УДК 519.63, 517.977.58

Численное решение параболической задачи оптимального управления с поточечными ограничениями на функцию состояния.

А. В. Лапин, А. А. Платонов

Аннотация

Рассмотрена задача оптимального управления системой, описываемой задачей Дирихле для линейного параболического уравнения, при наличии поточечных ограничений на функцию управления и на состояние системы. Функцией управления служит правая часть параболического уравнения. Функционал цели содержит распределенное в пространственно-временной области наблюдение. Построена конечно-разностная аппроксимация рассматриваемой задачи оптимального управления с использованием явной по времени аппроксимации параболического уравнения состояния. Доказано существование ее единственного решения. Построена соответствующая сеточной задаче оптимального управления седловая задача с ограничениями. Доказано существование решения седловой задачи и сходимость обобщенного итерационного метода Удзавы для ее решения. Приведены результаты вычислительных экспериментов.

Ключевые слова: оптимальное управление, параболическое уравнение состояния, ограничения на состояние, конечно-разностная аппроксимация, итерационный метод

Введение

Задачи оптимального управления с ограничениями на состояние системы, описываемой параболическим уравнением, возникают, например, при моделировании прикладных задач с фазовыми переходами (см. [1] - [3] и библиографию этих работ). В статье рассмотрена модельная задача оптимального управления с линейным параболическим уравнением состояния и с поточечными ограничениями на функцию состояния. Доказано существование единственного решения сформулированной задачи на основе общей теории выпуклого анализа и оптимального управления [4], [5]. Построены ее конечно-разностная аппроксимация и итерационный метод решения, являющийся предобусловленным вариантом метода Удзавы. Обоснованы разрешимость сеточной задачи и сходимость итерационного метода, приведена апостериорная оценка точности итераций. Отметим, что реализация метода осуществляется полностью по явным формулам. Приведены результаты вычислительных экспериментов, которые свидетельствуют об эффективности предложенного метода.

В статье не затронуты вопросы сходимости сеточной схемы. Исследованию сходимости и точности метода конечных элементов для параболической задачи оптимального управления с поточечными ограничениями на функцию состояния посвящена работа [6].

Итерационные методы решения для некоторых параболических задач с поточечными ограничениями на функцию состояния исследованы в [7], [8]. Настоящая работа является продолжением исследований в области итерационных методов для сеточных аппроксимаций задач оптимального управления с ограничениями на состояние [8] - [16].

1. Формулировка задачи оптимального управления и ее аппроксимация.

Пусть $\Omega = (0,1)^n, n \geqslant 1$, $Q_T = \Omega \times (0,T]$, $\Sigma = \partial\Omega \times (0,T]$ и состояние $y(x,t)$ управляемой системы является решением задачи Дирихле для уравнения теплопроводности с управлением $u(x,t)$ в правой части

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y = u \text{ в } Q_T; \quad y = 0 \text{ на } \Sigma; \quad y(x,0) = 0 \text{ при } x \in \Omega. \tag{1}$$

Для любого $u \in L_2(Q_T)$ существует единственное обобщенное решение задачи (1) из пространства $W(Q_T) = \{y \in L_2(0,T; H_0^1(\Omega)),\ \dfrac{\partial y}{\partial t} \in L_2(Q_T)\}$ и справедливо неравенство устойчивости ([17], p.370)

$$\|y\|_{L_2(0,T;H_0^1(\Omega))} + \Big\|\frac{\partial y}{\partial t}\Big\|_{L_2(Q_T)} \leqslant c\|u\|_{L_2(Q_T)}. \tag{2}$$

Определим следующие множества ограничений на управление и состояние:

$$U_{ad} = \{u \in L_2(Q_T) :\ |u(x,t)| \leqslant u_{\max} \text{ п. вс. в } Q_T\},\ \ u_{\max} > 0,$$

$$Y_{ad} = \{y \in W(Q_T) :\ y_{\min}(x,t) \leqslant y(x,t) \leqslant y_{\max}(x,t) \text{ п. вс. в } Q_T\},$$

