Казанский федеральный университет

Е.А.Широкова

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Курс лекций для профиля «геофизика»

Казань
2018

Уравнения математической физики
Курс лекций

Приведены выводы уравнений, описывающих физические явления, дается квалификация уравнений в частных производных второго порядка, приведены постановки и способы решения задач математической физики, необходимые для студентов-геофизиков.

Под уравнениями математической физики понимают дифференциальные уравнения в частных производных, дающих достаточно адекватное описание физических процессов. Уравнения эти могут быть очень сложными. В настоящем курсе представлены уравнения в частных производных второго порядка, имеющие богатые практические приложения, в частности, при описании геофизических процессов.

1. Приведение уравнений в частных производных к каноническому виду.

Общий вид дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка $F(x_1,..,x_n,u,u'_{x_1},...,u'_{x_n},u''_{x_1x_1},...,u''_{x_ix_j},...,u''_{x_nx_n})=0$, где $u=u(x_1,...,x_n)$, является слишком сложным. Мы ограничимся уравнениями, линейными относительно старших производных. Кроме того, для упрощения преобразований возьмем случай, когда функция u зависит только от двух переменных x и y. Таким образом, рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных относительно функции $u=u(x,y)$ вида

$$a_{11}u''_{xx}+2a_{12}u''_{xy}+a_{22}u''_{yy}+F(x,y,u,u'_x,u'_y)=0, \qquad (1)$$

где a_{ij}, $i,j=1,2,$ – функции переменных x и y.

В качестве примеров уравнений в частных производных и их решений рассмотрим следующие уравнения.

1) Решим уравнение $u''_{xy}=0$. Интегрируя обе части уравнения по y, получим $u'_x=f(x)$, где $f(x)$ – произвольная функция аргумента x. Интегрируя еще раз, уже по x, получим $u(x,y)=\varphi(x)+\psi(y)$, где произвольная функция $\psi(y)$ – константа интегрирования по x, а произвольная функция $\varphi(x)$ – первообразная от произвольной функции $f(x)$. Мы видим, что решение данного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка содержит две произвольные функции переменных x и y.

2) Решим уравнение $u''_{yy}=x^2$. Интегрируя обе части уравнения по y, получим $u'_y=x^2y+f(x)$, где $f(x)$ – произвольная функция аргумента x. Интегрируя еще раз по y, получим $u(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{2}+yf(x)+g(x)$. Таким образом, решение содержит две произвольные функции. На этот раз обе эти произвольные функции зависят от x.

Общее решение любого дифференциального уравнения в частных производных второго порядка содержит две произвольные функции. Вспомним обыкновенные дифференциальные уравнения. Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, как известно, содержит две произвольные константы. Значения этих констант конкретизируется при задании в дополнение к уравнению двух начальных условий (задача Коши).

В случае дифференциального уравнения в частных производных для выбора частного решения недостаточно задания значений искомой функции или ее производных в отдельных точках. В дальнейшем мы увидим, что появятся краевые (граничные) и начальные условия при решении задач, связанных с уравнениями в частных производных.

Упростим вид уравнения (1) с помощью перехода к новым переменным. Сделаем замену $\xi = \varphi(x, y), \eta = \psi(x, y)$. Таким образом, искомая функция становится функцией новых переменных: $u(x, y) = u(\xi, \eta)$. Для того чтобы в уравнении (1) перейти к новым переменным, выразим частные производные по старым переменным x и y через частные производные по ξ и η, считая смешанные производные по ξ и η непрерывными, и значит, равными:

$$u'_x = u'_\xi \varphi'_x + u'_\eta \psi'_x, \quad u'_y = u'_\xi \varphi'_y + u'_\eta \psi'_y \ ,$$

$$u''_{xx} = u''_{\xi\xi} \varphi'^2_x + 2u''_{\xi\eta} \varphi'_x \psi'_x + u''_{\eta\eta} \psi'^2_x + u'_\xi \varphi''_{xx} + u'_\eta \psi''_{xx},$$

$$u''_{xy} = u''_{\xi\xi} \varphi'_x \varphi'_y + u''_{\xi\eta} (\varphi'_x \psi'_y + \varphi'_y \psi'_x) + u''_{\eta\eta} \psi'_x \psi'_y + u'_\xi \varphi''_{xy} + u'_\eta \psi''_{xy},$$

$$u''_{yy} = u''_{\xi\xi} \varphi'^2_y + 2u''_{\xi\eta} \varphi'_y \psi'_y + u''_{\eta\eta} \psi'^2_y + u'_\xi \varphi''_{yy} + u'_\eta \psi''_{yy}.$$

Подставив полученные производные второго порядка в уравнение (1), получим дифференциальное уравнение

$$\tilde{a}_{11} u''_{\xi\xi} + 2\tilde{a}_{12} u''_{\xi\eta} + \tilde{a}_{22} u''_{\eta\eta} + \tilde{F}(\xi, \eta, u, u'_\xi, u'_\eta) = 0, \qquad (2)$$

где $\tilde{a}_{11} = a_{11} \varphi'^2_x + 2a_{12} \varphi'_x \varphi'_y + a_{22} \varphi'^2_y$, $\tilde{a}_{22} = a_{11} \psi'^2_x + 2a_{12} \psi'_x \psi'_y + a_{22} \psi'^2_y$,

$\tilde{a}_{12} = a_{11} \varphi'_x \psi'_x + a_{12} (\varphi'_x \psi'_y + \varphi'_y \psi'_x) + a_{22} \psi'_y \varphi'_y$.

Наша задача: найти такие функции $\varphi(x, y), \psi(x, y)$, чтобы как можно больше коэффициентов $\tilde{a}_{ij}, i, j = 1, 2,$ в уравнении (2) обратилось в ноль. Как легко заметить, выражения для коэффициентов $\tilde{a}_{11}$ и $\tilde{a}_{22}$ аналогичны и отличаются только участвующими в выражениях искомыми функциями. Для того, чтобы найти такие функции, применим следующую лемму.

Л е м м а. Функция $\varphi(x,y)$ удовлетворяет уравнению

$$a_{11}\varphi_x'^2+2a_{12}\varphi_x'\varphi_y'+a_{22}\varphi_y'^2=0 \qquad (3)$$

тогда и только тогда, когда соотношение $\varphi(x,y)=c$ является полным интегралом обыкновенного дифференциального уравнения

$$a_{11}(dy)^2-2a_{12}dxdy+a_{22}(dx)^2=0. \qquad (4)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о данной леммы основывается на том, что полный дифференциал обеих частей соотношения $\varphi(x,y)=c$ обеспечивает следующую связь между дифференциалами переменных x и y и частными производными функции $\varphi(x,y)$: $\varphi_x'dx=-\varphi_y'dy$. Благодаря этой связи уравнение (3) получается из уравнения (4) и наоборот.

Таким образом, для того, чтобы выполнить нашу задачу и найти замену переменных, обеспечивающую наиболее простой вид уравнения (2), следует решить уравнение (4), которое может быть записано, как квадратное уравнение $a_{11}(\frac{dy}{dx})^2-2a_{12}\frac{dy}{dx}+a_{22}=0$ относительно $\frac{dy}{dx}$. В зависимости от числа вещественных корней этого квадратного уравнения мы получим три различных типа дифференциальных уравнений в частных производных.

2. Классификация дифференциальных уравнений в частных производных.

При решении обыкновенного дифференциального уравнения (4), называемого **уравнением характеристик**, возможны три следующие ситуации, связанные со знаком дискриминанта квадратного уравнения $a_{11}t^2-2a_{12}t+a_{22}=0$.

1. $a_{12}{}^2-a_{11}a_{22}>0$. В этом случае дифференциальное уравнение в частных производных (1) называется уравнением **гиперболического** типа.

Обыкновенное дифференциальное уравнение (4) распадается на два различных дифференциальных уравнения: $a_{11}dy=(a_{12}+\sqrt{a_{12}{}^2-a_{11}a_{22}})dx$ и $a_{11}dy=(a_{12}-\sqrt{a_{12}{}^2-a_{11}a_{22}})dx$. Пусть $\varphi(x,y)=c-$ полный интеграл первого из уравнений, $\psi(x,y)=c-$ полный интеграл второго уравнения. В соответствии с леммой функции $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ удовлетворяют уравнению (3), и

следовательно, коэффициенты $\tilde{a}_{11}$ и $\tilde{a}_{22}$ обращаются в ноль. Уравнение (1) заменой $\xi=\varphi(x,y),\ \eta=\psi(x,y)$ приводится к каноническому уравнению вида

$$u''_{\xi\eta}+\Phi(\xi,\eta,u,u'_{\xi},u'_{\eta})=0.$$

2. $a_{12}{}^2-a_{11}a_{22}=0$. В этом случае дифференциальное уравнение в частных производных (1) называется уравнением **параболического** типа.

Обыкновенное дифференциальное уравнение (4) равносильно дифференциальному уравнению $a_{11}dy=a_{12}dx$. Получив его полный интеграл $\varphi(x,y)=c$, мы сделаем замену $\xi=\varphi(x,y)$ и обеспечим $\tilde{a}_{11}=0$. Для получения второй переменной η, возьмем произвольную функцию $\psi(x,y)$, удовлетворяющую только условию $\dfrac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\varphi'_x & \varphi'_y\\ \psi'_x & \psi'_y\end{vmatrix}\neq 0$ (для того, чтобы новые переменные были независимы), и сделаем замену $\eta=\psi(x,y)$.

Подсчитаем теперь коэффициент $\tilde{a}_{12}$. Учитывая, что $a_{11}\varphi'_x+a_{12}\varphi'_y=0$ и что $a_{12}{}^2=a_{11}a_{22}$, получим

$$\tilde{a}_{12}=a_{11}\varphi'_x\psi'_x+a_{12}(\varphi'_x\psi'_y+\varphi'_y\psi'_x)+a_{22}\psi'_y\varphi'_y=a_{12}\varphi'_x\psi'_y+a_{22}\psi'_y\varphi'_y=$$
$$=\frac{a_{12}\psi'_y}{a_{11}}(a_{11}\varphi'_x+a_{12}\varphi'_y)=0 .$$

Следовательно, в данном случае каноническим уравнением будет уравнение

$$u''_{\eta\eta}+\Phi(\xi,\eta,u,u'_{\xi},u'_{\eta})=0.$$

3. $a_{12}{}^2-a_{11}a_{22}<0$. В этом случае дифференциальное уравнение в частных производных (1) называется уравнением **эллиптического** типа.

Обыкновенное дифференциальное уравнение (4) распадается на два дифференциальных уравнения: $a_{11}dy=(a_{12}+i\sqrt{-a_{12}{}^2+a_{11}a_{22}})dx$ и $a_{11}dy=(a_{12}-i\sqrt{-a_{12}{}^2+a_{11}a_{22}})dx$, имеющих комплексно-сопряженные коэффициенты. Полные интегралы этих уравнений имеют вид $\varphi(x,y)=c$ и $\overline{\varphi(x,y)}=c$, где черта сверху означает комплексное сопряжение. Делая замену $\xi=\varphi(x,y),\ \eta=\overline{\varphi(x,y)}$, мы получим в уравнении (2) $\tilde{a}_{11}=\tilde{a}_{22}=0$, но при этом переменные ξ и η в уравнении (2) будут комплексными (комплексно-сопряженными):

$$u''_{\xi\eta}+\Phi(\xi,\eta,u,u'_{\xi},u'_{\eta})=0. \qquad (5)$$

Для того, чтобы получить каноническое уравнение относительно вещественных переменных, сделаем замену $p=\frac{\xi+\eta}{2}=\operatorname{Re}\varphi(x,y),\ q=\frac{\xi-\eta}{2i}=\operatorname{Im}\varphi(x,y)$. Перейдем уже в уравнении (5) к новым переменным. Легко видеть, что

$$u''_{\xi\eta}=u''_{pp}p'_{\xi}p'_{\eta}+u''_{pq}(p'_{\xi}q'_{\eta}+p'_{\eta}q'_{\xi})+u''_{qq}q'_{\xi}q'_{\eta}=\frac{1}{4}(u''_{pp}+u''_{qq}),$$

следовательно, каноническим уравнением в данном случае будет уравнение

$$u''_{pp}+u''_{qq}+\hat{\Phi}(p,q,u,u'_p,u'_q)=0.$$

3. Примеры описаний физических явлений с помощью дифференциальных уравнений в частных производных

Электрические колебания в однородных проводах.

В отличие от школьного курса физики, где рассматриваются колебательные контуры, состоящие из сопротивления, емкости и катушки индуктивности, рассмотрим достаточно длинные однородные электрические цепи, где явления сопротивления, взаимная емкость между проводами, индуктивность линии не сосредоточены в отдельных местах, а равномерно распределены вдоль всей линии. Добавим к этим явлениям утечку тока вследствие несовершенства изоляции проводов и выведем дифференциальные уравнения, традиционно обозначая через u напряжение и через i ток.

Пусть R – сопротивление, L – коэффициент самоиндукции, C – емкость, G – коэффициент утечки. Все эти параметры рассчитаны на единицу длины однородного провода. Напомним связь введенных параметров с током $i(x,t)$ и напряжением $u(x,t)$, зависящими от положения точки на линии (x) и от времени (t).

$L\frac{\partial i}{\partial t}=u_c$ – ЭДС самоиндукции равна коэффициенту самоиндукции, умноженному на скорость изменения тока;

$C\frac{\partial u}{\partial t}=i_{см}$ – ток смещения равен емкости, умноженной на скорость изменения напряжения;

$Gu = i_y$ – ток утечки пропорционален напряжению в цепи;

$\Delta u_R = Ri\Delta x$ – падение напряжения на участке Δx за счет сопротивления равно произведению сопротивления, силы тока на участке и длине участка.

