As for the non-stationary initial 'hot' stage of the universe evolution, the same gravitating neutrino-antineutrino conglomerate might be regarded as a seed material for the Pervushin 'dilaton fabric' producing intermediate vector bosons [2]. This will be the case if colliding radial beams of tachyon neutrinos and antineutrinos in the central domain of super-strong gravitational field could be reprocessed into vector bosons and leptons, $\nu+\bar{\nu}\to W^{+}+W^{-}$, $\nu+\bar{\nu}\to Z$, $\nu+\bar{\nu}\to e^{+}+e^{-}$, with the subsequent evolution close to the standard scenario. It should be noted that existence of the primary tachyon neutrino DM background considered here does not imply by itself that the secondary (ordinary) neutrinos (produced at the cosmilogical temperatures about a few MeV from leptons annihilation) must be of tachyonic nature as well, and today we cannot exclude the possibility of production of the rest of neutrinos in bradyonic states (especially in case of presumed thermodynamic reversibility of reactions).

So far, if secondary bradyonic neutrinos do exist in nature the standard cosmological scenario (monitoring the local thermodynamic equilibrium) is not altered essentially but supplemented with the effects of the primordial background of practically (in stationary regime) sterile tachyon neutrino dark matter.

References

[1] Mychelkin E.G. 'On the origin of fundamental scalar fields'// Izv. NAS RK, phys.-math. ser., 2010, в„–4. pp. 36-40; 'Neutrinos and Gravity'//Reported on MG13, Stockholm, 2012, and ERE-2013, Benasque.

[2] Pervushin V.N. 'Early Universe as W,Z-factory'//11 Lomonosov Conference on Elementary Particle Physics, Moscow, MSU, August 21-27, 2003; D.B. Blaschke, S.I. Vinitsky, A.A. Gusev, V.N. Pervushin, D.V. Proskurin 'Cosmological Production of Vector Bosons and Cosmic Microwave Background Radiation'//Physics of Atomic Nuclei, Vol. 67, No. 5, 2004, pp. 1050–1062.

ЭФФЕКТ САМОДЕЙСТВИЯ СКАЛЯРНОГО ЗАРЯДА В ДЛИННОЙ ГОРЛОВИНЕ

А.А. Попов[a], О. Аслан[b]

[a]E-mail: apopov@ksu.ru; Казанский федеральный университет, Казань
[b]E-mail: alsucuk@gmail.com; Казанский федеральный университет, Казань

Аннотация. Рассмотрен эффект самодействия заряда, являющегося источником массивного неминимально связанного с кривизной скалярного поля в длинной горловине. Показано, что эффект в рассматриваемом приближении не зависит от геометрии пространства-времени вдали от такой горловины.

Введение

Хорошо известным фактом классической электродинамики является утверждение о том, что движение точечного заряда определяется взаимодействием заряда с полем, которое он создает. Этот эффект (называемый самодействием или радиационной реакцией) связан с нелокальной структурой поля, источником которого является заряд. Первые исследования в этой области были сфокусированы на самоускорении электрически заряженных точечных частиц в плоском пространстве-времени [1]. В дальнейшем ДеВитт, Брем и Хоббс [2, 3, 4] получили формальные выражения для силы самодействия на электрический заряд в искривленном пространстве-времени. Мино, Сасаки, Танака [5] и, независимо, Куин и Уолд [6] получили аналогичные выражения для гравитационной силы самодействия на точечную массу. Сила самодействия на скалярный заряд, взаимодействующий с собственным безмассовым минимально связанным с кривизной скалярным полем, была рассмотрена Куином в работе [7]. Хотя формальные аналитические выражения для различных типов силы самодействия хорошо известны, вычисления явных выражений требуют значительных усилий, которые были осуществлены, в основном, на фоне пространств-времен черных дыр. Эти усилия связаны, в основном, с подготовкой гравитационно-волновых детекторов, таких как LISA, способных детектировать гравитационные волны, излучаемые компактным объектом, падающим на супермассивную черную дыру.

