КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ
И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра системного анализа и информационных технологий

И.В. КОННОВ

ОСНОВНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Учебное пособие

Казань – 2020

ББК 22.18
УДК 519.6: 519.85

Принято на заседании кафедры системного анализа
и информационных технологий
Протокол № 1 от 31 августа 2020 года

Рецензент:
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры системного анализа
и информационных технологий КФУ А.А. Андрианова

Коннов И.В.
Основные математические модели принятия решений. / И.В. Коннов. – Казань: Казанск. ун-т, 2020. – 26 с.

В пособии излагаются основные подходы к построению математических моделей принятия решений, в том числе в условиях неопределенности. Описаны также основные подходы к преодолению различных неопределенностей. В пособии содержатся примеры задач и некоторые методы их решения.

Предназначается для широкого круга читателей: студентов и магистров, обучающихся по физико-математическим, экономико-математическим и компьютерным направлениям. Табл. 10. Библиогр. 6 назв.

Оглавление

Введение

Принятие решения в сложных системах обычно опирается на исследование с помощью математических методов. Основные этапы можно определить следующим образом.

1. Построение содержательной модели исходной системы.

2. Построение математической модели.

3. Определение критерия оптимальности, на основе которого можно определить наилучший вариант действий.

4. Решение сформулированной задачи.

5. Реализация полученного решения в реальной системе.

Приведем пример, показывающий возможные трудности в ходе этих этапов.

Задача выпуска изделий.

Пусть предприятие выпускает n видов товаров (изделий) и использует m видов ресурсов. Пусть вначале на заданный период времени цены c_j на товары, запасы b_i ресурсов и удельные нормы затрат ресурсов a_{ij} (количество единиц i-го ресурса, которое нужно для выпуска единицы j-го изделия) фиксированы. Переменными являются объемы x_j выпуска товаров. Требуется найти, в каких количествах выпускать изделия, чтобы получить максимальный доход. Тогда получаем задачу линейного программирования:

$$\max \;\to\; \sum_{i=1}^{n} c_j x_j,$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = \overline{1,m},$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}.$$

Решение такой полностью детерминированной задачи находится достаточно просто. Теперь предположим, что точные цены неизвестны, а известно только, что

$c_j \in [c_j^{'}, c_j^{''}]$, $j = \overline{1, n}$. Возникает неопределенность данных, поэтому требуется определить принцип оптимальности, который позволит определить, какой именно элемент является решением задачи, потом уже можно будет выбирать подходящий метод. Также можно предположить, что цены являются случайными величинами, тогда возникает задача со случайными факторами, которая также потребует своего принципа оптимальности и применения подходящего метода. Задача со случайными факторами возникает и тогда, когда есть ограничения по спросу на товары вида $x_j \leq \xi_j$, но спрос ξ_j на j-й товар есть случайная величина. Далее, если учесть затраты l_j на рабочую силу для выпуска единицы j-го изделия, то требуется также минимизировать общие затраты

$$\min \to \sum_{j=1}^{n} l_j x_j$$

что приводит к двум противоречивым целевым функциям, т.е. к задаче с неопределенностью цели. Предположим теперь, что цены могут зависеть от объема выпусков. Более того, на рынке те же товары может поставлять другое предприятие с вектором объема выпусков y. Тогда получим $c_j = c_j(x, y)$, получается задача с неопределенностью, так как объемы выпусков y первому предприятию неизвестны.

В результате построения модели могут возникать различные классы задач: детерминированные, со случайными факторами, с неопределенными факторами, причем по различным причинам. Во всех случаях с неопределенностью необходимо сформулировать принцип оптимальности, который позволит определить понятие решения задачи, а потом нужно будет выбирать подходящий метод.

Глава 1

Задачи с неопределенностью целей

Такие задачи получаются в ситуации, когда после построения модели имеются несколько целевых функций вместо одной. Данную задачу можно записать в виде:

$$\max_{x \in D} \to f_i(x),\ i = \overline{1, m}, \tag{1.1}$$

где D – допустимое множество, $D \subseteq X$, $f_i : X \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1, m}$, – целевые функции. Как правило, нет общих точек, которые бы являлись решениями всех задач одновременно. Основные способы преодоления возникающей неопределенности следующие.

1.1 Переход к задаче с одной целевой функцией

Для такого перехода есть несколько основных способов.

(a) Свертка критериев.

Этот метод состоит в выборе чисел (весов критериев)

$$\lambda_i > 0,\ i = \overline{1, m},\ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$$

и замене задачи (1.1) на задачу с одним критерием

$$\max_{x \in D} \to F(x),\ \text{где } F(x) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x). \tag{1.2}$$

Достоинствами этого подхода являются чрезвычайная простота и возможность сохранения полезных свойств функции f_i, таких как выпуклость и дифференцируемость, в функции F. Недостатком же этого подхода является трудность назначения весов λ_i, поскольку целевые функции f_i могут быть совершенно разнородными.

(b) Контрольные показатели.

Здесь предлагается для каждого критерия $f_i(x)$ задать контрольный показатель, или пороговое значение μ_i, так чтобы у выбранного варианта x значения критериев были бы не хуже μ_i. В результате вместо (1.1) получаем вполне определенную задачу нахождения элемента из множества

$$D_\mu = \{x \in X \mid f_i(x) \geq \mu_i,\ i = \overline{1,m}\},$$

которое, однако, может быть пустым. Тогда необходимо использовать дополнительные процедуры для подбора величин μ_i, обеспечивающих совместность множества D_μ. Вариантом этого подхода является выбор одного критерия, скажем, $f_1(x)$, в качестве основного, как целевой функции и оставление для остальных контрольных показателей. В итоге получаем задачу оптимизации

$$\max_{x \in D'_\mu} \to f_1(x),$$

где

$$D'_\mu = \{x \in X \mid f_i(x) \geq \mu_i,\ i = \overline{2,m}\}.$$

Кроме того, можно заменить (1.1) на задачу

$$\max_{x \in D} \to F(x),\ \text{где } F(x) = \min_{i=\overline{1,m}} (f_i(x)/\mu_i), \tag{1.3}$$

при $\mu_i > 0$, $i = \overline{1,m}$, обеспечивая таким образом равномерное улучшение значение критериев по отношению к их пороговым значениям.