Рассмотрим суммарное падение напряжения на малом участке Δx. Оно складывается из падения напряжения за счет сопротивления Δu_R и из ЭДС самоиндукции, уменьшающей напряжение. То есть

$$-(u(x+\Delta x,t)-u(x,t)) = Ri(x,t)\Delta x + L\frac{\partial i(x,t)}{\partial t}\Delta x.$$

Рассмотрим суммарное падение силы тока на малом участке Δx. Оно складывается из потерь за счет плохой изоляции и из токов смещения, направленных в противоположном, по сравнению с магистральным, направлении. Имеем

$$-(i(x+\Delta x,t)-i(x,t)) = Gu(x,t)\Delta x + C\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Delta x.$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим два уравнения относительно функций $u(x,t)$ и $i(x,t)$:

$$u'_x + Ri + Li'_t = 0, \tag{6}$$

$$i'_x + Gu + Cu'_t = 0. \tag{7}$$

Для того, чтобы получить отдельные уравнения для каждой из функций $i(x,t)$ и $u(x,t)$, проделаем следующие преобразования. Продифференцируем уравнение (6) по x. Получим

$$u''_{xx} + Ri'_x + Li''_{tx} = 0, \tag{8}$$

Если в уравнение (8) подставить i'_x, полученное из (7) и производную i'_x по t, то мы придем к дифференциальному уравнению относительно $u(x,t)$:

$$u''_{xx} - (RC+GL)u'_t - RGu - LCu''_{tt} = 0. \tag{9}$$

Проделаем то же самое для $i(x,t)$: выразим u'_x из (6), найдем u''_{xt} и подставим в продифференцированное по x уравнение (7). Получим

$$i''_{xx} - (RC+GL)i'_t - RGi - LCi''_{tt} = 0. \tag{10}$$

Выразив теперь в (9) и (10) вторые производные по t, получим дифференциальные уравнения для напряжения и для тока, называемые **телеграфными уравнениями**:

$$u''_{tt}+\frac{RC+GL}{LC}u'_t+\frac{RG}{LC}u-\frac{1}{LC}u''_{xx}=0, \qquad (11)$$

$$i''_{tt}+\frac{RC+GL}{LC}i'_t+\frac{RG}{LC}i-\frac{1}{LC}i''_{xx}=0. \qquad (12)$$

Изучим два частных случая телеграфных уравнений**.**

1) Линия без потерь. Это тот случай, когда сопротивлением проводов и утечкой тока можно пренебречь, то есть, $R=G=0$. Нетрудно видеть, что уравнения (11) и (12) принимают вид

$$u''_{tt}=a^2u''_{xx}, \qquad (13)$$

$$i''_{tt}=a^2i''_{xx}, \qquad (14)$$

где $a=\frac{1}{\sqrt{LC}}$. Уравнения (13) и (14) называются **волновыми** уравнениями и так же, как и телеграфные уравнения (11) и (12), являются уравнениями гиперболического типа.

2) Линия без искажений. Так называют линию в том случае, когда ее параметры связаны соотношением $RC=GL$. В этом случае телеграфное уравнение (11) имеет вид

$$u''_{tt}+2\frac{R}{L}u'_t+\left(\frac{R}{L}\right)^2u-\frac{1}{LC}u''_{xx}=0 \qquad (15)$$

и приводится к волновому уравнению заменой $u(x,t)=e^{-\frac{R}{L}t}v(x,t)$.
Действительно, подставив выражение функции $u(x,t)$ через функцию $v(x,t)$ в уравнение (15), мы получим для $v(x,t)$ уравнение

$$v''_{tt}=a^2v''_{xx}\ ,$$

где $a=\frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Колебание мембраны.

Мембраной называется плоская плёнка, расположенная в некоторой области D плоскости XOY, не сопротивляющаяся изгибу и сдвигу, но оказывающая сопротивление растяжению (упругая плёнка). Отклонение плёнки от плоскости XOY в момент t обозначим $u(x,y,t)$. Мы будем рассматривать малые поперечные колебания мембраны.

Как известно, нормаль к поверхности мембраны – это вектор $\overrightarrow{N}$ с координатами $(-\frac{\partial u}{\partial x},-\frac{\partial u}{\partial y},1)$. Чтобы вывести дифференциальное уравнение колебаний мембраны, выделим малый участок σ области D с границей L площади $d\sigma$, окружающий точку (x,y). Будем считать, что мембрана находится под действием равномерного натяжения величины T.

На выбранный нами участок действует сила натяжения, распределённая вдоль его границы. Вектор $\vec{n}$, вдоль которого направлена сила натяжения, перпендикулярен вектору $\overrightarrow{dr}=(dx,dy,du)$, касательному к кривой L, и нормали $\overrightarrow{N}$ к поверхности мембраны. Следовательно, вектор $\vec{n}$ имеет направление векторного произведения

$$\left[\overrightarrow{dr},\overrightarrow{N}\right]=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ dx & dy & du \\ -\frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{\partial u}{\partial y} & 1 \end{vmatrix}.$$

Отсюда следует, что проекция силы натяжения на ось Ou равна $T(-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy)$.

Равнодействующая всех проекций сил натяжения на ось Ou, действующих на участок σ, равна интегралу проекций по границе L области σ и вычисляется с применением формулы Грина:

$$T\oint_L(-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy)=T\iint_\sigma(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})dxdy.$$

В силу малости участка σ при условии непрерывности функции $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ можно считать, что

$$T\iint\limits_{\sigma}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dxdy = T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)d\sigma .$$

Действующая на участок сила натяжения сообщает точкам участка ускорение, равное $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Рассматривая выделенный участок как материальную точку и применяя закон Ньютона, имеем

$$\rho d\sigma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)d\sigma .$$

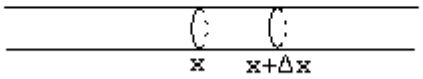
Сокращая на $d\sigma$ и обозначая $\frac{T}{\rho}=a^2$, окончательно получим **уравнение колебаний мембраны**

$$u''_{tt} = a^2(u''_{xx}+u''_{yy}).$$

Распространение тепла в стержне.

Рассмотрим металлический стержень с теплоизолированной боковой поверхностью. Это означает, что через боковую поверхность не проходят тепловые потоки, и что при неравномерном нагреве внутренних точек стержня тепло от более нагретых точек будет передаваться менее нагретым внутри стержня. Будем считать стержень настолько тонким, что точки любого его поперечного сечения имеют одинаковую температуру. Стержень расположен горизонтально вдоль оси Ox.

Пусть $U(x,t)$ – температура сечения, соответствующего точке x, в момент t. Температура может изменяться на участке стержня $[x, x+\Delta x]$ только за счет



притока (или оттока) тепла с соседних участков. Воспользуемся следующими физическими законами:

1) количество тепла, повышающее температуру тела на ΔU равно $c\rho V\Delta U$, где c – удельная теплоемкость, ρ – плотность, V – объем тела;

2) тепловой поток, проходящий через сечение S за время Δt в направлении, перпендикулярном сечению, равен $-kS\frac{\partial U}{\partial x}\Delta t$, где k – коэффициент теплопроводности. Знак минус в последней формуле объясняется тем, что тепловой поток имеет знак, противоположный знаку производной $\frac{\partial U}{\partial x}$: тепло перетекает туда, где температура ниже.

Опишем математически тот факт, что тепло, поступающее через сечения с абсциссами x и $x+\Delta x$ за время Δt идет на изменение температуры участка стержня объемом $S\Delta x$:

$$kS\left[\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{(x+\Delta x,t)}-\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{(x,t)}\right]\Delta t=c\rho S\Delta x\left[U(x,t+\Delta t)-U(x,t)\right].$$

Устремляя теперь Δx и Δt к нулю, получим из последнего соотношения уравнение

$$U'_t=a^2U''_{xx}, \qquad (16)$$

где $a^2=\frac{k}{c\rho}$, называемое **уравнением теплопроводности**. Это уравнение параболического типа.

Распространение тепла в пространстве.

Рассмотрим неравномерно нагретое пространственное тело, температура которого – функция координат и времени $U(x,y,z,t)$. Рассмотрим произвольный фрагмент тела $\Delta\Omega$. Так же, как в предыдущем пункте, изменение температуры этого фрагмента обусловлено поступлением теплового потока внутрь фрагмента через его границу. Если внутри стержня тепловой поток равнялся производной от температуры по переменной x, то в пространственном случае тепловой поток – это градиент температуры $\mathrm{grad}U=(\frac{\partial U}{\partial x},\frac{\partial U}{\partial y},\frac{\partial U}{\partial z})$. Если в случае стержня суммарный тепловой поток, проходящий внутрь фрагмента стержня, вычислялся как разность потоков через противоположные сечения, то в пространственном случае суммарный тепловой поток, проходящий внутрь фрагмента $\Delta\Omega$, равен интегралу по поверхности $\partial\Delta\Omega$, ограничивающей фрагмент. С учетом Формулы Гаусса-

Остроградского имеем следующее количество тепла, прошедшего внутрь фрагмента за время Δt:

$$Q = k\Delta t \oiint\limits_{\partial\Delta\Omega} \frac{\partial U}{\partial x} dydz + \frac{\partial U}{\partial y} dzdx + \frac{\partial U}{\partial z} dxdy = k\Delta t \iiint\limits_{\Delta\Omega} (U''_{xx} + U''_{yy} + U''_{zz}) dxdydz .$$

Применим к тройному интегралу теорему о среднем, в соответствие с которой $\iiint\limits_{\Delta\Omega} (U''_{xx} + U''_{yy} + U''_{zz}) dxdydz = (U''_{xx} + U''_{yy} + U''_{zz})\Big|_{(\xi,\eta,\zeta)} V(\Delta\Omega)$, где точка (ξ,η,ζ) принадлежит фрагменту $\Delta\Omega$. Полученное тепло идет на изменение температуры фрагмента. Мы считаем фрагмент настолько малым, что его температуру определяет температура любой его точки, например, уже полученной точки (ξ,η,ζ):

$$Q = c\rho\Big[U(\xi,\eta,\zeta,t+\Delta t) - U(\xi,\eta,\zeta,t)\Big]V(\Delta\Omega).$$

Таким образом, $k(U''_{xx} + U''_{yy} + U''_{zz})\Big|_{(\xi,\eta,\zeta)} \Delta t = c\rho\Big[U(\xi,\eta,\zeta,t+\Delta t) - U(\xi,\eta,\zeta,t)\Big]$.

Стягивая теперь фрагмент $\Delta\Omega$ в точку с координатами (x,y,z) и переходя к пределу $\Delta t \to 0$, получим **пространственное уравнение теплопроводности**

$$U'_t = a^2(U''_{xx} + U''_{yy} + U''_{zz}), \qquad (17)$$

где $a^2 = \dfrac{k}{c\rho}$, или $U'_t = a^2\Delta U$, где $\Delta -$ оператор Лапласа.

Потенциал электрического поля.

Рассмотрим в трехмерном пространстве электростатическое поле. Как известно, характеристикой электростатического поля является векторная величина $\vec{E}(x,y,z) = (E_x, E_y, E_z) -$ напряженность поля, которую можно рассматривать как электрическую силу, действующую на пробный заряд единичной величины, помещенный в данное поле. Известно, что работа электрических сил при движении заряда между двумя точками не зависит от пути перемещения. Таким образом, электростатическое поле является потенциальным, то есть, $\operatorname{rot}\vec{E} = 0$. Следовательно, можно рассмотреть **потенциал электростатического поля** – функцию $U(x,y,z)$, такую, что $\vec{E} = -\operatorname{grad} U$.

Предположим теперь, что в какой-то части поля нет электрических зарядов. Рассмотрим произвольный фрагмент $\Delta\Omega$ этой части поля. Очевидно, что суммарный поток вектора $\vec{E}$, проходящий через $\partial\Delta\Omega$ – поверхность фрагмента, равен нулю. Применяя формулу Гаусса-Остроградского, получим

$$\oiint\limits_{\partial\Delta\Omega}(\vec{E},\vec{n})ds=\iiint\limits_{\Delta\Omega}(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z})dxdydz=\iiint\limits_{\Delta\Omega}\operatorname{div}\vec{E}dxdydz=0.$$

В силу произвольности фрагмента $\Delta\Omega$ делаем вывод о том, что $\operatorname{div}\vec{E}=0$ в любой точке той части поля, где отсутствуют заряды. Действительно, если бы существовала точка, в которой $\operatorname{div}\vec{E}\neq 0$, существовала бы и окрестность этой точки, где дивергенция сохраняет знак. Взяв фрагмент $\Delta\Omega$ в этой окрестности, мы получим $\oiint\limits_{\partial\Delta\Omega}(\vec{E},\vec{n})ds\neq 0$, а это означает, что внутри этого фрагмента содержатся заряды.

Получив соотношение $\operatorname{div}\vec{E}=0$ и пользуясь выражением вектора напряженности через потенциал электрического поля, мы обнаружим, что в той части поля, где отсутствуют заряды, потенциал электрического поля удовлетворяет уравнению

$$U''_{xx}+U''_{yy}+U''_{zz}=0, \tag{18}$$

которое называется уравнением Лапласа. Функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа, называется гармонической.

В той части электростатического поля, где размещены заряды с плотностью δ, потенциал электрического поля удовлетворяет уравнению

$$U''_{xx}+U''_{yy}+U''_{zz}=-\frac{\delta}{\varepsilon_0},$$

которое называется уравнением Пуассона. Здесь ε_0 – постоянная, называемая диэлектрической проницаемостью.

В том случае, когда рассматривается плоское электростатическое поле, любая точка поля имеет две координаты, вектор напряженности также имеет две координаты. Потенциал электрического поля $U(x,y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$U''_{xx}+U''_{yy}=0 \tag{19}$$

в точках поля, где отсутствуют заряды.

Уравнения Лапласа и Пуассона – уравнения эллиптического типа.

4. Распространение волн в бесконечных электрических линиях.

Представим электрическую линию, длинную настолько, что на электрические колебания в ее средней части не будут оказывать заметного влияния концы линии. Такую линию можно считать бесконечной: $x \in (-\infty, +\infty)$.

1) Рассмотрим случай **линии без потерь**. Будем изучать напряжение в такой линии. Как было показано в предыдущем параграфе, напряжения $u(x,t)$, $x \in (-\infty, +\infty)$, $t \geq 0$, удовлетворяют уравнению

$$u''_{tt} = a^2 u''_{xx}, \tag{20}$$

где $a = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$. Предположим, что в начальный момент $(t = 0)$ задано распределение напряжения $(u(x,0) = f(x))$ и тока $(i(x,0) = g(x))$ вдоль всей линии. Необходимо восстановить напряжения $u(x,t)$, $x \in (-\infty, +\infty)$, $t \geq 0$, во всей линии в любой момент времени после начального момента. Это означает, что мы должны решить уравнение (20) и удовлетворить начальным условиям $u(x,0) = f(x)$ и $i(x,0) = g(x)$.

То, что начальных условий должно быть два, следует из порядка производной по t. К сожалению, второе начальное условие задано не как условие на функцию $u(x,t)$, поэтому прежде всего мы должны получить из условия $i(x,0) = g(x)$ некоторое начальное условие на искомую функцию $u(x,t)$.

Рассмотрим уравнение (7), которое в условиях линии без потерь ($R = G = 0$) приобретает вид

$$i'_x + Cu'_t = 0. \tag{21}$$

Рассматривая уравнение (21) при $t = 0$, имеем

$$g'(x) + Cu'_t(x,0) = 0,$$

и отсюда мы получаем второе начальное условие на искомую функцию:

$$u'_t(x,0) = -\frac{1}{C} g'(x).$$

Решим теперь уравнение (20). Прежде всего, приведем его к каноническому виду. Уравнением характеристик для (20) является дифференциальное уравнение

$$(dx)^2 - a^2(dt)^2 = 0,$$

распадающееся на два уравнения: $dx + adt = 0$ и $dx - adt = 0$. Поэтому для приведения (20) к каноническому виду введем замену: $\xi = x + at$, $\eta = x - at$. Выражая производные через новые переменные в уравнении (20), мы получим уравнение

$$u''_{\xi\eta} = 0,$$

уже решенное в первом параграфе в качестве примера. Воспользовавшись этим решением, имеем

$$u(\xi,\eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta).$$

Возвращаясь к исходным переменным x и t, получим окончательное решение уравнения (20):

$$u(x,t) = \varphi(x+at) + \psi(x-at), \tag{22}$$

где функции φ и ψ – произвольные.