В отличие от случая плоского пространства-времени, сила самодействия может быть не нулевой даже для статического заряда на искривленном фоне. Было также показано, что эта сила может быть не нулевой для статического заряда в плоских пространствах-временах топологических дефектов [8, 9, 10, 11]. В искривленных пространствах-временах с нетривиальной топологической структурой исследования эффекта самодействия имеют дополнительные интересные черты [12, 13, 14, 15, 16]. В этой главе эффект самодействия рассматривается для покоящихся зарядов в статических пространствах-временах. Это означает, что задача сводится к отысканию функции Грина трёхмерного искривлённого пространства. Целью этой работы является изучение силы самодействия на статический заряд, являющийся источником массивного неминимально связанного с кривизной скалярного поля, в пространстве-времени, называемом длинной горловиной.

На протяжении всей работы мы используем единицы $c = G = 1$.

Общие принципы

Рассмотрим уравнение для скалярного безмассового поля с источником

$$\phi_{;\mu}^{;\mu} - (\xi R + m^2)\phi = -J = -4\pi q \int \delta^{(4)}(x - x_0(\tau)) \frac{d\tau}{\sqrt{-g^{(4)}}}, \tag{1}$$

где ξ - константа связи скалярного поля массы m с кривизной R, $g^{(4)}$ - детерминант метрики $g_{\mu\nu}$, q - скалярный заряд и τ - его собственное время. Мировая линия заряда определяется функциями $\tilde{x}^{\mu}(\tau)$.

Метрика статического пространство-времени может быть представлена в виде:

$$ds^2 = g_{tt}(x^i)dt^2 + g_{jk}(x^i)dx^j dx^k, \tag{2}$$

где $i, j, k = 1, 2, 3$. Это означает, что можно написать уравнение поля следующим образом:

$$\frac{1}{\sqrt{-g_{tt}}\sqrt{g^{(3)}}} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\sqrt{-g_{tt}} \sqrt{g^{(3)}} g^{jk} \frac{\partial \phi(x^i; \tilde{x}^i)}{\partial x^k} \right) - (\xi R(x) + m^2)\phi(x^i; \tilde{x}^i)$$
$$= -\frac{4\pi q \delta^{(3)}(x^i, \tilde{x}^i)}{\sqrt{g^{(3)}}}, \tag{3}$$

где $g^{(3)} = \det g_{ij}$ и мы примем во внимание, что $d\tau/dt = \sqrt{g_{tt}}$ для покоящейся (статической) частицы. Процедура оценки силы самодействия требует перенормировки скалярного потенциала $\phi(x;\tilde{x})$, который расходится в пределе $x \to \tilde{x}$ (см., например, [17, 18]).

Эта перенормировка может быть достигнута путем вычитания из $\phi(x;\tilde{x})$ контрчлена ДеВитта-Швингера $\phi_{\text{DS}}(x;\tilde{x})$ и затем устремляя $x \to \tilde{x}$ [19]:

$$\phi_{\text{ren}}(x) = \lim_{\tilde{x}\to x}\left[\phi(x;\tilde{x}) - \phi_{\text{DS}}(x;\tilde{x})\right], \tag{4}$$

где

$$\phi_{\text{DS}}(x^i;\tilde{x}^i) = q\left(\frac{1}{\sqrt{2\sigma}} + \frac{\partial g_{tt}(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}^i}\frac{\sigma^i}{4g_{tt}(\tilde{x})\sqrt{2\sigma}} - m\right), \tag{5}$$

σ - половина квадрата расстояния между точками x и $\tilde{x}$ вдоль кратчайшей геодезической, соединяющей их.