(c) Метрика в пространстве критериев.

Этот подход состоит в определении точки, ближайшей по расстоянию до идеального решения в пространстве критериев $\mathbb{R}^m$. А именно, если решить каждую задачу в (1.1) по отдельности, то получим оптимальное значение f_i^* для каждой i-й задачи. После этого можно сформировать (взвешенную) функцию расстояния в пространстве критериев

$$d(x) = \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \left(f_i(x) - f_i^* \right)^2 \right)^{1/2},$$

где $\alpha_i > 0$, $i = \overline{1,m}$ – веса критериев (обычное расстояние соответствует выбору $\alpha_i = 1$). Теперь можно определить решение задачи

$$\min_{x \in D} \to d(x) \tag{1.4}$$

в качестве обобщенного решения задачи (1.1). Вместо точных оптимальных значений f_i^* можно также взять контрольные показатели μ_i, как выше, определить функцию расстояния

$$d(x) = \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \left[f_i(x) - \mu_i \right]_+^2 \right)^{1/2}$$

и решать задачу (1.4). Здесь $[\tau]_+ = \max\{\tau, 0\}$ для любого числа τ. Вместо обычного расстояния можно также брать его квадрат для улучшения свойств целевой функции. Аналогично (1.3) можно использовать равномерный критерий, т.е. решать задачу

$$\max_{x \in D} \to F(x), \text{ где } F(x) = \min_{i=\overline{1,m}} (f_i(x)/f_i^*),$$

при $f_i^* > 0$, $i = \overline{1,m}$.

1.2 Оптимизация по Парето

Все предыдущие подходы предусматривали сведение задачи (1.1) со многими критериями к задачи со скалярным критерием. Однако можно непосредственно определить понятие решения для задачи (1.1), используя отношения предпочтения в пространстве критериев. Тогда не требуется подбирать веса критериев. Одно из наиболее известных бинарных отношений было предложено В. Парето.

Для двух векторов $a, b \in \mathbb{R}^m$ считаем, что $a \succ_P b$ (a лучше, чем b в смысле Парето), если $a_i \geq b_i$ для $i = \overline{1,m}$ и $a \neq b$. Определим вектор-функцию $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ и тогда можно определить задачу: найти

$$x^* \in D : \ \overline{\exists} x \in D, \ f(x) \succ_P f(x^*). \tag{1.5}$$

Множество решений задачи (1.5) обозначим D_P^*.

Предложение 1.1. *Пусть x_λ – решение задачи* (1.2) *при любом векторе*

$$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in S_>^m = \left\{ z \in \mathbb{R}^m \mid z_i > 0, \ i = \overline{1,m}, \ \sum_{i=1}^m z_i = 1 \right\}.$$

Тогда $x_\lambda \in D_P^*$.

Доказательство. Пусть $\tilde{x} = x_\lambda$ – решение задачи (1.2) при некотором векторе $\lambda \in S_>^m$, но $\tilde{x} \notin D_P^*$. Тогда найдется точка $x \in D$, такая что $f(x) \succ_P f(\tilde{x})$ или

$$f_i(x) \geq f_i(\tilde{x}), \ i = \overline{1,m}, \ \exists k, f_k(x) > f_k(\tilde{x}).$$

Отсюда после умножения на λ_i и сложения получаем $F(x) > F(\tilde{x})$, т.е. $\tilde{x}$ – не решение задачи (1.2), чего быть не может. □

Так каждому вектору $\lambda \in S_>^m$ будет соответствовать точка $x_\lambda \in D_P^*$, поэтому, перебирая веса из $S_>^m$, получим аппроксимацию всего множества D_P^*. Итак, вычисление Парето-оптимальной точки не сложно, но все множество этих точек может иметь сложную структуру, поэтому его аппроксимация получается в результате решения целого семейства скалярных задач оптимизации.

Отметим, что в отличие от скалярных отношений, векторные отношения предпочтения могут быть неполными, т.е. не все векторы сравнимы. Это справедливо для отношения предпочтения по Парето. Например, можно взять точки

$$(1,2) \text{ и } (2,1).$$

Поэтому множество Парето-оптимальных точек может оказаться слишком широким, чтобы представлять решения. Тогда может потребоваться дополнительный критерий для отбора решений из Парето-оптимальных точек, что является довольно сложной задачей.

1.3 Лексикографическая оптимизация

Другой подход к определению понятия решения векторной задачи (1.1) состоит в использовании лексикографического отношения предпочтения. Для векторов $a, b \in \mathbb{R}^m$ считаем, что $a \succeq_{lex} b$ (a не хуже лексикографически, чем b), если либо $a = b$, либо найдется номер $k \leq m$ такой, что $a_k > b_k$ и $a_i = b_i$ для $i = \overline{1, k-1}$. Лексикографическое отношение предпочтения является полным, а также транзитивным ($a \succeq_{lex} b$, $b \succeq_{lex} c \;\Rightarrow\; a \succeq_{lex} c$) и антисимметричным ($a \succeq_{lex} b$, $b \succeq_{lex} a \;\Rightarrow\; a = b$). Поэтому множество лексикографически оптимальных точек можно определить, как в скалярной оптимизации, т.е. можно определить задачу: найти

$$x^* \in D: \quad f(x^*) \succeq_{lex} f(x), \ \forall x \in D, \tag{1.6}$$

которая совпадает с определением по аналогии с (1.5):

$$x^* \in D: \ \overline{\exists} x \in D, \ f(x) \succ_{lex} f(x^*).$$

Здесь $a \succ_{lex} b$, если $a \succeq_{lex} b$ и $a \neq b$. Множество решений задачи (1.6) обозначим D^*_{lex}. Это множество должно быть более узким, чем множество Парето-оптимальных точек и поэтому более удобным в качестве решений задачи (1.5).