где $y_{\min}(x,t)$, $y_{\max}(x,t)$ – непрерывные в $\bar{Q}_T = \bar{\Omega} \times [0,T]$ функции, $y_{\min}(x,t) \leqslant 0 \leqslant y_{\max}(x,t)$. Зададим целевой функционал с распределенным в области Q_T наблюдением $y_d \in L_2(Q_T)$:

$$J(y,u) = \frac{1}{2}\int\limits_{Q_T} (y(x,t) - y_d(x,t))^2 dxdt + \frac{\alpha}{2}\int\limits_{Q_T} u^2 dxdt,\ \alpha > 0.$$

Будем решать задачу оптимального управления

$$\begin{gathered} \min_{(y,u)\in K} J(y,u), \\ K = \{(y,u) \in Y_{ad} \times U_{ad} :\ \text{выполнено уравнение состояния (1)}\}. \end{gathered} \tag{3}$$

Лемма 1. *Задача оптимального управления* (3) *имеет единственное решение.*

Доказательство. Из определения множеств U_{ad}, Y_{ad} и неравенства (2) следует ограниченность и замкнутость выпуклого множества K в $W(Q_T) \times L_2(Q_T)$. Кроме того, K не пусто, так как содержит нулевой элемент $W(Q_T) \times L_2(Q_T)$. Поскольку квадратичный функционал $J(y,u)$ – непрерывный и строго выпуклый в этом пространстве, то отсюда следует сформулированный результат (см., например, [4], глава II, предложение 1.2). □

Построим конечно-разностную аппроксимацию (3) на равномерной по x и t сетке $\omega_x \times \omega_t$ в $\bar{Q}_T$, где $\omega_x = \{x_i = ih,\, i = 0, 1, \ldots N_x;\, N_x h = 1\}$, $\omega_t = \{t_j = j\tau,\, j = 0, 1, \ldots N_t;\, N_t\tau = T\}$. Пусть V_h – пространство сеточных функций, определенных на сетке ω_x и равных нулю в граничных узлах сетки, $y^j = y(x, t_j) \in V_h$ – сеточная функция на временном слое $t_j = j\tau \in \omega_t$. В дальнейшем используем одинаковые обозначения для сеточных функций и векторов их узловых значений. Через N_x обозначим размерность пространства V_h, через $\|.\|_x$ – евклидову норму этого пространства. Пусть A – матрица сеточного оператора Лапласа с нулевыми условиями Дирихле в граничных точках сетки ω_x. Ее спектр лежит на отрезке $[\mu_{\min}(A), \mu_{\max}(A)]$, где $\mu_{\max}(A)$ имеет порядок h^{-2}, а $\mu_{\min}(A) > 0$ ограничено снизу положительной постоянной, не зависящей от h.

Аппроксимируем краевую задачу состояния (1) явной разностной схемой

$$\frac{y^j - y^{j-1}}{\tau} + Ay^{j-1} = u^j,\ j = 1, 2, \ldots, N_t,\ \ y^0 = 0, \tag{4}$$

считая выполненным условие $\tau < \dfrac{2}{\mu_{\max}(A)}$, обеспечивающее устойчивость схемы. Пусть функция y_d непрерывна. Определим сеточную целевую функцию

$$I(y, u) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N_t} \|y^j - y_d^j\|_x^2 + \frac{\alpha}{2}\sum_{j=1}^{N_t} \|u^j\|_x^2, \tag{5}$$

и множества ограничений

$$U_{ad}^h = \{(u^1, \ldots, u^{N_t}) : u^j \in V_h,\, |u^j| \leqslant u_{\max}\},$$

$$Y_{ad}^h = \{(y^1, \ldots, y^{N_t}) : y^j \in V_h,\, y_{\min}^j \leqslant y^j \leqslant y_{\max}^j\}.$$

Сеточная задача оптимального управления имеет вид:

$$\begin{gathered} \min_{(y,u)\in K_h} I(y, u), \\ K_h = \{(y, u) \in Y_{ad}^h \times U_{ad}^h : \text{ выполнено уравнение состояния (4)}\}. \end{gathered} \tag{6}$$