$$\sigma = \frac{g_{ij}(\tilde{x})}{2}\sigma^i\sigma^j \tag{6}$$

- это половина квадрата расстояния между точками $\tilde{x}^i$ и x^i вдоль кратчайшей геодезической, соединяющей их, и (см., например, [20, 21])

$$\begin{aligned}\sigma^i &= -\left(x^i - \tilde{x}^i\right) - \frac{1}{2}\Gamma^i_{jk}\left(x^j - \tilde{x}^j\right)\left(x^k - \tilde{x}^k\right) \\ &\quad -\frac{1}{6}\left(\Gamma^i_{jm}\Gamma^m_{kl} + \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial \tilde{x}^l}\right)\left(x^j - \tilde{x}^j\right)\left(x^k - \tilde{x}^k\right)\left(x^l - \tilde{x}^l\right) + O\left((x-\tilde{x})^4\right),\end{aligned} \tag{7}$$

символы Кристоффеля Γ^i_{jk} вычисляются в точке $\tilde{x}$.

Наконец сила самодействия, действующая на статический заряд это

$$f_i(x) = -\frac{q}{2}\nabla_i \phi_{\text{ren}}(x). \tag{8}$$

ВКБ аппроксимация для силы самодействия

Метрика статического сферического симметричного пространства-времени рассматривается ниже

$$ds^2 = -f(\rho)dt^2 + d\rho^2 + r^2(\rho)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right). \tag{9}$$

В этом пространстве-времени уравнение (3) может быть переписан в виде

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \left(\frac{f'}{2f} + \frac{(r^2)'}{r^2}\right)\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \right. &- \left.(\xi R + m^2)\right]\phi(\rho,\theta,\varphi;\tilde{\rho},\tilde{\theta},\tilde{\varphi}) \\ &= -\frac{4\pi q\delta(\rho,\tilde{\rho})\delta(\theta,\tilde{\theta})\delta(\varphi,\tilde{\varphi})}{r^2\sin\theta}\end{aligned} \tag{10}$$

Благодаря сферической симметрии рассматриваемой задачи, мы представляем потенциал в виде

$$\phi(x^\alpha;\tilde{x}^\alpha) = q\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)P_l(\cos\gamma)g_l(\rho,\tilde{\rho}), \tag{11}$$

где $\cos\gamma \equiv \cos\theta\cos\tilde{\theta} + \sin\theta\sin\tilde{\theta}\cos(\varphi - \tilde{\varphi})$ и $g_l(\rho,\tilde{\rho})$ удовлетворяют уравнению

$$g_l'' + \left(\frac{f'}{2f} + \frac{(r^2)'}{r^2}\right) g_l' - \left[\frac{l(l+1)}{r^2} + m^2 + \xi R\right] g_l = -\frac{\delta(\rho,\tilde{\rho})}{r^2}. \tag{12}$$

В этом выражении и ниже штрихом обозначена производная по ρ. Однородные решения этого уравнения будем обозначать через $p_l(\rho)$ и $q_l(\rho)$. $p_l(\rho)$ это выбранное решение, которое хорошо ведет себя при $\rho = -\infty$ и расходится при $\rho \to +\infty$. $q_l(\rho)$ это выбранное решение, которое расходится при $\rho \to -\infty$ и хорошо себя ведет при $\rho = \infty$. Таким образом,

$$\left\{\frac{d}{d\rho^2} + \left(\frac{f'}{2f} + \frac{(r^2)'}{r^2}\right)\frac{d}{d\rho} - \left[\frac{l(l+1)}{r^2} + m^2 + \xi R\right]\right\} \left\{\begin{array}{c} p_l(\rho) \\ q_l(\rho) \end{array}\right\} = 0, \tag{13}$$

$$\begin{aligned} g_l(\rho,\tilde{\rho}) = C_l p_l(\rho_<) q_l(\rho_>) = C_l \quad & \left[\Theta(\tilde{\rho}-\rho) p_l(\rho) q_l(\tilde{\rho})\right. \\ & \left. + \Theta(\rho-\tilde{\rho}) p_l(\tilde{\rho}) q_l(\rho)\right], \end{aligned} \tag{14}$$