Предложение 1.2. $D^*_{lex} \subseteq D^*_P$.

Доказательство. Пусть x^* – решение задачи (1.6), но $x^* \notin D^*_P$. Тогда найдется точка $x \in D$, такая что $f(x) \succ_P f(\tilde{x})$ или

$$f_i(x) \geq f_i(\tilde{x}), \ i = \overline{1, m}, \ \exists k, f_k(x) > f_k(\tilde{x}).$$

Отсюда следует, что $f(x) \succ_{lex} f(\tilde{x})$, противоречие. □

Отметим, что отношение предпочтения по Парето не выделяет какой-то из частных критериев, они все равноправны, тогда как лексикографическое отношение предпочтения предполагает их полную упорядоченность, т.е. малое изменение i-го критерия важнее, чем сколь угодно большое изменение $(i+1)$-го критерия. Моделируемая задача должна соответствовать этому условию.

Для вычисления лексикографически оптимальных точек можно применить последовательную оптимизацию по скалярным критериям. Определим $D_0 = D$ и построим последовательность множеств

$$D_k = \{\tilde{x} \in D_{k-1} \mid f_k(\tilde{x}) \geq f_k(x) \ \forall x \in D_{k-1}\}, \ k = \overline{1, m}.$$

Предложение 1.3. $D^*_{lex} = D_m$.

Доказательство. Пусть $x^* \in D_m$, но $x^* \notin D^*_{lex}$. Тогда найдется точка $x \in D$, такая что $f(x) \succ_{lex} f(x^*)$ или

$$\exists k,\ f_i(x) = f_i(x^*),\ i = \overline{1, k-1},\ f_k(x) > f_k(x^*).$$

Поэтому $x \in D_{k-1}$, но тогда $x^* \notin D_k$, противоречие.

Наоборот, пусть $x^* \in D^*_{lex}$, но $x^* \notin D_m$. Тогда $x^* \in D_0$, найдется индекс $k \geq 1$, такой что $x^* \in D_{k-1}$ и $x^* \notin D_k$. Для точки $x \in D_k$ имеем

$$f_i(x) = f_i(x^*),\ i = \overline{1, k-1},\ f_k(x) > f_k(x^*).$$

Поэтому $f(x) \succ_{lex} f(x^*)$, получено противоречие. □

Итак, решение задачи лексикографической оптимизации (1.6) можно найти, находя решения скалярных задач оптимизации последовательно на множестве решений предыдущей. Но решение m скалярных задач оптимизации может быть затруднительным, кроме того, множество D^*_{lex} может содержать единственную точку. Для расширения множества решений Е.С. Вентцель предложила метод последовательных уступок, который состоит в приближенном решении скалярных задач. А именно, определяем допуски $\varepsilon_i > 0$, $i = \overline{1, m}$, полагаем $\tilde{D}_0 = D$,

$$\tilde{D}_k = \left\{ x \in \tilde{D}_{k-1} \mid f_k(x) \geq \tilde{f}_k - \varepsilon_k \right\},$$

где

$$\tilde{f}_k = \max_{x \in \tilde{D}_{k-1}} f_k(x),$$

$k = \overline{1, m}$, в результате получаем $\tilde{D}_m$ как аппроксимацию множества D_m. Если $\varepsilon_i = 0$, то $\tilde{D}_i = D_i$. Допуск ε_i показывает возможное отклонение i-го критерия, которое может быть компенсировано следующими критериями, что приводит по существу к назначению весов критериев.

Для вычисления лексикографически оптимальных точек можно применить другой подход, основанный на связи задачи (1.6) и системы задач оптимизации по Парето. Определим вначале обратное отношение предпочтения по Парето $\succeq$. Для двух векторов $a, b \in \mathbb{R}^m$ считаем, что $a \succeq b$, если либо $a_i > b_i$ для некоторого i, либо $a = b$, т.е. b не лучше, чем a в смысле Парето. Тогда задачу (1.5) можно определить с помощью этого отношения: найти

$$x^* \in D: \quad f(x^*) \succeq f(x),\ \forall x \in D.$$

Для вектора $a \in \mathbb{R}^m$ через $[a]^l$ обозначим вектор-срезку в $\mathbb{R}^l$, т.е. $[a]^l_i = a_i$ для $i = \overline{1, l}$.

Предложение 1.4. *Для любых векторов $a, b \in \mathbb{R}^m$ выполняется*

$$a \succeq_{lex} b \sim [a]^l \succeq [b]^l,\ l = \overline{1, m}.$$

Доказательство. Если $a = b$, то соотношение выполняется. Пусть $a \neq b$. Если теперь $a \succeq_{lex} b$, то $a \succ_{lex} b$, т.е. $a_k > b_k$ для некоторого индекса k и $a_i = b_i$, $i = \overline{1, k-1}$. По определению, теперь $[a]^l \succeq [b]^l$, $l = \overline{1, m}$.

