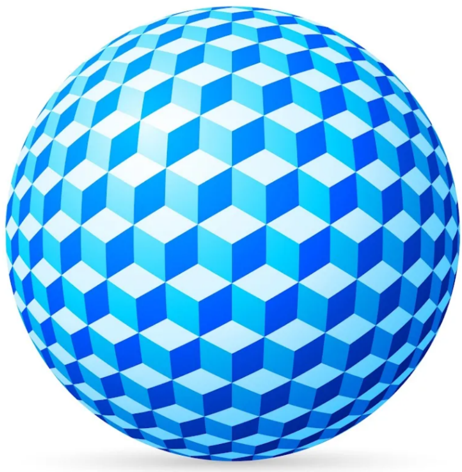
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ (ПОВОЛЖСКИЙ) УНИВЕРСИТЕТ
РЕСПУБЛИКАНСКИЙ ОЛИМПИАДНЫЙ ЦЕНТР РТ

Математические олимпиады школьников Татарстана

2021-2022 и 2022-2023



Казань – 2024

УДК 373.167.1:51
ББК 74.200.58:22.1

Печатается по решению учебно-методической комиссии
Института математики и механики КФУ
им. Н.И. Лобачевского

Киндер М.И.

Математические олимпиады школьников Татарстана. 2021-2022 и 2022-2023: Учебно-методическое пособие / Автор–составитель М.И. Киндер. — Казань: Казанский федеральный университет, 2024. — 163 с.

Брошюра предназначена для школьников, учителей, преподавателей математических кружков и просто любителей математики. В ней представлены задачи, предлагавшиеся в 2021-2022 и 2022-2023 учебных годах на муниципальном и региональном этапах математических олимпиад школьников Татарстана, а также задачи открытой олимпиады имени В. Р. Фридлендера, олимпиады «Путь к Олимпу», межрегиональной предметной олимпиады Казанского федерального университета.

Все задачи приведены с подробными решениями, условия и решения геометрических задач сопровождаются рисунками.

2021-2022 учебный год

Муниципальный этап 48-й Всероссийской олимпиады по математике среди школьников Республики Татарстан состоялся 7 декабря 2021 г. В составлении задач олимпиады принимали участие преподаватели Казанского федерального университета (КФУ):

И. С. Григорьева, М. И. Киндер.

31 января 2022 г. прошла открытая Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике. Олимпиада традиционно проводится в два этапа: отборочный (дистанционно) и заключительный (очно). Задачи заключительного этапа составили:

Шурыгин В.В.-мл. (5-8 классы) и *Киндер М.И.* (9-11 классы).

С 17 по 19 января 2022 г. на базе «Дуслык» Республиканского олимпиадного центра Министерства образования и науки Республики Татарстан состоялся заключительный этап республиканской олимпиады школьников 8-11 классов «Путь к Олимпу» по математике. В олимпиаде приняли участие около 180 обучающихся общеобразовательных организаций из 41 муниципального района республики.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников и олимпиада им. Л. Эйлера состоялись 4–5 февраля 2022 г.

10 апреля этого же года прошла 12-я ежегодная городская математическая олимпиада, посвящённая памяти В. Р. Фридлендера. По традиции в ней участвовали ученики 8-11 классов города Казани, а победители и призёры получили приглашение в летнюю школу «Квант».

В составлении задач олимпиады принимали участие:

М. Д. Бронштейн, И. С. Григорьева, В. А. Сочнева.

Ниже представлены условия и подробные решения задач всех перечисленных олимпиад. В скобках после условия задачи указана фамилия её автора.

Муниципальный этап

8 класс

1. Вася задумал четырёхзначное число и для каждой пары его соседних цифр выписал на доску их произведение. После этого он стёр одно произведение, и на доске остались числа 20 и 21. Какое наименьшее число мог задумать Вася? (*Киндер М.*)

2. Трое друзей живут в домах с разными номерами. Оказалось, что у каждого из них номер этажа совпадает с номером дома одного из его друзей. Может ли эта ситуация сохраниться, если

а) один из друзей переедет в своём доме на один этаж выше?

б) каждый из друзей переедет в своём доме на один этаж выше? (*Григорьева И.*)

3. Последнюю цифру четырёхзначного числа переставили в начало (например, $1234 \to 4123$) и полученное число сложили с исходным. Сумма оказалась равной 3333. Чему равно исходное число, если известно, что в его записи нет цифры 0? Найдите все возможные варианты.

4. Квадрат 10×10 разрезали по клеточкам на 17 прямоугольников, у которых длины обеих сторон больше 1. Какое наименьшее число квадратов могло оказаться среди этих прямоугольников? Приведите пример такого разрезания.

5. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Известно, что $AB = BC = CD$, $AO = 8$ и $\angle BOC = 120°$. Чему равно DO?

9 класс

6. Число 400 разделили на четыре части так, что если к первой части прибавить 1, от второй отнять 2, третью умножить на 3, а четвёртую разделить на 4, то все результаты будут равными. На какие части разделили число 400?

7. В школе учатся мальчики и девочки. Средний возраст мальчиков отличается от среднего возраста девочек, но среднее этих двух чисел совпадает со средним возрастом всех школьников. Кого в школе больше — мальчиков или девочек? (*Жуков А.*)

8. Известно, что уравнения $x^2 + ax + b = 0$ и $x^3 + bx + a = 0$ имеют общий корень и $a > b > 0$. Найдите его. (*Киндер М.*)

9. В школьном турнире по шахматам соревновались мальчики и девочки, причём мальчиков было в 5 раз больше, чем девочек. По правилам турнира каждый шахматист играл с каждым другим *дважды*. Сколько всего игроков принимали участие, если известно, что мальчики набрали в сумме ровно в два раза больше очков, чем девочки? (За победу в шахматной партии начисляют 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за проигрыш — 0 очков.)

10. Точки O и I — центры описанной и вписанной окружностей треугольника ABC, M — середина дуги AC описанной окружности (не содержащей B). Известно, что $AB = 15$, $BC = 7$ и $MI = MO$. Найдите AC.

10 класс

11. В школе учатся мальчики и девочки. Средний возраст мальчиков отличается от среднего возраста девочек, но среднее этих двух чисел совпадает со средним возрастом всех школьников. Кого в школе больше — мальчиков или девочек? (*Жуков А.*)

12. На доске в строчку написаны двадцать троек. Поставив между некоторыми из них знак «+», Вася обнаружил, что сумма равна 600. Сколько плюсов поставил Вася?

13. Верно ли, что при любых a, b и c хотя бы одно из уравнений $ax^2 + 2bx + c = 0$, $bx^2 + 2cx + a = 0$, $cx^2 + 2ax + b = 0$ имеет решение?

14. В школьном турнире по шахматам соревновались мальчики и девочки, причём мальчиков было в 5 раз больше, чем девочек. По правилам турнира каждый шахматист играл с каждым другим *дважды*. Сколько всего игроков принимали участие, если известно, что мальчики набрали в сумме ровно в два раза больше очков, чем девочки? (За победу в шахматной партии начисляют 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за проигрыш — 0 очков.)

15. Угол A ромба $ABCD$ равен 60°. Прямая, проходящая через точку C, пересекает отрезок AB в точке M и прямую AD — в точке N. Докажите, что угол между прямыми MD и NB равен 60°. (*Заславский А.*)

11 класс

16. В школе учатся мальчики и девочки. Средний возраст мальчиков отличается от среднего возраста девочек, но среднее этих двух чисел совпадает со средним возрастом всех школьников. Кого в школе больше — мальчиков или девочек? (*Жуков А.*)

17. Докажите, что для любых неотрицательных чисел x и y справедливо неравенство:

$$2^x x + 2^y y \geqslant 2^y x + 2^x y\,.$$

18. Точки O и I — центры описанной и вписанной окружностей треугольника ABC, M — середина дуги AC описанной окружности (не содержащей B). Известно, что $AB = 15$, $BC = 7$ и $MI = MO$. Найдите AC.

19. Найдите все пары натуральных чисел a и b такие, что $3^a + 4^b$ является квадратом целого числа.

20. Даны n различных положительных чисел. Из них составляются суммы с любым числом слагаемых от 1 до n.

а) Какое *наименьшее* количество различных сумм можно получить?

б) Какое *наибольшее* количество различных сумм можно получить?

Межрегиональная олимпиада КФУ

5 класс

21. Антошка выкопал на огороде пять картошек. Все они весят по-разному. Могло ли оказаться так, что он сможет разделить все картошки как на две кучки одинакового веса, так и на три кучки одинакового веса? Кучка может состоять и из одной картошки. Обоснуйте свой ответ.

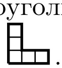
22. К натуральному числу n в конце приписали одну цифру. В результате получилось число, в 13 раз большее числа n. Чему могло равняться n? Укажите все ответы и объясните, почему других нет.

23. У Андрея, Лейсан и Тимура есть 12 больших чупа-чупсов разных цветов: несколько жёлтых, несколько зелёных и несколько красных. Они разложили чупа-чупсы по четыре штуки в три одинаковых пакета. Андрей сказал: «Смотрите, ни в одном пакете нет трёх одинаковых чупа-чупсов!» Лейсан сказала: «Верно. Но и трёх разных чупа-чупсов тоже нет ни в одном пакете!» Тимур сказал: «И все пакеты получились разными!». Все трое были правы. Обязательно ли в каком-то пакете лежит два жёлтых и два красных чупа-чупса? Обоснуйте свой ответ.

24. Паша записал во всех клетках таблицы 4×4 по одному числу так, что произведение чисел во всех строках и столбцах оказалось одинаковым и не равным нулю. Даша оставила восемь из этих чисел (рис. 1), а остальные стёрла. Какое число стояло в клетке, где нарисована звездочка? Обоснуйте свой ответ.

1/2	32		
	4	8	2
4	1		
		$*$	16

Рис. 1

25. Айгуль хочет вырезать из прямоугольника 5×10 как можно больше фигурок из 5 клеток вида . Помогите ей это сделать и объясните, почему больше фигурок вырезать не удастся. Фигурки могут быть повёрнуты как угодно. Все вырезания должны идти по клеточкам.

6 класс

26. Расставьте по кругу цифры от 1 до 9, каждую по одному разу, так, чтобы каждое двузначное число, составленное из двух идущих подряд по часовой стрелке цифр, делилось на 3 или на 4.

27. Водитель поехал по шоссе из Казани в Нижний Новгород с постоянной скоростью. К сожалению, на некоторых частях пути дорога ремонтировалась, и на таких участках ему приходилось снижать скорость на четверть. Поэтому в тот момент, когда он должен был бы приехать в Нижний Новгород, он проехал лишь 6/7 пути. Какую часть времени водитель ехал по ремонтируемым участкам, если на оставшемся пути ремонтируемых участков не было? Обоснуйте свой ответ.

28. В клетках таблицы 4×4 расставлены натуральные числа от 1 до 16 (в каждой клетке — по одному числу). В каждом квадратике 2×2, состоящем из четырёх клеток этой таблицы, отметили наибольшее из чисел, стоящих в них. Какое наибольшее и какое наименьшее количество чисел могло быть отмечено? Обоснуйте свой ответ.

29. Андрей спрятал монету под одну из восьми положенных в ряд шапок и предложил Тане узнать, под какой шапкой она лежит. Таня может делать следующее действие: она показывает на одну из шапок, а Андрей поднимает её, и, если монеты под ней нет, то говорит, слева или справа от указанной Таней шапки находится монета. При этом Андрей говорит правду и ложь по очереди, но не известно с чего именно начинает. Сможет ли Таня найти монету за три действия? Обоснуйте свой ответ.

30. Клетки квадрата 4×4 раскрашены в три цвета. Назовём пару клеток *удачной*, если они не имеют общих точек границы (ни по сторонам, ни по углам) и покрашены в одинаковый цвет. Докажите, что можно выбрать восемь клеток, которые разбиваются на четыре удачные пары.

7 класс

31. На острове рыцарей и лжецов живет 2022 человека, каждый из которых является либо рыцарем (который всегда говорит правду), либо лжецом (который всегда лжет). Однажды каждый из них сказал: «Среди остальных 2021 жителя острова есть по меньшей мере один лжец». Сколько рыцарей живет на острове? Обоснуйте свой ответ.

32. Из клетчатого квадрата 6×6 нужно вырезать по линиям сетки квадратик меньшего размера так, чтобы оставшуюся часть можно было разбить на уголки из трёх клеток . без пропусков и наложений. Уголки можно поворачивать и переворачивать. Чему могут равняться размеры вырезанного квадратика? Укажите все возможные ответы и объясните, почему других нет.

33. В равнобедренном треугольнике ABC ($AC = BC$) проведена биссектриса BD. Точка E, лежащая внутри отрезка AB, такова, что $CE = BE$. Отрезки BD и CE пересекаются в точке F. Оказалось, что $DF = CF$. Найдите углы треугольника ABC. Обоснуйте свой ответ.

34. Даны действительные числа a, b, c. Известно, что числа $a+b$, $b+c$, $c+a$ — это три последовательные целые числа, записанные в каком-то порядке (необязательно по возрастанию), причём наибольшее из них нечётно. Докажите, что числа a, b, c также являются тремя последовательными целыми числами,

35. Восемь шахматистов играют однокруговой турнир (всего играется семь туров, в каждом туре шахматисты разбиваются на четыре пары и в каждой паре играют друг с другом. В итоге каждый играет с каждым ровно по одному разу). За победу даётся 1 очко, за ничью — $1/2$ очка, за поражение — 0 очков. Через какое наименьшее количество туров может оказаться так, что единоличный победитель турнира уже выявился досрочно? Обоснуйте свой ответ.

8 класс

36. Три кота Том, Тим и Там-Там украли по сосиске и взвесили их. После взвешивания Том сказал: «Если бы моя сосиска была втрое тяжелее, то суммарный вес всех сосисок увеличился бы вдвое». Тим сказал: «То же самое можно сказать и про мою сосиску». А Там-Там подумал и сказал, что так быть не могло. Прав ли он? Обоснуйте свой ответ.

37. Барон Мюнхгаузен утверждает, что он может разрезать квадрат тремя прямыми так, чтобы получилось ровно семь частей — три треугольника и четыре четырёхугольника. Прав ли барон? Обоснуйте свой ответ. Разрезы должны идти от края до края.

38. В ряд стоят 30 детей, одетых в синие и красные шапки. Известно, что мальчики в синих шапках и девочки в красных шапках говорят правду, а остальные дети лгут. Каждый мальчик сказал: «*Все мои соседи — в красных шапках*». Каждая девочка сказала: «*Все мои соседи — в синих шапках*». Докажите, что детей в синих шапках не меньше десяти. Соседями друг другу считаются два ребенка, стоящие рядом.

39. На сторонах AB, BC и CA равностороннего треугольника ABC выбраны точки D, E и F так, что $BD > AF$. Оказалось, что $DE = DF$, $BE = AD$ и $\angle EDF = 90^\circ$. Докажите, что $\angle CEF = 90^\circ$.

40. Положительные действительные числа a, b и c удовлетворяют неравенствам $a^2 < b+c$, $b^2 < c+a$, $c^2 < a+b$. Докажите, что все они меньше 2.

9 класс

41. Алиса купила открытку в книжном магазине, потратив менее 100 рублей. Цена открытки — целое число рублей. Через месяц она вернулась в магазин, чтобы купить такую же открытку, и обнаружила, что она подорожала в 1,2 раза, при этом продавец лишь переставил цифры на ценнике. Сколько стоила открытка первоначально?

42. Найдите целую часть числа

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{2022} + \frac{1}{2023}\,.$$

43. В каждую клетку таблицы 21×22 вписано число 1 или -1. Под каждым столбцом записано произведение всех чисел столбца, а рядом с каждой строкой — произведение чисел строки. Какое наименьшее неотрицательное значение может принимать сумма всех этих произведений?

44. В треугольнике ABC стороны AB и AC равны, и биссектриса угла B пересекает AC в точке E такой, что $BC = BE+EA$. Найдите угол A.

10 класс

45. Квадратный трёхчлен x^2+px+q принимает целые кратные m значения при любых целых числах x. Найдите все такие натуральные $m > 1$.

46. Найдите все различные натуральные числа x и y, для которых справедливо равенство $x! + y = y! + x$.

47. Последовательность целых чисел такова, что $x_0 = 0$ и $|\,x_n\,| = |\,x_{n-1}+1\,|$ для всех натуральных n от 1 до 100. Какое наименьшее положительное значение может принимать выражение $|\,x_1 + x_2 + \ldots + x_{99}\,|$?

48. В остроугольном треугольнике ABC на стороне AC взяли точку D, H — точка пересечения высот. Прямая, проходящая через H перпендикулярно отрезку DH, пересекает его стороны AB и BC в точках E и F, причём $EH = HF$. Найдите отношение $AD : DC$.

11 класс

49. Пусть p — нечётное простое число. Найдите все целые x и y такие, что $x^3 + y^3 + p^3 = x^2y + xy^2$.

50. Функция f для всех действительных x, y удовлетворяет неравенствам $f(x+y) \geqslant f(x)+f(y)$ и $f(x) \geqslant x$. Найдите все такие функции $f(x)$.

51. Сумма нескольких натуральных чисел, в записи каждого из которых участвуют только цифры 3 и 0, равна $777\ldots77$ (2022 семёрки). Какое наименьшее число слагаемых может быть в этой сумме?

52. В неравнобедренном треугольнике ABC провели высоту BH, медиану BM и биссектрису BL. Точки P и Q — ортогональные проекции вершин A и C на прямую BL. Докажите, что точки M, H, P и Q лежат на одной окружности.