Устраним произвол, потребовав выполнения начальных условий

$$u(x,0) = f(x),$$
$$u'_t(x,0) = -\frac{1}{C}g'(x). \tag{23}$$

Подставляя (22) в (23), получим

$$\begin{cases} \varphi(x) + \psi(x) = f(x), \\ a\varphi'(x) - a\psi'(x) = -\dfrac{1}{C}g'(x). \end{cases}$$

Интегрируя последнее уравнение системы, получим новую систему:

$$\begin{cases} \varphi(x) + \psi(x) = f(x), \\ \varphi(x) - \psi(x) = -\dfrac{1}{Ca}g(x), \end{cases}$$

которая определяет функции φ и ψ:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}[f(x) - \frac{1}{Ca}g(x)],$$
$$\psi(x) = \frac{1}{2}[f(x) + \frac{1}{Ca}g(x)].$$

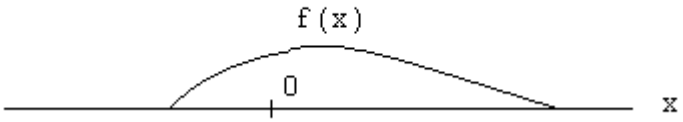
В итоге, согласно (22) искомое напряжение имеет вид

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+at) + f(x-at)] + \frac{\sqrt{L}}{2\sqrt{C}}[g(x-at) - g(x+at)]. \tag{24}$$

Задача восстановления силы тока в такой цепи решается аналогично. Решите ее самостоятельно и получите формулу

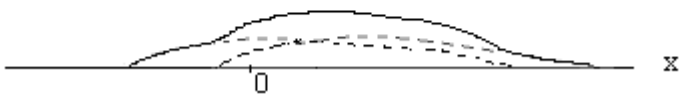
$$i(x,t)=\frac{1}{2}[g(x+at)+g(x-at)]+\frac{\sqrt{C}}{2\sqrt{L}}[f(x-at)-f(x+at)].$$

Выясним физический смысл функций, входящих в решение (24). Предположим, что $g(x)\equiv 0, x\in(-\infty,+\infty)$, а функция $f(x)$ задана графически:



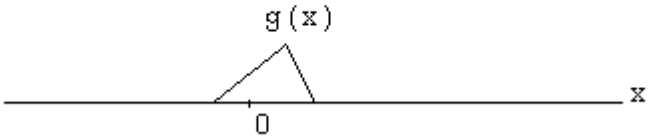
При $t=0$ мы получим в соответствии с (24) и с начальным условием начальное распределение напряжений: $u(x,0)=f(x)$.

Рассмотрим $t=t_0>0$. Тогда $u(x,t_0)=\frac{1}{2}[f(x+at_0)+f(x-at_0)]$. Графическое изображение функции $\frac{1}{2}f(x+at_0)$ мы получим, если график функции $f(x)$ сдвинем на at_0 влево и сожмем по вертикали вдвое, графическое изображение функции $\frac{1}{2}f(x-at_0)$ мы получим, если график функции $f(x)$ сдвинем на at_0 вправо и сожмем по вертикали вдвое. В итоге, сумма этих функций при небольших значениях t_0 дает картину вида

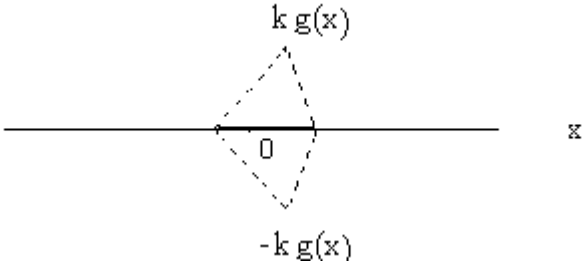


При увеличении t волна $\frac{1}{2}f(x+at)$ будет перемещаться все левее, а волна $\frac{1}{2}f(x-at)$ все правее, пока их проекции на ось OX не перестанут пересекаться, и волны не разойдутся в разные стороны.

Предположим теперь, что $f(x)\equiv 0, x\in(-\infty,+\infty)$, а функция $g(x)$ задана графически:



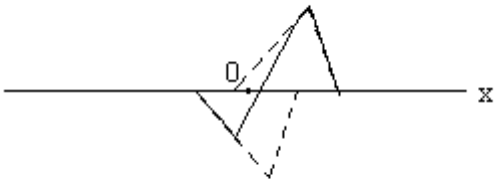
При $t=0$ мы получим в соответствии с (24) и с начальным условием начальное распределение напряжений:



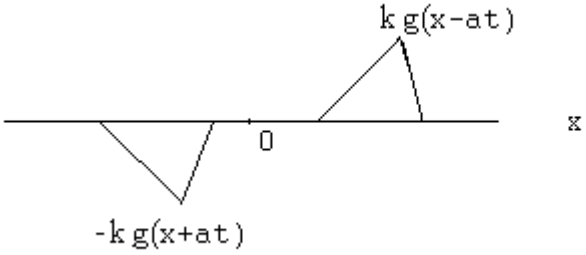
$$u(x,0)=kg(x)-kg(x)=0,$$

где $k=\dfrac{\sqrt{L}}{2\sqrt{C}}$.

Рассмотрим $t=t_0>0$. Тогда $u(x,t_0)=\dfrac{\sqrt{L}}{2\sqrt{C}}[g(x-at_0)-g(x+at_0)]$. Здесь так же, как в предыдущем случае, начинают расходиться волны, только расположены они по разные стороны от оси OX: та, которая смещается влево, является зеркальным отражением той, которая смещается вправо, относительно OX.



При увеличении t волна $-kg(x+at)$ будет перемещаться все левее, а волна $kg(x-at)$ все правее, пока волны не разойдутся в разные стороны.



Рассмотрим случай **линии без искажений**. Как было показано в параграфе 3, введение новой функции $v(x,t)$ по формуле $u(x,t)=e^{-\frac{R}{L}t}v(x,t)$ позволяет свести телеграфное уравнения к уравнениям колебаний, уже решенным для случая линии без потерь.

Проследим за начальными условиями для введенной функции. Пусть заданы начальные распределения напряжений и тока вдоль бесконечной линии: $u(x,0)=f(x)$ и $i(x,0)=g(x)$. Очевидно, что в таком случае $v(x,0)=f(x)$. Подставим $t=0$ в уравнение (7) $i'_x+Gu+Cu'_t=0$. Получим

$$g'(x)+Gf(x)+Cu'_t(x,0)=0.$$

Поскольку $u'_t(x,t)=-\frac{R}{L}e^{-\frac{R}{L}t}v(x,t)+e^{-\frac{R}{L}t}v'_t(x,t)$, из предыдущего равенства следует соотношение

$$g'(x)+Gf(x)+C(-\frac{R}{L}f(x)+v'_t(x,0))=0. \qquad (25)$$

Учтем теперь, что имеет место следующая зависимость между параметрами электрической линии: $RC=GL$. Теперь соотношение (25) примет вид

$$v'_t(x,0)=-\frac{1}{C}g'(x).$$

Уравнение и начальные условия для введенной функции $v(x,t)$ совпадают с уравнением и начальными условиями задачи, решенной выше. Пользуясь готовым решением (24) и возвращаясь к функции $u(x,t)$, мы получим распределение напряжений в бесконечной линии без искажений:

$$u(x,t)=e^{-\frac{R}{L}t}\{\frac{1}{2}[f(x+at)+f(x-at)]+\frac{\sqrt{L}}{2\sqrt{C}}[g(x-at)-g(x+at)]\}.$$

Аналогично строится решение задачи восстановления тока в бесконечной линии без искажений:

$$i(x,t)=e^{-\frac{R}{L}t}\{\frac{1}{2}[g(x+at)+g(x-at)]+\frac{\sqrt{C}}{2\sqrt{L}}[f(x-at)-f(x+at)]\}.$$

Геометрическая картина распространения волн в линии без искажений будет отличаться от соответствующей картины для линии без потерь тем, что присутствие коэффициента $e^{-\frac{R}{L}t}$ приводит к постепенному затуханию волн.

Заметим, что в случае конечных линий мы не можем использовать полученное решение, так как дойдя до концов, волны отразятся и возникнет эффект наложения волн, искажающий картину. Поэтому для случая конечных электрических линий, а также для решения других задач математической физики нам следует познакомиться с другими методами.

5. Ортонормальные системы функций.

Ортонормальные системы векторов встречались ранее при прохождении темы «Векторы». В частности, в трехмерном пространстве R^3 единичные векторы $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ образуют ортонормальную систему. Взаимную ортогональность векторов системы легко проверить: взяв скалярное произведение любой пары векторов из системы, мы получим 0, если взяты два разных вектора, и 1 (квадрат длины вектора), если мы имеем скалярное умножение любого вектора на себя.

Известно, что любой вектор $\vec{a} \in R^3$ может быть представлен в виде линейной комбинации векторов системы $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$: $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, причем координаты вектора представляются с помощью скалярных произведений

$$x = (\vec{a}, \vec{i}),\ y = (\vec{a}, \vec{j}),\ z = (\vec{a}, \vec{k}).$$

Возникает вопрос, можно ли построить подобные ортонормальные системы в линейных пространствах функций. Это значит, необходимо ввести аналог скалярного произведения и уметь представлять произвольные функции из линейного пространства в виде линейных комбинаций функций из ортонормальных систем. В том случае, когда ортонормальная система окажется бесконечной (счетной), представление произвольной функции из линейного пространства с помощью функций ортонормальной системы окажется разложением в ряд.

Рассмотрим пространство функций, заданных на отрезке $[a,b]$, имеющих конечное число точек разрыва первого рода на этом отрезке и непрерывных в остальных точках отрезка. Будем называть такие функции кусочно-непрерывными. Очевидно, что любая линейная комбинация двух кусочно-

непрерывных функций имеет только конечное число точек разрыва первого рода, то есть, является также кусочно-непрерывной функцией. Произведение двух кусочно-непрерывных функций также является кусочно-непрерывной функцией. Вот для таких функций мы введем скалярное произведение. Учтем, что кусочно-непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция интегрируема на этом отрезке. Поэтому возможно определить **скалярное произведение** двух кусочно-непрерывных функций $f(x)$ и $g(x)$ в виде

$$(f,g)=\int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Здесь черта сверху над $g(x)$ представляет собой комплексное сопряжение и имеет смысл только в том случае, когда функции являются комплекснозначными. Из определения следуют

Свойства скалярного произведения.

1. $(\lambda f_1+\mu f_2,g)=\lambda(f_1,g)+\mu(f_2,g)$,
2. $(f,\lambda g_1+\mu g_2)=\bar{\lambda}(f,g_1)+\bar{\mu}(f,g_2)$,
3. $(g,f)=\overline{(f,g)}$,
4. $(f,f)=\int_a^b |f(x)|^2dx\geq 0$.

Говорят, что множество А функций из пространства функций, кусочно-непрерывных на отрезке, образуют **ортогональную систему** относительно введенного на отрезке скалярного произведения, если скалярное произведение двух любых различных функций из множества А равно нулю. Множество В функций из пространства функций, кусочно-непрерывных на отрезке, образуют **ортонормальную систему** относительно введенного на отрезке скалярного произведения, если эта система ортогональна, в то время как скалярное произведение любой функции из множества В на себя дает единицу

Примеры ортонормальных и ортогональных систем.

1) Множество функций $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\right\}_{n\in N}$ составляет ортонормальную систему относительно скалярного произведения на отрезке $[-\pi,\pi]$. Проверьте это самостоятельно.

2) Множество функций $\left\{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\sin nx\right\}_{n\in N}$ составляет ортонормальную систему на отрезке $[0,\pi]$. Проверьте это самостоятельно.

3) Множество функций $\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\cos nx\right\}_{n\in N}$ составляет ортонормальную систему на отрезке $[0,\pi]$. Проверьте это самостоятельно.

4) Множество функций $\left\{e^{ikx}\right\}_{k\in Z}$ составляет ортогональную систему относительно скалярного произведения на отрезке $[-\pi,\pi]$. Проверьте это самостоятельно.

5) Множество функций $\{J_\nu(\mu_j x)\}_{j\in \mathrm{N}}$, где $J_\nu(x)-$ решение дифференциального уравнения $y''+\frac{1}{x}y'+(1-\frac{\nu^2}{x^2})y=0$, называемое функцией Бесселя 1-го рода, а $\mu_j, j\in \mathrm{N}$, – множество положительных корней функции Бесселя, является **ортогональной системой с весом** x на отрезке [0,1]. Это означает, что справедливо равенство

$$\int_0^1 xJ_\nu(\mu_i x)J_\nu(\mu_j x)dx=0, (i\neq j).$$

В случае $i=j$ имеет место следующее соотношение:

$$\int_0^1 xJ_\nu^2(\mu_i x)dx=\frac{1}{2}J_{\nu+1}^2(\mu_i).$$

Более полно о функциях Бесселя можно узнать из Приложения.

6) Множество полиномов Лежандра – полиномов, вычисляемых по формуле

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right],\ n=0,1,\ldots,$$

и удовлетворяющих уравнению Лежандра $(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0$,

составляет ортогональную систему на отрезке [–1,1]:

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx=\begin{cases} 0, & m\neq n, \\ \dfrac{2}{2n+1}, & m=n. \end{cases}$$

О полиномах Лежандра также можно узнать из приложения.

6. Коэффициенты Фурье.

Пусть функция $f(x)$ кусочно-непрерывна на отрезке $[a,b]$. Пусть B=$\{g_n(x)\}_{n\in N}$ – ортонормальная система относительно скалярного произведения на этом отрезке. Рассмотрим множество чисел $\{(f(x),g_n(x))\}_{n\in N}$. Эти числа называются коэффициентами Фурье функции $f(x)$ относительно ортонормальной системы B. Основное свойство коэффициентов Фурье формулируется следующим образом.

Среди всех конечных линейных комбинаций функций из ортонормальной системы B наилучшее приближение в среднем на отрезке $[a,b]$ *для любой кусочно-непрерывной функции дают линейные комбинации с ее коэффициентами Фурье относительно системы B.*

Поясним, что приближение в среднем на отрезке $[a,b]$ функции $f(x)$ функцией $f_n(x)$ означает близость нулю величины $\sqrt{\int_a^b |f(x)-f_n(x)|^2\,dx}$.