Наоборот, пусть $[a]^l \succeq [b]^l$, $l = \overline{1, m}$, но $b \succeq_{lex} a$. Тогда $b \succ_{lex} a$, найдется индекс $k \geq 1$, такой что $a_k < b_k$ и $a_i = b_i$, $i = \overline{1, k-1}$. По определению, теперь $[b]^k \succ_P [a]^k$, получено противоречие. $\square$

Для каждого индекса l определим задачу: найти

$$z^l \in D: \quad [f(z^l)]^l \succeq [f(x)]^l, \ \forall x \in D, \tag{1.7}$$

множество ее решений обозначим D_P^l. Пусть

$$D^* = \bigcap_{l=1}^{m} D_P^l.$$

Предложение 1.5. $D_{lex}^* = D^*$.

Утверждение прямо следует из предложения 1.4. Поэтому система задач вида (1.7) имеет общее решение, если есть лексикографически оптимальные точки. Вместо последовательной оптимизации лексикографически оптимальные точки можно определять с помощью решения этой системы задач оптимизации по Парето.

Глава 2

Задачи со случайными факторами

В результате построения модели задачи такого класса могут возникать, когда есть параметры в виде случайных величин, при этом задачи различаются по типу информации о таких параметрах:

1) известны полностью распределения вероятностей случайных величин;
2) известны только типы распределений случайных величин;
3) известны только некоторые параметры распределений случайных величин.

Основной вид задачи со случайными факторами:

$$\max_{x \in D(\xi)} \to f(x, \xi), \tag{2.1}$$

обычно

$$D(\xi) = \{x \in X \mid h_i(x, \xi) \leq 0,\ i = \overline{1, m}\},$$

где ξ – набор случайных величин. Поэтому требуется указать принцип оптимальности для определения понятия решения и применения подходящего метода. Стандартный подход в первом случае состоит в переходе к средним от функций. Иначе говоря, вместо (2.1) предлагается решать задачу

$$\max_{x \in D} \to Mf(x, \xi), \tag{2.2}$$

где

$$D = \{x \in X \mid Mh_i(x, \xi) \leq 0,\ i = \overline{1, m}\}.$$

2.1. Задача об оптимальном размере партии товаров на складе.

На складе можно хранить ограниченное количество однородного товара b. Если завезти единицу товара, то стоимость от продажи единицы товара – c_1. Если товар не пользуется спросом, то за хранение единицы товара надо платить величину c_2. Спрос на товар ξ – непрерывная случайная величина. Надо определить количество товара x для завоза на склад, чтобы максимизировать прибыль.

Выпишем функции дохода

$$c_1 \min\{x, \xi\}$$

и убытков хранения:

$$c_2 \max\{x - \xi, 0\},$$

поэтому надо решать задачу со случайным фактором:

$$\max_{0 \le x \le b} \to f(x, \xi) = \{c_1 \min\{x, \xi\} - c_2 \max\{x - \xi, 0\}\}.$$

По аналогии с (2.2) получим задачу о максимизации средней прибыли

$$\max_{0 \le x \le b} \to F(x) = Mf(x, \xi),$$

где

$$\begin{aligned} Mf(x, \xi) &= c_1 \left(\int_0^x t dF_\xi(t) + x \int_x^{+\infty} dF_\xi(t) \right) \\ &\quad - c_2 \int_0^x (x - t) dF_\xi(t) \\ &= (c_1 + c_2) \int_0^x dF_\xi(t) + c_1 x - (c_1 + c_2) x F_\xi(x). \end{aligned}$$

Если известна функция распределения спроса, то целевая функция $F(x)$ новой задачи вычисляется по этой формуле.

2.2. Задача о ремонте станков.

На предприятии имеются всего n станков. При выходе станка из строя требуются затраты c_1 на внеплановый ремонт. Время делится на равные интервалы $T = 1, 2, \ldots$ Через каждые T интервалов времени проводится плановый ремонт всех станков, при этом затраты на ремонт одного станка – c_2, $c_1 \gg c_2$. Требуется определить оптимальную величину T, так чтобы суммарные издержки, отнесенные к одному интервалу времени, были минимальными.

Выпишем функцию издержек от ремонта, отнесенных к одному интервалу времени:

$$f(\xi, T) = \left(c_1 \sum_{t=1}^{T-1} n_t + c_2 n \right) / T.$$

где n_t – количество станков, вышедших из строя в интервал времени t. Поэтому надо решать задачу со случайными факторами:

$$\min_{T \in \mathbb{N}} \to f(x, \xi),$$

где $\xi = (n_1, n_2, \ldots, n_t, \ldots)$, $\mathbb{N}$ – множество целых неотрицательных чисел. По аналогии с (2.2) перейдем к задаче о минимизации средних издержек

$$\min_{T \in \mathbb{N}} \to F_1(T) = Mf(\xi, T),$$

Таблица 2.1: Задача о ремонте станков – 1

T	p_t	$F_1(T)$
1	0.05	500
2	0.07	375
3	0.1	366.7
4	0.13	400
5	0.18	450

это задача дискретной оптимизации. Поскольку n_t имеет биномиальное распределение, то

$$p\{n_t = k\} = c_n^k p_t^k (1-pt)^{n-k}$$

и $Mn_t = np_t$, где p_t – вероятность выхода одного станка из строя в интервал времени t. Отсюда

$$\begin{aligned} Mf(x,\xi) &= \left(c_1 \sum_{t=1}^{T-1} Mn_t + c_2 n\right)/T \\ &= \left(c_1 \sum_{t=1}^{T-1} p_t + c_2\right) \cdot n/T. \end{aligned}$$

В таблице 2.1 приведен пример вычислений при

$$c_1 = 100,\ c_2 = 10,\ n = 50,\ T \le 5,$$

с заданными вероятностями p_t. Ясно, что $T^* = 3$.