Олимпиада имени Л. Эйлера

8 класс

53. Как без остатка разрезать клетчатый квадрат размером 8×8 клеточек на 10 клетчатых прямоугольников, чтобы все прямоугольники имели различные площади? Все разрезы должны проходить по границам клеточек. (*И. Рубанов*)

54. Учитель придумал ребус, заменив в примере $a + b = c$ на сложение двух натуральных чисел цифры буквами: одинаковые цифры одинаковыми буквами, а разные — разными. (Например, если $a = 23$, а $b = 528$, то $c = 551$, и получился, с точностью до выбора букв, ребус $АБ + ВАГ = ВВД$). Оказалось, что по получившемуся ребусу однозначно восстанавливается исходный пример. Найдите наименьшее возможное значение суммы c. (*И. Богданов*)

55. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BK и CL. На отрезке BK отмечена точка N так, что $LN \parallel AC$. Оказалось, что $NK = LN$. Найдите величину угла ABC. (*А. Кузнецов*)

56. Числа 1, 2, ..., 1000 разбили на два множества по 500 чисел: красные $k_1, k_2, \ldots, k_{500}$ и синие $s_1, s_2, \ldots, s_{500}$. Докажите, что количество таких пар m и n, у которых разность $k_m - s_n$ даёт остаток 7 при делении на 100, равно количеству таких пар m и n, у которых разность $s_n - k_m$ дает остаток 7 при делении на 100. Здесь рассматриваются все возможные разности, в том числе и отрицательные.

Напомним, что остатком от деления целого числа a на 100 называется разность между числом a и ближайшим числом, не большим a и делящимся на 100. Например, остаток от деления числа 2022 на 100 равен $2022 - 2000 = 22$, а остаток от деления числа -11 на 100 равен $-11 - (-100) = 89$. (*Е. Бакаев*)

57. При каком наибольшем n существует выпуклый n-угольник, у которого длины диагоналей принимают не больше двух различных значений? (*И. Рубанов*)

58. Сумма остатков от деления трёх последовательных натуральных чисел на 2022 — простое число. Докажите, что одно из чисел делится на 2022. (*Н. Агаханов*)

59. Существует ли треугольник, у которого длины не совпадающих между собой медианы и высоты, проведённых из одной его вершины, соответственно равны длинам двух сторон этого треугольника? (*Н. Агаханов*)

60. Будем называть натуральное число *красивым*, если в его десятичной записи поровну цифр 0, 1, 2, а других цифр нет. Может ли произведение двух красивых чисел быть красивым? (*К. Сухов*)

61. Петя и Вася написали на доске по 100 различных натуральных чисел. Петя поделил все свои числа на Васины с остатком и выписал все 10 000 получившихся остатков себе в тетрадь. Вася поделил все свои числа на Петины с остатком и выписал все 10 000 получившихся остатков себе в тетрадь. Оказалось, что наборы выписанных Васей и Петей остатков совпадают. Докажите, что тогда и наборы их исходных чисел совпадают. (*С. Берлов*)

62. В вершины правильного 100-угольника поставили 100 фишек, на которых написаны номера 1, 2, …, 100, именно в таком порядке по часовой стрелке. За ход разрешается обменять местами некоторые две фишки, стоящие в соседних вершинах, если номера этих фишек отличаются не более чем на k. При каком наименьшем k серией таких ходов можно добиться расположения, в котором каждая фишка сдвинута на одну позицию по часовой стрелке по отношению к своему начальному положению? (*С. Берлов*)

Региональный этап

9 класс

63. Петя написал на доске десять натуральных чисел, среди которых нет двух равных. Известно, что из этих десяти чисел можно выбрать три числа, делящихся на 5. Также известно, что из написанных десяти чисел можно выбрать четыре числа, делящихся на 4. Может ли сумма всех написанных на доске чисел быть меньше 75? (*П. Кожевников*)

64. На доске девять раз (друг под другом) написали некоторое натуральное число N. Петя к каждому из 9 чисел приписал слева или справа одну ненулевую цифру; при этом все приписанные цифры различны. Какое наибольшее количество простых чисел могло оказаться среди 9 полученных чисел? (*И. Ефремов*)

65. Дан квадратный трёхчлен $P(x)$, не обязательно с целыми коэффициентами. Известно, что при некоторых целых a и b разность $P(a) - P(b)$ является квадратом натурального числа. Докажите, что существует более миллиона таких пар целых чисел $(c; d)$, что разность $P(c) - P(d)$ также является квадратом натурального числа. (*Н. Агаханов*)

66. В компании некоторые пары людей дружат (если A дружит с B, то и B дружит с A). Оказалось, что среди каждых 100 человек в компании количество пар дружащих людей нечётно. Найдите наибольшее возможное количество человек в такой компании. (*Е. Бакаев*)

67. Пусть CE — биссектриса в остроугольном треугольнике ABC. На внешней биссектрисе угла ACB отмечена точка D, а на стороне BC — точка F, причём $\angle BAD = 90° = \angle DEF$. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника CEF, лежит на прямой BD. (*И. Фролов*)

68. Последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2022}$ такова, что $a_n - a_k \geqslant n^3 - k^3$ для любых n и k таких, что $1 \leqslant n \leqslant 2022$ и $1 \leqslant k \leqslant 2022$. При этом $a_{1011} = 0$. Какие значения может принимать a_{2022}? (*Н. Агаханов*)

69. Петя разбил клетчатый квадрат 100×100 некоторым образом на домино — клетчатые прямоугольники 1×2, и в каждом домино соединил центры двух его клеток синим отрезком. Вася хочет разбить этот же квадрат на домино вторым способом, и в каждом своём домино соединить две клетки красным отрезком. Вася хочет добиться того, чтобы из каждой клетки можно было пройти в любую другую, идя по синим и красным отрезкам. Обязательно ли у него будет возможность это сделать?

(*Е. Бакаев*)

70. В трапеции $ABCD$ диагональ BD равна основанию AD. Диагонали AC и BD пересекаются в точке E. Точка F на отрезке AD выбрана так, что $EF \parallel CD$. Докажите, что $BE = DF$.

(*А. Кузнецов*)

71. На плоскости отмечены N точек. Любые три из них образуют треугольник, величины углов которого в градусах выражаются натуральными числами. При каком наибольшем N это возможно? (*Е. Бакаев*)

72. Докажите, что существует натуральное число b такое, что при любом натуральном $n > b$ сумма цифр числа $n!$ не меньше, чем 10^{100}. (*Д. Храмцов*)

10 класс

73. Петя написал на доске десять натуральных чисел, среди которых нет двух равных. Известно, что из этих десяти чисел можно выбрать три числа, делящихся на 5. Также известно, что из написанных десяти чисел можно выбрать четыре числа, делящихся на 4. Может ли сумма всех написанных на доске чисел быть меньше 75? (*П. Кожевников*)

74. Дан квадратный трёхчлен $P(x)$. Докажите, что существуют попарно различные числа a, b и c такие, что выполняются равенства

$$P(b+c) = P(a), \quad P(c+a) = P(b), \quad P(a+b) = P(c).$$

(*Н. Агаханов*)

75. У Васи есть n конфет нескольких сортов, где $n \geqslant 145$. Известно, что если из данных n конфет выбрать любую группу, содержащую не менее 145 конфет (в частности, можно выбрать группу из всех данных n конфет), то существует такой сорт конфет, что выбранная группа содержит в точности 10 конфет этого сорта. Найдите наибольшее возможное значение n.

(*А. Антропов*)

76. Пусть $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x_{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, где n — натуральное число. Известно, что числа a_0, a_1, $\ldots$, a_n — целые, при этом $a_n \neq 0$, $a_{n-k} = a_k$ при всех $k = 0, 1, \ldots, n$, и $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 = 0$. Докажите, что число $P(2022)$ делится на квадрат некоторого натурального числа, большего 1. (*Е. Холмогоров*)

77. В окружность Ω вписан шестиугольник $AECDBF$. Известно, что точка D делит дугу BC пополам, а треугольники ABC и DEF имеют общую вписанную окружность. Прямая BC пересекает отрезки DF и DE в точках X и Y, а прямая EF пересекает отрезки AB и AC в точках Z и T соответственно. Докажите, что точки X, Y, T, Z лежат на одной окружности. (*Д. Бродский*)

78. На доске написаны три последовательных нечётных числа. Может ли сумма остатков от деления этих трёх чисел на 2022 равняться некоторому простому числу? (*Н. Агаханов*)

79. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$, в котором $\angle A = 2\angle B$. Биссектриса угла C пересекает сторону AB в точке E. Докажите, что $AD + AE = BE$. (*А. Кузнецов*)

80. На плоскости отмечены N точек. Любые три из них образуют треугольник, величины углов которого в градусах выражаются натуральными числами. При каком наибольшем N это возможно? (*Е. Бакаев*)

81. В вершины правильного 100-угольника поставили 100 фишек, на которых написаны номера 1, 2, $\ldots$, 100, именно в таком порядке по часовой стрелке. За ход разрешается обменять местами некоторые две фишки, стоящие в соседних вершинах, если номера этих фишек отличаются не более чем на k. При каком наименьшем k серией таких ходов можно добиться расположения, в котором каждая фишка сдвинута на одну позицию по часовой стрелке по отношению к своему начальному положению?

(*С. Берлов*)

82. Докажите, что существует натуральное число b такое, что при любом натуральном $n > b$ сумма цифр числа $n!$ не меньше, чем 10^{100}. *(Д. Храмцов)*

11 класс

83. Петя написал на доске десять натуральных чисел, среди которых нет двух равных. Известно, что из этих десяти чисел можно выбрать три числа, делящихся на 5. Также известно, что из написанных десяти чисел можно выбрать четыре числа, делящихся на 4. Может ли сумма всех написанных на доске чисел быть меньше 75? *(П. Кожевников)*

84. Дан квадратный трёхчлен $P(x)$. Докажите, что существуют попарно различные числа a, b и c такие, что выполняются равенства

$$P(b+c) = P(a), \quad P(c+a) = P(b), \quad P(a+b) = P(c).$$

(Н. Агаханов)

85. В треугольной пирамиде $ABCD$ на её гранях BCD и ACD нашлись соответственно точки A' и B' такие, что $\angle AB'C = \angle AB'D = \angle BA'C = \angle BA'D = 120°$. Известно, что прямые AA' и BB' пересекаются. Докажите, что точки A' и B' равноудалены от прямой CD. *(А. Заславский)*

86. В компании некоторые пары людей дружат (если A дружит с B, то и B дружит с A). Оказалось, что при любом выборе 101 человека из этой компании количество пар дружащих людей среди них нечётно. Найдите наибольшее возможное количество человек в такой компании. *(Е. Бакаев, И. Богданов)*

87. Пусть S — 100-элементное множество, состоящее из натуральных чисел, не превосходящих 10 000. Отметим в пространстве все точки, каждая из координат которых принадлежит множеству S. К каждой из 1 000 000 отмеченных точек (x, y, z) прикрепим шарик с написанным на нём числом $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx}$. На каком наибольшем количестве шариков может быть написано число, равное 2? *(П. Козлов)*

88. Последовательность чисел a_1, a_2, …, a_{2022} такова, что $a_n - a_k \geqslant n^3 - k^3$ для любых n и k таких, что $1 \leqslant n \leqslant 2022$ и $1 \leqslant k \leqslant 2022$. При этом $a_{1011} = 0$. Какие значения может принимать a_{2022}? (*Н. Агаханов*)

89. Произведение цифр натурального числа n равно x, а произведение цифр числа $n+1$ равно y. Может ли так случиться, что произведение цифр некоторого натурального числа m равно $y-1$, а произведение цифр числа $m+1$ равно $x-1$? (*А. Кузнецов*)

90. В вершины правильного 100-угольника поставили 100 фишек, на которых написаны номера 1, 2, …, 100, именно в таком порядке по часовой стрелке. За ход разрешается обменять местами некоторые две фишки, стоящие в соседних вершинах, если номера этих фишек отличаются не более чем на k. При каком наименьшем k серией таких ходов можно добиться расположения, в котором каждая фишка сдвинута на одну позицию по часовой стрелке по отношению к своему начальному положению?

(*С. Берлов*)

91. Трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC вписана в окружность ω. Диагонали AC и BD пересекаются в точке P. Точка M — середина отрезка AB. Серединный перпендикуляр к отрезку AD пересекает окружность ω в точках K и L. Точка N — середина дуги CD описанной окружности треугольника PCD, не содержащей точку P. Докажите, что точки K, L, M и N лежат на одной окружности. (*А. Кузнецов*)

92. Даны неотрицательные числа a, b, c, d такие, что $a+b+c+d=8$. Докажите, что

$$\frac{a^3}{a^2+b+c} + \frac{b^3}{b^2+c+d} + \frac{c^3}{c^2+d+a} + \frac{d^3}{d^2+a+b} \geqslant 4.$$

(*А. Кузнецов*)

Олимпиада имени В. Р. Фридлендера

93. Замените звёздочки в выражении $** + *** = ****$ цифрами так, чтобы получилось числовое равенство и каждое из двух слагаемых, а также их сумма не менялись бы при чтении справа налево и слева направо.

94. На склад завезли сок в картонных упаковках (сечение упаковок квадратное). Начальник велел кладовщику расставить их квадратом. Тот заметил, что число упаковок совпадает с номером года. Однако до квадрата не хватило четырёх упаковок, и кладовщик решил переставить их прямоугольником (но, конечно, не в линию). Это удалось сделать единственным образом. В каком году это было?

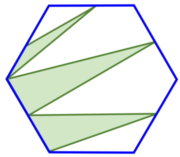


Рис. 2

95. В цехе заменили все старые одинаковые прессы на новые одинаковые более высокой производительности. До реконструкции в цехе штамповалось 3969 деталей в день, а после — 5600. Сколько прессов стало в цехе, если их количество увеличилось на 5?

96. В одном ряду стоит n кресел. Маша, Саша и Паша хотят сесть на эти места с соблюдением социальной дистанции: *никакие двое людей не должны сидеть рядом.* Сколькими способами можно это сделать, если

а) $n = 8$; *б*) $n = 10$?

97. У Пети есть фишки чёрного и белого цветов. Он расположил 9 фишек в ряд. Докажите, что обязательно найдётся пара фишек одного цвета, между которыми точно посередине будет расположена фишка такого же цвета.

98. Три подруги участвуют в телешоу. Имеется 7 шляп различных цветов, которые они видели заранее. Каждой надевают шляпу и усаживают так, что Аня видит шляпы на Варе и Гале, Варя — только на Гале, а Галя не видит ни одной. Их просят вслух назвать цвет своей шляпы. Если по крайней мере двое угадывают, то команда выигрывает. Как им договориться (до начала конкурса), чтобы гарантировать выигрыш?

99. На рисунке 2 представлен правильный шестиугольник, на сторонах которого отмечены середины. Какая часть площади шестиугольника закрашена?

100. Найдите максимальное значение функции

$$f(x) = \sin x + \cos x + \sin 3x - \cos 3x.$$

101. В треугольной пирамиде $OABC$ все плоские углы при вершине O — прямые. Площади боковых граней равны S_1, S_2 и S_3. Найдите площадь основания.

102. Решите систему уравнений

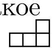
$$\begin{cases} x^3 + 9x^2y = 10, \\ y^3 + xy^2 = 2. \end{cases}$$

Олимпиада «Путь к Олимпу»

8 класс

103. Про четыре числа известно, что сумма *любых* трёх из них не больше утроенного четвёртого числа, а сумма всех четырёх равна 800. Найдите все четвёрки таких (не обязательно целых) чисел.

104. Можно ли все натуральные числа от 1 до 776 разбить на пары так, чтобы сумма чисел каждой пары делилась на 7?

105. В клетчатом квадрате 9×9 вырезали 16 клеток 1×1, как показано на рисунке 3. Какое наибольшее количество белых фигурок  из четырёх клеток можно вырезать из получившейся фигуры? (Фигурки можно поворачивать и переворачивать, но они не должны накладываться друг на друга и выходить за границы квадрата.)

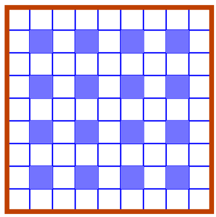


Рис. 3

106. В шахматном турнире участвовало 9 человек. Каждый сыграл с каждым ровно один раз. За победу даётся одно очко, за ничью пол-очка, за поражение — 0 очков. По окончании турнира всем, кто набрал не меньше шести очков, выдаётся медаль. Какое наибольшее количество медалей может быть выдано?

107. В треугольнике ABC угол A равен $120°$, точка D лежит на биссектрисе угла A и $AD = AB + AC$. Найдите углы треугольника DBC.

9 класс

108. При каком наименьшем натуральном n число $2021n + 2022$ делится на 2023?

109. Можно ли в выражении $2021^2 - 2020^2 - \ldots - 1^2$ заменить некоторые минусы на плюсы так, чтобы в сумме получилось число *а*) 2022? *б*) 2021?

110. В шахматном турнире участвовало 16 человек. Каждый сыграл с каждым ровно один раз. За победу даётся одно очко, за ничью пол-очка, за поражение — 0 очков. По окончании турнира всем, кто набрал не меньше десяти очков, выдаётся медаль. Какое наибольшее количество медалей может быть выдано?

111. Произведение положительных чисел a и b равно 2. Докажите, что $a^2+b^2 \geqslant 4(a-b)$. При каких значениях a и b достигается знак равенства?

112. Точка M — середина стороны AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$. Известно, что $BM \parallel CD$. Через точку C провели прямую, параллельную AB, до пересечения с BM в точке K. Докажите, что $BC = AK$.

10 класс

113. Про четыре числа известно, что среднее арифметическое *любых* трёх из них не меньше четвёртого числа, а сумма всех четырёх равна 1000. Найдите все четвёрки таких (не обязательно целых) чисел.