Таким образом, математическая запись основного свойства коэффициентов Фурье имеет вид

$$\min_{\lambda_1,\dots,\lambda_n}\sqrt{\int_a^b \left|f(x)-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k g_k(x)\right|^2 dx}=\sqrt{\int_a^b \left|f(x)-\sum_{k=1}^{n}d_k g_k(x)\right|^2 dx}\text{, где } d_k=(f(x),g_k(x)).$$

Докажем это свойство. Пользуясь свойствами скалярного произведения и ортонормальности системы, получим

$$\int_a^b |f(x)-\sum_{k=1}^n \lambda_k g_k(x)|^2\,dx=\int_a^b (f(x)-\sum_{k=1}^n \lambda_k g_k(x))\overline{(f(x)-\sum_{k=1}^n \lambda_k g_k(x))}dx=\int_a^b |f(x)|^2dx-$$

$$-\sum_{k=1}^n \lambda_k \overline{(f(x),g_k(x))}-\sum_{k=1}^n \overline{\lambda_k}(f(x),g_k(x))+\sum_{k=1}^n |\lambda_k|^2=\int_a^b |f(x)|^2dx+$$

$$+\sum_{k=1}^n (\lambda_k-(f(x),g_k(x)))\overline{(\lambda_k-(f(x),g_k(x)))}-\sum_{k=1}^n (f(x),g_k(x))\overline{(f(x),g_k(x))}=$$

$$=\int_a^b |f(x)|^2dx+\sum_{k=1}^n |\lambda_k-(f(x),g_k(x))|^2-\sum_{k=1}^n |(f(x),g_k(x))|^2.$$

Очевидно, что минимальное значение полученная величина принимает при значениях $\lambda_k=(f(x),g_k(x))$. То есть, основное свойство коэффициентов Фурье доказано. Обратим еще внимание на то, что даже при достижении своего минимума полученная величина $\int_a^b |f(x)-\sum_{k=1}^n (f(x),g_k(x))g_k(x)|^2dx\geq 0$. Следовательно, имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^n |(f(x),g_k(x))|^2\leq \int_a^b |f(x)|^2dx,$$

называемое **неравенством Бесселя** и отражающее свойство сходимости ряда из квадратов модулей коэффициентов Фурье любой кусочно-непрерывной функции. В частности, отсюда следует, что коэффициенты Фурье стремятся к нулю с ростом номера.

7. Ряды Фурье.

Рядом Фурье для функции $f(x)$ по ортогональной системе называется ряд вида $\sum_{k=1}^{\infty}(f(x),g_k(x))g_k(x)$.

Примеры рядов Фурье.

1) Тригонометрический ряд Фурье в вещественной форме – это ряд по ортонормальной системе, приведенной в первом примере 5-го параграфа. Ряд имеет вид

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \text{ где } a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx,\ k=0,1,\ldots,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx,\ k=1,2,\ldots.$$

2) Тригонометрический ряд Фурье в комплексной форме – это ряд по ортонормальной системе, приведенной в четвертом примере 5-го параграфа. Ряд имеет вид

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}, \text{ где } c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx,\ k\in Z.$$

3) Тригонометрический ряд Фурье по синусам – это ряд по ортонормальной системе, приведенной во втором примере 5-го параграфа. Ряд имеет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx, \text{ где } b_k = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin kx dx,\ k\in N.$$

4) Ряд Фурье-Бесселя – это ряд по ортогональной системе с весом, приведенной в примере 5 параграфа 5. Ряд на отрезке $[0,1]$ имеет вид

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i J_\nu(\mu_i x),\ \text{ где } a_i = \frac{2}{J_{\nu+1}^2(\mu_i)}\int_0^1 x f(x) J_\nu(\mu_i x)dx.$$

Сходимость ряда Фурье

Возникают следующие вопросы: 1) сходится ли ряд Фурье и в каком смысле, 2) если сходится, то сходится ли к самой функции $f(x)$.

Ответ на первый вопрос положителен, если рассматривать сходимость в среднем по отрезку. То есть, какой бы ни была кусочно-непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ и какой бы ни была ортонормальная на $[a,b]$

система B, существует такая интегрируемая на $[a,b]$ функция $S(x)$, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\int\limits_a^b |S(x)-\sum\limits_{k=1}^{n}(f(x),g_k(x))g_k(x)|^2\,dx}=0$.

Ответ на второй вопрос также связан со способом сходимости ряда, однако, нас будет интересовать сходимость **поточечная**. И в этом смысле ответ на второй вопрос заведомо отрицателен, так как мы допускаем у функции $f(x)$ разрывы первого рода в конечном числе точек, и следовательно, в точках разрыва ряд не может сойтись к функции $f(x)$.

Наиболее широко применимым является тригонометрический ряд Фурье. Для него справедлива **теорема Дирихле**, согласно которой *если кусочно-непрерывная функция $f(x)$ имеет конечное число участков монотонности, то тригонометрический ряд Фурье сходится в каждой точке x_0 отрезка $[-\pi,\pi]$ к значению $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$. В частности, если x_0 – точка непрерывности функции $f(x)$, то ряд Фурье в точке x_0 сходится к $f(x_0)$.*

Важную роль в задачах математической физики играют ряды Фурье-Бесселя. Справедлива следующая теорема: *всякая дважды дифференцируемая функция $f(x)$, ограниченная при $x=0$ и обращающаяся в нуль при $x=1$, может быть разложена в ряд $f(x)=\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_j J_n(\mu_j x)$, где μ_j – корни функции Бесселя $J_n(x)$, n – целое число, причем этот ряд сходится абсолютно и равномерно на [0,1].*

8. Интегральные преобразования.

Интегральные преобразования тесно связаны с рядами Фурье. До сих пор с любой кусочно-непрерывной функцией мы связывали ряд Фурье. Иногда имеет смысл заменить ряд несобственным интегралом. Покажем, как это можно сделать на примере тригонометрического ряда Фурье в комплексной форме.

Как уже было сказано, любой кусочно-непрерывной на отрезке $[-\pi,\pi]$ функции $f(x)$ можно поставить в соответствие ряд Фурье $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$, где

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx,\ k \in Z.$$

Представим теперь, что $f(x)$ кусочно-непрерывна на отрезке $[-l,l]$. Путем простейшей замены $\frac{x}{l}\pi = z$ мы преобразуем отрезок $[-l,l]$ в отрезок $[-\pi,\pi]$ и для функции $G(z) = f(\frac{l}{\pi}z) = f(x)$ построим соответствующий ряд, выраженный через переменную ξ. Возвращаясь к старой переменной, получим $f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{i\frac{\pi k}{l}x}$, где

$$C_k = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(\xi)e^{-i\frac{\pi k}{l}\xi}d\xi\ .$$

Предположим теперь, что $f(x)$ кусочно-непрерывна на отрезке $[-l,l]$ при любом $l > 0$ и существует несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\xi)|d\xi$. Обозначим $\lambda_k = \frac{k\pi}{l}$ и $F(\lambda_k) = \frac{l}{\pi}C_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-l}^{l} f(\xi)e^{-i\lambda_k\xi}d\xi$. Очевидно, что $\lambda_k \in (-\infty,+\infty)$. Тогда

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\pi}{l}F(\lambda_k)e^{i\lambda_k x} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(\lambda_k)e^{i\lambda_k x}(\lambda_{k+1}-\lambda_k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(\lambda_k)e^{i\lambda_k x}\Delta\lambda_k.$$

Последнее выражение в цепочке равенств – это интегральная сумма функции $F(\lambda)e^{i\lambda x}$. Пусть $l \to \infty$, тогда $\Delta\lambda_k \to 0$, и интегральная сумма превращается в интеграл. Тогда в точках непрерывности $f(x)$ мы получим представление

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda,$$

где

$$F(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi.$$

Запишем последние две формулы в несколько ином виде:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda, \qquad (26)$$

где

$$f(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi\,. \qquad (27)$$

Представление (26) называется представлением функции в виде интеграла Фурье, а выражение (27) называется интегральным преобразованием Фурье. Представление (26) еще называют и обратным преобразованием Фурье.

Заметим, что интегральное преобразование Фурье удобно использовать в дифференциальных уравнениях, так как $f'(\alpha)=i\alpha f(\alpha)$. Докажите это самостоятельно с помощью интегрирования по частям пользуясь тем, что существование $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt$ предполагает, что $f(t)\underset{t\to\pm\infty}{\to}0$.

Аналогично тому, как от ряда Фурье был совершён переход к интегральной формуле Фурье (26), с помощью некоторых замен и предельных переходов от ряда Фурье-Бесселя можно перейти к интегральной формуле Фурье – Ханкеля (Ганкеля).

$$f(x)=\int_0^{\infty} zJ_\nu(xz)\left[\int_0^{\infty} tJ_\nu(tz)f(t)dt\right]dz\,.$$

Если обозначить

$$F(z)=\int_0^{\infty} tJ_\nu(tz)f(t)dt \qquad (26')$$

и назвать эту функцию преобразованием Ханкеля функции $f(x)$, то из предыдущей формулы следует:

$$f(x)=\int_0^{\infty} zJ_\nu(xz)F(z)dz\,. \qquad (27')$$

Это формула представления функции в виде интеграла Ханкеля или формула обратного преобразования Ханкеля.

Интегральное преобразование Ханкеля удобно применять при решении уравнений, записанных в полярных координатах. Так, например, можно

показать, что если к функции $f(x)$ применить оператор $\nabla^2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dx} - \frac{\nu^2}{x^2}$, то после ряда вычислений получим:

$$\int_0^\infty x J_\nu(xz) \nabla^2 [f(x)] dx = -z^2 F(z),$$

т.е. применение оператора ∇^2 к функции $f(x)$ приводит к умножению образа Ханкеля этой функции на $-z^2$.

9. Метод Фурье (разделения переменных) решения задач математической физики

Метод Фурье состоит в том, что мы отыскиваем частные решения линейного однородного уравнения в частных производных, удовлетворяющие нулевым краевым условиям, в виде $X(x) \cdot T(t)$ – в том случае, когда переменными являются x и t. Линейная комбинация таких решений с произвольными коэффициентами при удовлетворении начальных условий дает ряд Фурье для известных функций. Таким образом, произвольные ранее коэффициенты определяются из начальных условий.

В случаях, когда краевые условия не являются нулевыми, прибегают к дополнительным частным решениям. Эти приемы будут продемонстрированы при решении конкретных задач.

1) Распределение напряжений в электрической линии конечной длины.

Пусть у линии без искажений длины l оба конца изолированы. Найдем распределение потенциала вдоль линии, если в начальный момент потенциал распределен по закону $u(x,0) = Ax$, $x \in [0,l]$. В начальный момент ток в цепи отсутствует.

В соответствии с рассуждениями параграфа 3 при условии $RC = GL$ мы вводим новую функцию $u(x,t) = e^{-\frac{R}{L}t} v(x,t)$. Уравнение для новой функции $v(x,t)$ принимает вид

$$v''_{tt} = a^2 v''_{xx}. \tag{28}$$

Условие изолированности концов означает, что $u'_x(0,t) = u'_x(l,t) = 0$. Очевидно, что для новой функции краевые условия будут таким же: $v'_x(0,t) = v'_x(l,t) = 0$. Подставляя начальное распределение потенциала в выражение $u(x,t) = e^{-\frac{R}{L}t} v(x,t)$, получаем для новой функции начальное условие $v(x,0) = Ax$. Второе начальное условие получим так же, как это было сделано в параграфе 4, из условия $i(x,0) = 0$. Оно имеет вид $v'_t(x,0) = 0$. Таким образом, в дополнение к уравнению (28) мы имеем нулевые краевые условия $v'_x(0,t) = v'_x(l,t) = 0$ и начальные условия $v(x,0) = Ax$ и $v'_t(x,0) = 0$.

Решение задачи мы ищем в виде $v(x,t) = \sum_k X_k(x) T_k(t)$, где частное решение $X_k(x)T_k(t)$ удовлетворяет уравнению (28) и нулевым краевым условиям. Подставляя $X_k(x)T_k(t)$ в краевые условия, получим: $X'_k(0) = X'_k(l) = 0$. Подставляя $X_k(x)T_k(t)$ в уравнение (28), получим, разделяя переменные: $\dfrac{T''_k(t)}{a^2 T_k(t)} = \dfrac{X''_k(x)}{X_k(x)}$. Очевидно, что стоящая слева и зависящая только от t функция совпадает со стоящей справа и зависящей только от x функцией только тогда, когда при каждом k и левая, и правая части равенства равны не зависимой от t и от x константе. Исследуем, какими могут быть эти константы.

А) Предположим, что $\dfrac{X''_k(x)}{X_k(x)} = \lambda_k{}^2 > 0$. В этом случае, решая линейное уравнение с постоянными коэффициентами $X''_k(x) - \lambda_k{}^2 X_k(x) = 0$, получим $X_k(x) = C_k e^{\lambda_k x} + D_k e^{-\lambda_k x}$. Требуя выполнения краевых условий $X'_k(0) = X'_k(l) = 0$, построим для коэффициентов C_k и D_k систему $\begin{cases} C_k - D_k = 0, \\ C_k e^{\lambda_k l} - D_k e^{-\lambda_k l} = 0, \end{cases}$ имеющую только тривиальные решения. Следовательно, предположение о том, что $\dfrac{X''_k(x)}{X_k(x)} = \lambda_k{}^2 > 0$ привело только к нулевым частным решениям.

Б) Предположим, что $\frac{X_0''(x)}{X_0(x)}=0$. Такому уравнению удовлетворяет только линейная функция: $X_0(x)=C_0x+D_0$. Выполняя краевые условия, получим $C_0=0$. Таким образом, существует нетривиальное решение $X_0(x)\equiv D_0$. Соответствующее уравнение для $T_0(t)$ дает $T_0(t)=A_0+B_0t$. Таким образом, отвечающее значению нулевой константы частное решение (в силу произвольности A_0 и B_0) можно взять в виде $X_0(x)T_0(t)=A_0+B_0t$.

В) Предположим, что $\frac{X_k''(x)}{X_k(x)}=-\lambda_k{}^2<0$. В этом случае, решая линейное уравнение с постоянными коэффициентами $X_k''(x)+\lambda_k{}^2X_k(x)=0$, получим $X_k(x)=C_k\cos\lambda_kx+D_k\sin\lambda_kx$. Условие $X_k'(0)=0$ дает $D_k=0$. Выполняя второе краевое условие $X_k'(l)=0$, приходим к равенству $C_k\sin\lambda_kl=0$. Нетривиальное решение мы получим только при условии, что $\lambda_k=\frac{\pi k}{l}$, $k\in N$. Решая теперь уравнение для $T_k(t)$: $\frac{T_k''(t)}{a^2T_k(t)}=-(\frac{\pi k}{l})^2$, получим $T_k(t)=A_k\cos\frac{\pi kat}{l}+B_k\sin\frac{\pi kat}{l}$. В силу произвольности констант A_k и B_k частное решение можно взять в виде

$$X_k(x)T_k(t)=(A_k\cos\frac{\pi kat}{l}+B_k\sin\frac{\pi kat}{l})\cos\frac{\pi kx}{l},\ k\in N.$$

Итак, решение поставленной задачи для функции $v(x,t)$ имеет вид

$$v(x,t)=A_0+B_0t+\sum_{k=1}^{\infty}(A_k\cos\frac{\pi kat}{l}+B_k\sin\frac{\pi kat}{l})\cos\frac{\pi kx}{l}. \qquad (29)$$

Нам остается удовлетворить начальным условиям:

$$A_0+\sum_{k=1}^{\infty}A_k\cos\frac{\pi kx}{l}=Ax \text{ и } B_0+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi ka}{l}B_k\cos\frac{\pi kx}{l}=0.$$

Поскольку произвольные константы оказываются связанными с коэффициентами Фурье разложения функции Ax и константы 0 в ряды по косинусам на отрезке $[0,l]$, получим $B_0=0,\ B_k=0,\ k\in N$; $A_0=\frac{1}{l}\int_0^l Axdx=\frac{Al}{2}$,

$$A_k=\frac{2}{l}\int_0^l Ax\cos\frac{\pi kx}{l}dx=\frac{2Al}{\pi^2k^2}\cos\frac{\pi kx}{l}\Big|_0^l=\begin{cases}0, k=2n,\\ -\frac{4Al}{\pi^2k^2}, k=2n+1\end{cases},\ n\in N.$$

В результате решение для функции $v(x,t)$ имеет вид

$$v(x,t)=Al[\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\frac{(2n+1)\pi at}{l}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{l}].$$

Теперь для того, чтобы получить распределение напряжений $u(x,t)$, следует умножить полученное решение для $v(x,t)$ на $e^{-\frac{R}{L}t}$.