где $\Theta(x)$ - ступенчатая функция Хевисайда, т.е., $\Theta(x) = 1$ при $x > 0$ и $\Theta(x) = 0$ при $x < 0$, C_l - константа нормировки, которая может быть включена в определение p_l и q_l. Нормировка g_l достигается интегрированием (12) один раз по ρ от $\tilde{\rho} - \delta$ до $\tilde{\rho} + \delta$ и стремлением $\delta \to 0$. Это приводит к условию на Вронскиан

$$C_l \left(p_l \frac{dq_l}{d\rho} - q_l \frac{dp_l}{d\rho}\right) = -\frac{1}{r^2}. \tag{15}$$

ВКБ-приближение для радиальных мод p_l и q_l получается заменой переменных

$$\begin{aligned} p_l &= \frac{1}{\sqrt{2r^2W}} \exp\left(\int^{\rho} W d\rho\right), \\ q_l &= \frac{1}{\sqrt{2r^2W}} \exp\left(-\int^{\rho} W d\rho\right). \end{aligned} \tag{16}$$

Подстановка этих выражений в (15) показывает, что условие на Вронскиан выполняется, если

$$C_l = 1. \tag{17}$$

Подстановка в выражение на моду (13) дает следующее уравнение для W:

$$\begin{aligned} W^2 = & \frac{l(l+1) + m^2r^2 + 2\xi}{r^2} + \frac{\left(W^2\right)''}{4W^2} - \frac{5\left(W^2\right)'^2}{16W^4} + \frac{f'(W^2)'}{8fW^2} - \frac{f'W}{2f} \\ & + \frac{\left(r^2\right)''}{2r^2} - \frac{\left(r^2\right)'^2}{4r^4} + \frac{\left(r^2\right)' f'}{4r^2 f} + \xi\left(-2\frac{\left(r^2\right)''}{r^2} + \frac{\left(r^2\right)'^2}{2r^4} - \frac{\left(r^2\right)' f'}{r^2 f} - \frac{f''}{f} + \frac{f'^2}{2f^2}\right). \end{aligned} \tag{18}$$

Это уравнение может быть решено методом итераций, если метрическая функция $r^2(\rho)$ меняется медленно, то есть,

$$\varepsilon_{\text{wkb}} = L_\star / L \ll 1, \tag{19}$$

где

$$L_\star(\rho) = \frac{r(\rho)}{\sqrt{2\xi + m^2 r^2(\rho)}}, \tag{20}$$

и L - характерный масштаб изменения $r(\rho)$:

$$\frac{1}{L(\rho)} = \max\left\{ \left|\frac{r'}{r}\right|, \left|\frac{f'}{f}\right|, \left|\frac{r'}{r}\sqrt{|\xi|}\right|, \left|\frac{f'}{f}\sqrt{|\xi|}\right|, \left|\frac{r''}{r}\right|^{1/2}, \left|\frac{f''}{f}\right|^{1/2}, \ldots \right\}. \tag{21}$$

Мы будем называть область пространства-времени, где метрическая функция $r(\rho)$, медленно меняется, длинной горловиной.

Нулевой порядок ВКБ решения уравнения (18) соответствует пренебрежению членами с производными в этом уравнении

$$W^2 = \Omega \cdot \left(1 + O(\varepsilon^2_{\text{wkb}}) \right), \tag{22}$$

где

$$\Omega\,(\rho, l+1/2) = \frac{l(l+1) + m^2 r^2 + 2\xi}{r^2} = \frac{1}{r(\rho)^2}\left[\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 + \mu^2\right], \tag{23}$$

и

$$\mu^2 = 2\xi - \frac{1}{4} + m^2 r^2. \tag{24}$$

Ниже предполагается, что

$$\mu^2 > 0. \tag{25}$$

Подчеркнем, что Ω - это точное решение уравнения (18) в пространстве-времени с метрикой $ds^2 = -f_0 dt^2 + d\rho^2 + r_0^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)$, где f_0, r_0 - константы.