114. Решите уравнение

$$\frac{3}{x^2+2}+\frac{7}{x^6+6}=2.$$

115. Каким наибольшим количеством нулей может заканчиваться десятичная запись суммы $s = n^4+19$, где n — натуральное число? (*Киндер М.И.*)

116. Длины сторон треугольника выражаются *последовательными* натуральными числами. Может ли оказаться, что наибольший угол треугольника в два раза больше наименьшего?

117. Сумма неотрицательных чисел a и b меньше 10, а сумма их квадратов равна 20. Верно ли, что сумма кубов этих чисел больше 40?

11 класс

118. Подряд написаны числа $2021, 2020, 2019, 2018, \ldots, 2, 1$. Первое, третье, пятое и т.д. по порядку вычёркивают. Из оставшихся 1010 чисел снова вычёркивают первое, третье, пятое и т.д. Так делают, пока не останется одно число. Что это за число?

(*Киндер М.И.*)

119. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} xy + x + y = 1, \\ yz + y + z = 5, \\ zx + z + x = 2. \end{cases}$$

120. В шахматном турнире участвовало 25 человек. Каждый сыграл с каждым ровно один раз. За победу даётся одно очко, за ничью пол-очка, за поражение — 0 очков. По окончании турнира всем, кто набрал не меньше 15 очков, выдаётся медаль. Какое наибольшее количество медалей может быть выдано?

121. Произведение положительных чисел a, b и c равно 1. Докажите, что

$$\frac{a}{a^4 + b + c} + \frac{b}{b^4 + c + a} + \frac{c}{c^4 + a + b} \leqslant 1.$$

(*Киндер М.И.*)

122. Хорды AC и BD окружности пересекаются в точке P. Перпендикуляры к AC и BD в точках C и D соответственно пересекаются в точке Q. Найдите угол между прямыми AB и PQ.

2022-2023 учебный год

Муниципальный этап 49-й Всероссийской олимпиады по математике среди школьников Республики Татарстан состоялся 8 декабря 2022 г. Региональный этап и олимпиада им. Л. Эйлера для школьников 8 класса проводились 13–14 февраля 2023 г.

5 февраля 2023 г. прошла открытая Межрегиональная предметная олимпиада КФУ по математике. Организатор олимпиады — Казанский (Приволжский) федеральный университет. Победители и призеры очного этапа олимпиады получают льготы при поступлении в Казанский федеральный университет. Составители задач Межрегиональной предметной олимпиады КФУ-2023:

И. С. Григорьева, Шурыгин В.-мл.

С 16 по 18 января 2023 г. на базе «Дуслык» Республиканского олимпиадного центра Министерства образования и науки Республики Татарстан состоялся заключительный этап республиканской олимпиады школьников 8-11 классов «Путь к Олимпу» по математике. В олимпиаде приняли участие около 200 обучающихся общеобразовательных организаций из 40 муниципальных районов республики.

9 апреля этого же года проводилась городская математическая олимпиада, посвящённая памяти В. Р. Фридлендера. Кроме школьников 8-11 классов, на олимпиаду впервые были приглашены и ученики 6-7 классов г. Казани. Предложенные задачи для учеников 8-11 классов по традиции были общими для всех участников этих параллелей. Победители олимпиады получили приглашение в летнюю школу «Квант». В составлении задач олимпиады принимали участие:

М. Д. Бронштейн, И. С. Григорьева, В. А. Сочнева.

Ниже представлены условия и подробные решения задач всех перечисленных олимпиад. В скобках после условия задачи указана фамилия её автора.

Муниципальный этап

8 класс

123. Можно ли найти четыре различных натуральных числа, каждое из которых не делится ни на 2, ни на 3, ни на 4, но сумма любых двух делится на 2, сумма любых трёх делится на 3, а сумма всех четырёх делится на 4?

124. По кругу расставили в некотором порядке числа от 1 от 8, а затем записали суммы соседних чисел. Могло ли получиться 8 последовательных чисел (в каком-то порядке)?

125. Найдите все различные простые числа a, b и c такие, что $ab + bc + ca \geqslant abc$.

126. За круглым столом сидят 30 человек, каждый из которых или рыцарь, который всегда говорит правду, или лжец, который всегда лжёт. Каждого спросили: «Сколько рыцарей среди ваших соседей?» (Двое сидящих называются *соседями* друг друга, если между ними нет других сидящих.) 10 человек ответили «один», 10 — «два» и 10 — «ни одного». Каким наибольшим может быть число рыцарей за столом? (*Женодаров Р.Г.*)

127. В треугольнике ABC угол A равен $75°$, угол C равен $60°$. На продолжении стороны AC за точку C отложили отрезок CD, равный половине стороны AC. Найдите угол BDC.

9 класс

128. Можно ли найти пять различных натуральных чисел, каждое из которых не делится ни на 3, ни на 4, ни на 5, но сумма любых трёх делится на 3, сумма любых четырёх делится на 4, а сумма всех пяти делится на 5?

129. Известно, что $2x + y^2 + z^2 \leqslant 2$. Докажите, что сумма чисел x, y и z не больше 2.

130. Найдите наименьшее натуральное число n такое, что суммы цифр каждого из чисел n и $n + 1$ делятся на 17.

131. За круглым столом сидят 30 человек, каждый из которых или рыцарь, который всегда говорит правду, или лжец, который всегда лжёт. Каждого спросили: «Сколько рыцарей среди ваших соседей?» (Двое сидящих называются *соседями* друг друга, если между ними нет других сидящих.) 10 человек ответили «один», 10 — «два» и 10 — «ни одного». Каким наибольшим может быть число рыцарей за столом? (*Женодаров Р.Г.*)

132. В треугольнике ABC точка O_1 — центр вписанной окружности. На продолжении стороны AB за точку B выбрана точка D. Окружность с центром O_2 касается отрезка CD и продолжений сторон AB и AC треугольника ABC. Докажите, что если $O_1C = O_2C$, то треугольник BCD — равнобедренный.

10 класс

133. Найдите наименьшее 10-значное число, у которого сумма цифр больше, чем у любого меньшего его числа.

134. В шахматном турнире каждый сыграл с каждым по одному разу. Победитель половину партий выиграл, половину — сыграл вничью. Оказалось, что он набрал очков в 9 раз меньше, чем все остальные вместе взятые. (За победу — 1 очко, за ничью — 0,5, за поражение — 0.) Сколько было шахматистов в турнире?

135. Докажите, что любое нечётное составное число можно представить в виде суммы трёх или более последовательных нечётных положительных слагаемых. Сколько существует таких способов для числа 2021?

136. Пусть x, y и z — действительные числа. Найдите наименьшее и наибольшее значение выражения

$$f = \cos x \sin y + \cos y \sin z + \cos z \sin x.$$

137. Сторона AB треугольника ABC больше стороны BC, а угол B равен 40°. На стороне AB взята точка P так, что $BP = BC$. Биссектриса BM пересекает описанную около треугольника ABC окружность в точке T. Найдите угол MPT.

11 класс

138. Найдите наименьшее 10-значное число, у которого сумма цифр не меньше, чем у любого меньшего его числа.

139. В шахматном турнире каждый сыграл с каждым по одному разу. Победитель половину партий выиграл, половину — сыграл вничью. Оказалось, что он набрал очков в 13 раз меньше, чем все остальные. (За победу — 1 очко, за ничью — 0,5, за поражение — 0.) Сколько было шахматистов в турнире?

140. Длина диагонали прямоугольного параллелепипеда равна 3. Чему равно наибольшее возможное значение площади поверхности у такого параллелепипеда?

141. Все значения квадратного трёхчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ на отрезке $[0; 2]$ по модулю не превосходят 1. Какое наибольшее значение при этом может иметь величина $|a| + |b| + |c|$? Для какой функции $f(x)$ достигается это значение?

142. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BB_1 и BB_2 внутреннего и внешнего углов при вершине B. Из точки H пересечения высот опущены перпендикуляры HH_1 и HH_2 на прямые BB_1 и BB_2. В каком отношении прямая H_1H_2 делит сторону AC?

Межрегиональная олимпиада КФУ

5 класс

143. Из прямоугольника 5×7 вырезали три клетки (рис. 4). Разрежьте по линиям сетки оставшуюся фигуру на 8 равных частей. *Части называются равными, если их можно совместить наложением.* В решении достаточно привести один правильный пример разрезания.

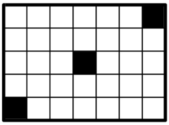


Рис. 4

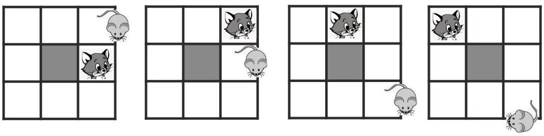


Рис. 5

144. Кот бегает против часовой стрелки по восьми квадратикам, каждую секунду перемещаясь в соседний квадрат. Мышь бегает по часовой стрелке по периметру большого квадрата, перемещаясь каждую секунду на следующий отрезок (рис. 5). На картинке слева направо показаны стартовая позиция, а потом — позиции через 1, 2 и 3 секунды после старта соответственно. Где будут кот и мышь спустя 2023 секунды после старта?

145. На празднике присутствовали несколько супружеских пар (других людей по отдельности не было). Каждый мужчина съел на три апельсина больше, и на два мандарина меньше, чем его жена. Оказалось, что апельсинов и мандаринов было съедено поровну. Докажите, что общее количество гостей делится на 4.

146. В ряд стоят шесть человек, каждый из которых либо рыцарь (всегда говорит правду), либо лжец (всегда лжет). Первый говорит: «Справа от меня ровно пять лжецов», второй: «Слева от меня ровно один лжец», третий: «Справа от меня ровно три лжеца», четвертый: «Слева от меня ровно три лжеца», пятый: «Справа от меня ровно один лжец», шестой: «Слева от меня ровно один лжец». Кто из них кто? Номера людей считаются слева направо.

147. В 5А классе провели опрос, кто какие фрукты любит. Оказалось, что 13 школьников любят яблоки, 11 — любят сливы, 15 — любят персики и 6 — любят дыню. Школьник может любить больше одного фрукта. Каждый школьник, любящий сливы, также любит либо яблоки, либо персики (но не то и другое сразу). А каждый школьник, который любит персики, также любит либо сливы, либо дыни (но не то и другое сразу). Какое минимальное количество людей может быть в 5А?

6 класс

148. Разрежьте фигуру на рис. 6 по линиям сетки на шесть равных клетчатых частей и затем сложите из них прямоугольник 5×6. *Части называются равными, если их можно совместить наложением.* В решении необходимо привести две картинки — как разрезать и как сложить.

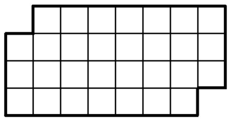


Рис. 6

149. Амир тяжелее Ильнура на 8 *кг*, а Данияр тяжелее Булата на 4 *кг*. Сумма весов самого тяжёлого и лёгкого мальчиков на 2 кг меньше, чем сумма весов двоих остальных. Все четверо весят вместе 250 кг. Сколько килограммов весит Амир?

150. Во время перемены один из пяти учеников написал на доске неверное равенство. На вопрос классного руководителя, кто это сделал, ученики дали следующие ответы.

`Антон`: «Это был Боря или Вова».

`Боря`: «Ни Дима, ни я этого не делали».

`Вова`: «Антон и Боря — оба лгут».

`Гоша`: «Среди Антона и Бори один лжёт, а другой говорит правду».

`Дима`: «Гоша говорит неправду».

Классный руководитель знает, что трое из них всегда говорят правду, а двое других всегда лгут. Кто написал неверное равенство?

151. Назовем натуральное число *интересным*, если оно представляется как в виде суммы двух последовательных целых чисел, так и в виде суммы трёх последовательных целых чисел. Коля перемножил пять различных натуральных чисел. Оказалось, что результат — интересное число. Докажите, что хотя бы один из множителей тоже был интересным числом.

152. Тимофей положил на клетчатое поле 10 клетчатых прямоугольников, площади которых равны 1, 2, 3, ..., 10 соответственно. Некоторые прямоугольники перекрывались друг с другом (возможно, полностью, а возможно, только частично). После этого он заметил, что имеется ровно одна клетка, покрытая ровно один раз; имеется ровно две клетки, покрытые ровно два раза; имеется ровно три клетки, покрытые ровно три раза и ровно четыре клетки, покрытые ровно четыре раза. Какое наибольшее количество клеток, покрытых хотя бы пять раз, могло найтись? Площадь клетчатого прямоугольника — это количество клеток, которые он содержит. Каждый прямоугольник лежит на поле ровно по клеточкам.

7 класс

153. В кружке занимается 36 школьников. Если на занятие придут любые 33 из них, то девочек в любом случае будет больше половины. А если на занятие придёт 31 ученик, то может оказаться так, что больше половины из них — мальчики. Сколько девочек занимается в кружке?

154. Можно ли числа от 1 до 1000 разбить на несколько групп так, чтобы в каждой группе было хотя бы два числа, и при этом в каждой группе сумма *любых двух* чисел делилась на 3?

155. Саша выбрал пять чисел из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7 и сообщил Ане их произведение. Исходя из этих данных Аня поняла, что она не может однозначно определить чётность суммы выбранных Сашей чисел. Какое число Саша сообщил Ане?

156. Четыре точки A, B, C, D таковы, что D и C лежат по одну сторону относительно прямой AB и выполнено равенство $AB = AD + BC$. Биссектрисы углов ABC и BAD пересекаются в точке E. Докажите, что $CE = DE$.

157. Петя и Вася играют в такую игру. На крайнем левом поле клетчатой полоски, состоящей из 13 клеток, лежит кучка из

2023 камней (рис. 7). Игроки ходят по очереди, начинает Петя. Каждый из ребят своим ходом может сдвинуть любой камень на одно или на два поля вправо. Выигрывает тот, кто первым поставит любой камень на крайнюю правую клетку. Кто из ребят может выиграть вне зависимости от игры соперника?

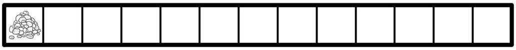


Рис. 7

8 класс

158. Клетчатый прямоугольник, длины обеих сторон которого — чётные числа, разрезали на фигурки вида  и  так, что присутствуют фигурки обоих видов. Какую наименьшую площадь мог иметь такой прямоугольник? Приведите пример соответствующего разрезания и объясните, почему меньшая площадь невозможна. Фигурки можно поворачивать и переворачивать. Длина стороны прямоугольника равна количеству клеточек, прилегающих к ней. Площадь клетчатого прямоугольника — это количество клеток, которые он содержит.

159. Мама испекла Ане на день рождения торт, который весит целое число граммов. Перед тем, как украсить его, мама взвесила торт на цифровых весах, которые округляют вес до десятков граммов в ближайшую сторону (если вес оканчивается на 5, то весы округляют его в меньшую сторону). Результат оказался равным 1440 *г*. Когда мама украсила торт одинаковыми свечками, количество которых было равно возрасту Ани, весы показали 1610 *г*. Известно, что вес каждой свечки составляет целое число граммов, при этом если положить на весы одну свечу, то они покажут 40 *г*. Сколько лет может быть Ане? Укажите все ответы и объясните, почему других нет.

160. Можно ли переменные a, b, c, d заменить на какие-нибудь четыре последовательных натуральных числа в некотором порядке так, чтобы стало верным равенство

$$(a+b)(b+c)(c+d) = (c+a)(a+d)(d+b)\,?$$

161. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD такая, что $AD = 3BC$. Точка K — середина диагонали BD. Оказалось, что AK — биссектриса угла CAD. Докажите, что $AC = 2BC$.

162. На шахматной доске стоят 12 ферзей. Докажите, что можно выбрать четыре строчки и четыре столбца так, чтобы ни на одной из 16 клеток, стоящих на их пересечениях, ферзей не было. Доска имеет размеры 8×8.

9 класс

163. Сегодня Вовочка начал смотреть аниме. Если он будет смотреть по 2 серии в день, то к 1 апреля 2023 (не включительно) у него останутся непросмотренными 215 серий. Если же он начнёт смотреть по 5 серий в день — то только 50. Какое сегодня число и сколько серий в сериале?

164. Чему равно наименьшее натуральное число, которое делится на 2022 и десятичная запись которого начинается на 2023?

165. Из шести отрезков составлены два треугольника с периметром 2 каждый. Один отрезок из первой тройки поменяли местами с отрезком из второй тройки. Теперь из отрезков первой тройки нельзя сложить треугольник. Можем ли мы быть уверены, что из отрезков второй тройки по-прежнему можно сложить треугольник?

166. Может ли ортоцентр (точка пересечения высот) треугольника *а*) делить одну из его высот пополам? *б*) делить две высоты пополам?

167. Квадратный трёхчлен $P(x) = x^2 + px + q$ удовлетворяет условию $P(q) < 0$. Докажите, что ровно один из его корней лежит в промежутке от 0 до 1.

10 класс

168. Классная руководительница подсчитала долю девочек в своем классе. Округлив до целого числа процентов, она получила результат 51%. Докажите, что в классе нечётное число учеников. Каково наименьшее возможное число учеников в классе?

169. Назовём год *интересным*, если человеку в этом году исполняется столько лет, какова сумма цифр года его рождения. Некий год оказался интересным для Ивана, родившегося в 20 веке и для Вовочки, который родился в 21 веке. Какова разница их возрастов?

Замечание. Для удобства считаем, что они родились в один день, все вычисления производятся в целых годах.

170. Найдите все решения уравнения $x^2 - [x] = 1$. Здесь $[x]$ — целая часть x, то есть наибольшее целое, не превосходящее данное число. Например, $[2{,}9] = 2$; $[-2{,}9] = -3$.

171. Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 5$, $BC = 8$. Биссектриса угла B пересекает описанную вокруг треугольника окружность в точке D.

а) Известно, что площадь треугольника ABD равна 10. Найдите площадь треугольника BCD.