2) Задача о включении конечной линии без потерь.

Пусть линия длины l без потерь ($R=G=0$) накоротко замкнута на конце $x=l$. До начального момента напряжение и ток в цепи отсутствовали, в начальный момент в конце $x=0$ включается источник переменного тока с ЭДС $E\sin\omega t$. Найти $u(x,t)$ при $t>0$.

В соответствии с выводами параграфа 3 напряжение $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению колебаний $u''_{tt}=a^2u''_{xx}$. Начальные условия дают $u(x,0)=0$, $u'_t(x,0)=0$. Краевое условие на правом конце нулевое: $u(l,t)=0$. На левом конце краевое условие ненулевое: $u(0,t)=E\sin\omega t$. Поэтому сразу невозможно применить метод Фурье, основанный на том, что собственные функции $X_k(x)$ или их производные должны на концах отрезка обращаться в ноль. Сначала ликвидируем граничную неоднородность при помощи дополнительного слагаемого.

Ищем решение в виде $u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$, где функцию $v(x,t)$ подберем так, чтобы она удовлетворяла данным краевым условиям и уравнению колебаний. Ищем $v(x,t)$ в виде $v(x,t)=X(x)\sin\omega t$. Подставляя в краевые условия, получим $X(0)=E,\ X(l)=0$. Подставляя в уравнение колебаний, получим $-\omega^2X(x)=a^2X''(x)$. Решая это дифференциальное уравнение, имеем $X(x)=C\cos\frac{\omega x}{a}+D\sin\frac{\omega x}{a}$. Подставляя краевые условия, получим $C=E$, $E\cos\frac{\omega l}{a}+D\sin\frac{\omega l}{a}=0$. Отсюда $D=-E\operatorname{ctg}\frac{\omega l}{a}$. Поэтому вспомогательная функция, «вбирающая в себя» краевую неоднородность и удовлетворяющая уравнению колебаний, после тригонометрических упрощений принимает вид

$$v(x,t)=\frac{E\sin\frac{\omega(l-x)}{a}}{\sin\frac{\omega l}{a}}\sin\omega t.$$

Теперь на долю второго слагаемого, функции $w(x,t)$, остается уравнение колебаний и нулевые краевые условия. Начальные условия для функции $w(x,t)$ будут равны начальным условиям для функции $u(x,t)$ минус

соответствующие начальные условия для функции $v(x,t)$. Таким образом, нам предстоит найти методом Фурье решение уравнения

$$w''_{tt} = a^2 w''_{xx} \ ,$$

удовлетворяющее краевым условиям $w(0,t) = w(l,t) = 0$ и начальным условиям

$$w(x,0) = 0, \ w'_t(x,0) = -\frac{E\omega \sin\frac{\omega(l-x)}{a}}{\sin\frac{\omega l}{a}}.$$

Представим решение в виде $w(x,t) = \sum_k X_k(x)T_k(t)$, где частное решение $X_k(x)T_k(t)$ удовлетворяет уравнению колебаний и нулевым краевым условиям. Подставляя $X_k(x)T_k(t)$ в краевые условия, получим: $X_k(0) = X_k(l) = 0$. Подставляя $X_k(x)T_k(t)$ в уравнение колебаний, получим, разделяя переменные уравнение $\frac{T''_k(t)}{a^2 T_k(t)} = \frac{X''_k(x)}{X_k(x)}$, справедливое только в случае, если обе части уравнения при каждом значении k равны константе. Исследуем, какой может быть эта константа.

А) Предположим, что $\frac{X''_k(x)}{X_k(x)} = \lambda_k{}^2 > 0$. В этом случае, решая линейное уравнение с постоянными коэффициентами $X''_k(x) - \lambda_k{}^2 X_k(x) = 0$, получим $X_k(x) = C_k e^{\lambda_k x} + D_k e^{-\lambda_k x}$. Требуя выполнения краевых условий $X_k(0) = X_k(l) = 0$, построим для коэффициентов C_k и D_k систему $\begin{cases} C_k + D_k = 0, \\ C_k e^{\lambda_k l} + D_k e^{-\lambda_k l} = 0, \end{cases}$ имеющую только тривиальные решения. Следовательно, предположение о том, что $\frac{X''_k(x)}{X_k(x)} = \lambda_k{}^2 > 0$ привело только к нулевым частным решениям.

Б) Предположим, что $\frac{X''_0(x)}{X_0(x)} = 0$. Такому уравнению удовлетворяет только линейная функция: $X_0(x) = C_0 x + D_0$. Выполняя краевые условия, получим $C_0 = D_0 = 0$. Таким образом, в этом случае существует также только тривиальное решение $X_0(x) \equiv 0$.

В) Предположим, что $\frac{X_k''(x)}{X_k(x)} = -\lambda_k{}^2 < 0$. В этом случае, решая линейное уравнение с постоянными коэффициентами $X_k''(x) + \lambda_k{}^2 X_k(x) = 0$, получим $X_k(x) = C_k \cos\lambda_k x + D_k \sin\lambda_k x$. Условие $X_k(0) = 0$ дает $C_k = 0$. Выполняя второе краевое условие $X_k(l) = 0$, приходим к равенству $D_k \sin\lambda_k l = 0$. Нетривиальное решение мы получим только при условии, что $\lambda_k = \frac{\pi k}{l}$, $k \in N$. Решая теперь уравнение для $T_k(t)$: $\frac{T_k''(t)}{a^2 T_k(t)} = -(\frac{\pi k}{l})^2$, получим $T_k(t) = A_k \cos\frac{\pi kat}{l} + B_k \sin\frac{\pi kat}{l}$. В силу произвольности констант A_k и B_k частное решение можно взять в виде

$$X_k(x)T_k(t) = (A_k \cos\frac{\pi kat}{l} + B_k \sin\frac{\pi kat}{l})\sin\frac{\pi kx}{l},\ k \in N.$$

Итак, решение поставленной задачи для функции $w(x,t)$ имеет вид

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}(A_k \cos\frac{\pi kat}{l} + B_k \sin\frac{\pi kat}{l})\sin\frac{\pi kx}{l}. \qquad (30)$$

Нам остается удовлетворить начальным условиям:

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{\pi kx}{l} = 0 \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi ka}{l} B_k \sin\frac{\pi kx}{l} = -\frac{E\omega \sin\frac{\omega(l-x)}{a}}{\sin\frac{\omega l}{a}}.$$

Поскольку произвольные константы оказываются связанными с коэффициентами Фурье разложения функции Ax и константы 0 в ряды по синусам на отрезке $[0,l]$, получим $A_k = 0,\ k \in N$;

$$B_k = -\frac{2}{k\pi a}\int_0^l \frac{E\omega \sin\frac{\omega(l-x)}{a}}{\sin\frac{\omega l}{a}} \sin\frac{\pi kx}{l} dx = \frac{2E\omega a}{l[(\frac{\pi ka}{l})^2 - \omega^2]},\ k \in N.$$

Итак, остается подставить найденные константы в (30) и прибавить найденную выше функцию $v(x,t)$.

3) Задача о колебании круглой мембраны.

Выше было выведено уравнение колебаний плоской мембраны, имеющее вид:

$$u_{tt}'' = a^2(u_{xx}'' + u_{yy}''), \qquad (31)$$

где $t \in [0,\infty), (x,y) \in G \subset \mathrm{R}^2$.

Функция $u(x,y,t)$ в этом случае означает отклонение точки (x,y) в момент t от горизонтальной плоскости. Будем искать решение уравнения (31), удовлетворяющее условиям: $u(x,y,0) = f_1(x,y),\ u'_t(x,y,0) = f_2(x,y),\ (x,y) \in G$ (начальные условия) и принимающее заданное значение на границе области G (граничное условие). Такая задача для волнового уравнения называется *первой краевой задачей.* Приведём решение этой задачи при некоторых упрощающих предположениях: пусть область G является кругом с центром в начале координат радиуса r_0, а искомая функция $u(x,y,t)$ при переходе к полярным координатам на плоскости переходящая в $u(r,\varphi,t)$, не зависит от φ, то есть решение симметрично относительно φ. В полярных координатах уравнение колебаний имеет вид : $u''_{tt} = a^2(u''_{rr} + \frac{1}{r}u'_r + \frac{1}{r^2}u''_{\varphi\varphi})$, но в случае симметрии по φ оно ещё упрощается, а соответствующая первая краевая задача принимает следующий вид.

Найти решение $u(r,t)$ уравнения

$$u''_{tt} = a^2(u''_{rr} + \frac{1}{r}u'_r)$$

при условиях: $u(r_0,t) = 0$ (граничное условие) и $u(r,0) = f_1(r);\ u'_t(r,0) = f_2(r)$ (начальные условия).

Сформулированную задачу будем решать методом разделения переменных.

Пусть $u_k(r,t) = R_k(r)$ – частное решение, удовлетворяющее уравнению колебаний и нулевым граничным условиям. Подставляя это произведение в уравнение, разделяя переменные и вводя параметр, имеем

$$\frac{T''_k}{a^2 T_k} = \frac{R''_k + \frac{1}{r}R'_k}{R_k} = -\lambda_k{}^2.$$

Отсюда получим уравнение относительно $R_k(r)$:

$$R''_k + \frac{1}{r}R'_k + \lambda_k{}^2 R_k = 0.$$

Введем в уравнении новое переменное $\lambda_k r = \rho$ и новую функцию: $F_k(\rho) = R_k(r) = R_k(\frac{\rho}{\lambda_k})$. Тогда уравнение относительно $R_k(r)$ для новой функции примет вид $F''_k + \frac{1}{\rho}F'_k + F_k = 0$.

Последнее уравнение – это уравнение Бесселя при $\nu = 0$, то есть $F_k(\rho) = J_0(\rho) = J_0(\lambda_k r) = R_k(r)$. В соответствии с граничным условием $J_0(\lambda_k r_0) = 0$, следовательно, постоянная λ_k должна принимать значения $\lambda_k = \dfrac{\mu_k}{r_0}$, где μ_k, $k = 1, 2, ...,$ – положительные нули функции Бесселя $J_0(x)$.

Подставим найденные значения λ_k в уравнение для $T_k(t): T_k'' + \lambda_k^2 a^2 T_k = 0$. Отсюда следует, что $T_k(t) = \alpha_k Cos\lambda_k at + \beta_k Sin\lambda_k at$, а функции $u_k(t,r) = (\alpha_k Cos\lambda_k at + \beta_k Sin\lambda_k at) J_0(\lambda_k r)$, $k = 1, 2, \ldots$ являются решениями уравнения колебаний, удовлетворяющими граничным условиям, при любых α_k, β_k. Составим теперь сумму таких функций

$$u(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k Cos \frac{\mu_k}{r_0} at + \beta_k Sin \frac{\mu_k}{r_0} at) J_0(\frac{\mu_k}{r_0} r)$$

и подберём коэффициенты α_k и β_k так, чтобы выполнялись и начальные условия.

Соотношения $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k J_0(\frac{\mu_k}{r_0} r) = f_1(r)$ и $\sum_{k=1}^{\infty} a\lambda_k \beta_k J_0(\frac{\mu_k}{r_0} r) = f_2(r)$ означают, что функции $f_1(r)$, $f_2(r)$ разлагаются в ряды по функциям Бесселя $J_0(\frac{\mu_k}{r_0} r)$, при этом коэффициенты α_k, β_k определяются однозначно:

$$\alpha_k = \frac{2}{J_1^2(\mu_k)} \int_0^1 x J_0(\mu_k x) f_1(r_0 x) dx; \; \beta_k = \frac{2r_0}{a\mu_k J_1^2(\mu_k)} \int_0^1 x J_0(\mu_k x) f_2(r_0 x) dx,$$

здесь через x обозначено отношение $\dfrac{r}{r_0}$, т.е. $r = r_0 x$.

4) Решение задачи теплопроводности в конечном стержне.

Требуется восстановить температуру внутри стержня с теплоизолированной боковой поверхностью длины l, если конец $x = 0$ теплоизолирован, а на конце $x = l$ поддерживается постоянная температура U_0. Начальное распределение температуры задано: $U(x,0) = f(x)$. Как было показано в параграфе 3, температура стержня удовлетворяет уравнению теплопроводности $U_t' = a^2 U_{xx}''$. Краевые условия имеют вид: $U_x'(0,t) = 0$, $U(l,t) = U_0$.

Здесь имеется неоднородность на правом конце, поэтому сразу применять метод Фурье нельзя. Представим искомую функцию в виде

$U(x,t)=V(x,t)+W(x,t)$, где функция $V(x,t)$ должна удовлетворять уравнению теплопроводности и заданным краевым условиям. В данном случае такая функция будет очень простой: $V(x,t)\equiv U_0$.

Функция $W(x,t)$ должна удовлетворять уравнению теплопроводности, краевым условиям $W_x'(0,t)=0, W(l,t)=0$ и начальному условию $W(x,0)=f(x)-U_0$.

Так же, как в задачах об электрических колебаниях, представим решение в виде $W(x,t)=\sum_k X_k(x)T_k(t)$, где частное решение $X_k(x)T_k(t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности и нулевым краевым условиям. Подставляя $X_k(x)T_k(t)$ в краевые условия, получим: $X_k'(0)=X_k(l)=0$. Подставляя $X_k(x)T_k(t)$ в уравнение теплопроводности, получим, разделяя переменные: $\frac{T_k'(t)}{a^2T_k(t)}=\frac{X_k''(x)}{X_k(x)}$. Очевидно, что стоящая слева и зависящая только от t функция совпадает со стоящей справа и зависящей только от x функцией только тогда, когда и левая, и правая части равенства равны не зависимой от t и от x константе. Используя краевые условия, исследуем, какими могут быть эти константы так же, как в предыдущих задачах.

А) Предполагая, что $\frac{X_k''(x)}{X_k(x)}=\lambda_k{}^2>0$, решая дифференциальное уравнение и используя краевые условия, получим только тривиальное (нулевое) частное решение.

Б) Предполагая, что $\frac{X_k''(x)}{X_k(x)}=0$, также получим только тривиальное решение.