Подставляя решение (22) в (16) и (11), и пренебрегая членами второго порядка и выше по отношению к ε_{wkb} мы можем получить следующее выражение для приближения нулевого порядка ВКБ аппроксимации для $\phi(x^\alpha; \tilde{x}^\alpha)$ при условиях $\theta = \tilde{\theta}, \varphi = \tilde{\varphi}$ and $\tilde{\rho} = \rho + \delta\rho > \rho$

$$\phi(\rho, \theta, \varphi; \tilde{\rho}, \theta, \varphi) = \frac{q}{r(\rho) r(\tilde{\rho})} \sum_{l=0}^{\infty} \left(l + \frac{1}{2}\right) \frac{\exp\left(-\int\limits_{\rho}^{\rho+\delta\rho} \sqrt{\Omega\left(\rho', l + \frac{1}{2}\right)} d\rho' \right)}{\sqrt[4]{\Omega\left(\rho, l + \frac{1}{2}\right) \Omega\left(\tilde{\rho}, l + \frac{1}{2}\right)}}. \tag{26}$$

Сумма по l может быть вычислена с помощью метода суммирования Плана (см., например, [22])

$$\begin{aligned}\phi(\rho,\theta,\varphi;\tilde{\rho},\theta,\varphi) &= \frac{q}{r(\rho)r(\tilde{\rho})}\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\exp\left(-\int_{\rho}^{\rho+\delta\rho}\sqrt{\Omega(\rho',x)}d\rho'\right)}{\sqrt[4]{\Omega(\rho,x)\Omega(\tilde{\rho},x)}}xdx\right.\\ &+\int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon}\frac{\exp\left(-\int_{\rho}^{\rho+\delta\rho}\sqrt{\Omega(\rho',z)}d\rho'\right)}{\sqrt[4]{\Omega(\rho,z)\Omega(\tilde{\rho},z)}\,(1+e^{i2\pi z})}zdz\\ &\left.-\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+i\infty}\frac{\exp\left(-\int_{\rho}^{\rho+\delta\rho}\sqrt{\Omega(\rho',z)}d\rho'\right)}{\sqrt[4]{\Omega(\rho,z)\Omega(\tilde{\rho},z)}\,(1+e^{-i2\pi z})}zdz\right\}. \qquad (27)\end{aligned}$$

В нулевом ВКБ порядке по ε_{WKB} это дает

$$\begin{aligned}\phi(\rho,\theta,\varphi;\tilde{\rho},\theta,\varphi) &= \frac{q}{\delta\rho}+\frac{q}{r(\rho)}\left(-\mu+2\int_0^{\mu}\frac{xdx}{\sqrt{\mu^2-x^2}\,(1+e^{2\pi x})}\right)\\ &+O\Big(\,\delta\rho\Big). \qquad (28)\end{aligned}$$

Перенормировочный контрчлен $\phi_{\text{DS}}(x;\tilde{x})$ в нулевом ВКБ порядке по ε_{WKB} в пределе $\theta=\tilde{\theta},\varphi=\tilde{\varphi}$ может быть легко вычислен с помощью метрики (9):

$$\begin{aligned}&2\sigma=\delta\rho^2+O\left(\delta\rho^4\right),\\ &\phi_{\text{DS}}(\rho,\theta,\varphi;\tilde{\rho},\theta,\varphi)==q\left(\frac{1}{\delta\rho}-m+O(\delta\rho)\right). \qquad (29)\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\phi_{\text{ren}}(x) &= \lim_{\delta\rho\to 0}[\phi(\rho,\theta,\varphi;\tilde{\rho},\theta,\varphi)-\phi_{\text{DS}}(\rho,\theta,\varphi;\tilde{\rho},\theta,\varphi)]\\ &= \frac{q}{r(\rho)}\left(mr(\rho)-\mu+2\int_0^{\mu}\frac{xdx}{(1+e^{2\pi x})\sqrt{\mu^2-x^2}}\right)\Big(\,1+O(\varepsilon^2_{\text{WKB}})\Big), \qquad (30)\end{aligned}$$

