§2. СОБСТВЕННЫЕ ЧИСЛА И СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ

Будем говорить, что вектор $x \in \mathbf{X}_n$ есть ***собственный вектор*** оператора

$$\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n,$$

если $x \neq 0$ и существует число $\lambda \in \mathbb{C}$ такое, что

$$\mathcal{A}x = \lambda x.$$

Число λ при этом называется ***собственным числом*** оператора $\mathcal{A}$. Говорят, что собственный вектор x ***соответствует*** (отвечает) собственному числу λ. Собственный вектор и соответствующее ему собственное число называют ***собственной парой*** оператора $\mathcal{A}$.

.

Пусть x, λ — собственная пара оператора $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}x = \lambda x.$$

Тогда

$$\mathcal{A}\alpha x = \lambda\alpha x$$

для любого $\alpha \in \mathbb{C}$, т. е. αx — тоже собственный вектор, отвечающий собственному числу λ. Значит, одномерное подпространство пространства $\mathbf{X}$, натянутое на собственный вектор оператора $\mathcal{A}$, инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}$.

.

Пусть λ — собственное число оператора $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}x = \lambda x, \quad x \neq 0.$$

Ядро оператора $\mathcal{A} - \lambda I$ будем обозначать через

$$L_\lambda = \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda I)$$

и называть ***собственным подпространством*** оператора $\mathcal{A}$.

Понятно, что

$$L_\lambda \neq \{0\},$$

действительно, всякий вектор $0 \neq x \in L_\lambda$ — собственный вектор оператора $\mathcal{A}$, отвечающий собственному числу λ:

$$(\mathcal{A} - \lambda I)x = 0.$$

.

Примеры

1) Для нулевого оператора всякий ненулевой вектор пространства $\mathbf{X}_n$ — собственный вектор, отвечающий собственному числу, равному нулю:

$$0x = 0x \quad \forall\, 0 \neq x \in \mathbf{X}_n.$$

.

2) Для оператора αI, где $\alpha \in \mathbb{C}$, всякий ненулевой вектор пространства — собственный вектор, отвечающий собственному числу, равному α:

$$(\alpha I)x = \alpha x \quad \forall\, 0 \neq x \in \mathbf{X}_n.$$

.

3) Пусть пространство

$$\mathbf{X} = L \dotplus M$$

и пусть $\mathcal{P}$ — оператор проектирования пространства $\mathbf{X}$ на подпространство L параллельно подпространству M. Тогда

$$\mathcal{P}x = x \quad \forall\, 0 \neq x \in L,$$

и

$$\mathcal{P}x = 0 \quad \forall\, 0 \neq x \in M,$$

т. е. все ненулевые векторы из L — собственные векторы оператора $\mathcal{P}$ и все они отвечают собственному числу, равному единице, тогда как все ненулевые векторы из M — собственные векторы оператора $\mathcal{P}$, отвечающие собственному числу, равному нулю.

.

В <u>вещественном</u> пространстве $\mathbf{X}_n$ не всякий оператор имеет собственные векторы. Так, например, оператор

$$\mathcal{Q} : \mathbf{X}_2 \to \mathbf{X}_2,$$

отображающий каждый вектор

$$x = \xi_1 e^1 + \xi_2 e^2 \quad \text{в вектор} \quad y = -\xi_2 e^1 + \xi_1 e^2.$$

не имеет собственных векторов в пространстве $\mathbf{X}_2$. Действительно,

$$\mathcal{Q}x \perp x, \quad \forall x \in \mathbf{X}_2,$$

а если (λ, x) — собственная пара оператора $\mathcal{Q}$, то

$$\mathcal{Q}x = \lambda x.$$

.

<u>Теорема.</u> Всякий оператор $\mathcal{A}$, действующий в <u>комплексном</u> пространстве $\mathbf{X}_n$, имеет собственные векторы.

.

<u>Доказательство.</u> Достаточно убедиться, что существует

$$\lambda \in \mathbb{C}$$

такое, что линейное уравнение

$$(\mathcal{A} - \lambda I)x = 0$$

имеет нетривиальное решение.

.

Фиксируем в пространстве $\mathbf{X}_n$ некоторый базис $\mathcal{E}_n$. Пусть A_e — матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе. Рассмотрим уравнение

$$\det(A_e - \lambda I) = 0.$$

Нетрудно проверить, что $\det(A_e - \lambda I)$ — полином порядка n относительно λ. Поэтому это уравнение имеет n корней $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \dots,\ \lambda_n$.

.

Всякий корень λ_k уравнения

$$\det(A_e - \lambda I) = 0$$

есть собственное число оператора $\mathcal{A}$:

$$(\mathcal{A} - \lambda_k I)x = 0.$$

.

В самом деле, если

$$\det(A_e - \lambda_k I) = 0,$$

то

$$(A_e - \lambda_k I)\xi = 0$$

есть однородная система уравнений с вырожденной матрицей. Следовательно, она имеет нетривиальное решение. Обозначим это решение через ξ^k. Тогда вектор

$$x^k = \mathcal{E}_n \xi^k,$$

очевидно, будет не равен нулю и будет решением уравнения

$$(\mathcal{A} - \lambda_k I)x^k = 0. \ \square$$

§3. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ ПОЛИНОМ И ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ЧИСЛА

Полином

$$\det(A - \lambda I)$$

называется ***характеристическим полиномом*** матрицы A.

.

Корни характеристического полинома матрицы A

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n : \quad \det(A - \lambda_k I) = 0$$

называются ее *характеристическими (собственными) числами*.

.

Множество всех характеристических чисел матрицы A называется ее ***спектром*** и обозначается через

$$\sigma(A) = \{\lambda_1,\ \lambda_2,\ \dots,\ \lambda_n\}.$$

.

Для любого числа

$$\lambda \in \sigma(A)$$

существует вектор

$$0 \neq x \in \mathbb{C}^n$$

такой, что

$$Ax = \lambda x.$$

Вектор x называется ***собственным вектором матрицы*** A, соответствующим характеристическому числу λ этой матрицы.

.

Теорема. Характеристические полиномы, а следовательно, и спектры подобных матриц совпадают:

$$\sigma(B) = \sigma(A), \quad B = T^{-1}AT.$$

.

Доказательство. Пусть T — невырожденная матрица, матрица

$$B = T^{-1}AT$$

подобна матрице A. Тогда

$$B - \lambda I = T^{-1}AT - \lambda I = T^{-1}(A - \lambda I)T.$$

Поскольку

$$\det(T^{-1}) = 1/\det(T),$$

то

$$\det(B - \lambda I) = \det(A - \lambda I),$$

и

$$\sigma(B) = \sigma(A). \ \square$$

.

Матрицы оператора в различных базисах подобны, поэтому характеристический полином матрицы оператора и его корни не зависят от выбора базиса в пространстве $\mathbf{X}_n$. Характеристический полином матрицы оператора естественно называть поэтому *характеристическим полиномом оператора*.

.

Характеристические числа матрицы A_e оператора $\mathcal{A}$ называются *характеристическими числами этого оператора*. Они, таким образом, являются инвариантами оператора.

.

Множество всех характеристических чисел оператора $\mathcal{A}$ (часто называемое его ***спектром***) будем обозначать через

$$\sigma(\mathcal{A}).$$

.

Для оператора, действующего в комплексном пространстве $\mathbf{X}_n$, понятия характеристического числа

$$\det(A_e - \lambda I)x = 0,$$

и собственного числа

$$\mathcal{A}x = \lambda x,$$

фактически, не различаются, и применительно к таким операторам соответствующие термины используются как синонимы.