Лемма 2. *Задача* (6) *имеет единственное решение.*

Доказательство. Непустое множество K_h ограничено и замкнуто в конечномерном пространстве, т.е. компактно. В свою очередь, функция $I(y, u)$ непрерывна, поэтому существование ее минимума на K_h следует из теоремы Вейерштрасса. Поскольку квадратичная функция $I(y, u)$ строго выпукла, а множество K_h выпукло, то решение единственно. $\square$

2. Решение сеточной задачи

Пусть $N = N_x N_t$ – размерность векторов узловых параметров сеточных функций от x и t, $E \in \mathbb{R}^{N\times N}$ – единичная матрица, матрица $L \in \mathbb{R}^{N\times N}$ определена равенством

$$(Ly)^j = \big\{ \frac{y^1}{\tau} \text{ при } j=1, \quad \frac{y^j - y^{j-1}}{\tau} + Ay^j \text{ при } j=2,\dots,N_t \big\}.$$

Матрица L положительно определена при условии $\tau < \dfrac{2}{\mu_{\max}(A)}$. Пусть далее ψ и φ – индикаторные функции множеств Y_{ad}^h и U_{ad}^h, соответственно, а $\partial\psi$ и $\partial\varphi$ – их субдифференциалы. Сеточная задача оптимального управления (6) может быть записана в виде

$$\min_{Ly=u} \{I(y,u) + \psi(y) + \varphi(u)\}, \quad I(y,u) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N_t} \|y^j - y_d^j\|_x^2 + \frac{\alpha}{2}\sum_{j=1}^{N_t} \|u^j\|_x^2.$$

Строим для этой задачи функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(y,u,\lambda) = I(y,u) + \psi(y) + \varphi(u) + (\lambda, Ly - u),$$

где $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^N$. Из общей теории седловых задач (см. [4], с.169) следует, что седловая точка функции Лагранжа удовлетворяет системе

$$\begin{pmatrix} E & 0 & L^T \\ 0 & \alpha E & -E \\ L & -E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ u \\ \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \partial\psi(y) \\ \partial\varphi(u) \\ 0 \end{pmatrix} \ni \begin{pmatrix} y_d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Введем следующие обозначения: $z = (y,u)^T$, $f = (y_d, 0, 0)^T$, $\Psi(z) = \psi(y) + \varphi(u)$ и $\mathcal{A} = \operatorname{diag}\begin{pmatrix} E, & \alpha E \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} L & -E \end{pmatrix}$. Тогда задача (7) может быть записана в виде

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A} & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \partial\Psi(z) \\ 0 \end{pmatrix} \ni \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

При исследовании и решении (7) будем использовать следующие результаты для общей седловой задачи (8):

Утверждение 1. *[11]*

1) Пусть матрица $\mathcal{A}$ положительно определена, матрица B имеет полный столбцовый ранг,Ψ – выпуклая, собственная и полунепрерывная снизу функция,

$$\{z : Bz = 0\} \bigcap \operatorname{int}\operatorname{dom}\Psi \neq \emptyset.$$

Тогда задача (8) *имеет множество решений $X = \{(z,\lambda)\}$ и z определен однозначно.*

2) Если выполнены условия п.1, а матрица $D = D^T > 0$ и параметр ρ удовлетворяют неравенству

$$(D\lambda, \lambda) > \frac{\rho}{2}(\mathcal{A}_s^{-1} B^T \lambda, B^T \lambda) \ \ \forall \lambda \neq 0, \ \ \mathcal{A}_s = 0.5(\mathcal{A} + \mathcal{A}^T), \tag{9}$$

то предобусловленный метод Удзавы

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}z^{k+1} + \partial\Psi(z^{k+1}) \ni B^T\lambda^k + f, \\ &\frac{1}{\rho}D(\lambda^{k+1} - \lambda^k) + Bz^{k+1} = 0,\ \rho > 0 \end{aligned} \tag{10}$$

сходится с любого начального приближения: $(z^k, \lambda^k) \to (z^*, \lambda^*) \in X$ *при* $k \to \infty$.