а единственная ненулевая компонента силы самодействия есть

$$\begin{aligned}f_{\rho}(x) &= -\frac{q}{2}\frac{\partial\phi_{\text{ren}}}{\partial\rho}=-\frac{q^2}{2r^2}\left(\frac{dr}{d\rho}\right)\left[\mu\,-2\int_0^{\mu}\frac{xdx}{(1+e^{2\pi x})\sqrt{\mu^2-x^2}}\right.\\ &\left.-4\pi m^2r^2\int_0^{\mu}\frac{e^{2\pi x}dx}{(1+e^{2\pi x})^2\sqrt{\mu^2-x^2}}\right]\Big(\,1+O(\varepsilon^2_{\text{WKB}})\Big). \qquad (31)\end{aligned}$$

Отметим, что в пространстве-времени

$$ds^2=-dt^2+d\rho^2+r_0{}^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2\right), \qquad (32)$$

$\varepsilon_{\text{WKB}}=0$ и выражение (30) является точным. Однако сила самодействия, в этом случае, равна нулю.

Заключение

Рассматриваемый подход дает возможность вычислить приближенное выражение для собственного потенциала заряда, являющегося источником массивного неминимально связанного с кривизной скалярного поля и силы самодействия в длинной горловине (9,19-21). Это выражение в рассматриваемом приближении не зависит от геометрии пространства-времени вдали от такой горловины.

Литература

[1] P. Dirac, Proc. R. Soc. London, Ser. A167 (1938), p. 148

[2] B. DeWitt and R. Brehme, Ann. Phys.9 (1960), p. 220

[3] J. Hobbs, Ann. Phys.47 (1968), p. 141

[4] J. Hobbs, Ann. Phys.47 (1968), p. 166

[5] Y. Mino, M. Sasaki, T. Tanaka, Phys. Rev. D55 (1997), p. 3457

[6] T.C.Quinn, R.M. Wald, Phys. Rev. D56 (1997), p. 3381

[7] T. Quinn, Phys. Rev. D62 (2000), p. 064029

[8] B. Linet, Phys. Rev. D33 (1986), p. 1833

[9] N.R. Khusnutdinov, Class. Quantum Grav.11(1994), p. 1807

[10] N. Khusnutdinov, Teor. Mat. Fiz.103 (1995), p. 339 [Theor. Math. Phys.103 (1995), p. 603]

[11] V. De Lorenci, Jr E. Moreira, Phys. Rev. D65 (2002), p. 085013

[12] N. Khusnutdinov and I. Bakhmatov, Phys. Rev. D76 (2007), p. 124015

[13] B. Linet, Electrostatics in a wormhole geometry, arXiv:0712.0539 [gr-qc]

[14] S. Krasnikov, Class. Quantum Grav. 25 (2008), p. 245018

[15] V. Bezerra and N. Khusnutdinov, Phys. Rev. D79 (2009), p. 064012

[16] M. Casals, S. Dolan, A. Ottewill and B. Wardell, Self-Force Calculations with Matched Expansions and Quasinormal Mode Sums, arXiv:0903.0395 [gr-qc]

[17] E. Rosenthal, Phys. Rev. D 69 (2004), p. 064035

[18] E. Rosenthal, Phys. Rev. D 70 (2004), p. 124016

[19] A. Popov, Phys. Rev. D 84 (2011), p. 064009

[20] J.L. Synge, Relativity: the general theory (North-Holland publishing company, Amsterdam, 1960).

[21] A. Popov, Grav. & Cosm. 13, (2007), p. 119

[22] A. Popov, Phys. Rev. D64 (2001), p. 104005