В) Предположим, что $\frac{X_k''(x)}{X_k(x)}=-\lambda_k{}^2<0$. В этом случае, решая линейное уравнение с постоянными коэффициентами, получим $X_k(x)=C_k\cos\lambda_k x+D_k\sin\lambda_k x$. Условие $X_k'(0)=0$ дает $D_k=0$. Выполняя второе краевое условие $X_k(l)=0$, приходим к равенству $C_k\cos\lambda_k l=0$. Нетривиальное решение мы получим только при условии, что $\lambda_k=\frac{\pi(2k+1)}{2l}$, $k=0,1,\ldots$. Решая теперь уравнение для $T_k(t)$:

$\frac{T_k'(t)}{a^2 T_k(t)} = -(\frac{\pi(2k+1)}{2l})^2$, получим $T_k(t) = A_k e^{-(\frac{\pi(2k+1)a}{2l})^2 t}$. В силу произвольности A_k решение может быть взято в виде $W(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k e^{-(\frac{\pi(2k+1)a}{2l})^2 t} \cos\frac{\pi(2k+1)}{2l} x$. Остается применить начальное условие и определить константы A_k. Имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos\frac{\pi(2k+1)}{2l} x = f(x) - U_0.$$

Нетрудно проверить, что функции $\left\{\sqrt{\frac{2}{l}} \cos\frac{\pi(2k+1)}{2l} x\right\}_{k=0,1,\ldots}$ образуют ортонормальную систему на отрезке $[0,l]$, поэтому

$$A_k = \frac{2}{l}\int_0^l (f(x) - U_0)\cos\frac{\pi(2k+1)}{2l} x dx.$$

5) Решение задачи о распространении тепла в круглой пластине.

Пусть горизонтально расположенная круглая пластина радиуса r_0 с центром в начале координат является настолько тонкой, что по высоте ее температура не меняется. Пусть ее верхняя и нижняя поверхности являются теплоизолированными, а температура внутри пластины зависит только от расстояния соответствующей точки до центра. В этом случае целесообразно перейти от декартовых координат к полярным и искать температуру в пластине в виде функции $U(r,t)$, где r – расстояние точки до центра пластина, t – время, $0 \le r \le r_0$, $t \ge 0$.

Зададим начальное условие: $U(r,0) = f(r)$, и нулевое граничное условие: $U(r_0,t) = 0$. Если бы граничное условие не было нулевым, следовало бы представить решение в виде суммы искомой функции и константы, совпадающей со значением граничной температуры.

Уравнение теплопроводности (17) с учетом того, что функция не зависит от z, примет вид

$$U_t' = a^2(U_{xx}'' + U_{yy}''),$$

а после введения полярных координат $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$ станет таким: $U'_t = a^2(U''_{rr} + \frac{1}{r}U'_r + \frac{1}{r^2}U''_{\varphi\varphi})$. Учитывая, что наша функция не зависит от φ, получим в результате уравнение

$$U'_t = a^2(U''_{rr} + \frac{1}{r}U'_r).$$

Представляя решение задачи в виде $U(r,t) = \sum_n R_n(r)T_n(t)$, подставляя в уравнение, разделяя переменные и вводя константу, получим,

$$\frac{T_n'}{a^2 T_n} = \frac{R_n'' + r^{-1}R_n'}{R_n} = c_n.$$

Исследуем, как и выше, вопрос о том, какой может быть константа c_n. С учетом того, что на границе постоянно поддерживается нулевая температура, с течением времени, очевидно, невзирая на начальное распределение температур, внутренние точки пластины будут иметь температуру, приближающуюся к нулевой. Поскольку $T_n(t) = A_n e^{c_n a^2 t}$, указанный процесс при $t \to \infty$ возможен только если $c_n = -\lambda_n{}^2 < 0$. Следовательно, $R_n(r)$ является решением уравнения $R_n'' + \frac{1}{r}R_n' + \lambda_n{}^2 R_n = 0$. Сделаем следующие замены в последнем уравнении: $r = \frac{\rho}{\lambda_n}$, $R_n(r) = R_n(\frac{\rho}{\lambda_n}) = Z_n(\rho)$. Тогда функция $Z_n(\rho)$ является решением уравнения $F_n'' + \rho^{-1}F_n' + F_n = 0$, которое является уравнением Бесселя с $\nu = 0$. Поэтому $R_n(r) = J_0(\lambda_n r)$. В соответствии с граничным условием имеем: $R_n(r_0) = 0$. Следовательно, $\lambda_n r_0 = \mu_n$ – n-й положительный корень функции Бесселя $J_0(z)$. В результате решение уравнения теплопроводности, удовлетворяющее заданному граничному условию, имеет вид

$$U(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-a^2\mu_n{}^2 t/r_0} J_0(\mu_n \frac{r}{r_0}).$$

Остается найти коэффициенты A_n, используя начальное условие. Поскольку $f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\mu_n \frac{r}{r_0})$, искомые коэффициенты являются коэффициентами разложения функции $f(r)$ в соответствующий ряд Фурье-Бесселя, и значит,

$$A_n = \frac{2}{J_1^2(\mu_n) r_0^2} \int_0^{r_0} r f(r) J_0(\mu_n \frac{r}{r_0}) dr = \frac{2}{J_1^2(\mu_n)} \int_0^1 x f(r_0 x) J_0(\mu_n x) dx \ .$$

6) Решение краевых задач Дирихле и Неймана в круге.

Рассмотрим уравнение Лапласа в круге $x^2 + y^2 \le R^2$ для функции $U(x, y)$, которое согласно определениям параграфа 3 имеет вид $U''_{xx} + U''_{yy} = 0$. **Задачей Дирихле** называется задача определения гармонической (удовлетворяющей уравнению Лапласа) функции в области по ее значениям на границе этой области. **Задачей Неймана** называется задача определения гармонической функции в области по значениям ее производной по нормали к границе на границе этой области.

В данном случае границей области является окружность с центром в нулевой точке, а нормаль к границе совпадает по направлению с радиусом-вектором граничной точки. Очевидно, что для решения задач целесообразно перейти к полярным координатам: $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$. Переходя к новым координатам, получим уравнение Лапласа в виде

$$U''_{rr} + \frac{1}{r} U'_r + \frac{1}{r^2} U''_{\varphi\varphi} = 0 . \qquad (34)$$

Будем решать задачи методом Фурье, где условие однородности краевых условий по одной из переменных заменены условием ограниченности решения в круге и условием 2π-периодичности функции $U(r, \varphi)$ по переменной φ.

Возьмем решение в виде $U(r, \varphi) = \sum_k R_k(r) \Phi_k(\varphi)$, где частное решение $R_k(r)\Phi_k(\varphi)$ удовлетворяет уравнению Лапласа, ограничено и 2π-периодично по φ, то есть, $\Phi_k(\varphi + 2\pi) = \Phi_k(\varphi)$. Подставляя частное решение в уравнение, получим после разделения переменных $\frac{r^2 R''_k + r R'_k}{R_k} = -\frac{\Phi''_k}{\Phi_k}$, что возможно только в случае, когда обе части уравнения – константы. Имея опыт решения дифференциальных уравнений, мы видим, что периодическое решение $\Phi_k(\varphi)$ можно получить только в случае, когда $-\frac{\Phi''_k}{\Phi_k} = \lambda_k{}^2 \ge 0$. Тогда $\Phi_k(\varphi) = C_k \cos\lambda_k\varphi + D_k \sin\lambda_k\varphi$, причем 2π-периодичность возможна только

при $\lambda_k = k$, $k = 0,1,\ldots$. Теперь для функции $R_k(r)$ имеем уравнение $r^2 R_k'' + rR_k' - k^2 R = 0$. Такое уравнение приводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами заменой $r = e^t$. Действительно, имеем $\ddot{R}_k - k^2 R_k = 0$, откуда, возвращаясь к переменной r, получим $R_k(r) = A_k r^k + B_k r^{-k}$, $k = 0,1,\ldots$.

Учитывая, что решение в круге $0 \le r \le R$ должно быть ограниченным, возьмем $B_k = 0$. Таким образом, решение уравнения (34) имеет вид

$$U(r,\varphi) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (C_k \cos k\varphi + D_k \sin k\varphi) r^k . \qquad (35)$$

Если мы решаем **задачу Дирихле** с краевым условием $U(R,\varphi) = f(\varphi)$, то имеем $f(\varphi) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (C_k \cos k\varphi + D_k \sin k\varphi) R^k$, и значит, $C_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta$,

$$C_k = \frac{1}{\pi R^k} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos k\theta d\theta, \qquad D_k = \frac{1}{\pi R^k} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin k\theta d\theta, \ k \in N .$$

Если мы решаем **задачу Неймана** с краевым условием $U_r'(R,\varphi) = g(\varphi)$, то имеем $g(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} k(C_k \cos k\varphi + D_k \sin k\varphi) R^{k-1}$. Очевидно, что заданная функция $g(\varphi)$ не должна иметь свободного члена при разложении в тригонометрический ряд Фурье. То есть, должно выполняться условие разрешимости задачи Неймана: $\int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi) d\varphi = 0$.

Если условие разрешимости выполнено, коэффициенты решения (35) определяются по формулам

$$C_k = \frac{1}{\pi k R^{k-1}} \int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi) \cos k\varphi d\varphi , \quad D_k = \frac{1}{\pi k R^{k-1}} \int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi) \sin k\varphi d\varphi, \ k \in N .$$

Пользуясь полученным решением задачи Дирихле в виде ряда (35), найдем представление этого же решения в виде интеграла. Для этого внесем в решение (35) все коэффициенты:

$$U(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)d\theta+\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\cos k\theta d\theta\cos k\varphi+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\sin k\theta d\theta\sin k\varphi)(\frac{r}{R})^k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)d\theta+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{r}{R})^k\cos k(\theta-\varphi)d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\left\{1+\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{r}{R})^k(e^{ik(\theta-\varphi)}+e^{-ik(\theta-\varphi)})\right\}d\theta.$$

Воспользуемся формулой суммы бесконечной геометрической прогрессии $\sum_{k=1}^{\infty}t^k=\frac{t}{1-t}$, $|t|<1$. Теперь получим

$$U(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\left\{1+\frac{re^{i(\theta-\varphi)}}{R-re^{i(\theta-\varphi)}}+\frac{re^{-i(\theta-\varphi)}}{R-re^{-i(\theta-\varphi)}}\right\}d\theta=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\theta,$$

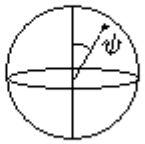
и окончательно имеем формулу

$$U(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\theta,$$

называемую **формулой Пуассона.**

7) Решение одной задачи электроразведки.

Требуется найти решение задачи Дирихле для внешности сферы единичного радиуса, если искомая функция u зависит только от расстояния переменной точки до центра сферы r и от ψ – угла, который радиус-вектор переменной точки, направленный из центра сферы, образует с направлением от центра сферы к «северному полюсу». Решение должно обращаться в нуль в бесконечно удаленной точке и принимать значения $u_0\cos\psi$ на поверхности сферы.



Запишем для функции $u(r,\psi)$ уравнение Лапласа в сферических координатах, учитывая, что u не зависит от φ:

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r})+\frac{1}{\sin\psi}\frac{\partial}{\partial\psi}(\sin\psi\frac{\partial u}{\partial\psi})=0.$$

Представим решение в виде $u(r,\psi)=\sum_n R_n(r)\Psi_n(\psi)$, подставим в уравнение и разделим переменные, введя константу c_n. Мы получим систему равенств

$$\begin{cases} r^2R_n''+2rR_n'-c_nR_n=0, \\ \sin\psi\,\Psi_n''+\cos\psi\,\Psi_n'+c_n\sin\psi\,\Psi_n=0. \end{cases}$$

Сделаем замену: $\Psi_n(\psi)=F_n(\cos\psi)=F_n(\varsigma)$. Тогда последнее уравнение системы в новых терминах примет вид $(1-\varsigma^2)F_n''-2\varsigma F_n'+c_nF_n=0$. Это уравнение встречалось нам в примере 6 пятого параграфа с константой $c_n=n(n+1),\ n=0,1,...,$, и именно при таком значении постоянной c_n решение последнего уравнения будет ограниченным при $\varsigma=\pm1$. Следовательно, решение последнего уравнения системы имеет вид $\Psi_n(\psi)=P_n(\cos\psi)$, где $P_n(\varsigma)$ – полином Лежандра. Константу $c_n=n(n+1)$ мы также определили. Следовательно, нам остается решить первое уравнение системы:

$$r^2R_n''+2rR_n'-n(n+1)R_n=0.$$

Последнее дифференциальное уравнение – это уравнение Эйлера, которое с помощью замены $r=e^t$ приводится к линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами и имеет решение вида $R_n(r)=C_nr^n+D_n\frac{1}{r^{n+1}}$. Поскольку наше решение должно обращаться в нуль в бесконечно удаленной точке, приходится положить $C_n=0,\ n=0,1,....$ Таким образом, мы получили решение уравнения Лапласа, обращающееся в нуль в бесконечности, в виде

$$u(r,\psi)=\sum_{n=0}^{\infty}D_n\frac{1}{r^{n+1}}P_n(\cos\psi).$$

Остается удовлетворить краевому условию $u_0\cos\psi=\sum_{n=0}^{\infty}D_nP_n(\cos\psi)$. В силу ортогональности системы из полиномов Лежандра, замечая, что $P_1(\cos\psi)=\cos\psi$, мы получим: $D_n=0,\ n=0,2,3,....,\ D_1=u_0$. Итак, решение задачи имеет вид

$$u(r,\psi)=\frac{u_0}{r^2}\cos\psi\,.$$

10. Метод интегральных преобразований решения задач математической физики

Преобразование Фурье в задаче теплопроводности для бесконечного стержня

Рассмотрим задачу теплопроводности для стержня с теплоизолированной боковой поверхностью настолько длинного, что на процессы, проходящие в центральной части стержня, не влияют температурные режимы на концах стержня. Такой стержень мы будем считать бесконечным и не будем задавать краевых условий. Таким образом, стоит задача решения уравнения теплопроводности

$$U'_t=a^2U''_{xx},\ x\in(-\infty,+\infty),\ t\geq 0\,,$$

если задано начальное распределение температур: $U(x,0)=f(x), x\in(-\infty,+\infty)$.

Применим к обеим частям уравнения теплопроводности интегральное преобразование Фурье (27) по переменной x. Мы получим в соответствии со свойством преобразования Фурье от производной следующее равенство:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}U'_t(\xi,t)e^{-i\lambda\xi}d\xi=-a^2\lambda^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}U(\xi,t)e^{-i\lambda\xi}d\xi\,.$$

При условии достаточной гладкости искомого решения в левой части последнего уравнения можно поменять дифференцирование по t и интегрирование по z. Тогда, используя принятое обозначение для преобразования Фурье, получим равенство

$$U'_t=-a^2\lambda^2U\,.$$

Последнее соотношение является дифференциальным уравнением относительно U, решая которое, получим $U(\lambda,t)=C(\lambda)e^{-a^2\lambda^2t}$. Поскольку $U(\lambda,0)=f(\lambda)$, имеем $C(\lambda)=f(\lambda)$. Таким образом,

$$U(\lambda,t)=f(\lambda)e^{-a^2\lambda^2t}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)e^{-i\lambda\xi}e^{-a^2\lambda^2t}d\xi\,.$$

К полученному выражению применим обратное преобразование Фурье (26):

$$U(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{-i\lambda\xi}\cdot e^{-a^2\lambda^2 t}d\xi\right]e^{i\lambda x}d\lambda.$$

Если в последней формуле изменить порядок интегрирования, то решение задачи представится в виде:

$$U(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(\xi)d\xi\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2\lambda^2 t}e^{i\lambda(x-\xi)}d\lambda. \qquad (36)$$

Оказывается, внутренний интеграл (по переменной λ) может быть вычислен. Прежде всего заметим, что в силу нечетности синуса

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2 t}e^{i\lambda(x-\xi)}d\lambda=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda(x-\xi)d\lambda+i\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2 t}\sin\lambda(x-\xi)d\lambda=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda(x-\xi)d\lambda.$$

Обозначим $I=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx$. Тогда $I^2=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}dy-$ это интеграл по всей плоскости от функции $e^{-(x^2+y^2)}$, который легко вычислить, переходя к полярным координатам. Действительно, $I^2=\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R e^{-r^2}rdr=\pi$, следовательно $I=\sqrt{\pi}$. Теперь можно сосчитать интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha^2x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}$, сделав соответствующую замену переменной.