Теорема 1. *1) Задача* (7) *имеет решение* (y, u, λ) *с единственными компонентами* (y, u), *совпадающими с решением задачи* (6).

2) Метод Удзавы для (7) *с предобусловливателем* $D = (L+\alpha^{-1/2}E)(L^T+\alpha^{-1/2}E)$,

$$\begin{gathered} \alpha u^{k+1} + \partial\varphi(u^{k+1}) \ni \lambda^k, \\ y^{k+1} + \partial\psi(y^{k+1}) \ni y_d - L^T\lambda^k, \\ (L + \alpha^{-1/2}E)(L^T + \alpha^{-1/2}E)\frac{\lambda^{k+1} - \lambda^k}{\rho} + u^{k+1} - Ly^{k+1} = 0 \end{gathered} \tag{11}$$

сходится, если итерационный параметр ρ *удовлетворяет неравенствам* $0 < \rho \leqslant 1$.

Доказательство. Применим утверждение 1 к задаче (7). Очевидно, что матрица $\mathcal{A} = \operatorname{diag}\begin{pmatrix}E, & \alpha E\end{pmatrix}$ симметрична и положительно определена, а матрица $B = \begin{pmatrix}L & -E\end{pmatrix}$ имеет полный столбцовый ранг. Функция $\Psi(z) = \psi(y) + \varphi(u)$ – выпуклая, собственная и полунепрерыная снизу. Кроме того, нулевой вектор $(y, u) = (0, 0)$ является внутренней точкой множества $Y^h_{ad} \times U^h_{ad} = \operatorname{int}\operatorname{dom}\Psi$ и удовлетворяет равенству $Bz = Ly - u = 0$. Таким образом, задача (7) удовлетворяет всем условиям п.1 утверждения 1, поэтому она имеет решение (y, u, λ) с единственными компонентами (y, u), совпадающими с решением задачи (6).

Перейдем к исследованию сходимости итерационного метода (11). В рассматриваемом случае $B\mathcal{A}_s^{-1}B^T = LL^T + \alpha^{-1}E$ и $D = (L + \alpha^{-1/2}E)(L^T + \alpha^{-1/2}E) = LL^T + \alpha^{-1}E + \alpha^{-1/2}(L + L^T)$. Из неравенств

$$0 < \alpha^{-1/2}((L + L^T)\lambda, \lambda) \leqslant \|L\lambda\|^2 + \alpha^{-1}\|\lambda\|^2 \ \ \forall\lambda \neq 0$$

следует спектральная эквивалентность $B\mathcal{A}_s^{-1}B^T$ и $D = (L + \alpha^{-1/2}E)(L^T + \alpha^{-1/2}E)$:

$$((B\mathcal{A}_s^{-1}B^T)\lambda, \lambda) < (D\lambda, \lambda) \leqslant 2((B\mathcal{A}_s^{-1}B^T)\lambda, \lambda) \ \ \forall\lambda \neq 0.$$

В частности, условие сходимости (9) выполнено при $0 < \rho \leqslant 1$. □

При реализации каждого шага метода (11) требуется решить два включения относительно u^{k+1} и y^{k+1} и систему уравнений с матрицей $(L + \alpha^{-1/2}E)(L^T + \alpha^{-1/2}E)$. Решение включения $\alpha u^{k+1} + \partial\varphi(u^{k+1}) \ni \lambda^k$ эквивалентно проектированию $\alpha^{-1}\lambda^k$ на множество U^h_{ad}, а включения $y^{k+1} + \partial\psi(y^{k+1}) \ni y_d - L^T\lambda^k$ – проектированию $y_d - L^T\lambda^k$ на множество Y^h_{ad}. В силу того, что эти множества – параллелепипеды, проектирование на них сводится к проектированию координат векторов правых частей на отрезки прямых. В свою очередь, в силу треугольного вида матриц $L+\alpha^{-1/2}E$ и $L^T+\alpha^{-1/2}E$ решения систем уравнений также вычисляются по явным формулам.