б) Может ли оказаться, что S_{ABD} равна 100?

172. На карточках написаны числа от 1 до 100. Людочке нужно выбрать 4 карточки так, чтобы сумма чисел на них была равна 50.

а) Вовочка потерял какие-то 11 карточек. Может ли Людочка быть уверена, что сможет выполнить задание?

б) Тот же вопрос, если Вовочка потерял 10 карточек.

11 класс

173. У Маши есть копилка, куда она каждую неделю кладёт купюру в 50 рублей или 100 рублей. В конце каждых 4-х недель она выбирает из копилки купюру наименьшего достоинства и дарит сестрёнке. Через год оказалось, что сестрёнке она отдала 1250 рублей. Какое минимальное количество денег могло накопиться за это время у неё самой?

174. *а*) Может ли для некоторых a и b оказаться, что $\log_2 a \cdot \log_2 b = \log_2(a \cdot b)$?

б) Может ли для некоторых a и b оказаться, что $\log_2 a + \log_2 b = \log_2(a+b)$?

в) Могут ли при каких-то a и b выполняться оба равенства?

175. Дана функция $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1}$. Известно, что $\min f(x) = a$ и $\max f(x) = b$. Чему равны минимум и максимум функций

а) $g(x) = \dfrac{x^3-1}{x^6+1}$? *б*) $g(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$?

176. Многогранник $ABCDA_1B_1C_1D_1$ изображен в ортогональной проекции на плоскость $ABCD$ (рис. 8). Докажите, что такой многогранник невозможен.

177. Рассмотрим алгебраическое выражение $F(a, \ldots, x)$, содержащее переменные, скобки и операции умножения и вычитания. Числовые константы не используются. Заменим один из знаков операции на $\star$, другой — на $*$. Назовём полученное выражение «формулой». Например, формулой будет выражение $(a * b) \star c$, причем один из знаков обозначает разность, а другой – умножение.

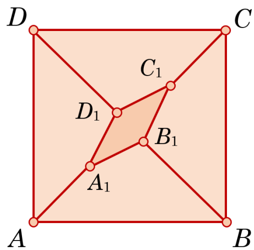


Рис. 8

а) Существует ли формула, которая при любых значениях переменных (и любом из смыслов знаков) даёт значение 0?

б) Существует ли формула, которая при любых значениях переменных даёт значение 1?

Олимпиада имени Л. Эйлера

8 класс

178. Два бегуна бегают с равными постоянными скоростями по диагоналям AC и BD соответственно квадрата $ABCD$. Добежав до конца диагонали, бегун сразу поворачивает обратно. Стартовали они одновременно из двух случайно выбранных точек своих диагоналей. Докажите, что найдётся момент, когда расстояние между бегунами будет *строго* меньше половины диагонали квадрата. (*Рубанов И.*)

179. Пусть p_1, $p_2, \ldots, p_{100}$ — сто простых чисел, среди которых нет одинаковых. Натуральные числа $a_1, \ldots, a_k$, большие 1, таковы, что каждое из чисел $p_1p_2^3$, $p_2p_3^3$, $\ldots$, $p_{99}p_{100}^3$, $p_{100}p_1^3$ равно произведению каких-то двух из чисел $a_1, \ldots, a_k$. Докажите, что $k \geqslant 150$. (*Рубанов И.*)

180. В клетках таблицы 10×10 расставлены натуральные числа $1, 2, \ldots, 99, 100$. Назовём *уголком* фигуру, которая получается удалением одной клетки из квадрата 2×2. Назовём уголок *хорошим*, если число в его клетке, граничащей по сторонам с двумя другими, больше чисел, стоящих в этих двух других клетках. Каково наибольшее возможное число хороших «уголков»? (Каждый уголок учитывается независимо от того, как он расположен по отношению к другим, разные уголки могут частично накладываться.) (*Голованов А.*)

181. На стороне AC треугольника ABC выбрана точка E. Биссектриса AL пересекает отрезок BE в точке X. Оказалось, что $AX = XE$ и $AL = BX$. Чему равно отношение углов A и B треугольника? (*Берлов С.*)

182. По кругу расставлено 99 положительных чисел. Оказалось, что для любых четырёх стоящих подряд чисел сумма двух первых из них по часовой стрелке равна произведению двух последних из них по часовой стрелке. Чему может быть равна сумма всех 99 расставленных чисел? (*Берлов С.*)

183. Можно ли число 240 представить в виде суммы девяти двузначных чисел (среди которых могут быть и одинаковые), в десятичной записи каждого из которых есть девятка?

(*Богданов И.*)

184. Внутри параллелограмма $ABCD$ отмечена точка E, лежащая на биссектрисе угла A, и точка F, лежащая на биссектрисе угла C. Известно, что середина отрезка BF лежит на отрезке AE. Докажите, что середина отрезка DE лежит на прямой CF.

(*Кузнецов А.*)

185. Назовём два числа *почти равными* друг другу, если они равны друг другу или отличаются друг от друга не более, чем на единицу. Клетчатый прямоугольник со сторонами, равными натуральным числам a и b, таков, что из него нельзя по линиям сетки вырезать прямоугольник, площадь которого почти равна половине площади исходного прямоугольника. Какое наименьшее значение может принимать число $|a-b|$? (*Молчанов Е., Берлов С.*)

186. Будем говорить, что мы *укоротили* число, если стёрли его последнюю цифру. Натуральное число, большее миллиона, таково, что если укоротить его, получится квадрат натурального числа, если укоротить этот квадрат, получится куб натурального числа, укоротив этот куб, получим четвёртую степень натурального числа, а, укоротив эту четвёртую степень, получим пятую степень натурального числа. Докажите, что если укоротить эту пятую степень, то получится шестая степень натурального числа.

(*Кузнецов А.*)

187. На столе есть две кучки камней, в которых соответственно 100 и 101 камень. Двое играют в игру, делая ходы по очереди. За ход разрешается взять кучку, убрать из неё какое-то количество камней (хотя бы один) и разбить оставшиеся в этой кучке камни на две непустые кучки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре: тот, кто делает первый ход, или его соперник? (*Туревский М.*)

Региональный этап

9 класс

188. Велодорожка состоит из двух участков: сначала идёт асфальтовый, а затем песчаный. Петя и Вася стартовали порознь (сначала Петя, а затем Вася), и каждый проехал всю дорожку. Скорость каждого мальчика на каждом из двух участков была постоянной. Оказалось, что они поравнялись в середине асфальтового участка, а также в середине песчаного. Кто из мальчиков затратил на всю дорожку меньше времени? (*Богданов И.*)

189. Дан бумажный треугольник, длины сторон которого равны 5 *см*, 12 *см* и 13 *см*. Можно ли разрезать его на несколько (больше одного) многоугольников, у каждого из которых площадь (измеренная в *см*^{2}) численно равна периметру (измеренному в *см*)? (*Храмцов Д.*)

190. Дано натуральное число n. На клетчатой доске $2n \times 2n$ расставили $2n$ ладей так, что никакие две не стоят в одной горизонтали или одной вертикали. После этого доску разрезали по линиям сетки на две связных части, симметричных друг другу относительно центра доски. Какое наибольшее количество ладей могло оказаться в одной из частей? (Клетчатая фигура называется *связной*, если по этой фигуре от любой её клетки можно добраться до любой другой, переходя каждый раз в соседнюю по стороне клетку.) (*Храмцов Д.*)

191. Даны натуральные числа a, b и c. Ни одно из них не кратно другому. Известно, что число $abc+1$ делится на $ab-b+1$. Докажите, что $c \geqslant b$. (*Антипов М.*)

192. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность γ. Оказалось, что окружности, построенные на отрезках AB и CD как на диаметрах, касаются друг друга внешним образом в точке S. Пусть точки M и N — середины отрезков AB и CD соответственно. Докажите, что перпендикуляр l к прямой MN, восставленный в точке M, пересекает прямую CS в точке, лежащей на γ.

(*Почепцов И., Богданов И.*)

193. Для натурального числа n обозначим через S_n наименьшее общее кратное всех чисел $1, 2, \ldots, n$. Существует ли такое натуральное число m, что $S_{m+1} = 4S_m$? (*Кузнецов А.*)

194. На доску записали 99 чисел, среди которых нет равных. В тетрадку выписали $\frac{1}{2} \cdot 99 \cdot 98$ чисел — все разности двух чисел с доски (каждый раз из большего числа вычитали меньшее). Оказалось, что в тетрадке число 1 записано ровно 85 раз. Пусть d — наибольшее число, записанное в тетрадке. Найдите наименьшее возможное значение d. (*Самойлов Л.*)

195. Дан остроугольный треугольник ABC, в котором $AB < BC$. Пусть M и N — середины сторон AB и AC соответственно, а H — основание высоты, опущенной из вершины B. Вписанная окружность касается стороны AC в точке K. Прямая, проходящая через K и параллельная MH, пересекает отрезок MN в точке P. Докажите, что в четырехугольник $AMPK$ можно вписать окружность. (*Бибибков П.*)

196. Найдите наибольшее число m такое, что для любых положительных чисел a, b и c, сумма которых равна 1, выполнено неравенство

$$\sqrt{\frac{ab}{c+ab}} + \sqrt{\frac{bc}{a+bc}} + \sqrt{\frac{ca}{b+ca}} \geqslant m.$$

(*Емельянов Л.*)

197. Куб $100 \times 100 \times 100$ разбит на миллион единичных кубиков; в каждом кубике расположена лампочка. Три грани большого куба, имеющие общую вершину, окрашены: одна красным, другая синим, а третья зелёным. Назовём *столбцом* набор из 100 кубиков, образующих блок $1 \times 1 \times 100$. У каждого из 30 000 столбцов есть одна окрашенная торцевая клетка; в этой клетке стоит переключатель — нажатие на этот переключатель меняет состояние всех 100 лампочек в столбце (выключенная лампочка включается, а включенная выключается). Изначально все лампочки были выключены. Петя нажал на несколько переключателей, получив ситуацию, в которой ровно k лампочек горят. Докажите, что после этого Вася может нажать на несколько переключателей так, чтобы ни одна лампочка не горела, использовав не более $k/100$ переключателей с красной грани. (*Кудря С., Богданов И.*)

10 класс

198. В таблице 6×6 изначально записаны нули. За одну операцию можно выбрать одну клетку и заменить число, стоящее в ней, на любое целое число. Можно ли за 8 операций получить таблицу, в которой все 12 сумм чисел в строках и столбцах будут различными положительными числами?

(*Кузнецов А., Кожевников П.*)

199. Дан бумажный треугольник, длины сторон которого равны 5 *см*, 12 *см* и 13 *см*. Можно ли разрезать его на несколько (больше одного) многоугольников, у каждого из которых площадь (измеренная в *см*^{2}) численно равна периметру (измеренному в *см*)? (*Храмцов Д.*)

200. В городе N прошли 50 городских олимпиад по разным предметам, при этом в каждой из этих олимпиад участвовало ровно 30 школьников, но не было двух олимпиад с одним и тем же составом участников. Известно, что для любых 30 олимпиад найдётся школьник, который участвовал во всех этих 30 олимпиадах. Докажите, что найдётся школьник, который участвовал во всех 50 олимпиадах. (*Дольников В.*)

201. Даны натуральные числа a, b, c такие, что $a > 1$, $b > 1$, $c > 1$, а число $abc + 1$ делится на $ab - b + 1$. Докажите, что b делится на a. (*Антипов М.*)

202. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BD и отмечена точка пересечения высот H. Серединный перпендикуляр к отрезку HD пересекает окружность, описанную около треугольника BCD, в точках P и Q. Докажите, что $\angle APB + \angle AQB = 180°$. (*Туревский М., Дидин М.*)

203. Для натурального числа n обозначим через S_n наименьшее общее кратное всех чисел $1, 2, \ldots, n$. Существует ли такое натуральное число m, что $S_{m+1} = 4S_m$? (*Кузнецов А.*)

204. Петя взял некоторые трёхзначные натуральные числа $a_0, a_1, \ldots, a_9$ и написал на доске уравнение

$$a_9x^9 + a_8x^8 + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = *.$$

Докажите, что Вася сможет вместо звездочки написать некоторое 30-значное натуральное число так, чтобы получившееся уравнение имело целый корень. *(Кузнецов А., Антропов А.)*

205. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. На стороне AB выбрана точка L так, что $AL = CK$. Отрезки AK и CL пересекаются в точке M. На продолжении отрезка AD за точку D отмечена точка N. Известно, что четырёхугольник $ALMN$ — вписанный. Докажите, что $\angle CNL = 90^\circ$. *(Кузнецов А.)*

206. Дано натуральное число k. Вдоль дороги стоят n столбов через равные промежутки. Миша покрасил их в k цветов и для каждой пары одноцветных столбов, между которыми нет других столбов того же цвета, вычислил расстояние между ними. Все эти расстояния оказались различны. При каком наибольшем n так могло оказаться? *(Тихомиров М., Петров Ф.)*

207. Докажите, что для любых трёх положительных вещественных чисел x, y, z выполнено неравенство

$$(x-y)\sqrt{3x^2+y^2}+(y-z)\sqrt{3y^2+z^2}+(z-x)\sqrt{3z^2+x^2} \geqslant 0.$$

(Бибиков П.)

11 класс

208. Можно ли число 2023 представить в виде суммы трёх натуральных чисел a, b, c таких, что a делится на $b+c$ и $b+c$ делится на $b-c+1$? *(Кузнецов А.)*

209. Даны различные вещественные числа a_1, a_2, a_3 и b. Оказалось, что уравнение $(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3) = b$ имеет три различных вещественных корня c_1, c_2, c_3. Найдите корни уравнения $(x+c_1)(x+c_2)(x+c_3) = b$. *(Антропов А., Сухов К.)*

210. В городе N прошли 50 городских олимпиад по разным предметам, при этом в каждой из этих олимпиад участвовало ровно 30 школьников, но не было двух олимпиад с одним и тем же составом участников. Известно, что для любых 30 олимпиад найдётся школьник, который участвовал во всех этих 30 олимпиадах. Докажите, что найдётся школьник, который участвовал во всех 50 олимпиадах. *(Дольников В.)*

211. На доску записывают пары чисел. Сначала на доску записали пару чисел $(1; 2)$. Если на доске написана пара чисел $(a; b)$, то на доску можно дописать пару $(-a; -b)$, а также пару $(-b; a + b)$. Кроме того, если на доске написаны пары чисел $(a; b)$ и $(c; d)$, то на доску можно дописать пару $(a + c; b + d)$. Могла ли через некоторое время на доске оказаться пара $(2022; 2023)$? Порядок чисел в паре существенен, например, пары чисел $(1; 2)$ и $(2; 1)$ считаются различными. (*Почепцов И.*)

212. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведена высота AH, медиана AM, а также отмечен центр O его описанной окружности ω. Отрезки OH и AM пересекаются в точке D, прямые AB и CD — в точке E, прямые BD и AC — в точке F. Лучи EH и FH пересекают окружность ω в точках X и Y. Докажите, что прямые BY, CX и AH пересекаются в одной точке. (*Кузнецов А.*)

213. Для натурального числа n обозначим через S_n наименьшее общее кратное всех чисел $1, 2, \ldots, n$. Существует ли такое натуральное число m, что $S_{m+1} = 4S_m$? (*Кузнецов А.*)

214. Назовём два числа *почти равными* друг другу, если они равны друг другу или отличаются друг от друга не более, чем на единицу. Верно ли, что из любого прямоугольника с натуральными сторонами можно вырезать какой-нибудь прямоугольник с натуральными сторонами, площадь которого почти равна половине площади исходного прямоугольника? Стороны вырезаемого прямоугольника не обязательно параллельны сторонам исходного прямоугольника. (*Молчанов Е.*)

215. Точка O — центр описанной окружности остроугольного неравнобедренного треугольника ABC. На биссектрисе угла ABC внутри треугольника ABC отмечена точка D, а на отрезке BD — точка E так, что $AE = BE$ и $BD = CD$. Точки P и Q — центры окружностей, описанных около треугольников AOE и COD соответственно. Докажите, что точки A, C, P и Q лежат на одной прямой или на одной окружности. (*Кузнецов А.*)

216. Даны ненулевые числа a, b, c. Докажите, что выполняется неравенство

$$\left|\frac{b}{a} - \frac{b}{c}\right| + \left|\frac{c}{a} - \frac{c}{b}\right| + |\,bc + 1\,| > 1.$$

(*Кузнецов А.*)

217. В стране $2n$ городов (n — натуральное), некоторые из них соединены двусторонними беспосадочными авиалиниями. Из любого города можно попасть в любой другой, возможно, с пересадками. Президент хочет разделить страну на две области и включить каждый город в одну из двух областей. При этом авиалинии разделятся на k межобластных и m внутриобластных. Докажите, что президент может добиться того, чтобы выполнялось неравенство $k - m \geqslant n$. (*Дидин М.*)

Олимпиада имени В. Р. Фридлендера

6-7 классы

218. Найдите все тройки простых чисел p, q и r такие, что $p^2 - q^2 = r$.

219. Вовочка за год написал 30 контрольных, причем имел оценки всех типов, от двоек до пятёрок. Двоек и пятёрок было поровну, а троек больше, чем четвёрок. Может ли оказаться, что сумма оценок равна: *а*) 100? *б*) 105?

220. Через $\max(,)$ обозначается наибольшее из списка чисел, через $\min(,)$ —наименьшее. Какое из чисел больше:

$$A = \max(a,b) - \max(a,b,c) + \max(b,c) - \max(a,b,c) + \max(c,a),$$
$$B = \min(a,b) - \min(a,b,c) + \min(b,c) - \min(a,b,c) + \min(c,a)?$$

221. Учитель нарисовал четыре луча с началом в одной точке. Шестеро учеников измерили углы между этими лучами (каждый для своей пары), у них получились числа $30°, 40°, 50°, 70°$, $90°$, $150°$. Верно ли, что все произвели измерения верно?

