

Краевая задача для одного параболического уравнения с оператором Бесселя и интегральным условием первого рода

И. Б. Гаринов, Р. М. Мавлявиев

Аннотация. Рассматривается краевая задача с интегральным условием первого рода для параболического уравнения с оператором Бесселя и доказывается её эквивалентность краевой задаче для этого же уравнения с обычным локальным граничным условием. Доказывается единственность ее решения. Решение задачи получено в явном виде.

Ключевые слова: параболическое уравнение, нелокальное интегральное условие, оператор Бесселя.

1. Постановка задачи

Пусть $G_T = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t \leq T\}$ — прямоугольная область в координатной плоскости Oxt .

В области G_T рассмотрим параболическое уравнение с оператором Бесселя вида

$$L_B u \equiv u_t - B_x u = 0, \quad (1)$$

где $B_x = x^{-k} \frac{\partial}{\partial x} (x^k \frac{\partial}{\partial x}) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{k}{x} \frac{\partial}{\partial x}$ — оператор Бесселя, $0 < k < 1$.

З а д а ч а. Найти функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x, t) \in C_{x,t}^{1,0}(\overline{G_T}) \cap C_{x,t}^{2,1}(G_T), \quad (2)$$

$$L_B u = 0, \quad (x, t) \in G_T, \quad (3)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (4)$$

$$u(0, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5)$$

$$\int_0^l u(x, t) x^k dx = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (6)$$