Переход к средним от функций со случайными параметрами оправдан при многократно повторяющейся задаче, тогда полученный вариант решения обеспечивает наилучшее среднее значение критерия. Для повышения надежности используются другие подходы, например, учет дисперсии. В частности, в предыдущей задаче о ремонте станков можно решать задачу

$$\min_{T\in\mathbb{N}} \to F_2(T) = Mf(\xi,T) + \tau Df(\xi,T),$$

где $\tau > 0$ – вес дисперсии, это также задача дискретной оптимизации. Поскольку

$$Dn_t = np_t(1-p_t),$$

то

$$Df(\xi,T) = \left(\frac{c_1}{T}\right)^2 n \sum_{t=1}^{T-1} p_t(1-p_t)$$

и

$$F_2(T) = \frac{n}{T}\left(c_1 \sum_{t=1}^{T-1} p_t + c_2\right) + \tau n \left(\frac{c_1}{T}\right)^2 \sum_{t=1}^{T-1} p_t(1-p_t).$$

Таблица 2.2: Задача о ремонте станков – 2

T	p_t	$F_1(T)$	$F_2(T)$
1	0.05	500	500
2	0.07	375	6312.5
3	0.1	366.7	6622.22
4	0.13	400	6731.25
5	0.18	450	6764

В таблице 2.2 приведен пример вычислений с этим критерием при $\tau = 1$. Ясно, что здесь $T^* = 1$, т.е. нужен постоянный плановый ремонт.

Если известны только типы распределений случайных величин, то описанный подход приводит к задачам с неопределенными факторами, поскольку, например, $Mf(x,\xi) = F(x,\alpha)$, где α – набор неизвестных параметров, $\alpha \in \mathbb{A}$. Тогда задача (2.2) приводит к задаче

$$\max_{x \in D} \to F(x,\alpha),$$

при $\alpha \in \mathbb{A}$. Если известны только параметры распределений случайных величин, например, средние, то можно просто заменить ими случайные величины. Для линейных функций такая замена не меняет решения, в общем случае получается менее обоснованная аппроксимация.

Пусть теперь в задаче со случайными факторами

$$\max_{x \in D} \to f(x,\xi)$$

есть возможность провести дополнительное исследование системы и определить точное значение ξ, но для этого потребуются затраты c. Надо определить, проводить ли исследование или нет.

Если мы не проводим исследования, то получаем ожидаемый выигрыш

$$F^* = \max_{x \in D} Mf(x,\xi).$$

Если мы проведем исследование и определим точное значение ξ, то получим выигрыш

$$f^*(\xi) - c, \text{ где } f^*(\xi) = \max_{x \in D} f(x,\xi).$$

Тогда ожидаемый выигрыш равен

$$f^* - c, \text{ где } f^* = Mf^*(\xi).$$

Отметим, что $F^* \leq f^*$, но проводить исследование целесообразно, если

$$f^* - c > F^*. \tag{2.3}$$

Таблица 2.3: Дискретная задача со случайным фактором

	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4
x_1	1	4	5	9
x_2	3	8	4	3
x_3	4	6	6	2
	p_1	p_2	p_3	p_4
	0.1	0.2	0.5	0.2

В дискретном случае эти соотношения можно уточнить. Пусть $D = \{x_1, \ldots, x_m\}$, случайная величина ξ принимает дискретные значения $\xi_1, \ldots, \xi_n$ с вероятностями $p_1, \ldots, p_n$. Обозначим

$$a_{ij} = f(x_i, \xi_j),\ \ i = \overline{1,m},\ \ j = \overline{1,n},\ \ \beta_j = \max_{i=\overline{1,m}} a_{ij},\ \ j = \overline{1,n},$$

т.е. β_j – максимальный доход, который можно получить при значении $\xi = \xi_j$. Тогда

$$F^* = \max_{i=\overline{1,m}} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j$$

и

$$f^* = \sum_{j=1}^{n} \beta_j p_j.$$

Условие (2.3) приобретает вид

$$c < f^* - F^* = \sum_{j=1}^{n} \beta_j p_j - \max_{i=\overline{1,m}} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j = \min_{i=\overline{1,m}} \sum_{j=1}^{n} (\beta_j - a_{ij}) p_j.$$

Поскольку

$$\sum_{j=1}^{n} (\beta_j - a_{ij}) p_j$$

есть средний риск для i-го способа действий, то получаем, что проводить исследование целесообразно, если затраты на исследование меньше минимального среднего риска.

В таблице 2.3 приведен пример с числовыми данными при $m = 3$, $n = 4$. Пусть также $c = 2$. Здесь

$$F^* = 5.2,\ \ f^* = 6.8,$$

поэтому условие (2.3) не выполняется.

Глава 3

Задачи с неопределенными факторами

Основной вид задачи с неопределенными факторами:

$$\max_{x \in D(\alpha)} \to f(x, \alpha), \tag{3.1}$$

обычно

$$D(\alpha) = \{x \in X \mid h_i(x, \alpha) \leq 0,\ i = \overline{1, m}\},$$

где α – набор неопределенных величин, $\alpha \in \mathbb{A}$. Здесь требуется указать принцип оптимальности для определения понятия решения и затем найти это решение с помощью подходящего метода. Приведем основные принципы (критерии) оптимальности. Для упрощения будем считать, что $D(\alpha) = D$, т.е. допустимое множество полностью определено. Отметим, что тогда при дискретном множестве $\mathbb{A}$ задача (3.1) принадлежит к классу задач с неопределенностью целей из главы 1 и поэтому применимы также указанные там подходы.

(а) Критерий Лапласа.