222. Периметр треугольника равен 23, а длины сторон являются целыми положительными числами. Сколько существует таких треугольников?

223. Кубик $1 \times 1 \times 1$ раскрашен в 3 цвета (каждая пара противоположных граней — в один цвет). Из восьми таких одинаковых кубиков составляют куб $2 \times 2 \times 2$, причём прикладывают друг к другу гранями одного цвета. Можно ли сделать это так, что на каждой грани большого куба присутствуют по крайней мере 2 цвета?

8-11 классы

224. Вовочка за год написал 15 контрольных, причём имел оценки всех типов, от двоек до пятёрок. Двоек и пятёрок было поровну, а троек больше, чем четвёрок. Чему может оказаться равна сумма всех его оценок?

225. Квадратный многочлен x^2+ax+b имеет целые корни, по модулю большие 2. Докажите, что число $a+b+1$ — составное.

226. Учитель нарисовал четыре луча с началом в одной точке. Шестеро учеников измерили углы между этими лучами (каждый для своей пары). У пятерых из них получились числа 30°, 40°, 50°, 70°, 90°. Шестой ученик измерял самый большой угол. Какой результат у него получился?

227. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Постройте прямую, проходящую через точку A, которая делит площадь четырехугольника пополам.

228. В день, когда не работает столовая, 26 одноклассников приносят из дома свои домашние обеды. Некоторые школьники угощают кого-то из одноклассников. Каждый школьник может получить угощение от любого количества одноклассников, однако сам угощает не более чем двоих. Докажите, что можно найти 6 человек, ни один из которых не угощает другого из этих шести.

229. В школе учится 2023 школьника, причём некоторые являются фанатами спортивных команд. Оказалось, что у каждых двух команд ровно один общий фанат, и ни у каких трёх команд общих фанатов нет. Каким может быть наибольшее число команд, у которых есть фанаты в этой школе?

Олимпиада «Путь к Олимпу»

8 класс

230. В кружке учатся отличники, которые всегда говорят правду, и хулиганы, которые всегда лгут. *Каждый* ученик сказал про *каждого* из остальных, отличник он или хулиган. Суммарно в ответах школьников было названо 50 отличников и 60 хулиганов. *а*) Сколько в кружке учеников? *б*) Известно, что отличников в кружке меньше, чем хулиганов. На сколько?

231. Найдите такое натуральное число x, чтобы выполнялось равенство

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{50}{99}\,.$$

232. Вася должен был найти сумму 11 последовательных натуральных чисел. Однако по невнимательности он пропустил какие-то два соседних числа, и его сумма оказалась равной 1000. А каков настоящий ответ?

233. Оля и Коля собираются купить по одной открытке и по одному конверту. В магазине продаются 10 открыток по цене от 40 рублей до 99 рублей и 10 конвертов по цене от 10 рублей до 49 рублей. Все цены разные. Стоимость каждой открытки и каждого конверта — целое количество рублей. Верно ли, что Оля и Коля всегда смогут купить два набора из открытки и конверта по одной и той же цене?

234. В квадрате $ABCD$ на сторонах BC и CD взяты точки K и M соответственно, причём $\angle AKB = \angle MKC = 60^\circ$. Найдите угол AMK.

9 класс

235. В кружке учатся отличники, которые всегда говорят правду, и хулиганы, которые всегда лгут. *Каждый* ученик сказал про *каждого* из остальных, отличник он или хулиган. Суммарно в ответах школьников было названо 76 отличников и 80 хулиганов. *а*) Сколько в кружке учеников? *б*) Известно, что отличников в кружке меньше, чем хулиганов. На сколько?

236. Вася должен был найти сумму 13 последовательных натуральных чисел. Однако по невнимательности он пропустил какие-то два соседних числа, и его сумма оказалась равной 1000. А каков настоящий ответ?

237. Ненулевые числа a и b таковы, что уравнение $a(x+b)^2+b(x+a)^2=0$ имеет единственное решение. Докажите, что $|a|=|b|$.

238. По кругу написаны все цифры от 0 до 9 в некотором порядке так, что сумма любых трёх подряд идущих цифр не превосходит некоторого натурального числа k. При каком наименьшем k это возможно?

239. Угол A в треугольнике ABC равен $40°$. Окружность, проходящая через A и B и касающаяся BC, пересекает медиану к стороне BC (или ее продолжение) в точке M, отличной от A. Найдите угол BMC.

10 класс

240. На каждой стороне квадрата записали натуральное число, а в каждой вершине — произведение двух чисел, записанных на сторонах, содержащих эту вершину. Сумма всех чисел, записанных в вершинах квадрата, оказалась равной 77. Чему равна сумма всех чисел, записанных на сторонах квадрата?

(*Киндер М.И.*)

241. Действительные числа a, b, c таковы, что

$$\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}=\frac{c}{a+b}=M.$$

Какие значения может принимать величина M?

242. По кругу написаны все целые числа от 0 до 12 в некотором порядке так, что сумма любых четырёх подряд идущих чисел не превосходит некоторого натурального числа k. При каком наименьшем k это возможно?

243. Каждое из неотрицательных чисел x, y и z не больше 2. Докажите:

$$\sqrt{x^2+(2-y)^2}+\sqrt{y^2+(2-z)^2}+\sqrt{z^2+(2-x)^2}\ \leqslant 6.$$

244. В остроугольном треугольнике ABC точка пересечения высот H делит высоту CC_1 в отношении $3:1$, считая от вершины. На высоте CC_1 точка M выбрана так, что $\angle AMB=90^\circ$. Найдите отношение $CM:MC_1$.

11 класс

245. В кружке учатся отличники, которые всегда говорят правду, и хулиганы, которые всегда лгут. *Каждый* ученик сказал про *каждого* из остальных, отличник он или хулиган. Суммарно в ответах школьников было названо 110 отличников и 100 хулиганов. *а*) Сколько в кружке учеников? *б*) Известно, что отличников в кружке меньше, чем хулиганов. На сколько?

246. Сколько делителей числа 10^{1000} не являются делителями числа 10^{999}?

247. На каждой из 100 карточек записано по одному числу, отличному от нуля, при этом каждое число равно кубу суммы всех остальных. Какие это числа?

248. Сумма положительных чисел a, b и c не меньше 3. Докажите, что

$$\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3+c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3+a^3}{c^2+ca+a^2}\geqslant 2.$$

249. В остроугольном треугольнике ABC точка пересечения высот H делит высоту CC_1 в отношении $3:1$, считая от вершины. На высоте CC_1 точка M выбрана так, что $\angle AMB=90^\circ$. Найдите отношение $CM:MC_1$.

Решения задач

1. *Ответ:* 3745.

Так как выписаны произведения 20 и 21, то среди цифр задуманного числа есть цифры 4, 5 и 3, 7, то есть нам известны все его цифры. Цифры 4 и 5, 3 и 7 должны стоять рядом, поэтому наименьшее число, удовлетворяющее условиям, – это 3745, причём Вася стёр произведение $7 \cdot 4 = 28$.

2. *Ответ: а) может; б) не может.*

а) Назовём трёх друзей Антон, Борис и Сергей. Пусть Антон живёт в доме с номером a. Номер его этажа совпадает с номером дома b одного из его друзей, например, Бориса. По условию $a \neq b$. Предположим, Антон переехал на этаж выше. Теперь номер его этажа равен $b+1$, он не совпадает с b. Значит, он равен номеру дома Сергея, то есть $b+1=c$.

Итак, если один из друзей переехал на этаж выше с сохранением свойства номера, то номера его друзей отличаются на 1. Вариантов расселения друзей очень много. Например,

	Номер дома	**Номер этажа до переезда**	**Номер этажа после переезда**
Антон	2	3	4
Борис	3	4	4
Сергей	4	2	2

Некоторые номера этажей совпадают, но это не запрещено условием.

б) Если каждый из друзей переехал с сохранением свойства номера этажа, то у двух остальных номера отличаются на единицу. Но это условие не может выполняться для каждой пары номеров домов! Если минимальный номер n, то другие равны $n+1$ и $n+2$, а разница между n и $n+2$ не равна 1.

3. *Ответ:* 1212 *и* 2121.

Пусть $\overline{xyzt}$ — искомое четырёхзначное число, и $\overline{txyz}$ — полученное из него. Их сумма равна $S = \overline{xyzt} + \overline{txyz} = 11(100x + 10y + z) + 1001t = 11(\overline{xyz} + 91t) = 3333$. Отсюда $\overline{xyz} + 91t = 303$.

Цифра t отлична от нуля и может принимать только значения 1 и 2. (Если $t \geqslant 3$, то $\overline{xyz} < 100$.) Если $t = 1$, то $\overline{xyz} = 212$ и $\overline{xyzt} = 2121$. Если $t = 2$, то $\overline{xyz} = 121$ и $\overline{xyzt} = 1212$.

Таким образом, условию удовлетворяют два числа: 1212 и 2121.

4. *Ответ: один квадрат.*

Предположим, что среди прямоугольников нет ни одного квадрата. Пусть a и b — стороны произвольного прямоугольника, причём $a > b$. Так как целое число b больше 1, то $b \geqslant 2$, и значит, $a \geqslant 3$. Следовательно, площадь каждого такого прямоугольника $a \times b$ не менее $2 \cdot 3 = 6$ клеток. Но тогда 17 прямоугольников должны занимать не менее $17 \cdot 6 = 102$ клеток, в то же время исходный квадрат 10×10 имеет всего 100 клеток.

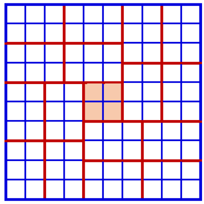


Рис. 9

На рисунке 9 приведён пример разрезания квадрата 10×10 на 17 прямоугольников, среди которых ровно один квадрат.

5. *Ответ: $DO = 8$.*

Отметим на прямой AC такую точку E, что треугольник BOE — равносторонний (рис. 10). Докажем равенство треугольников BAE и BCO. Действительно, поскольку $AB = BC$, треугольник ABC — равнобедренный, и значит, $\angle BAC = \angle BCA$.

Кроме того, отметим ещё одну пару равных углов $\angle AEB = \angle BOC = 120°$. Значит, треугольники BAE и BCO равны по стороне и двум углам, отсюда $AE = CO$ и $AO = AE + EO = CO + BO$.

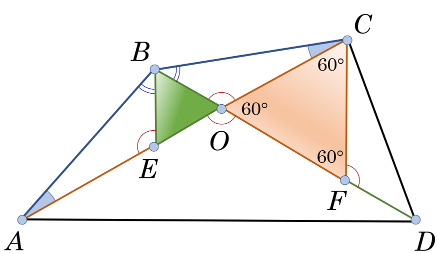


Рис. 10

Если отметить на прямой BD такую точку F, что треугольник COF — равносторонний, то аналогичными рассуждениями получим $DO = BO + CO$. Отсюда следует, что $DO = AO = 8$.

6. *Ответ:* 62, 65, 21 *и* 252.

Пусть $4x$ — последняя (четвёртая) часть числа. После деления её на 4 полученный результат, равный x, совпадает с третьей частью, умноженной на 3, потому третья часть числа — $\frac{x}{3}$. Если первую часть увеличить на 1, а вторую уменьшить на 2, — их сумма будет равна $x + x = 2x$. Значит, до изменения частей эта сумма была $(x-1)+(x+2) = 2x+1$. Поскольку сумма всех частей равна 400, имеем уравнение

$$2x + 1 + \frac{x}{3} + 4x = 400, \quad \text{откуда} \quad x = 63,$$

то есть после изменения всех частей результат оказался равным 63. Теперь легко находятся начальные значения всех частей: 62, 65, 21 и 252.

7. *Ответ: поровну.*

Пусть в школе учатся m мальчиков и d девочек, и пусть сумма возрастов всех мальчиков равна M, а сумма возрастов всех девочек равна D. Тогда средний возраст всех мальчиков — это $\frac{M}{m}$, средний возраст всех девочек — $\frac{D}{d}$, а средний возраст всех школьников — $\frac{M+D}{m+d}$. По условию

$$\frac{M}{m} + \frac{D}{d} = 2 \cdot \frac{M+D}{m+d}\,,$$

что несложно преобразовать к виду $(d-m)(Md-Dm) = 0$. Поскольку $\frac{M}{m} \neq \frac{D}{d}$, то есть $Md \neq Dm$, заключаем, что $m = d$. Итак, мальчиков и девочек в школе одинаковое количество.

8. *Ответ:* -1.

Домножим первое уравнение на x и вычтем из него второе. Общий корень исходных уравнений будет и корнем получившегося уравнения

$$(x^3 + ax^2 + bx) - (x^3 + bx + a) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a(x^2 - 1) = 0.$$

У последнего уравнения два корня — это 1 и -1. Если общий корень $x = 1$, то при подстановке его в каждое уравнение получим равенство $1 + a + b = 0$, которое в силу условия $a > b > 0$ выполняться не может, противоречие.

Если же общий корень $x = -1$, то при подстановке в уравнения получим $1 - a + b = 0$, которое не противоречит условию.

Замечание. Возможны и другие способы решения.

9. *Ответ:* 6 *игроков.*

Пусть в турнире принимали участие d девочек и $5d$ мальчиков. Тогда всего игроков было $d + 5d = 6d$; играя по две партии каждый с каждым они сыграли между собой $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6d(6d-1) = 6d(6d-1)$ партий. Поскольку в каждой партии разыгрывается одно очко, общее число очков, набранных всеми участниками, также равно $6d(6d-1)$. Из них у мальчиков две третьих, а у девочек — одна треть общего количества очков, то есть у девочек $\frac{1}{3} \cdot 6d(6d-1) = 2d(6d-1)$ очков.

Заметим, что если каждая девочка выиграла у всех мальчиков, то вместе девочки набрали максимум $2 \cdot d \cdot 5d = 10d^2$ очков, а играя между собой, девочки распределили $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot d(d-1)$ очков. Поэтому *наибольшее* количество очков, которое могли набрать девочки, равно $10d^2 + d(d-1) = 11d^2 - d$. Значит,

$$2d(6d-1) \leqslant 11d^2 - d \quad \Longleftrightarrow \quad d^2 \leqslant d.$$

Следовательно, девочек не могло быть больше одной. Если девочка была одна, то мальчиков было пятеро, всего — 6 игроков. Шестеро ребят сыграли между собой $6 \cdot 5 = 30$ партий и разыграли 30 очков. Девочка набрала 10 очков, выиграв у каждого из пяти мальчиков по две партии. Играя между собой, мальчики разыграли оставшиеся 20 очков.

10. *Ответ:* $AC = 13$.

Сначала докажем, что $MI = MA$ (*лемма о трезубце*).

(Рис. 11.) Действительно, внешний угол AIM треугольника AIB равен сумме углов BAI и ABI, и так как AI и BI — биссектрисы, то $\angle AIM = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B$. Угол IAM равен сумме углов IAC и CAM. Но $\angle IAC = \frac{1}{2}\angle A$, а $\angle CAM = \angle CBM = \frac{1}{2}\angle B$ — как вписанные.

Отсюда следует, что $\angle IAM = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B = \angle AIM$, и значит, треугольник AMI — равнобедренный, $MI = MA$. По условию $MO = MI$, и по лемме о трезубце $AO = MO = MI = MA$. Значит, треугольник AOM — равносторонний и $\angle AOM = 60°$.

Центральный угол AOM вдвое больше вписанного угла

ABM, поэтому имеем $\frac{1}{2}\angle B = 30^\circ$, то есть $\angle B = 60^\circ$. По теореме косинусов $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cos 60^\circ = 13^2$.

11. Совпадает с задачей **7**.

12. *Ответ:* 9 *плюсов.*

Первое решение. Так как цифр двадцать, то слагаемых может быть от 1 до 20. Поделим сумму и все слагаемые на 3. Теперь слагаемые имеют вид 1, 11, 111 и так далее, а сумма равна 200. Для того, чтобы сумма оканчивалась цифрой 0, число слагаемых должно делиться на 10. Значит, слагаемых либо 10, либо 20. Если слагаемых 20, то все слагаемые состоят из одной цифры, и сумма получается слишком маленькая. Значит, слагаемых ровно 10, а плюсов между ними — 9.

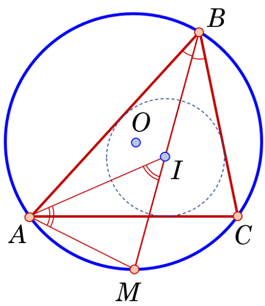


Рис. 11

Пример равенства с девятью плюсами: $333 + 33 \cdot 8 + 3 = 600$.

Второе решение. Можно явно найти, сколько и каких слагаемых в сумме. Сначала исключаем слагаемые из 4 и более цифр (они больше 600). Остаются слагаемые 333, 33 и 3. Если нет ни одного слагаемого 333, то максимальная сумма — $33 \cdot 10 = 330$. Если слагаемых 333 два или больше, то их сумма не меньше $333+333 = 666$. Значит, в сумме будет ровно одно слагаемое 333. Из остальных 17 троек нужно составить сумму 267. Так как $33 > 3 + 3$, то чем больше будет слагаемых 33, тем больше будет сумма. Если использовать 8 слагаемых 33 и одно слагаемое 3, то сумма равна $8 \cdot 33 + 3 = 267$. Если же заменить одно или несколько слагаемых 33 на $3 + 3$, сумма станет меньше. Значит, единственный способ получить 600 — это использовать сумму $333 + 33 \cdot 8 + 3$. И в каком бы порядке ни стояли эти 10 слагаемых, плюсов всегда 9.