Пусть y^*, u^* – точное решение сеточной задачи (6). Используя результат [15], можно получить следующую оценку погрешности при определении y^*, u^* в методе (11) через норму вектора невязки $v^k = Ly^k - u^k$ на k-й итерации:

$$\|y^* - y^k\|^2 + \alpha\|u^* - u^k\|^2 \leqslant c\|\lambda^* - \lambda^{k-1}\|_D\|v^k\|_{D^{-1}} =$$
$$= c\|\lambda^* - \lambda^{k-1}\|_D\|(L+\alpha^{-1/2}E)^{-1}(Ly^k - u^k)\|,$$

где постоянная c не зависит от шагов сетки и параметра α, а $\|\lambda^* - \lambda^{k-1}\|_D \to 0$ при $k \to \infty$. После умножения обеих частей этого неравенства на $h\tau$ получим в левой части сеточные аналоги норм $L_2(Q_T)$. Отметим, что вектор $(L+\alpha^{-1/2}E)^{-1}(Ly^k - u^k)$ вычисляется при реализации итерационного метода, поэтому контроль точности итераций не требует больших дополнительных вычислительных затрат.

3. Результаты численных расчетов

Решалась одномерная по пространству задача на отрезке по времени $[0,T] = [0, 0.1]$. Решение лишь одномерных задач на небольшом промежутке времени мотивировано тем, что это существенно уменьшает объем данных и время вычислений, в то время как все теоретические результаты, основанные на алгебраическом представлении сеточных задач, остаются в силе и для многомерных задач.

В качестве функции наблюдения выбирались $y_d = t\sin\pi x$ и $y_d = 1/2t\sin\pi x$. Параметр регуляризации в целевой функции $\alpha = 1$. Границы в множестве поточечных ограничений на функцию состояния выбирались следующими: $y_{\max} = tx$ или $y_{\max} = \dfrac{1}{2}tx$, $y_{\min} = -10$ (в качестве нижней границы $y_{\min}$ можно взять произвольное отрицательное число, так как при любых параметрах решение y задачи оптимального управления неотрицательно).

Задача была аппроксимирована конечно-разностной схемой с шагами по пространству $h = 0.01$ и $h = 0.005$ и по времени $\tau = h^2/4$. Итерационный параметр ρ варьировался в пределах от 0.75 до 1. В качестве начального приближения была выбрана сеточная функция $\lambda^{(0)}_{i,j} = 0$.

Критерием остановки итерационного метода служила малость нормы невязки:

$$\|v\|_{D^{-1}} = (\tau h \sum_{x,t} \|(L+\alpha^{-1/2}E)^{-1}(Ly-u)\|^2)^{1/2} < \varepsilon.$$

Результаты расчетов представлены в следующих таблицах и на соответствующих графиках.

	$\rho = 0.75$	$\rho = 1$
$h = 0.01$	7	5
$h = 0.005$	7	5

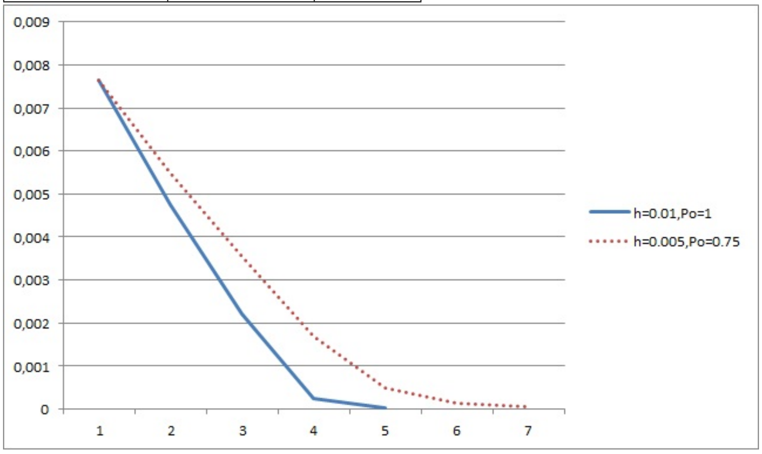

Таблица 1: Число итераций для достижения точности $\varepsilon = 0.0001$ при $y_d = t\sin(\pi x)$ и ограничении $y_{\max} = tx$. На графике приведено поведение нормы невязки $\|v\|_{D^{-1}}$ для различных параметров.