Если мы не знаем, какое значение примет фактор α, то можем считать, что он с равной вероятностью может принимать значения из множества $\mathbb{A}$. Иначе говоря, α считается равномерно распределенной на $\mathbb{A}$ случайной величиной. Согласно стандартному подходу далее переходим к средним от функции цели и вместо задачи

$$\max_{x \in D} \to f(x, \alpha),\ \alpha \in \mathbb{A}, \tag{3.2}$$

решаем задачу

$$\max_{x \in D} \to F(x), \tag{3.3}$$

где

$$F(x) = Mf(x, \alpha) = \frac{1}{|\mathbb{A}|} \int\limits_{\mathbb{A}} f(x, t) dt,$$

Таблица 3.1: Дискретная задача с неопределенным фактором – 1

	α_1	α_2	α_3	α_4	Критерий Лапласа	Критерий Вальда
x_1	25	20	12	5	15.5	5
x_2	22	23	22	7	18.5	7
x_3	9	12	18	9	12	9
x_4	0	8	11	15	8.5	0

$|\mathbb{A}|$ – мера множества $\mathbb{A}$. В дискретном случае определим

$$F(x) = Mf(x,\alpha) = \frac{1}{|\mathbb{A}|}\sum_{\alpha\in\mathbb{A}} f(x,\alpha),$$

где $|\mathbb{A}|$ – количество элементов в $\mathbb{A}$.

Приведем пример вычислений для случая, когда множества D и $\mathbb{A}$ дискретны. Пусть $D = \{x_1, \ldots, x_m\}$ и $\mathbb{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Обозначим

$$a_{ij} = f(x_i, \alpha_j),\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Поэтому

$$F(x_i) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij},\ i = \overline{1,m}.$$

В таблице 3.1 приведен пример с числовыми данными при $m = 4$, $n = 4$. Здесь

$$F_L^* = 18.5,\ x_L^* = x_2.$$

(b) Критерий Вальда.

В основе находится принцип гарантированного результата, т.е. считается, что фактор α принимает наихудшее по функции цели значение из множества $\mathbb{A}$ при каждом $x \in D$. Тогда вместо задачи (3.2) решаем задачу (3.3), где

$$F(x) = \min_{\alpha\in\mathbb{A}} f(x,\alpha).$$

В таблице 3.1 приведен пример с числовыми данными для этого критерия. Здесь

$$F_W^* = 9,\ x_W^* = x_3.$$

(c) Критерий Сэвиджа.

В основе находится принцип минимизации максимального риска. Для каждой пары (x,α) вычисляем

$$\varphi(x,\alpha) = \beta(\alpha) - f(x,\alpha),$$

Таблица 3.2: Дискретная задача с неопределенным фактором – 1

	α_1	α_2	α_3	α_4	Критерий Сэвиджа
x_1	0	3	10	10	10
x_2	3	0	0	8	8
x_3	16	11	4	6	16
x_4	25	15	11	0	25
$\beta(\alpha)$	25	23	22	15	

Таблица 3.3: Дискретная задача с неопределенным фактором – 2

	α_1	α_2	α_3	α_4	Критерий Лапласа	Критерий Вальда
x_1	9	60	60	60	47.25	9
x_2	10	10	10	10	10	10

где

$$\beta(\alpha) = \max_{x \in D} f(x, \alpha)$$

определяет максимальный доход, который можно получить при значении $\alpha \in \mathbb{A}$. Затем для каждого $x \in D$ вычисляем наибольший риск

$$G(x) = \max_{\alpha \in \mathbb{A}} \varphi(x, \alpha)$$

и вместо задачи (3.2) решаем задачу

$$\min_{x \in D} \to G(x).$$

В таблице 3.2 приведен пример по предыдущим числовым данным для этого критерия. Здесь

$$G^* = 8,\ x_S^* = x_2.$$

Для прояснения свойств критериев приведем еще примеры вычислений для случая, когда множества D и $\mathbb{A}$ дискретны. В таблице 3.3 приведен пример при $m = 2$, $n = 4$. Здесь

$$F_L^* = 47.25,\ x_L^* = x_1,\ F_W^* = 10,\ x_W^* = x_2.$$

При продлении таблицы вправо решение не меняется, поэтому критерий Вальда может выбрать его только по одному значению неопределенного фактора, тогда как критерий Лапласа учитывает распределение этих значений. В таблице 3.4 приведен пример по этим числовым данным для критерия Сэвиджа. Здесь

$$G^* = 1,\ x_S^* = x_1.$$

Таблица 3.4: Дискретная задача с неопределенным фактором – 2

	α_1	α_2	α_3	α_4	Критерий Сэвиджа
x_1	1	0	0	0	1
x_2	0	50	50	50	50
$\beta(\alpha)$	10	60	60	60	

Таблица 3.5: Дискретная задача с неопределенным фактором – 3

	α_1	α_2	α_3	α_4	Критерий Лапласа	Критерий Вальда
x_1	9	20	20	20	17.25	9
x_2	20	10	10	10	12.5	10

Немного изменим исходные данные. В таблице 3.5 приведен пример также при $m = 2$, $n = 4$. Здесь

$$F_L^* = 47.25,\ x_L^* = x_1,\ F_W^* = 10,\ x_W^* = x_2.$$

В таблице 3.6 приведен пример по этим числовым данным для критерия Сэвиджа. Здесь

$$G^* = 10,\ x_S^* = x_2.$$

При продлении таблиц вправо решение также не меняется. Здесь критерий Сэвиджа дает то же решение, что и критерий Вальда, и выбирает его только по одному значению неопределенного фактора, в отличие от критерия Лапласа. Полученные свойства критериев указывают на ограниченность их применения и необходимость учета дополнительных свойств решаемой задачи.