13. *Ответ: верно.*

Если хотя бы одно из чисел a, b, c равно нулю, то по крайней мере одно из уравнений будет иметь корень $x = 0$, и значит, утверждение верно. Рассмотрим случай, когда числа a, b, c отличны от нулю.

Предположим, что все три квадратных уравнения не имеют решений, поэтому дискриминанты этих трёхчленов отрицательные, то есть справедливы неравенства:

$$b^2 < ac, \quad c^2 < ab, \quad a^2 < bc.$$

Так как левые части всех неравенств — положительные, то правые части тоже положительные. Перемножив эти неравенства, получим противоречие: $a^2b^2c^2 < a^2b^2c^2$.

14. Совпадает с задачей **9**.

15. Обозначим через K точку пересечения прямых MD и NB (рис. 12). Заметим, что треугольник ABD равносторонний, $\angle BAD = \angle ABD = \angle BDA = 60°$. Из подобия треугольников BMC и AMN, а также MAN и CDN следует

$$\frac{MB}{AB} = \frac{MC}{CN}, \qquad \frac{MC}{CN} = \frac{AD}{DN}.$$

Поскольку $AB = BD = AD$, имеем

$$\frac{MB}{BD} = \frac{MB}{AB} = \frac{MC}{CN} = \frac{AD}{DN} = \frac{BD}{DN}.$$

Треугольники MBD и BDN имеют равные углы ABD и BDA и прилегающие к ним пропорциональные стороны. Следовательно, треугольники MBD и BDN подобны. Поскольку углы между соответственными сторонами подобных треугольников равны, то углы BDM и DNB равны. Искомый угол BKD – внешний угол треугольника NKD – равен $\angle DNK + \angle KDN = \angle BDM + \angle KDN = 60°$.

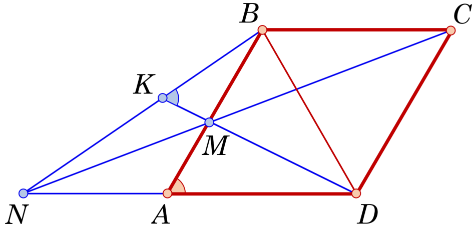


Рис. 12

16. Совпадает с задачей **7**.

17. Разность левой и правой частей неравенства несложно разложить на множители, она равна $(x-y)(2^x-2^y)$. Функция $f(x)=2^x$ возрастает при $x \geqslant 0$, поэтому если $x \geqslant y$, то $2^x \geqslant 2^y$, и наоборот, если $y \geqslant x$, то $2^y \geqslant 2^x$.

Во всех случаях $(x-y)(2^x-2^y) \geqslant 0$, а это равносильно требуемому неравенству.

18. Совпадает с задачей **10**.

19. *Ответ:* $a=b=2$.

Из равенства $3^a+4^b=n^2$ ясно, что число n — нечётное, и поэтому $n=2x+1$. Тогда исходное равенство можно записать так: $3^a+4^b=(2x+1)^2=4x^2+4x+1$, откуда следует, что число 3^a имеет остаток 1 при делении на 4. Последнее возможно только при условии чётного a, то есть $a=2y$ для некоторого натурального y, и значит, $9^y+4^b=(2x+1)^2$, или

$$2^{2b}=(2x+1)^2-(3^y)^2=(2x+1-3^y)(2x+1+3^y).$$

Оба сомножителя в правой части являются степенями двойки, их сумма равна $2(2x+1)=4x+2$, то есть не делится на 4, и значит, ровно одно из них не делится на 4. Единственная степень двойки с таким свойством — это 2^1, поэтому

$$\begin{cases} 2x+1-3^y=2, \\ 2x+1+3^y=2^{2b-1}. \end{cases}$$

Вычитая равенства друг из друга, получим

$$3^y=2^{2b-2}-1=(2^{b-1}-1)(2^{b-1}+1).$$

Каждое из чисел $2^{b-1}-1$ и $2^{b-1}+1$ является степенью тройки, причём разность этих чисел равна 2. Единственная пара таких степеней — это $3^0=1$ и 3^1. (Для любых других степеней тройки их разность больше 2.) Значит, $2^{b-1}-1=1$, то есть $b=2$. Тогда $3^y=2^{2b-2}-1=3$, $y=1$, отсюда $a=2y=2$. В итоге получаем $3^2+4^2=5^2$, то есть $n=5$.

20. *Ответ:* а) $\frac{1}{2}n(n+1)$; б) 2^n-1.

Можно считать, что исходные положительные числа расположены в порядке возрастания: $a_1<a_2<\ldots<a_n$. Рассмотрим

числа

$$\begin{array}{lllll}
a_1, & a_2, & \ldots\ a_{n-2}, & a_{n-1}, & a_n,\\
a_1+a_n, & a_2+a_n, & \ldots\ a_{n-2}+a_n, & a_{n-1}+a_n, & \\
a_1+a_{n-1}+a_n, & a_2+a_{n-1}+a_n, & \ldots\ a_{n-2}+a_{n-1}+a_n, & & \\
 & \multicolumn{3}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} & ,\\
a_1+a_2+\ldots+a_n. & & & &
\end{array}$$

Очевидно, что здесь каждое число больше предыдущего, поэтому все выписанные числа различны. Их количество

$$n+(n-1)+\ldots+1=\tfrac{1}{2}n(n+1)$$

соответствует требованиям задачи.

Осталось привести пример, в котором больше, чем $\frac{1}{2}n(n+1)$ различных сумм получить не удастся. Для этого подойдет набор из первых n натуральных чисел, из которых нельзя составить больше, чем $\frac{1}{2}n(n+1)$ различных сумм: эти суммы — все натуральные числа от 1 до $1+2+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$.

б) Каждое число a_i входит или не входит в рассматриваемую сумму. Кроме того, нужно ещё исключить сумму, не содержащую ни одного слагаемого, поэтому различных сумм из n слагаемых можно составить не более, чем 2^n-1.

Числа 1, 10, 10^2, $\ldots$, 10^{n-1} дают пример n различных чисел, из которых можно образовать наибольшее число различных сумм. Сумма любых k чисел этого набора — это число, в десятичной записи которого используются только 1 и 0. Каждая такая сумма может быть представлена в виде n-элементного упорядоченного набора из 0 и 1. Поскольку на каждом месте набора могут быть только две цифры, их общее количество равно $2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2=2^n$. Единственный невозможный набор, составленный из n нулей, необходимо исключить, поэтому общее количество допустимых наборов равно 2^n-1.

21. *Ответ: да.*

В качестве искомого годится набор картошек с весами 1, 2, 4, 5 и 6. Его можно разбить как $4+5=1+2+6$, так и $1+5=2+4=6$.

22. *Ответ:* 1, 2, *или* 3.

Если в конце числа n приписать цифру a, то получится число $10n+a$. Получаем уравнение $10n+a=13n$, откуда $a=3n$.

Следовательно, a кратно 3. Цифры, кратные 3 — это 0, 3, 6, 9. Если $a = 0$, то $n = 0$ — это противоречит условию, что n — натуральное. В остальных случаях получаем три ответа.

23. *Ответ: да, обязательно.*

В каждом пакете есть чупа-чупсы разных цветов, иначе Андрей был бы не прав. Но чупа-чупсов трёх разных цветов не может быть ни в одном пакете, иначе была бы не права Лейсан. Значит, в каждом пакете есть чупа-чупсы ровно двух цветов: 2 чупа-чупса одного цвета и 2 чупа-чупса другого цвета (так как трёх одного цвета быть не может). Все пакеты получились разными, поэтому пара цветов в каждом пакете должна отличаться от пары цветов в другом пакете. Значит, в одном пакете было два жёлтых и два зелёных, в другом — два зелёных и два красных, а в третьем — два жёлтых и два красных чупа-чупса.

24. *Ответ:* 1/4.

Обозначим через x второе сверху число в первом столбце. Тогда произведение чисел во второй строке, а, значит, и в любой строке и любом столбце, равно $64x$. Следовательно, в первой клетке нижней строки стоит 32, во второй клетке нижней строки — число $x/2$, а в клетке со звездочкой тогда стоит число 1/4 (рис. 13).

1/2	32		
x	4	8	2
4	1		
32	$x/2$	$*$	16

Рис. 13

25. *Ответ:* 9 *фигурок.*

Пример. Рисунок 14.

Оценка. Фигурки из пяти клеток называются «пентамино». Площадь прямоугольника равна 50, следовательно, в него поместится максимум 10 пентамино. Покажем, что 10 пентамино вырезать нельзя (рис. 15).

Если клетки 1 и 2 принадлежат разным фигуркам пентамино, тогда клетка 1 однозначно достраивается до пентамино, а затем клетка 2 тоже однозначно достраивается до другого пентамино. Теперь разрезать без остатка не удаётся, так как остаётся две изолированные клетки, зажатые между двумя пентамино. Следовательно, клетки 1 и 2 должны принадлежать одному пентамино. Но тогда этому же пентамино принадлежит клетка 3. Рассуждая аналогично, получим, что клетки 5, 4 и 3 тоже должны принадлежать одной фигурке. Но тогда два пентамино наложились по клетке 3, противоречие.

Таким образом, без остатка разрезать нельзя, и значит, можно получить не более 9 пентамино.

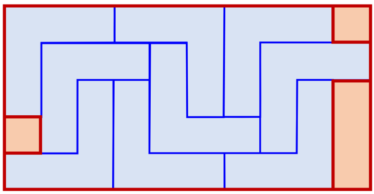


Рис. 14

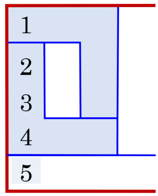


Рис. 15

26. Пример расстановки чисел: 1, 6, 3, 9, 2, 7, 8, 4, 5.

27. *Ответ:* $\frac{4}{7}$.

Обозначим часть времени, которую водитель проехал по ремонтируемой дороге через x. Тогда $\frac{6}{7} = \frac{3}{4}x + (1 - x)$. Решая это уравнение, получим $x = \frac{4}{7}$.

28. *Ответ:* 9 *и* 4.

Заметим, что в квадратике 4×4 есть ровно девять различных квадратиков 2×2. Поэтому больше девяти клеток отметить не могли. Кроме того, в квадратике 4×4 можно разместить 4 непересекающихся квадратика 2×2, в каждом из которых должна быть отмеченная клетка. Значит, хотя бы четыре клетки точно отмечены. Примеры — на рисунках 16 и 17.

1	2	3	4
11	**13**	**14**	5
12	**15**	**16**	6
10	9	8	7

Рис. 16

1	2	3	4
5	**6**	**7**	**8**
9	**10**	**11**	**12**
13	**14**	**15**	**16**

Рис. 17

1	**2**	**1**	**2**
3	**4**	**3**	**4**
1	**2**	**1**	**2**
3	**4**	**3**	**4**

Рис. 18

29. *Ответ: сможет.*

Приведем стратегию за Таню. Укажем на крайнюю слева шапку. Если там монета, то мы её обнаружили за одну попытку.

Если её там нет, то она лежит правее, и по ответу Андрея мы будем знать, солгал он или нет, а потому будем знать, правду или ложь он скажет после второй (а также и после третьей) попытки. Итак, после первой попытки у нас осталось семь шапок, и мы точно знаем, как понимать слова Андрея. Второй попыткой выберем среднюю из семи оставшихся шапок. Если монеты под ней нет, то по ответу Андрея определяется группа из трёх шапок, содержащая монету. Укажем на среднюю из этих трёх шапок. Если монеты там нет, то по ответу Андрея мы будем точно знать, под какой из двух оставшихся шапок лежит монета.

30. Разобьем клетки на четыре четвёрки, являющиеся углами квадрата 3×3. На рисунке 18 эти четвёрки обозначены одинаковыми цифрами. В каждой такой четвёрке по принципу Дирихле присутствует хотя бы одна пара одноцветных клеток. Поскольку клетки в четвёрке попарно не имеют общих точек, найденная пара клеток является удачной. Таким образом, в каждой четвёрке есть удачная пара, всего 8 нужных клеток.

31. *Ответ:* 2022 *рыцаря.*

Заметим, что все 2022 островитяна не могут быть рыцарями, так как тогда каждый из них лжёт. Значит, на острове есть лжец. Поскольку этот лжец говорит неправду, среди остальных 2021 аборигенов лжецов нет, поэтому все они — рыцари.

32. *Ответ: только* 3×3.

Площадь исходного квадрата равна 36, она делится на 3. Площадь каждого уголка равна 3. Поэтому, если какую-то клеточную фигуру можно разрезать на уголки, ее площадь обязана делиться на 3. Отсюда следует, что площадь вырезанного квадрата тоже должна делиться на 3, но тогда его сторона может равняться только 3 (числа 1, 4, 16 и 25 не делятся на 3). Пример на рисунке 19.

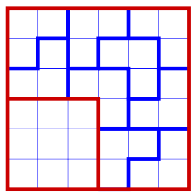


Рис. 19

33. *Ответ:* $\angle A = \angle B = 40°$, $\angle C = 100°$.

(Рис. 20.) Пусть $\angle ABD = \angle CBD = \alpha$. Тогда $\angle BCE = 2\alpha$, так как $BE = CE$, а $\angle BAC = 2\alpha$, так как $AC = BC$. Угол $BFE = 3\alpha$, как внешний для треугольника BCF. Следовательно, $\angle CFD = 3\alpha$. Аналогично, $\angle AEC = 4\alpha$, как внешний для треугольника BCE. Пусть в равнобедренном треугольнике CDF углы FDC и FCD равны β. Тогда из треугольника ACE имеем $6\alpha + \beta = 180°$, а из треугольника CDF имеем $3\alpha + 2\beta = 180°$. Из этих равенств следует, что $\beta = 3\alpha$. Тогда $9\alpha = 180°$, откуда $\alpha = 20°$. Отсюда сразу получаем ответ.

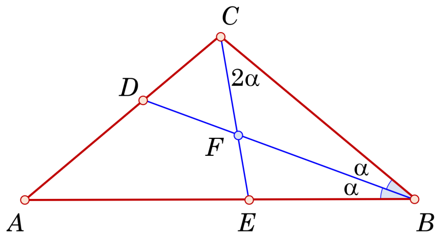


Рис. 20

34. Ясно, что среди чисел a, b, c нет равных, иначе какие-то две суммы были бы равны. Без ограничения общности, можно считать, что $a < b < c$, тогда $a+b < a+c < b+c$. Тогда числа $a+b$ и $b+c$ нечётны, поэтому $a+b = 2k-1$, $a+c = 2k$ и $b+c = 2k+1$ для некоторого целого k. Следовательно,

$$2(a+b+c) = (a+b)+(b+c)+(c+a) = (2k-1)+2k+(2k+1) = 6k,$$

поэтому $a+b+c = 3k$. Отсюда находим $a = (a+b+c)-(b+c) = 3k-(2k+1) = k-1$, $b = (a+b+c)-(c+a) = 3k-2k = k$, $c = (a+b+c)-(a+b) = 3k-(2k-1) = k+1$. Что и требовалось доказать.

35. *Ответ: через* 5 *туров.*

Оценка. В каждом туре разыгрывается ровно 4 очка. Тогда после четвёртого тура разыграно 16 очков, а лидер не может набрать больше, чем 4 очка. Следовательно, остальные семь участников в сумме набрали не менее, чем 12 очков. Следовательно, найдётся хотя бы один из них, у которого не менее, чем 12/7 очков, то есть, он набрал минимум 2 очка. Так как впереди ещё 3 тура, то победитель пока неизвестен: этот участник теоретически может набрать еще 3 очка, а текущий лидер — ни одного.

Пример. После 5 туров вполне могла сложиться ситуация, когда у лидера — 5 очков, а у каждого из остальных участников — не более, чем 2,5 очка. Например, это возможно, если лидер все свои партии выиграл, а все остальные партии закончились вничью. Тогда все остальные шахматисты набрали не более 2,5 очков. Так как до конца турнира осталось всего два тура, то в этом случае победитель уже определен: максимум очков, доступный всем остальным — это 4,5 очка.

36. *Ответ: Там-Там прав.*

Если после утроения веса сосиски общий вес всех сосисок увеличивается вдвое, то вес этой сосиски составляет половину общего веса всех сосисок. Но если сосиски Тома и Тима составляют по половине общего веса всех сосисок, то на долю сосиски Там-Тама не остается ничего.

37. *Ответ: барон Мюнхгаузен прав.*

Один из возможных примеров разрезания — на рисунке 21. Существуют и другие.

38. Допустим, что три ребёнка в красных шапках стоят подряд. Рядом с девочкой в красном не могут стоять другие дети в красных шапках, поэтому три упомянутых ребёнка — мальчики. Для среднего из них получаем противоречие с условием. Следовательно, среди любых трёх подряд идущих ребят хотя бы один в синей шапке. Разобьём 30 детей на 10 непересекающихся троек. Тогда в каждой тройке есть хотя бы один ребёнок в синей шапке, следовательно, их не менее 10.

39. Первое решение. (Рис. 22.) Заметим, что треугольники ADF и BED не равны. Действительно, если бы они оказались равны, то было бы $BD = AF$. Далее, угол EDB — острый, так как $\angle ADE = 90° + \angle ADF$. Угол DBE — тоже острый по условию, поэтому основание высоты EH, проведенной из точки E на сторону BD попадает на отрезок BD.

Отложим отрезок $BK = AF$ от точки B внутрь отрезка BA. Треугольники BEK и ADF равны по первому признаку равенства. Поэтому $EK = DF = DE$. Следовательно, треугольник DEK — равнобедренный, и его высота совпадает с медианой, поэтому точка K лежит на отрезке BH.

