переменная x_4 увеличится).

Попробуем перевести в основные переменную x_1. Чтобы установить, какую переменную следует перевести из основные в неосновные, найдём абсолютную величину наименьшего отношения свободных членов системы к коэффициентам при x_1. Имеем $x_1 = \min\{\infty;\ 4/1;\ 2/1;\ \infty\} = 2$. Оно получено из третьего уравнения, показывающего, что в неосновные нужно перевести переменную x_5, которая в исходном базисном решении положительна. Следовательно, полученное базисное решение, как и исходное, содержит две отрицательные компоненты, т. е. при переходе к такому базисному решению улучшения не произойдёт.

Если же перевести в основные переменную x_2, то наименьшее отношение свободных членов к коэффициентам при x_2 составит $x_2 = \min\{2/2;\ 4/1;\ \infty;\ 6/1\} = 1$. Оно получено из первого уравнения, в котором свободный член отрицателен. Следовательно, переводя x_2 в основные, а x_3 в неосновные переменные, мы получим базисное решение, в котором число отрицательных компонент на единицу меньше, чем в исходном. Поэтому остановимся на этой возможности: переводим x_2 в основные, а x_3 в неосновные переменные. Поэтому в приведённой выше системе уравнений выделенным оказалось первое уравнение.

Шаг II.

Основные переменные $x_2,\ x_4,\ x_5,\ x_6$, неосновные переменные $x_1,\ x_3$.

Выразим новые основные переменные через новые неосновные, начиная с выделенного на шаге I уравнения. В результате получим

$$\begin{cases} x_2 = 1 + 0,5x_1 + 0,5x_3 \\ \boxed{x_4 = -3 + 1,5x_1 + 0,5x_3} \\ x_5 = 3 - 0,5x_1 + 0,5x_3 \\ x_6 = 5 - 0,5x_1 - 0,5x_3 \end{cases}$$

Следовательно, имеем новое базисное решение $(0;\ 1;\ 0;\ -3;\ 3;\ 5)$, которое также является недопустимым, а поэтому не оптимальным. Но в нём, как мы и предвидели, только одна переменная отрицательна (а именно x_4).

От полученного базисного решения необходимо перейти к другому. Рассмотрим уравнение с отрицательным свободным членом, т. е. второе уравнение. Оно показывает, что в основные переменные можно перевести x_1 и x_3. Переведём в основные переменные x_1. Найдём наименьшее из абсолютных величин отношений свободных членов системы к коэффициентам при x_1. Имеем $x_1 = \min\{\infty;\ 3/1,5;\ 3/0,5;\ 5/0,5\} = 2$. Значит, в неосновные переменные нужно перенести x_4. Так как наименьшее отношение получено из второго уравнения, то его выделяем. В новом базисном решении уже не окажется отрицательных компонент, т. е. оно является допустимым.

В особых случаях решение завершается на II шаге: это, например, случаи, когда **максимум целевой функции - бесконечность** и когда **система не имеет ни одного решения**.

Шаг III.

Основные переменные: x_1, x_2, x_5, x_6, неосновные переменные: x_3, x_4. Выразив основные переменные через неосновные, получим

$$\begin{cases} x_1 = 2-(1/3)x_3+(2/3)x_4 \\ x_2 = 2+(1/3)x_3+(1/3)x_4 \\ \boxed{x_5 = 2+(2/3)x_3-(1/3)x_4} \\ x_6 = 4-(1/3)x_3-(1/3)x_4 \end{cases}$$

Новое базисное решение имеет вид $(2;\ 2;\ 0;\ 0;\ 2;\ 4)$. Является ли оно оптимальным, можно установить, если выразить линейную форму через неосновные переменные рассматриваемого базисного решения. Сделав это, получим $F = 6+(1/3)x_3+(4/3)x_4$. Так как мы ищем максимум линейной формы, а нашли лишь одно допустимое решение, то продолжим перебор.

Переводим в число основных переменную x_4, имеющую больший положительный коэффициент. Находим $x_4 = \min\{\infty;\ \infty;\ 2/(1/3);\ 4/(1/3)\} = 6$. Это наименьшее отношение получено из третьего уравнения системы, поэтому его выделяем. Оно показывает, что при $x_4 = 6$ переменная $x_5 = 0$ и поэтому перейдёт в число неосновных.

В некотором особом случае решение завершается на III шаге: это случай, когда **оптимальное решение - не единственное**.

Шаг IV.

Основные переменные: x_1, x_2, x_4, x_6, неосновные переменные: x_3, x_5. Выразив основные переменные через неосновные, получим

$$\begin{cases} x_1 = 6+x_3-2x_5 \\ x_2 = 4+x_3-x_5 \\ x_4 = 6+2x_3-3x_5 \\ \boxed{x_6 = 2-x_3+x_5} \end{cases}$$

Линейная форма, выраженная через те же неосновные переменные, примет вид $F = 14+3x_3-4x_4$. Продолжим перебор для поиска максимума.

Увеличение линейной формы возможно при переходе к новому базисному решению, в котором переменная x_3 является основной. Находим $x_3 = \min\{\infty;\ \infty;\ \infty;\ 2/1\} = 2$. Это наименьшее отношение получено из четвёртого уравнения системы и показывает, что при $x_3 = 2$ переменная $x_6 = 0$ и переходит в число неосновных.

Шаг V.

Основные переменные: x_1, x_2, x_3, x_4, неосновные переменные: x_5, x_6. Выразив основные переменные через неосновные, получим

$$\begin{cases} x_1 = 8 - x_5 - x_6 \\ x_2 = 6 \qquad - x_6 \\ x_3 = 2 + x_5 - x_6 \\ x_4 = 10 - x_5 - 2x_6 \end{cases}$$

Линейная форма, выраженная через неосновные переменные нового базисного решения, имеет вид $F = 20 - x_5 - 3x_6$. Критерий оптимальности для случая максимизации линейной формы выполнен. Следовательно, базисное решение $(8;\ 6;\ 2;\ 10;\ 0;\ 0)$ является оптимальным, а максимум линейной формы $F_{max} = 20$