(d) Критерий Гурвица.

Этот критерий получил название «пессимизма-оптимизма», поскольку в его основе находится свертка критериев по наихудшему и наилучшему вариантам,

Таблица 3.6: Дискретная задача с неопределенным фактором – 3

	α_1	α_2	α_3	α_4	Критерий Сэвиджа
x_1	11	0	0	0	11
x_2	0	10	10	10	10
$\beta(\alpha)$	20	20	20	20	

Таблица 3.7: Дискретная задача с неопределенным фактором – 1

	α_1	α_2	α_3	α_4	Критерий Гурвица
x_1	25	20	12	5	15
x_2	22	23	22	7	15
x_3	9	12	18	9	13.5
x_4	0	8	11	15	7.5

т.е. вместо задачи (3.2) решается задача (3.3), где

$$F(x) = (1-\lambda)\min_{\alpha\in\mathbb{A}} f(x,\alpha) + \lambda\max_{\alpha\in\mathbb{A}} f(x,\alpha),\ \ \lambda\in[0,1].$$

Параметр λ определяет веса критериев, при $\lambda = 0$ получаем критерий «пессимизма» (Вальда), при $\lambda = 1$ – критерий «оптимизма». В таблице 3.7 приведен пример применения этого критерия по числовым данным таблицы 3.1 с $\lambda = 0.5$. Здесь

$$F_H^* = 9,\ \ x_H^* = x_1 = x_2.$$

Недостатком этого подхода является трудность назначения веса λ.

Глава 4

Равновесные формулировки задач принятия решений

Задачи оптимизации являются стандартными инструментами для формулировки и решения различных проблем принятия решений. То есть нужно найти элемент из некоторого заданного допустимого множества D, которое дает максимальное (или минимальное) значение некоторой целевой (полезной) функции f. Для краткости мы запишем эту задачу так:

$$\max_{y \in D} \to f(y). \tag{4.1}$$

Эта формулировка предполагает, что как допустимое множество, так и целевая функция точно известны. В этом полностью детерминированном случае можно выбрать наилучший вариант действий на основе решения задачи (4.1). Однако эта ситуация требует корректировки, когда описание целевой функции и допустимого множества является неполным и неточным из-за различного рода неопределенностей реальных данных. Обычно это приводит к появлению неопределенных факторов, как указано во введении. Тем не менее, по стандартному подходу считается, что всегда можно сделать наилучший выбор в моделях принятия решений в условиях неопределенности.

Например, если мы обозначим совокупность всех неопределенных факторов через α, то, как указано в главе 3, наилучший выбор состоит в решении задачи:

$$\max_{y \in D(\alpha)} \to f(y, \alpha),$$

где $\alpha \in \mathbb{A}$, с помощью подходящего принципа оптимальности для снятия неопределенности. Однако требование найти именно лучшее решение при любом уровне неопределенности является слишком ограничительным и некорректным в общем случае. Выбор варианта, который является решением задачи оптимизации, соответствующей какому-либо принципу оптимальности со снятием неопределенности, означает только, что он наилучший по этому принципу оптимальности, а не наилучший вариант вообще, поскольку каждый принцип снятия неопределенности имеет свои недостатки. В самом деле, если модель описывает достаточно сложную систему, так что представление цели и ограничений, определяющих систему, может меняться вместе с изменениями состояния системы, то в любой момент можно найти только локально оптимальные варианты, которые связаны с текущим состоянием системы. Иначе говоря, текущих знаний о системе тогда будет недостаточно для того, чтобы найти полное наилучшее решение, соответствующее переводу системы в наилучшее состояние по выбранному критерию, указанному без снятия неопределенности. В самом деле, обычные принципы снятия неопределенности здесь будут иметь ограниченное применение. В частности, принцип гарантированного результата может привести к очень плохим вариантам по выбранному критерию, тогда как вероятностные подходы неприменимы, если принятое решение реализуется только один раз или несколько раз, кроме того, эти подходы требуют определенной проверки параметров на статистическую устойчивость.

В том случае, когда только некоторые ограниченные наборы достоверной информации о цели и ограничениях могут быть известны в каждом состоянии системы, наши решения будут зависеть от текущего состояния системы, и этот факт должен быть отражен в математической модели задачи принятия решения. Это означает, что в качестве основы модели для принятия решений можно взять задачи оптимизации, но их решения следует тогда рассматривать как относительные или субъективные по отношению к состояниям системы. Иначе говоря, наличие факторов неопределенности может заставить нас использовать иную, ослабленную концепцию решения, так как стандартный подход становится слишком жестким в этих условиях. Учитывая текущее состояние системы или выбранную стратегию действий, тогда необходимо только определить, являются ли они локально наилучшими, либо должны быть изменены на основе соответствующих новой концепции задач оптимизации.

Сначала рассмотрим задачу нахождения оптимального состояния системы для случая, когда представление (модель) цели зависит от текущего состояния. При текущем состоянии x можно определить значение целевой функции в состоянии y как $f(x, y)$. Можно предположить, что $f(x, x)$ дает довольно точную оценку состояния x, но значение $f(x, y)$, которое дает нашу оценку выбора состояния y в состоянии x, может отличаться от $f(y, y)$, что дает оценку выбора состояния y в состоянии y. Кроме того, значение $f(y, y)$ неизвестно в состоянии x. По этой причине принцип выбора состояния по точной (полной) оптимизации, заключающийся в решении задачи

$$\max_{y \in D} \to u(y) = f(y, y), \tag{4.2}$$

здесь не кажется подходящим, даже если допустимое множество D фиксировано и известно в любом состоянии.