Рассмотрим еще более сложный интеграл:

$$J(b)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha^2x^2}\cos bxdx=\frac{1}{b}e^{-\alpha^2x^2}\sin bx\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\frac{2\alpha^2}{b}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha^2x^2}x\sin bxdx=$$

$$=\frac{2\alpha^2}{b}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha^2x^2}x\sin bxdx.$$

Нетрудно видеть из определения интеграла $J(b)$, что при дифференцировании по параметру b получим: $J'(b)=-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha^2x^2}x\sin bxdx$. Следовательно, этот интеграл удовлетворяет уравнению $J'(b)=-\frac{b}{2\alpha^2}J(b)$. Решая это уравнение, получим $J(b)=Ce^{-\frac{b^2}{4\alpha^2}}$. Используем начальное условие $J(0)=\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}$ и наконец получим $J(b)=\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}e^{-\frac{b^2}{4\alpha^2}}$.

Таким образом, внутренний интеграл в представлении (36) равен $\frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}$, и мы, наконец, получили окончательное представление решения:

$$U(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t}a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi .$$

Пример применения преобразования Ханкеля.

Интегральное преобразование Ханкеля (27') удобно применять к уравнениям, содержащим оператор $\nabla^2=\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}-\frac{n^2}{r^2}$. Этот оператор встречается в различных задачах при переходе к полярным координатам. Как отмечалось выше, применение этого оператора к функции f(x) приводит к умножению образа Ханкеля этой функции на $-z^2$.

В геологии в задачах электроразведки при изучении горизонтально-слоистых сред (см.[3]) применение преобразования Ханкеля позволяет получить выражение функции $R_N^0(n_0)$, называемой *приведённым импедансным отношением слоистого разреза,* если известны результаты измерений электрического поля $E_r(r)$ на различных расстояниях от источника (при заданной силе тока *I).* Имеют место следующие формулы:

$$E_r(r)=\frac{I\rho_1}{2\pi}\int_0^{\infty} R_N^0(n_0)J_1(n_0r)n_0dn_0 \qquad (37)$$

(Здесь $E_r(r)$– радиальная компонента электрического поля точечного источника, равная $\frac{\partial U(r)}{\partial r}$, где U – потенциал этого поля.). Применяя обратное преобразование Ханкеля (26'), получим:

$$R_N^0(n_0)=\frac{2\pi}{\rho_1}\int_0^{\infty}\frac{E_r(r)}{I}J_1(n_0r)rdr . \qquad (38)$$

Заметим, что наряду с функциями Бесселя и преобразованием Фурье-Бесселя, в теоретических исследованиях, связанных с электроразведкой, применяются и другие специальные функции. Так, при изучении поля

точечного источника в присутствии сферического проводящего включения приходится пользоваться полиномами Лежандра и их свойствами.

Преобразования этого типа применяются и при решении обратных задач в методах электрического зондирования с целью определения параметров геоэлектрического разреза.

Распространение волн в пространстве

Рассмотрим уравнения колебаний в пространстве: $u''_{tt} = a^2 \Delta u$, где $u = u(x, y, z, t)$. Поскольку в этих случаях область колебания неограниченна, краевые условия в соответствующей задаче отсутствуют, а имеются только начальные условия: задаются $u(x, y, z, 0)$ и $u'_t(x, y, z, 0)$.

Радиальные колебания. Рассмотрим случай колебаний при условии, что отклонения зависят помимо времени только от расстояния точки до начала координат. Здесь целесообразно ввести сферические координаты $x = r\cos\varphi\sin\psi,\ y = r\sin\varphi\sin\psi, z = r\cos\psi$. В этих координатах уравнение колебаний примет вид $u''_{tt} = a^2(u''_{rr} + \frac{2}{r}u'_r + \frac{1}{r^2\sin^2\psi}u''_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r^2}u''_{\psi\psi} + \frac{\cos\psi}{r^2\sin\psi}u'_\psi)$. В соответствии с условием $u = u(r, t)$, и уравнение колебаний примет вид $u''_{tt} = a^2(u''_{rr} + \frac{2}{r}u'_r)$. Введем новую функцию $v(r, t) = r \cdot u(r, t)$. Поскольку $v''_{rr} = ru''_{rr} + 2u'_r$, уравнение для новой функции примет вид $v''_{tt} = a^2 v''_{rr}$, и решением последнего уравнения будет $v(r, t) = f(r + at) + g(r - at)$, где f и g – произвольные дважды дифференцируемые функции. Однако в этот произвол следует ввести условие $v(0, t) = f(at) + g(-at) = 0$, обеспечивающее ограниченность функции $u(r, t)$ при $r = 0$. При выполнении последнего условия получим решение в виде $u(r, t) = \frac{1}{r}(f(r + at) - f(-r + at))$. В частности, $u(0, t) = \lim\limits_{r \to 0}[\frac{1}{r}(f(r + at) - f(-r + at))] = 2f'(at)$.

Метод усреднения. Для решения трехмерной задачи колебаний в общем случае – для уравнения $u''_{tt} = a^2(u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz})$ с начальными условиями $u(x, y, z, 0) = \Phi(x, y, z),\ u'_t(x, y, z, 0) = \Psi(x, y, z)$ – вводят новую функцию – усреднение искомой функции $u(x, y, z, t)$ по сферической поверхности, окружающей выбранную точку.

Зафиксируем $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) = M_0$. Введем функцию

$\tilde{u}(r, t) = \frac{1}{4\pi r^2}\iint\limits_{S_r} u(M_0 + M, t)ds$, где $M_0 + M$ – точка на сфере S_r радиуса r с центром M_0. Если ввести локально сферические координаты в участвующий в усреднении поверхностный интеграл 1-го рода:

$x = x_0 + r\cos\varphi\sin\psi,\ y = y_0 + r\sin\varphi\sin\psi,\ z = z_0 + r\cos\psi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le \psi \le \pi,$ то получим другую форму усреднения:

$$\tilde{u}(r,t) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} u(x_0 + r\cos\varphi\sin\psi, y_0 + r\sin\varphi\sin\psi, z_0 + r\cos\psi, t)\sin\psi d\psi.$$

Очевидно, что, устремляя r к нулю, имеем $\tilde{u}(0,t) = u(M_0,t)$.

Результат усреднения – $\tilde{u}(r,t)$ – уже функция только двух переменных. Получим уравнение, которому удовлетворяет усреднение. Для этого проинтегрируем обе части уравнения колебаний по шару B_r радиуса r с центром M_0. Согласно формуле Гаусса-Остроградского, интегрируя лапласиан в правой части уравнения колебаний, получим

$$\iiint_{B_r} (u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz})dxdydz = \iint_{S_r} (u'_x\cos\alpha + u'_y\cos\beta + u'_z\cos\gamma)ds,$$

где $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ – координаты единичного вектора нормали к поверхности сферы, который совпадает по направлению с направлением радиуса-вектора точки на сфере, направленного из центра сферы. С другой стороны, выражение под интегралом в правой части последнего соотношения представляет собой производную по направлению радиуса-вектора, то есть,

$$\iiint_{B_r} (u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz})dxdydz = \iint_{S_r} \frac{\partial}{\partial r} u(M_0 + M, t)ds =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{\partial}{\partial r} u(x_0 + r\cos\varphi\sin\psi, y_0 + r\sin\varphi\sin\psi, z_0 + r\cos\psi, t)\cdot r^2 \cdot \sin\psi d\psi =$$

$$= r^2 \cdot \frac{\partial}{\partial r}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} u(x_0 + r\cos\varphi\sin\psi, y_0 + r\sin\varphi\sin\psi, z_0 + r\cos\psi, t)\sin\psi d\psi =$$

$$= 4\pi r^2 \frac{\partial}{\partial r}\tilde{u}(r,t).$$

Интегрируя левую часть уравнения колебаний по шару и вводя сферические координаты, получим

$$\iiint_{B_r} u''_{tt} dxdydz =$$

$$= \int_0^r \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} u''_{tt}(x_0 + \rho\cos\varphi\sin\psi, y_0 + \rho\sin\varphi\sin\psi, z_0 + \rho\cos\psi)\sin\psi d\psi =$$

$$= 4\pi \int_0^r \tilde{u}''_{tt}(\rho,t)\rho^2 d\rho.$$

Таким образом, усреднение удовлетворяет равенству

$$\int_0^r \tilde{u}''_{tt}(\rho,t)\rho^2 d\rho = a^2 r^2 \tilde{u}'_r(r,t).$$

Дифференцируя последнее равенство по r, получим уравнение

$\tilde{u}''_{tt} = a^2(\tilde{u}''_{rr} + \frac{2}{r}\tilde{u}'_r)$, которое было решено в предыдущем пункте. Поэтому введенное усреднение имеет представление: $\tilde{u}(r,t) = \frac{1}{r}(f(r+at) - f(-r+at))$, где f – произвольная функция. При этом $u(M_0,t) = \tilde{u}(0,t) = 2f'(at)$.

Для того, чтобы применить начальные условия, заметим, что $(r\cdot\tilde{u}(r,t))'_r + \frac{1}{a}(r\cdot\tilde{u}(r,t))'_t = 2f'(r+at)$. Полагая $t=0$, а затем $r=at$, получим

$$u(M_0,t) = \frac{1}{4\pi}[\frac{\partial}{\partial r}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} r\Phi(x_0 + r\cos\varphi\sin\psi, y_0 + r\sin\varphi\sin\psi, z_0 + r\cos\psi)\sin\psi d\psi +$$

$$+\frac{1}{a}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} r\Psi(x_0 + r\cos\varphi\sin\psi, y_0 + r\sin\varphi\sin\psi, z_0 + r\cos\psi)\sin\psi d\psi]_{|r=at}.$$

Следовательно, решение поставленной задачи имеет вид

$$u(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi}[\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} t\cdot\Phi(x + at\cos\varphi\sin\psi, y + at\sin\varphi\sin\psi, z + at\cos\psi)\sin\psi d\psi +$$

$$+t\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \Psi(x + at\cos\varphi\sin\psi, y + at\sin\varphi\sin\psi, z + at\cos\psi)\sin\psi d\psi].$$

Физическая интерпретация решения. Представим, что функции $\Phi(x,y,z)$ и $\Psi(x,y,z)$ отличны от 0 только в ограниченной трехмерной области D. Если $(x_0,y_0,z_0) \notin D$, то при значениях t, близких к 0, имеем $\Phi(x_0 + at\cos\varphi\sin\psi, y_0 + at\sin\varphi\sin\psi, z_0 + at\cos\psi) = 0$ и $\Psi(x_0 + at\cos\varphi\sin\psi, y_0 + at\sin\varphi\sin\psi, z_0 + at\cos\psi) = 0$, следовательно, $u(x_0,y_0,z_0,t) = 0$. То есть колебаний в точке (x_0,y_0,z_0) при таких значениях t не происходит. Значение t увеличивается, и наконец, наступает момент t_1, когда $(x_0 + at_1\cos\varphi\sin\psi, y_0 + at_1\sin\varphi\sin\psi, z_0 + at_1\cos\psi) \in D$. Так возникают ненулевые смещения в точке (x_0,y_0,z_0), возникает волна. Значение t продолжает увеличиваться и наступает момент t_2, когда $(x_0 + at_2\cos\varphi\sin\psi, y_0 + at_2\sin\varphi\sin\psi, z_0 + at_2\cos\psi) \notin D$ – колебания прекращаются. Итак, начальное возмущение, локализованное в пространстве, вызывает в каждой точке (x_0,y_0,z_0) пространства колебания, локализованные во времени.

Случай двух переменных. Если рассматривать плоские колебания, то есть случай, когда $u = u(x,y,t)$, физическая картина распространения таких волн будет несколько иной. Дело в том, что подобные колебания можно трактовать как колебания в бесконечном пространстве, когда смещения одинаковы для всех точек с разными аппликатами, но одними и теми же абсциссой и ординатой. Такие смещения называются цилиндрическими. При задании начальных условий в таком случае мы также должны задавать начальные смещения и скорости одинаковыми

для точек с разными аппликатами, но одними и теми же абсциссами и ординатами. Поэтому при локализации начальных условий на плоскости (конечная плоская область) в пространстве это окажется бесконечным цилиндром. Предположим, что ненулевые начальные условия локализованы в плоской области D и $(x_0, y_0) \notin D$. При значениях t, близких к 0, колебаний в точке (x_0, y_0) не будет. Но вот после того, как с ростом значений t сфера радиуса at с центром в точке $(x_0, y_0, 0)$ пересечет бесконечный цилиндра с основанием D, точки сферы $(x_0 + at\cos\varphi\sin\psi, y_0 + at\sin\varphi\sin\psi, at\cos\psi)$ при некоторых значениях φ и ψ окажутся внутри этого бесконечного цилиндра. В этих точках значения функций, задающих начальные условия, ненулевые, поэтому при соответствующих значениях t в точке (x_0, y_0) на плоскости возникнут колебания. При любом дальнейшем увеличении t сфера радиуса at с центром в точке $(x_0, y_0, 0)$ будет пересекать бесконечный цилиндр с основанием D. Поэтому в отличие от трехмерного случая колебания не затухнут сразу, а будут бесконечно продолжаться, медленно затухая.

ПРИЛОЖЕНИЕ

(некоторые сведения о специальных функциях)

Свойства и таблицы значений специальных функций приведены во многих изданиях, например, [1]. Здесь мы даем те сведения, которыми пользовались в настоящем пособии.

Функции Бесселя. Наряду с уравнением $y'' + y = 0$, определяющим тригонометрические функции, в задачах математической физики почти так же часто встречается ещё одно обыкновенное дифференциальное уравнение, называемое уравнением Бесселя:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + (1 - \frac{\nu^2}{x^2})y = 0, \qquad (П1)$$

где ν – любое вещественное число. Решения этого уравнения называют **функциями Бесселя, или цилиндрическими функциями** порядка ν, обозначение: $J_\nu(x)$, $J_{-\nu}(x)$. В дальнейшем мы увидим, что у этих функций есть немало общего с тригонометрическими функциями, но если тригонометрические известны из школьного курса и действия с ними не вызывают затруднений, то для работы с функциями Бесселя требуется

некоторая тренировка, знание основных формул и соотношений между ними. Более полное изложение теории и приложений функций Бесселя к задачам математической физики и геофизики будет встречаться в дальнейшем в специальных курсах. (См., например, [2],[3]).