Пусть $\angle ADF = \angle BEK = x$. Тогда $\angle DKE = 60° + x$ как внешний угол треугольника BEK. Поэтому $\angle KDE = 60° + x$, и сумма углов при вершине D равна $x + 60° + x + 90° = 180°$, откуда $x = 15°$. Тогда $\angle KED = 180 - 2 \cdot 75° = 30°$, а $\angle BEF = 15° + 30° + 45° = 90°$, откуда и следует, что $FE \perp BC$.

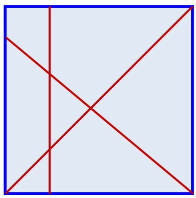


Рис. 21

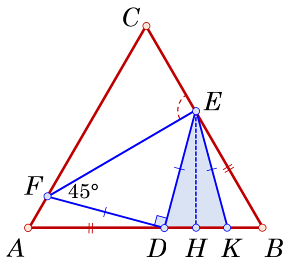


Рис. 22

Второе решение. Воспользуемся тем же рисунком 22. Четвертый (полу)признак равенства треугольников, примененный к треугольникам ADF и BED, в которых $DE = DF$, $BE = AD$ и $\angle DBE = \angle DAF = 60°$ утверждает, что либо эти треугольники равны, либо сумма углов BDE и AFD равна $180°$. Так же, как и в первом решении, первый вариант невозможен. Пусть $\angle BDE = \alpha$, тогда $\angle DFC = \alpha$, как смежный с $\angle AFD$. Из треугольника BDE имеем $\angle BED = 120° - \alpha$, тогда смежный с ним угол CED равен $60° + \alpha$. Сумма углов четырехугольника $CEDF$ равна $60° + 60° + \alpha + 90° + \alpha = 360°$. Отсюда находим $\alpha = 75°$. Следовательно, $\angle BED = 45°$. Кроме того, прямоугольный треугольник DEF — равнобедренный, поэтому $\angle DEF = 45°$. Отсюда $\angle CEF = 180° - 45° - 45° = 90°$.

Замечание. **Четвёртый признак равенства треугольников.** Пусть треугольники ABC и $A'B'C'$ таковы, что $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ и $\angle BAC = \angle B'A'C'$. Тогда либо $\angle BCA = \angle B'C'A'$ (и треугольники равны), либо сумма углов BCA и $B'C'A'$ равна $180°$.

40. Предположим, что хотя бы одно из чисел не меньше 2. Без ограничения общности в силу круговой симметрии можно считать, что это a. Тогда $b + c > a^2 \geqslant 4$, поэтому хотя бы одно из чисел b и c так же не меньше 2. Если $b \geqslant 2$, то сложим первые два неравенства: $a^2 + b^2 < a + b + 2c \iff a^2 - a + b^2 - b < 2c$, или

$$\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)^2<2c+\frac{1}{2}.$$

Так как $a, b \geqslant 2$, то $a-\frac{1}{2} \geqslant \frac{3}{2}$, $b-\frac{1}{2} \geqslant \frac{3}{2}$, поэтому левая часть последнего неравенства больше, чем $2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2$. Отсюда получаем, что

$$2c+\frac{1}{2}>\frac{9}{2} \iff c>2.$$

Если же $c \geqslant 2$, то сложим первое и третье неравенства, и, рассуждая аналогично, получим, что $b>2$. Итак, в любом случае все три переменных не меньше, чем 2.

Теперь сложим все три неравенства:

$$a^2+b^2+c^2<2a+2b+2c \iff (a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2<3.$$

Каждое слагаемое в левой части не меньше, чем $(2-1)^2=1$, следовательно, левая часть не меньше, чем 3, противоречие. Отсюда следует, что чисел, не меньших 2, среди трёх переменных нет.

41. *Ответ:* 45 *рублей.*

Пусть Алиса в первый раз заплатила $10x+y$ рублей, а во второй — $10y+x$ рублей, тогда $10y+x=1,2(10x+y)$. Отсюда $5x=4y$, и значит, цифра y делится на 5, то есть $y=5$, $x=4$. Итак, открытка стоила 45 рублей.

42. *Ответ:* 0.

Запишем для суммы S два равенства

$$S=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots++\left(\frac{1}{2021}-\frac{1}{2022}\right)+\frac{1}{2023},$$

$$S=1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)-\ldots-\left(\frac{1}{2022}-\frac{1}{2023}\right).$$

Все разности в скобках положительны, поэтому из первого равенства следует, что $S>0$, а из второго $S<1$. Поскольку $0<S<1$, целая часть S равна нулю.

43. *Ответ:* 3.

Сначала рассмотрим «крайнюю» ситуацию. Если во всех клетках таблицы числа равны $+1$, то и все произведения равны $+1$, а их общая сумма равна $21+22=43$.

Если мы сменим знак в одной из клеток, то изменится знак в произведении чисел одной строки и одного столбца. Значит, сумма всех произведений изменится на величину $\pm 2 \pm 2$, то есть это изменение может равняться 4, 0 или -4. Таким образом, после замены знаков в нескольких клетках таблицы значение суммы может измениться лишь на слагаемое, кратное 4.

Взяв за основу таблицу, заполненную числами $+1$, и меняя знаки в соответствующих клетках (чтобы придти к исходной таблице), мы получим значение суммы $43 - 4k$. Наименьшее неотрицательное значение выражения $43 - 4k$, очевидно, равно 3, и оно достигается при целом $k = 10$.

Осталось привести пример таблицы, для которой указанное значение суммы произведений равно 3. Расставим сначала во всех клетках таблицы 21×22 числа $+1$, а затем заменим знак $+$ на $-$ у 10 чисел, стоящих, например, на диагонали, идущей из левого верхнего угла в нижний. Для полученной таблицы сумма всех произведений равна $43 - 10 \cdot 4 = 3$.

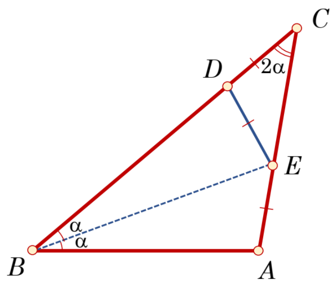


Рис. 23

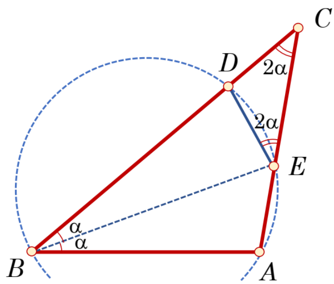


Рис. 24

44. *Ответ:* $\angle A = 100°$.

Первое решение. (Рис. 23.) На стороне BC отложим отрезок $BD = BE$. Тогда из условия получаем $CD = AE$, и по свойству биссектрисы

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AB}{BC} = \frac{AE}{EC} = \frac{CD}{EC}.$$

Отсюда следует, что треугольники BAC и CDE подобны, так как у них общий угол C и одинаковое отношение заключающих этот угол сторон. Поэтому $CD = DE$ и $\angle DEC = \angle DCE$. Внешний угол BDE треугольника CDE равен сумме двух несмежных с ним углов, то есть $\angle BDE = 2\angle DCE = 2\angle ABC = 4\angle EBD$. В равнобедренном треугольнике BDE углы BDE и BED равны, поэтому $180^\circ = \angle BDE + \angle BED + \angle EBD = 9\angle EBD$, то есть $\angle EBD = 20^\circ$, $\angle ABC = \angle BCA = 40^\circ$ и $\angle BAC = 100^\circ$.

Второе решение. Рассмотрим описанную окружность треугольника ABE, и пусть D — точка пересечения этой окружности с прямой BC (рис. 24). Четырёхугольник $BAED$ — вписанный, поэтому $\angle B + \angle E = 180^\circ$, и значит, $\angle DEC = 180^\circ - \angle E = \angle B$. Поскольку $\angle C = \angle B = \angle DEC$, треугольник DEC — равнобедренный, и $DE = DC$.

Из равенства вписанных углов DBE и ABE следует равенство соответствующих дуг окружности, поэтому $DE = AE$. По условию $BC = BE + AE$, поэтому $BD + DC = BE + AE$, и так как $DC = AE$, отсюда получаем $BD = BE$. Таким образом, треугольник BDE — равнобедренный, и $\angle BDE = \angle BED$.

Пусть $\angle DBE = \alpha$, тогда $\angle DCE = \angle DEC = 2\alpha$, $\angle BED = \angle BDE = \angle DCE + \angle DEC = 4\alpha$. Сумма углов треугольника BDE равна $180^\circ = \alpha + 4\alpha + 4\alpha = 9\alpha$, то есть $\alpha = 20^\circ$, $\angle ABC = \angle BCA = 40^\circ$ и $\angle BAC = 100^\circ$.

45. *Ответ:* $m = 2$.

Пусть m — искомый делитель для квадратного трёхчлена $P(x) = x^2 + px + q$. Тогда, в частности, числа $P(-1)$, $P(0)$ и $P(1)$ кратны m, и значит, комбинация

$$P(-1) + P(1) - 2P(0) = (1 + p - q) + (1 + p + q) - 2q = 2$$

тоже делится на m. Так как $m > 1$, то $m = 2$. Приведём пример квадратного трёхчлена $P(x)$, для которого число 2 является делителем при любых целых x. Пусть $P(x) = x(x+1)$. Произведение двух последовательных целых чисел x и $x + 1$ всегда делится на 2, то есть условие выполняется.

46. *Ответ:* $(1, 2)$ *и* $(2, 1)$.

Пусть $x > y$, то есть число $t = x - y$ — натуральное. Тогда $x! = y! \cdot (y + 1) \cdot \ldots \cdot (y + t) \geqslant y! \cdot (1 + 1) \cdot \ldots \cdot (1 + t)$, и значит,

$$x! \geqslant y! \cdot (t + 1) \quad \Longleftrightarrow \quad x! - y! \geqslant y! \cdot t.$$

С другой стороны, по условию $x!-y!=x-y=t$, поэтому $t \geqslant y!\cdot t$. Отсюда $y!=1$, и значит, $y=1$. В этом случае исходное уравнение сводится к равенству $x!=x$. Но $x!>x$ при $x>2$, и так как $x>1$, то $x=2$. Таким образом, в предположении $x>y$ единственным решением уравнения будет набор $(2,1)$. При $y>x$ получаем ещё один набор $(1,2)$.

47. *Ответ:* 18.

Возведём в квадрат соотношения $|x_n|=|x_{n-1}+1|$ для всех натуральных n от 1 до 100.

$$\begin{cases} x_1^2=1, \\ x_2^2=(x_1+1)^2=x_1^2+2x_1+1, \\ x_3^2=(x_2+1)^2=x_2^2+2x_2+1, \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{99}^2=(x_{98}+1)^2=x_{98}^2+2x_{98}+1, \\ x_{100}^2=(x_{99}+1)^2=x_{99}^2+2x_{99}+1. \end{cases}$$

Складывая эти равенства, получим

$$x_{100}^2=2(x_1+x_2+\ldots+x_{99})+100,$$

то есть $S=|\,x_1+x_2+\ldots+x_{99}\,|=\frac{1}{2}\,|\,x_{100}^2-100\,|$. Заметим, что числа последовательности (x_n) с нечётными номерами n принимают только нечётные значения, а с чётными номерами n — только чётные значения. Поэтому положительный минимум выражения S достигается в том случае, когда слагаемое x_{100}^2 — ближайшее к 100 чётное число. Число 100 находится между квадратами чётных чисел 8^2 и 12^2, причём $|8^2-100|<|12^2-100|$. Значит, наименьшее положительное значение S будет равно $\frac{1}{2}|8^2-100|=18$, если удастся доказать, что квадрат числа x_{100} может равняться 8^2.

Покажем один из способов построения последовательности (x_n), для которой этот случай возможен. Выберем $x_1=1$, $x_2=2$, $\ldots$, $x_8=8$, $x_9=-9$, $x_{10}=8$, $x_{11}=-9$, $x_{12}=8$, $\ldots$, $x_{99}=-9$, $x_{100}=8$. Тогда $x_{100}^2=8^2$, и значит, $S=18$.

48. *Ответ:* $AD:DC=1:1$.

Первое решение. (Рис. 25.) Пусть L — основание высоты, опущенной из вершины A. Тогда

$$\angle AHD=90^\circ-\angle AHE=90^\circ-\angle LHF=\angle LFH=\angle BFH.$$

Кроме того, $\angle HAD = \angle FBH = 90^\circ - \angle C$. Следовательно, треугольники AHD и BFH подобны. Аналогично доказывается подобие треугольников CHD и BEH. Значит,

$$\frac{AD}{CD} = \frac{AD}{HD} \cdot \frac{HD}{CD} = \frac{BH}{FH} \cdot \frac{EH}{BH} = \frac{EH}{FH} = 1.$$

Второе решение. (Рис. 26.) Через точку A проведём прямую, параллельную EF, пусть она пересекает сторону BC в точке M. (Если она пересекает продолжение стороны BC, то сделаем аналогичное построение для вершины C.) Тогда $AM \perp HD$. Пусть высота BT пересекает отрезок AM в точке N. Так как $EH = HF$, то по теореме Фалеса $AN = NM$. Прямая DN проходит через точку пересечения высот треугольника AHD, и значит, $DN \perp AH$. Но прямая AH — это высота треугольника ABC, $AH \perp BC$, поэтому $DN \parallel BC$. Отсюда следует, что отрезок DN — средняя линия треугольника AMC, и значит, $AD = DC$.

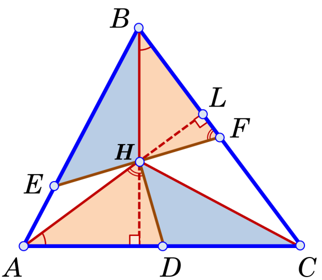


Рис. 25

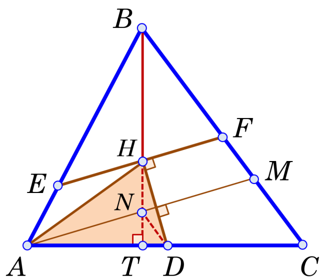


Рис. 26

49. *Ответ: условию задачи удовлетворяют наборы чисел* $(0; -p)$, $(-p; 0)$, $\left(-\frac{1}{2}(p^3-1); -\frac{1}{2}(p^3+1)\right)$, $\left(-\frac{1}{2}(p^3+1); -\frac{1}{2}(p^3-1)\right)$.

Перепишем уравнение в виде $x^3 + y^3 - x^2y - xy^2 = -p^3$ и разложим левую часть на множители:

$$(x+y)(x^2-xy+y^2)-(x+y)xy = -p^3 \iff (x+y)(x-y)^2 = -p^3.$$

Таким образом, числа $x+y$ и $(x-y)^2$ являются степенями простого числа p. Но $(x-y)^2$ — чётная степень p, значит, множитель $x+y$ — это нечётная степень p, и так как $x+y \leqslant 0$,

то
$$\begin{cases} x+y=-p, \\ x-y=\pm p, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x+y=-p^3, \\ x-y=\ \pm 1. \end{cases}$$

В первом случае имеем $x=0$, $y=-p$ или $x=-p$, $y=0$, во втором — $x=-\frac{1}{2}(p^3-1)$, $y=-\frac{1}{2}(p^3+1)$ или $x=-\frac{1}{2}(p^3+1)$, $y=-\frac{1}{2}(p^3-1)$. Так как p – нечётное, то числа x и y в этих наборах — целые.

50. *Ответ:* $f(x)\equiv x$.

Из неравенства $f(x)\geqslant x$ при $x=0$ следует, что $f(0)\geqslant 0$, а из второго неравенства при $y=0$ имеем: $f(x)=f(x+0)\geqslant f(x)+f(0)$, то есть $0\geqslant f(0)$, и значит, $f(0)=0$. Отсюда и из неравенства $f(x+y)\geqslant f(x)+f(y)$ при $y=-x$ получим:
$$0=f(0)=f(x+(-x))\geqslant f(x)+f(-x) \implies -f(-x)\geqslant f(x).$$
Снова используем первое неравенство $f(x)\geqslant x$ теперь для $-x$, получим $f(-x)\geqslant -x$ или $x\geqslant -f(-x)$. Значит,
$$x\geqslant -f(-x)\geqslant f(x) \implies x\geqslant f(x).$$
Из этого неравенства и условия $f(x)\geqslant x$ следует, что $f(x)=x$ для всех x.

51. *Ответ:* 9 *слагаемых.*

Пусть $M=777\ldots77=a_1+a_2+\ldots+a_n$, где числа a_k записываются только нулями и тройками. Сумма цифр числа M равна $2022\cdot 7$ и делится на 3. Тогда
$$\frac{M}{3}=\underbrace{259\,259\ldots259}_{2022\text{ цифры}}=c_1+c_2+\ldots+c_n,$$
где числа $c_k=\frac{1}{3}a_k$ записываются только нулями и единицами. Поскольку $\frac{1}{3}M$ содержит девятку, наименьшее количество слагаемых в этой сумме равно 9. Эти слагаемые легко находятся для числа 259: $259=2\cdot 111+3\cdot 11+4\cdot 1$. Умножая на три, получим: $777=2\cdot 333+3\cdot 33+4\cdot 3$. Теперь «периодическим» повторением этой записи получаем:
$$\underbrace{777\ldots77}_{2022}=2\cdot\underbrace{333\ldots33}_{2022}+3\cdot\underbrace{330\,330\ldots33}_{2021}+4\cdot\underbrace{300\ldots300}_{2021}.$$

52. Предположим, что $AB < BC$ (рис. 27). Тогда точка P лежит внутри треугольника ABC, а точка Q — вне треугольника. Обозначим через A' и C' точки пересечения прямых AP и BC, CQ и AB соответственно. Поскольку BP — биссектриса и $BP \perp AA'$, $BQ \perp CC'$, треугольники BAA' и BCC' — равнобедренные, и значит, $AP = PA'$ и $CQ = QC'$.