	$h = 0.01$	$h = 0.005$
$y_d = t\sin(\pi x)$	5	5
$y_d = 1/2t\sin(\pi x)$	3	3

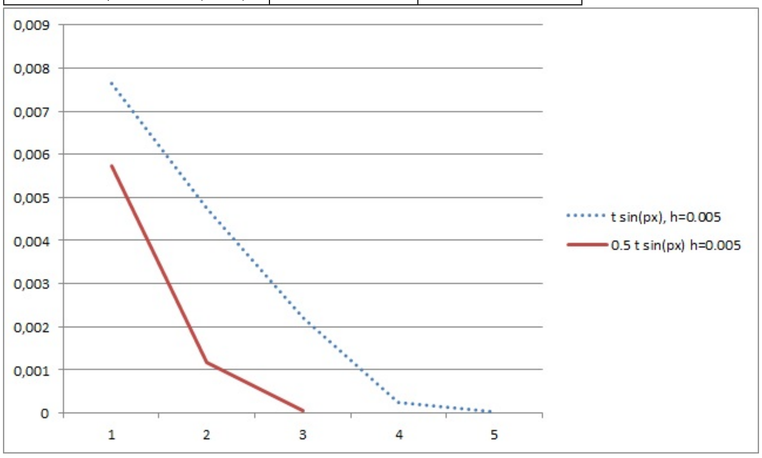

Таблица 2: Число итераций для достижения точности $\varepsilon = 0.0001$ при ограничении $y_{\max} = tx$, итерационном параметре $\rho = 1$ для различных y_d. На графике приведено поведение нормы невязки $\|v\|_{D^{-1}}$ для различных параметров.

	$h = 0.01$	$h = 0.005$
$y = tx$	5	5
$y = 1/2tx$	8	8

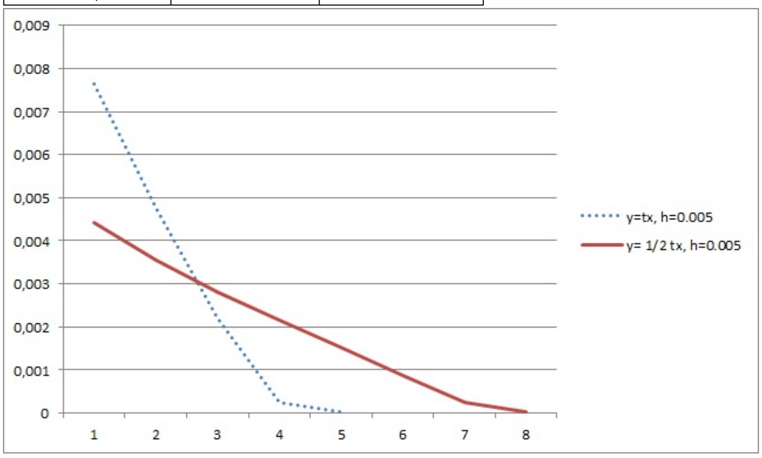

Таблица 3: Число итераций для достижения точности $\varepsilon = 0.0001$ при $y_d = t\sin(\pi x)$, итерационном параметре $\rho = 1$ и различных ограничениях $y_{\max} \equiv y$. На графике приведено поведение нормы невязки $\|v\|_{D^{-1}}$.

Из проведенных расчетов следует, что

- метод (11) лучше сходится при итерационном параметре ρ, равным его теоретической верхней оценке.
- Скорость сходимости практически не зависит от шагов сетки и от количества активных ограничений на y.

Summary

A. Lapin, A. Platonov. Numerical solution of a parabolic optimal control problem with point-wise state constraints

An optimal control problem of a system governed by Dirichlet boundary value problem for a linear parabolic equation is considered. Point-wise constraints are imposed both for control and state functions. The right-hand side of the equation is a control function in the problem. Objective functional contains an observation which is distributed in the space-time domain. Finite-difference approximation using Euler forward scheme for the state parabolic equation is constructed for the optimal control problem. The existence of its unique solution is proved. Constrained saddle point problem corresponding to the mesh optimal control problem is constructed. The existence of a solution for this saddle point problem and the convergence of generalized Uzawa iterative method are proved. The results of numerical experiments are given.