Вместо этого можно применить равновесный принцип выбора состояния на основе задачи относительной оптимизации: найти точку $x^* \in D$ такую, что

$$f(x^*, x^*) \geq f(x^*, y) \quad \forall y \in D. \tag{4.3}$$

Это означает, что допустимое состояние x^* дает максимальное значение функции цели по сравнению со всеми другими возможными состояниями, оцениваемыми в текущем состоянии x^*. Следовательно, мы можем назвать x^* *относительно оптимальной точкой*, так как это понятие основано на текущих (относительных) знаниях о системе. В рамках этого подхода мы не получаем подлинной оптимальной точки в смысле (4.1) или (4.2). Тем не менее, мы можем использовать решения задачи (4.3) для того, чтобы решить, подходит ли текущее состояние или его следует изменить. Если

$$f(x,x) < f(x,y(x)) = \max_{y \in D} f(x,y)$$

при текущем состоянии x, то мы должны изменить это состояние. Однако движение к $y(x)$ не обязательно. Это более слабый принцип оптимальности в текущей ситуации по сравнению с наилучшим точным решением.

Нетрудно определить, что задача (4.3) совпадает с общей задачей равновесия, которая используется в качестве общей нелинейной задачи, включающей обычную задачу оптимизации, задачу о неподвижной точке, вариационное неравенство, задачу о седловой точке и задачи игрового равновесия.

Далее, естественно предположить, что допустимое множество D также зависит от текущего состояния, в том смысле, что оно указывает текущее множество состояний для перехода. Тогда можно определить значение допустимого отображения следующим образом:

$$D(x) = V \bigcap W(x),$$

где V – множество в пространстве $\mathbb{R}^n$, а $W : \mathbb{R}^n \to \Pi(\mathbb{R}^n)$ – многозначное отображение. Здесь и далее $\Pi(A)$ обозначает семейство всех подмножеств множества A. То есть, V является постоянной (известной) частью допустимого множества, тогда как $W(x)$ описывает текущие изменяющиеся знания об ограничениях в текущем состоянии x. Тогда можно определить более общую формулировку задачи относительной оптимизации: найти точку $x^* \in D(x^*)$ такую, что

$$f(x^*, x^*) \geq f(x^*, y) \quad \forall y \in D(x^*), \tag{4.4}$$

которая совпадает с так называемой квази-равновесной задачей. Что касается множества $W(x)$, то оно может быть определено с помощью некоторых функций $h_i(x,y)$, $i = \overline{1,m}$, следующим образом:

$$W(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n \mid h_i(x,y) \leq 0, \ i = \overline{1,m} \right\}.$$

Это значит, что $h_i(x,y)$ дает нашу оценку i-го ограничения для состояния y в состоянии x. Для задач равновесия и квази-равновесия разработана своя теория, а также методы поиска решений.

Приведем пример, показывающий необходимость применения задач относительной оптимизации.

Задача утилизации промышленных отходов.

Модель описывает промышленную фирму, которая может использовать n технологий производства и имеет оборудование для утилизации отходов, которые содержат m загрязняющих веществ. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ – вектор уровней интенсивности технологий деятельности фирмы. Тогда $q(x) = (q_1(x), \ldots q_m(x)) \in \mathbb{R}^m$ – соответствующий вектор отходов производства, а $\mu(x)$ задает получаемый при этом доход. Далее предположим, что вектор c единичных затрат на утилизацию зависит от объемов загрязнения, то есть $c = c[q(x)]$. Далее, обозначим через $X \subseteq \mathbb{R}^n_+$ множество допустимых уровней интенсивности и предположим, что объемы загрязнения в течение планируемого периода должны быть ограничены сверху фиксированным вектором $b \in \mathbb{R}^m_+$. Тогда фирма имеет функцию полезности (прибыли)

$$f(x) = \mu(x) - \sum_{i=1}^{m} q_i(x) c_i[q(x)],$$

и допустимое множество

$$D = \left\{ x \in X \,\middle|\, q_i(x) \leq b_i,\ i = \overline{1, m} \right\}.$$

Если все параметры известны, то мы получаем обычную задачу (4.1) для определения оптимальных уровней интенсивности технологий.

Рассмотрим теперь случай, когда точные значения некоторых параметров неизвестны. Например, если x – текущий вектор уровней интенсивности, то можно вычислить точные значения функций $c_i[q(y)]$ только в том случае, если $q(y)$ принадлежит некоторой окрестности $U(x)$ точки $q(x)$, то есть фактически мы получаем $c_i = c_i[q(x), q(y)]$. Скажем, объемы загрязнения вне этой окрестности могут потребовать неиспользуемых ранее технологий утилизации, которые в текущем состоянии трудно оценить точно. Для того чтобы построить адекватную модель, мы можем взять функцию относительной полезности

$$f(x, y) = \mu(y) - \sum_{i=1}^{m} q_i(y) c_i[q(x), q(y)],$$

и задачу относительной оптимизации вида (4.3) для того, чтобы решить, подходящие ли текущие уровни интенсивности или нет. Аналогично, неопределенность параметров функций q_i приводит к более общей формулировке (4.4).

Литература

1. Вентцель Е.С. Исследование операций. - М.: Сов.радио, 1972.

2. Вагнер Г. Основы исследования операций. - М.: Мир, 1972, 1973. В 3-х т.

3. Коннов И.В. Нелинейная оптимизация и вариационные неравенства. - Казань: Казанск. ун-т, 2013.

4. Катулев А.Н., Северцев Н.А. Исследование операций. - М.: Физматлит, 2000.

5. Розен В.В. Математические модели принятия решений в экономике. - М.: Кн. дом «Университет», 2002.

6. Таха Х. Введение в исследование операций. - М.: Мир, 1988. В 2-х т.