

## Об одном способе построения треугольника Серпинского на плоскости Лобачевского

П.И. Трошин

paul.troshin@gmail.com; Казанский (Приволжский) федеральный университет.

### Аннотация

Построено семейство аналогов треугольника Серпинского на плоскости Лобачевского при помощи системы итерированных функций, связанной с группой изометрий. Найдена зависимость между параметрами полученного семейства, при которой аттрактор гомеоморфен классическому треугольнику Серпинского.

*Ключевые слова:* треугольник Серпинского, плоскость Лобачевского, модель Бельтрами–Клейна, система итерированных функций.

Напомним, что треугольник Серпинского на евклидовой плоскости можно задать как аттрактор различных систем итерированных функций (СИФ, см. [1]). Приведем пример двух наиболее простых таких СИФ  $\{f_i: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2\}_{i=1}^3$ :

$$\begin{cases} f_1(x) = 0.5x + \{-0.5\sqrt{3}, -0.5\}, \\ f_2(x) = 0.5x + \{0.5\sqrt{3}, -0.5\}, \\ f_3(x) = 0.5x + \{0, 1\}; \end{cases} \quad (1)$$

и

$$\begin{cases} f_1(x) = 0.5x, \\ f_2(x) = 0.5x + \{0.5, 0\}, \\ f_3(x) = 0.5x + \{0.25, 0.25\sqrt{3}\}. \end{cases} \quad (2)$$

В работе [2] для построения аналога треугольника Серпинского на плоскости Лобачевского в модели Бельтрами–Клейна была использована СИФ (1), «симметричная» относительно начала координат (Рис. 1). При этом остался открытым вопрос о схожей аналогии для «несимметричного» случая (2). В настоящем докладе мы отвечаем на этот вопрос.

Рассмотрим модель Бельтрами–Клейна, заданную в открытом единичном круге евклидовой плоскости:  $\Lambda = (B(0, 1), \rho)$ ,  $\rho(x, y) = \text{Arch} \frac{1-(x,y)}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}}$ ,  $(\cdot, \cdot)$  — скалярное произведение в  $\mathbb{R}^2$ ,  $|x| = \sqrt{(x, x)}$ .

Пусть

$$G_a: x \ni \Lambda \mapsto \frac{((a, x)(1 - \sqrt{1 - a^2}) + a^2)a + a^2\sqrt{1 - a^2}x}{a^2(1 + (a, x))} \in \Lambda$$

— параллельный перенос вектора  $x$  на вектор  $a \neq 0$ , являющийся движением в  $\Lambda$  ([3]). И пусть

$$\lambda: 0 \neq x \ni \Lambda \mapsto \frac{x}{|x|} \text{th}(\lambda \text{Arth} |x|) \in \Lambda$$

— действие мультипликативной группы вещественных чисел (умножение на константу по правилу  $\rho(O, \lambda x) = \lambda \rho(O, x)$ ,  $\lambda x \uparrow \uparrow x$ , см. [4])

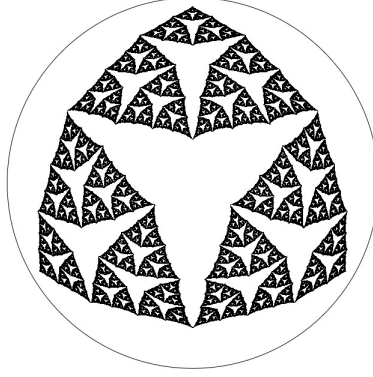


Рис. 1: «Симметричный случай», рассмотренный в [2].

Как и в [2], основная идея — построить треугольник Серпинского как аттрактор СИФ на плоскости Лобачевского. Для этого заменим в (2) гомотетии на операцию  $\lambda(\cdot)$ , а параллельный перенос — на отображение  $G_a$ . Получим СИФ  $\{f_i: \Lambda \rightarrow \Lambda\}_{i=1}^3$ :

$$\begin{cases} f_1(x) = 0.5(x), \\ f_2(x) = G_{\{0.5, 0\}}(0.5(x)), \\ f_3(x) = G_{\{0.25, 0.25\sqrt{3}\}}(0.5(x)). \end{cases} \quad (3)$$

Построенный таким образом аттрактор (Рис. 2) связан, но не гомеоморфен треугольнику Серпинского.

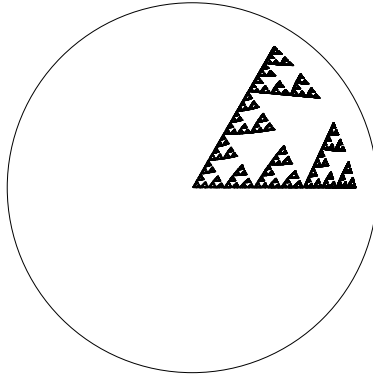


Рис. 2: Аттрактор СИФ (3).

Чтобы добиться желаемого результата, рассмотрим более общую СИФ:

$$\begin{cases} f_1(x) = \lambda(x), \\ f_2(x) = G_{c\{1, 0\}}(\mu(x)), \\ f_3(x) = G_{c\{\cos \phi, \sin \phi\}}(\mu(x)), \end{cases} \quad (4)$$

в которой  $c \in (0, 1)$ ,  $\phi \in (0, \pi)$ ,  $\lambda, \mu \in (0, 1)$ .

**Предложение.** Пусть  $\mu = 1 - \lambda$  и

$$\lambda = \lambda(\phi, c) = \frac{\text{Arth } c}{\text{Arth} \left( \frac{c}{\sqrt{1-c^2} + (\sqrt{1-c^2}-1) \cos \phi} \right) + \text{Arth } c}.$$

Тогда аттрактор СИФ (4) гомеоморфен аттрактору СИФ (2) (треугольнику Серпинского), см. Рис. 3.