В привычных элементарных функциях решения уравнения (П1) не выражаются, поэтому будем решать это уравнение в виде степенного ряда. Итак, перепишем уравнение (П1) в виде

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \qquad (П2)$$

и будем искать его решение в виде ряда

$$y(x) = x^\sigma(a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_kx^k + ...), \qquad (П3)$$

где $a_0 \neq 0$ и множитель x^σ объясняется тем, что в точке $x = 0$ первый коэффициент уравнения (8) обращается в нуль. Подставим ряд (П3) в уравнение (П2) и приравняв коэффициенты при соответствующих степенях переменной x, получим систему:

$$a_0(\sigma^2 - \nu^2) = 0,$$
$$a_1\left[(\sigma+1)^2 - \nu^2\right] = 0,$$

$$a_2\left[(\sigma+2)^2 - \nu^2\right] + a_0 = 0,$$

. . . . . .

$$a_k\left[(\sigma+k)^2 - \nu^2\right] + a_{k-2} = 0,$$

. . . . . .

откуда следует:

$$\sigma^2 = \nu^2, \sigma = \pm\nu; \quad a_1 = 0; \quad a_k = \frac{-a_{k-2}}{(\sigma+k+\nu)(\sigma+k-\nu)}. \qquad (П4)$$

Пусть ν – нецелое число. При $\sigma = \nu$ из формул (П4) выразим все коэффициенты ряда (П3) через a_0 и $a_1 = 0$:

$$a_{2m+1} = 0; a_{2m} = -a_{2m-2}\frac{1}{2^2m\cdot(m+\nu)} = \cdots =$$

$$=(-1)^m \frac{a_0}{2^{2m} m!(m+\nu)\cdots(1+\nu)} = (-1)^m \frac{a_0 \Gamma(\nu+1)}{2^{2m}\Gamma(m+1)\Gamma(m+\nu+1)},\ m = 1, 2, \ldots.$$

Здесь и в дальнейшем в формулах для коэффициентов используется гамма-функция $\Gamma(m)$, обладающая следующим свойством:

$$\Gamma(\kappa+1) = \kappa\Gamma(\kappa) = \ldots = \kappa(\kappa-1)\ldots(\kappa-n)\Gamma(\kappa-n).$$

(Заметим, что если κ – целое число, то $\Gamma(\kappa+1) = \kappa!$)

Положим $a_0 = \dfrac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}$, тогда $a_{2m} = (-1)^m \dfrac{1}{2^{2m+\nu}\Gamma(m+1)\Gamma(m+\nu+1)}$, и решение уравнения принимает вид:

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_0^\infty \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+\nu+1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}, \qquad (П5)$$

Полученная функция называется функцией Бесселя первого рода порядка ν.

При $\sigma = -\nu$ все коэффициенты a_{2m+1} ряда (П3) опять равны нулю, а коэффициенты с чётными номерами вычисляются заменой ν на $-\nu$. Таким образом,

$$J_{-\nu} = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \sum_0^\infty \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\Gamma(m-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} \qquad (П6)$$

Это тоже функция Бесселя, но с отрицательным индексом. Ряды (П5) и (П6) сходятся для любого значения x и являются двумя линейно независимыми решениями уравнения Бесселя при нецелых значениях ν. Если же $\nu = n$, где n – целое число, то легко показать, что $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$, то есть эти решения линейно зависимы. В этом случае в качестве второго независимого решения уравнения Бесселя можно взять, например, функцию Неймана:

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) Cos\pi\nu - J_{-\nu}(x)}{Sin\pi\nu} \qquad (П7)$$

Она называется цилиндрической функцией второго рода и при целом $\nu = n$, рассматривается как предел этого отношения, находящийся по правилу

Лопиталя. В приложениях важны также следующие линейные комбинации:

$$J_\nu(x)+iN_\nu(x)=H_\nu^{(1)}(x)$$
$$J_\nu(x)-iN_\nu(x)=H_\nu^{(2)}(x) \qquad (П8)$$

называемые функциями Ханкеля, или цилиндрическими функциями третьего рода. Связь между функциями Бесселя, Неймана и Ханкеля аналогична связи между косинусом, синусом и показательной функцией мнимого аргумента. Эта аналогия замечается при изучении их асимптотического поведения: при $x\to\infty$ имеют место приводимые без доказательства асимптотические формулы.

$$H_\nu^{(1)}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{i(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4})}+O(x^{-\frac{3}{2}}),$$

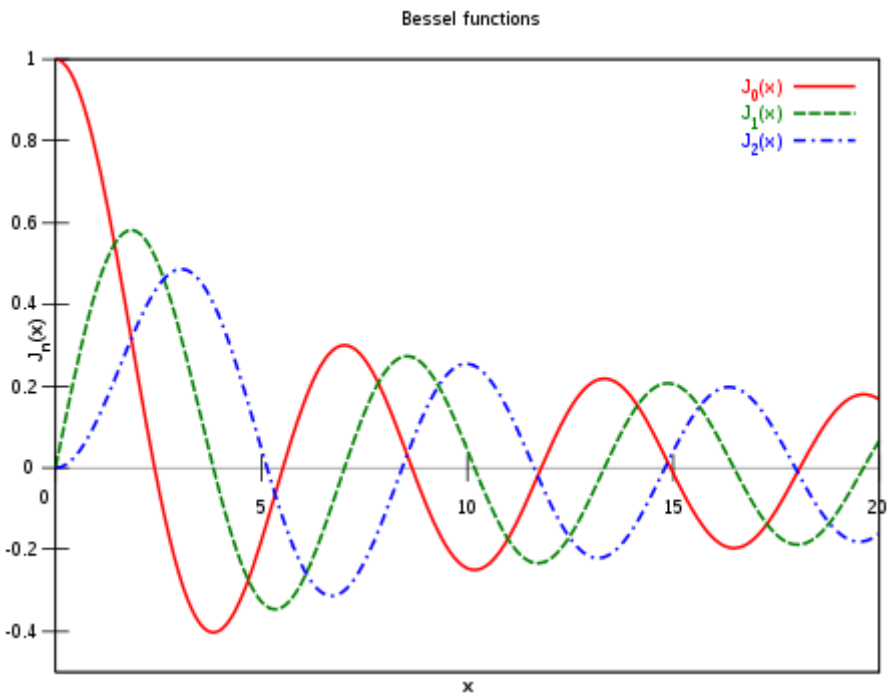
$$H_\nu^{(2)}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cdot e^{-i(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4})}+O(x^{-\frac{3}{2}}),$$

$$N_\nu(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cdot Sin(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4})+O(x^{-\frac{3}{2}}), \qquad (П9)$$

$$J_\nu(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cdot Cos(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4})+O(x^{-\frac{3}{2}}).$$

Обращая внимание на последнюю формулу, отметим следующее свойство функции Бесселя: так же, как и косинус, функция $J_\nu(x)$ имеет бесконечное количество нулей $\mu_k^{(\nu)}$, $k=1,2,...,$ на положительной части вещественной оси. В случаях, когда речь идет о функциях определенного порядка, верхний индекс нулей функции Бесселя часто опускается.

Ниже приведены графики функций Бесселя для значений $\nu=0,1,2$.



Имеет место ряд формул для функций Бесселя, аналогичных формулам для тригонометрических функций:

$$J_o'(x) = -J_1(x)$$

$$J_\nu'(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{\nu}{x} J_\nu(x) \qquad (П10)$$

$$J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) - J_{\nu-1}(x)$$

Как уже отмечалось, одним из самых важных свойств функций Бесселя является их ортогональность с весом x на промежутке (0,1):

$$\int_0^1 xJ_\nu(\mu_i x)J_\nu(\mu_j x)dx = 0 \quad (i \neq j); \int_0^1 xJ_\nu^2(\mu_i x)dx = \frac{1}{2}J_{\nu+1}^2(\mu_i). \qquad (П11)$$

Проведём доказательство формул (П11). В уравнении Бесселя (П2) сделаем замену: $x = \alpha t$. Полученное уравнение $t^2 y''(t) + ty'(t) + (\alpha^2 t^2 - \nu^2)y(t) = 0$, как было показано, имеет своим решением $y = J_\nu(\alpha t)$, то есть замена y на $J_\nu(\alpha t)$ превращает уравнение в тождество. Рассмотрим два таких тождества, полагая $\alpha = \alpha_1; \alpha_2$:

$$t^2 J_\nu''(\alpha_1 t) + tJ_\nu'(\alpha_1 t) + (\alpha_1^2 t^2 - \nu^2)J_\nu(\alpha_1 t) = 0,$$

$$t^2 J_\nu''(\alpha_2 t) + tJ_\nu'(\alpha_2 t) + (\alpha_2^2 t^2 - \nu^2) J_\nu(\alpha_2 t) = 0.$$

Умножим теперь первое из этих тождеств на $\frac{1}{t} J_\nu(\alpha_2 t)$, а второе на $\frac{1}{t} J_\nu(\alpha_1 t)$ и вычтем. После ряда преобразований это равенство принимает вид:

$$\frac{d}{dt}\left[tJ_\nu'(\alpha_1 t) J_\nu(\alpha_2 t) - tJ_\nu'(\alpha_2 t) J_\nu(\alpha_1 t)\right] = t(-\alpha_1^2 + \alpha_2^2) J_\nu(\alpha_1 t) J_\nu(\alpha_2 t). \qquad (П12)$$

Если α_1 и α_2 положить равными двум различным нулям функции $J_\nu(x)$ (значениям μ_i и μ_j), то разделив это равенство на $\mu_i^2 - \mu_j^2 \neq 0$ и проинтегрировав его от 0 до 1, получим $\int\limits_0^1 tJ_\nu(\mu_i t) J_\nu(\mu_j t) dt = \frac{1}{\mu_i^2 - \mu_j^2}\left(\mu_i J_\nu'(\mu_i) J_\nu(\mu_j) - \mu_j J_\nu'(\mu_j) J_\nu(\mu_i)\right) = 0.$

(При $t = 0$ выражение в квадратной скобке равно нулю в силу (П5)) .

Вторая из формул (П11) получается из (П12) с помощью интегрирования по t и выполнения следующего предельного перехода: α_1 полагается равным α и $\alpha_2 \to \alpha$.

Функции Бесселя можно рассматривать не только при действительных, но и при комплексных значениях аргумента. В частности, если в ряд (П5), определяющий $J_\nu(x)$, подставить значение ix вместо x, получим

$J_\nu(ix) = i^\nu \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot (i)^{2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = i^\nu I_\nu(x)$, где $I_\nu(x)$ – вещественная функция. При $\nu = 0$ имеем:

$$I_0(x) = J_0(ix) = 1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4 + \frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6 + \ldots.$$

Функция $I_\nu(x)$ монотонно возрастает. Имеет место асимптотическая формула $I_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{1}{2\pi x}} e^x$ при больших значениях x. Функции Бесселя мнимого аргумента являются решениями уравнения $y'' + \frac{1}{x} y' - (1 + \frac{\nu^2}{x^2}) y = 0.$

Полиномы Лежандра. Как уже отмечалось в параграфе 5, ещё одним часто встречающимся видом специальных функций являются полиномы Лежандра. Аналогично функциям Бесселя полиномы $P_n(x)$ можно определить как решения уравнения Лежандра

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0. \qquad (П13)$$

Нетрудно проверить, что полином вида

$$Y_n(x)=c_n\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} \qquad (П14)$$

удовлетворяет уравнению (П13). Действительно, рассмотрим $y=(x^2-1)^n$, вычислим $y'=2nx(x^2-1)^{n-1}$, умножим это равенство на x^2-1, получим $(x^2-1)y'=2nxy$, а теперь, применяя формулу Лейбница, найдём $(n+1)$-ю производную от обеих его частей:

$$(x^2-1)y^{(n+2)}+(n+1)2xy^{(n+1)}+\frac{n(n+1)}{2}2y^{(n)}=2nxy^{(n+1)}+(n+1)2ny^{(n)}.$$

Приведём подобные члены, умножим все слагаемые на c_n и заменяя $c_n y$ на $Y_n(x)$, получаем уравнение (П13).

Непосредственно из формулы (П14) следует, что многочлен $Y_n(x)$ имеет n корней, принадлежащих интервалу $(-1,1)$. Кроме того, непосредственным вычислением можно получить, что $Y_n(1)=c_n 2^n\cdot n!$, $Y_n(-1)=c_n(-1)^n 2^n\cdot n!$. Следовательно, если положить $c_n=\dfrac{1}{2^n n!}$, то многочлен Лежандра

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\cdot\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$$

будет обладать свойством $P_n(1)=1$, $P_n(-1)=(-1)^n$.

Докажем ортогональность полиномов Лежандра. Воспользуемся для этого известной из начал математического анализа формулой интегрирования по частям $\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu$, имеющей следующее обобщение:

$$\int_a^b uv^{(n)}dx=\Big[uv^{(n-1)}-u'v^{(n-2)}+\ldots(-1)^n u^{(n-1)}v\Big]\Big|_a^b+(-1)^n\int_a^b u^{(n)}vdx.$$

Рассмотрим $\int\limits_{-1}^{1} Q(x)\left[(x^2-1)^n\right]^{(n)} dx$, где $Q(x)$ – многочлен степени меньше n. Легко видеть, что в этом случае, применяя к интегралу обобщённую формулу интегрирования по частям, мы получим в правой части нуль. Следовательно многочлен $P_n(x)$ на промежутке $(-1,1)$ ортогонален любому многочлену меньшей степени и, в частности,

$$\int\limits_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = 0, \quad m \neq n. \qquad (П15)$$

Найдём значение интеграла $\int\limits_{-1}^{1} P_n{}^2(x)dx$; он лишь множителем c_n^2 отличается от интеграла $\int\limits_{-1}^{1} \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} \cdot \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} dx$. Если к этому интегралу снова применить обобщённую формулу интегрирования по частям, то после ряда преобразований он сведётся к интегралу, равному $2 \cdot 2n! \int\limits_{-1}^{1} (1-x^2)^n dx$. Этот последний интеграл вычисляется с помощью замены $x = \sin t$ и оказывается равным $\frac{2}{2n+1} \cdot (2n!!)^2$.

Таким образом, окончательно получим:

$$\int\limits_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \frac{2}{2n+1}. \qquad (П16)$$

Итак, показано, что полиномы Лежандра образуют ортогональную систему функций на промежутке $(-1,1)$. Более подробную информацию о специальных функциях, применяемых в математической физике можно найти в учебниках [1],[5].

ЛИТЕРАТУРА

1. А.Ф.Никифоров, В.Б.Уваров. Основы теории специальных функций. «Наука», 1976.
2. Б.К.Матвеев. Электроразведка. «Недра» 1990.
3. М.С.Жданов. Электроразведка. «Недра», 1986.
4. Г.М.Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т.т.1, 2, 3. (Все издания).
5. А.Н.Тихонов и А.А.Самарский. Уравнения математической физики. (Все издания).