Key words: optimal control, parabolic state equation, state constraints, finite difference approximation, iterative method

Список литературы

[1] R. Dautov, R. Kadyrov, E. Laitinen, A. Lapin, J. Pieskä and V. Toivonen *On 3D-dynamic control of secondary cooling in continuous casting process* // Lobachevskii J. Math. - 2003. - V13. - P. 3-13.

[2] M. Gunzburger, E. Ozugurlu, J. Turner, H. Zhang *Controlling transport phenomena in the Czochralski crystal growth process* // J. Cryst. Growth - 2002 - V.234 - P.47-62.

[3] D. Clever, J. Lang *Optimal Control of Radiative Heat Transfer in Glass Cooling with Restrictions on the Temperature Gradient* // Preprint SPP1253-20-01 (2008).

[4] И. Экланд, Р. Темам *Выпуклый анализ и вариационные проблемы* – Москва: Мир, 1979.

[5] J.-L. Lions *Optimal control of systems governed by partial differential equations* - Springer-Verlag, 1971.

[6] K. Deckelnick and M. Hinze *Variational Discretization of Parabolic Control Problems in the Presence of Pointwise State Constraints* // J. Comp. Math. - 2011 -V.29 - P. 1-15.

[7] I. Neitzel and F. Troltzsch *On regularization methods for the numerical solution of parabolic control problems with pointwise state constraints* // ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations, DOI 10.1051/cocv:2008038 (2008).

[8] А. Лапин, А. Платонов, А. Романенко *Решение параболической задачи оптимального управления с ограничениями на состояние с использованием явной аппроксимации уравнения состояния*// Материалы 10-й международной конференции "Сеточные методы для краевых задач и приложения Казань, Изд-во Казан. ун-та, 2014, с. 444-447.

[9] A. Lapin and E. Laitinen *Iterative solution methods for parabolic optimal control problem with constraints on time derivative of state function.* //WSEAS Recent Advances in Mathematics: Mathematics and Computers in Science and Engineering Series, V. 48, P. 72-74, 2015.

[10] E. Laitinen, A. Lapin and S. Lapin *Explicit algorithms to solve a class of state constrained parabolic optimal control problems* // Russian J. Numer. Analysis Math. Modeling - 2015 - V.30, No 6. – P. 351-362.

[11] A. Lapin *Preconditioned Uzawa type methods for finite-dimensional constrained saddle point problems*// Lobachevskii J. Math., - 2010 - V.31, No.4- P. 309-322.

[12] E. Laitinen, A. Lapin and S. Lapin *On the iterative solution of finite-dimensional inclusions with applications to optimal control problems* // Comp. Methods in Appl. Math. - 2010 - V. 10, No. 3 - P. 283-301.

[13] A. Lapin and M. Khasanov *State-constrained optimal control of an elliptic equation with its right-hand side used as control function*// Lobachevskii J. Math. – 2011. – V.32, No 4. – P. 453-462.

[14] E. Laitinen and A. Lapin *Iterative solution methods for a class of state constrained optimal control problems*// Applied Mathematics. - 2012 - Vol.3, No 12 - P. 1862-1867.

[15] E. Laitinen and A. Lapin *Iterative solution methods for the large-scale constrained saddle point problems*//in: "Numerical methods for differential equations, optimization, and technological problems Comp. Meth. Appl. Sc. - 2013. - V. 27 - P. 19-39.

[16] A. Lapin and M. Khasanov *Iterative solution methods for mesh approximation of control and state constrained optimal control problem with observation in a part of the domain* //Lobachevskii J. Math. – 2014. – V.35, No 3. - P. 241-258.

[17] A. Quarteroni and A. Valli *Numerical approximation of partial differential equations* - Springer, 1997.

Платонов Артем Андреевич - аспирант кафедры математической статистики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.