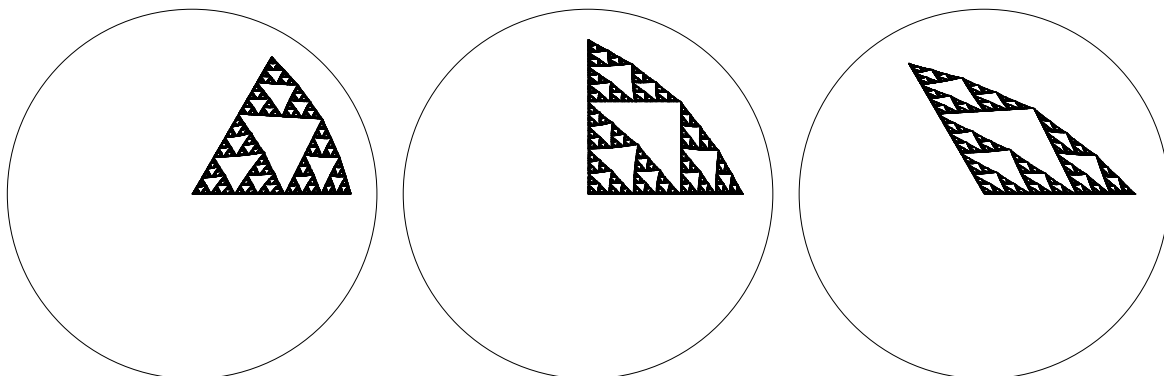


Рис. 3: Примеры аттракторов СИФ (4) при  $\phi = \pi/3, \pi/2, 2\pi/3, c = 0.5, \lambda = \lambda(\phi, c), \mu = 1 - \lambda$ .

Область определения функции  $\lambda(\phi, c)$  задается неравенством

$$\left| \frac{c}{(\sqrt{1-c^2}-1)\cos\phi + \sqrt{1-c^2}} \right| < 1.$$

График функции  $\lambda(\phi, c)$  и ее область определения представлены на Рис. 4. Отметим, что  $\lambda \in (0, 0.5)$ .

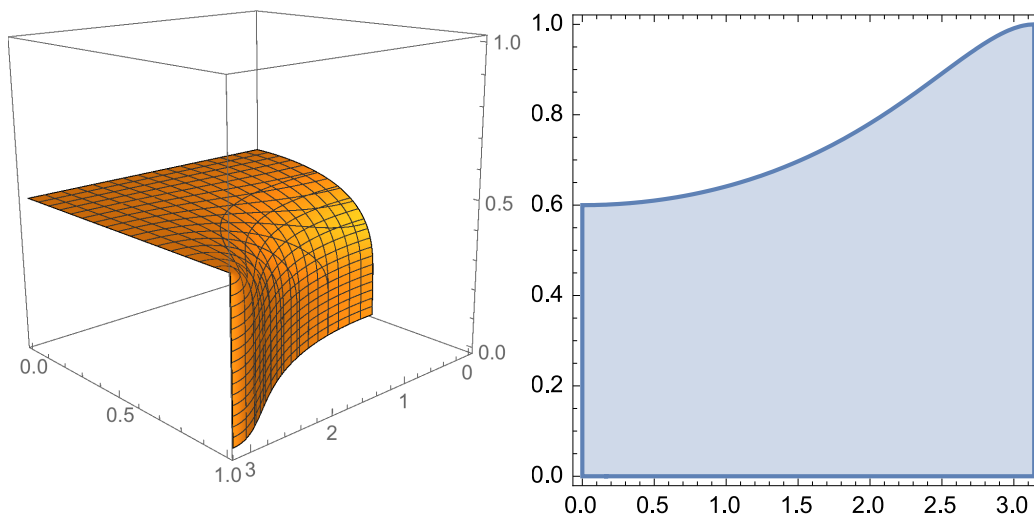


Рис. 4: График функции  $\lambda(\phi, c)$  и ее область определения.

Заметим также, что для построения графика удобнее пользоваться его неявным заданием:

$$\text{th} \left( \frac{(\lambda - 1) \text{Arth}(c)}{\lambda} \right) \left( \sqrt{1-c^2} + (\sqrt{1-c^2}-1)\cos\phi \right) + c = 0.$$

## Список литературы

- [1] Barnsley M. F., Demko S. *Iterated function systems and the global construction of fractals* // Proc. R. Soc. London – 1985. – V. A399. – P. 243–275.
- [2] Troshin P. I. *On generalization of Sierpiński gasket in Lobachevskii plane* // Lobachevskii Journal of Mathematics – 2017. – V. 38. – № 4. – P. 751–762.
- [3] Sosov E. N. *Lobachevskii geometry and its application in general relativity: textbook* (Kazan Federal University, Kazan, 2016).
- [4] Sosov E. N. *On the action of the multiplicative group of nonzero real numbers on the pointed Lobachevsky space* // Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki – 2012. – V. 154. – № 4. – P. 156–160.

## On one method to produce an analogue of Sierpiński gasket in Lobachevskii plane

P. I. Troshin

### Abstract

A family of analogues to Sierpiński gasket is constructed in Lobachevskii plane with the help of iterated function system connected to isometry group. We found a relationship between parameters of this family such that attractor is homeomorphic to classical Sierpiński gasket.

*Keywords:* Sierpiński gasket, Lobachevskii plane, Beltrami–Klein model, iterated function system.