В треугольнике $AA'C$ точки P и M — середины сторон AA' и AC, поэтому PM — средняя линия, и значит, $PM \parallel BC$. Аналогично, $MQ \parallel BC'$. Следовательно, $\angle AMQ = \angle BAC$.

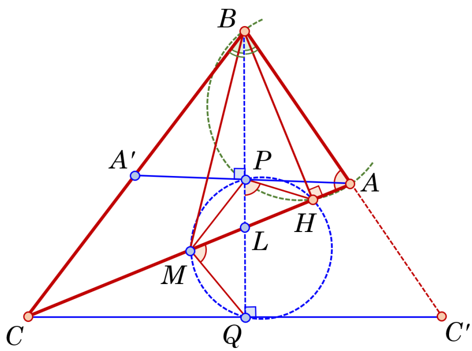


Рис. 27

Возможны два случая:

а) $\angle BAC \leqslant 90°$. Точки A, H, P и B лежат на одной окружности с диаметром AB, поэтому четырёхугольник $AHPB$ — вписанный. Значит, $\angle HPQ = 180° - \angle HPB = \angle BAC = \angle HMQ$. Следовательно, точки H, P, M и Q лежат на одной окружности.

б) $\angle BAC > 90°$, тогда точки A, H, B и P лежат на одной окружности с диаметром AB, поэтому четырёхугольник $AHBP$ — вписанный. Значит, $\angle HPQ = 180° - \angle HPB = 180° - \angle HAB = \angle BAC = \angle HMQ$. Следовательно, точки H, P, M и Q лежат на одной окружности.

53. *Ответ: например, как показано на рисунке* 28.

54. *Ответ:* 10.

Если ребус имеет вид $A + Б = AБ$, то $A = 1$, так как сумма $A + Б$ меньше 20, и $Б = 9$, иначе сумма $A + Б$ будет однозначным числом. Таким образом, при $c = 10$ по ребусу может однозначно восстанавливаться исходный пример $1 + 9 = 10$. Если же $c < 10$, то ребус имеет вид $А + Б = В$ или $А + А = Б$. В первом случае нельзя определить, был ли это пример $1 + 2 = 3$ или пример $1 + 3 = 4$, а во втором — пример $1 + 1 = 2$ или пример $2 + 2 = 4$.

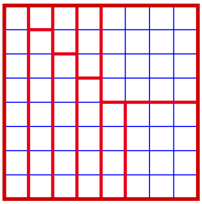


Рис. 28

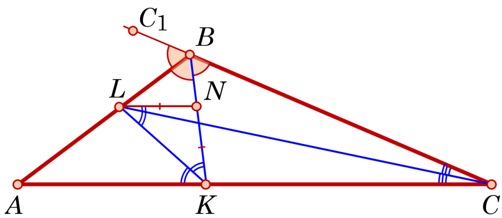


Рис. 29

55. *Ответ:* $120°$.

(Рис. 29.) В равнобедренном треугольнике LNK углы KLN и LKN равны. Кроме того, равны углы KLN и LKA как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых LN и AC. Таким образом, $\angle KLN = \angle LKA$, то есть луч KL — биссектриса угла AKB. Следовательно, лежащая на нём точка L равноудалена от прямых KA и KB. Кроме того, она равноудалена от прямых $CA = KA$ и CB, так как лежит на биссектрисе угла ACB. Значит, точка L равноудалена от прямых CB и KB, и потому должна лежать на биссектрисе того из углов, образованных этими прямыми, в котором она содержится. Это угол KBC_1, где C_1 — точка на продолжении отрезка CB за точку B, а его биссектрисой должен быть луч $BL = BA$. Отсюда получаем, что $\angle ABC_1 = \angle ABK = \angle CBK$. Так как эти три угла вместе составляют развёрнутый угол, то каждый из них равен $60°$, откуда $\angle ABC = \angle ABK + \angle CBK = 120°$.

56. Выпишем на доске все числа от 1 до 1 000, и будем проводить стрелку от числа a к числу b, если разность $a - b$ даёт остаток 7 при делении на 100. Тогда в каждое число будет входить 10 стрелок и из каждого числа будет выходить 10 стрелок. Значит, стрелок с синим началом столько же, сколько стрелок с синим концом. Удалим все стрелки, у которых как начало, так и конец синие. Тогда получится, что стрелок с синим началом и красным концом столько же, сколько стрелок с красным началом и синим концом, что и требовалось доказать.

57. *Ответ: при $n = 7$.*

Пример. Правильный семиугольник. У него диагонали ровно двух видов: соединяющие вершины через одну и через две.

Оценка. Пусть AB — сторона выпуклого многоугольника M, у которого есть диагонали только двух возможных длин x и y. Тогда для всякой вершины C, не смежной с A и B, стороны CA и CB треугольника ACB могут равняться только x и y. Выбор длин этих сторон однозначно определяет вершину C, так как она должна лежать с той же стороны от прямой AB, что и весь многоугольник M. Но таких комбинаций сторон есть только четыре: 1) $CA = CB = x$; 2) $CA = CB = y$; 3) $CA = x$, $CB = y$; 4) $CA = y$, $CB = y$. При этом из двух первых комбинаций возможна только одна: иначе соответствующие вершины C_1 и C_2 многоугольника M лежали бы на серединном перпендикуляре к стороне AB, и та из них, которая ближе к AB, оказалась бы внутри треугольника с вершинами в A, B и другой из этих вершин, что противоречит выпуклости M. Таким образом, у многоугольника M не больше трёх вершин, не смежных с вершинами A и B, то есть всего у него не более 7 вершин.

58. Пусть наши числа равны k, $k+1$ и $k+2$, и ни одно из них не делится на 2022. Тогда если остаток от деления числа k на 2022 равен $r > 0$, то остатки от деления на 2022 чисел $k+1$ и $k+2$ равны, соответственно, $r+1$ и $r+2$, а сумма трёх остатков равна составному числу $3r+3 = 3(r+1)$. Противоречие.

Замечание. Описываемая в условии задачи ситуация возможна. Если первое (наименьшее) из чисел делится на 2022, то исходные числа дают соответственно остатки 0, 1 и 2 при делении на 2022, сумма которых равна простому числу 3.

59. *Ответ: существует.*

Возьмём равнобедренный треугольник ABC, $AB = BC$, в котором высота BH из вершины B равна $2 \cdot AC$ (очевидно, такой существует). На продолжении стороны AC за точку C отложим отрезок $CD = AC$. В треугольнике ABD высота BH равна стороне $AD = 2 \cdot AC$, а медиана BC равна стороне AB (рис. 30).

Другим примером служит прямоугольный треугольник, у которого медиана, проведённая из вершины острого угла, образует с катетом, выходящим из той же вершины, угол 30° (рис. 31).

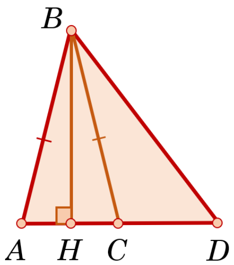


Рис. 30

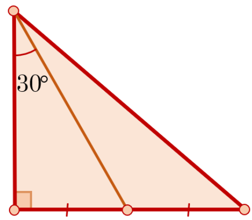


Рис. 31

60. *Ответ: нет.*

Очевидно, количество цифр красивого числа делится на 3. Если в десятичной записи красивого числа x имеется $3n$ цифр, то оно удовлетворяет неравенству $10^{3n-1} < x < 3 \cdot 10^{3n-1}$. Следовательно, произведение двух красивых чисел, записываемых $3k$ и $3m$ цифрами соответственно, лежит между числами $10^{3(k+m)-2}$ и $9 \cdot 10^{3(k+m)-2}$, а, значит, и между степенями десятки с показателями $3(k+m) - 2$ и $3(k+m) - 1$. Красивое же число в силу неравенства для x лежит между степенями десятки с показателями $3n - 1$ и $3n$. Поэтому произведение двух красивых чисел не может быть красивым.

61. Пусть Петя записал числа $a_1 > a_2 > \ldots > a_{100}$, а Вася $b_1 > b_2 > \ldots > b_{100}$. Если $a_1 > b_1$, то у Васи один из остатков будет b_1, а у Пети все остатки будут меньше $b1$ — противоречие. Аналогично приводит к противоречию предположение, что $a_1 < b_1$. Значит, $a_1 = b_1$.

Допустим, мы уже доказали, что $a_1 = b_1, \ldots, a_k = b_k$ для некоторого $k \geqslant 1$. Наборы остатков от деления друг на друга чисел $a_1, \ldots, a_k$ у Пети и Васи совпадают, вычеркнем все эти остатки. Если $a_{k+1} > b_{k+1}$, то у Пети среди невычеркнутых остатков есть k чисел a_{k+1} — остатки от деления Петиного числа a_{k+1} на все большие Васины числа, а у Васи все невычеркнутые остатки меньше a_{k+1}, так как там либо делимое меньше a_{k+1}, либо делитель не превосходит a_{k+1}. Аналогично разбирается случай, когда $a_{k+1} < b_{k+1}$. Поэтому $a_{k+1} = b_{k+1}$. Последовательно проводя это рассуждение для $k = 1, 2, \ldots, 99$ (а знакомые с методом математической индукции сразу оформят его как индукционный переход), мы докажем утверждение задачи.

62. *Ответ:* 50.

Пример. Фишку 50 последовательно 99 раз меняем со следующей против часовой стрелки. Получаем требуемое расположение.

Оценка. Рассуждаем от противного. Пусть $k < 50$.

Первое доказательство. Будем считать сдвиги фишек относительно их начальных позиций, причем сдвиг по часовой стрелке считаем с плюсом, против часовой — с минусом. Тогда при обмене двух фишек к сдвигу одной из них прибавляется 1, а из сдвига другой вычитается 1. Пусть после нескольких ходов все фишки сместились на одну позицию по часовой стрелке. Тогда полный сдвиг фишки с номером k равен $100t_k + 1$, где t_k — число полных оборотов этой фишки (обороты по часовой стрелке считаются со знаком плюс, а против часовой — со знаком минус). Так как $k < 50$, фишки с номерами 1 и 51 не могли меняться местами, и потому совершили одинаковое число полных оборотов, то есть $t_1 = t_{51}$. Аналогично, $t_2 = t_{52}, \ldots, t_{50} = t_{100}$. Поэтому сумма сдвигов всех фишек равна $100(2t_1 + \ldots + 2t_{50} + 1)$. Она должна быть равна 0, так как равна 0 сумма сдвигов при каждом ходе. Но она не равна 0, так как сумма в скобках нечётна. Противоречие.

Второе доказательство. В каждый момент времени считаем *покрашенной* дугу от фишки 100 до фишки 1 по часовой стрелке. Так как фишки 100 и 1 нельзя поменять за один ход, каждая конкретная фишка m $(2 \leqslant m \leqslant 99)$ могла попасть на покрашенную дугу или покинуть покрашенную дугу только путём обмена с одной из фишек 1 или 100. Поскольку изначально и в конце фишка m не была на покрашенной дуге, она сделала одинаковое количество *входов* на покрашенную дугу и *выходов* с покрашенной дуги. При $m \leqslant 50$ фишка m не могла меняться с фишкой 100, поэтому она могла делать *вход* или *выход* только путём обмена с фишкой 1. При *входе* фишка 1 совершает сдвиг на 1 по часовой стрелке, а при *выходе* — на 1 против часовой стрелки.

Проведём аналогичные рассуждения для фишек $m \geqslant 51$, которые не могут меняться с фишкой 1. Тем самым, мы получаем, что фишки 1 и 100 совершат одинаковый сдвиг по и против часовой стрелки, поэтому они останутся на своих позициях. Противоречие.

63. *Ответ: может.*

Пример: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 20$. В этом наборе три числа $(5, 10, 20)$ делятся на 5, четыре числа $(4, 8, 12, 20)$ делятся на 4, а общая сумма равна 71.

Замечание. Можно доказать (хотя в задаче этого не требуется), что на самом деле в любом примере, удовлетворяющем условию задачи, должны обязательно присутствовать числа $1, 2, 3, 4, 5, 8, 10, 12$ и 20, а вместо числа 6 можно взять 7 или 9.

64. *Ответ:* 6.

Пусть S — сумма цифр числа N. Тогда суммы цифр полученных чисел будут равны $S + 1$, $S + 2$, $\ldots$, $S + 9$. Три из этих сумм будут делиться на 3. По признаку делимости на 3 соответствующие три числа на доске также будут делиться на 3. При этом они будут больше 3, а значит, будут составными. Поэтому больше 6 простых чисел на доске оказаться не может.

Шесть простых чисел может оказаться даже при $N = 1$ — например, если Петя получит, среди прочих, числа 11, 13, 41, 61, 17 и 19.

Замечание. Петя может получить шесть простых чисел, даже если он будет приписывать цифры лишь с одной стороны — например, из числа $N = 3$ он может получить числа 13, 23, 43, 53, 73 и 83.

65. Пусть $P(x) = ux^2 + vx + w$. По условию,

$$(a-b)(u(a+b)+v) = (ua^2+va+w) - (ub^2+vb+w) = \\ = P(a) - P(b) = n^2.$$

Поскольку n — натуральное число, $a - b \neq 0$. Будем искать подходящие пары чисел (c, d) в виде $c = a + k$ и $d = b - k$. Тогда разность $P(c) - P(d)$ будет равна

$$(c-d)(u(c+d)+v) = (a-b+2k)(u(a+b)+v) = \frac{a-b+2k}{a-b}\,n^2.$$

Таким образом, нам достаточно подобрать такие k, для которых дробь $\frac{a-b+2k}{a-b}$ будет квадратом натурального числа. При $k=(a-b)m$ дробь будет равна нечётному числу $2m+1$. Тогда нам подойдут те значения m, при которых $2m+1$ будет квадратом нечётного числа.

Замечание. Заметим, что у многочлена из условия некоторые (или даже все!) коэффициенты могут оказаться иррациональными. Например, условие выполнено для многочлена $P(x)=ux^2+(1-u)x-u$ и чисел $a=-1$, $b=2$, где u — произвольное число.

Если число u иррационально, то выражение $P(c)-P(d)$ может оказаться целым только при $c+d=a+b$ или $c=d$.

66. *Ответ:* 101.

Во всех решениях ниже мы рассматриваем граф дружб, в котором вершины — это люди в компании, а два человека соединены ребром, если они дружат.

Если граф — это цикл, содержащий 101 вершину, то на любых 100 вершинах ровно 99 рёбер, так что такая компания удовлетворяет условиям задачи. Осталось показать, что не существует такой компании из 102 человек (тогда и компании из более чем 102 человек тоже быть не может). Ниже мы приводим несколько различных способов сделать это; в каждом способе мы предполагаем, от противного, что такая компания нашлась.

Первое решение. Рассмотрим произвольное множество из 101 вершины и индуцированный подграф на этих вершинах, пусть в нём k рёбер. Выбрасывая из этого подграфа произвольную вершину (скажем, степени d), получаем 100 вершин с нечётным количеством рёбер $k-d$. Значит, степень любой вершины в нашем подграфе имеет чётность, отличную от чётности k, то есть степени всех вершин подграфа имеют одну и ту же чётность. Но, как известно, в графе из нечётного числа вершин все вершины не могут иметь нечётную степень. Поэтому все эти степени чётны, а число рёбер k нечётно.

Пусть теперь во всём графе на 102 вершинах l рёбер. При выкидывании любой вершины (скажем, степени d) получается подграф с нечётным числом рёбер $l-d$; аналогично рассуждению выше получаем, что и во всём графе степени всех вершин имеют одинаковую чётность. Заметим, что наш граф не может быть пустым (т.е. не иметь рёбер) или полным (т.е. иметь все C_{102}^2 рёбер), иначе на любых 100 вершинах будет либо 0, либо $C_{100}^2=99\cdot 50$

рёбер, то есть чётное количество. Тогда найдётся вершина, соединённая хоть с какой-то другой вершиной, но не со всеми. Иначе говоря, есть вершины u, v_1 и v_2 такие, что u соединена с v_1, но не с v_2. Степени вершин v_1 и v_2 в исходном графе одной чётности, поэтому после удаления u они будут иметь разную чётность. Это невозможно по доказанному выше.

Второе решение. Существует всего $n = C^2_{102} = 51 \cdot 101$ способов выбросить две вершины из 102, оставив 100. Пронумеруем эти способы числами от 1 до n. Пусть a_i — количество рёбер на оставшихся 100 вершинах в i-м способе; по предположению, все числа a_i нечётны, а значит, нечётна и их сумма S (поскольку число n нечётно).

С другой стороны, рассмотрим любое ребро uv. Это ребро учтено в числе a_i ровно тогда, когда вершины u и v не выброшены в i-м способе, то есть когда выброшена какая-то пара из оставшихся 100 вершин. Это происходит в $k = C^2_{100} = 50 \cdot 99$ способах. Итак, каждое ребро учтено в S чётное количество k раз, поэтому S должно быть чётным. Противоречие.

Третье решение. Назовём вершину чётной, если её степень чётна, и нечётной иначе. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть общее количество рёбер в графе нечётно. Тогда, выкидывая любую пару вершин, мы должны выкинуть из графа чётное число рёбер (чтобы осталось нечётное число). С другой стороны, если мы выкидываем вершины со степенями d_1 и d_2, то число выкинутых рёбер равно $d_1 + d_2$, если эти вершины не соединены ребром, и $d_1 + d_2 - 1$, если соединены. Отсюда следует, что вершины одинаковой чётности всегда не соединены ребром, а вершины разной чётности — всегда соединены.

Значит, если в графе k чётных вершин и l нечётных, то чётные вершины имеют (чётную) степень l, а нечётные — (нечётную) степень k. Это невозможно, ибо $k + l = 102$.

Случай 2. Пусть общее количество рёбер в графе чётно. Аналогично получаем, что вершины одинаковой чётности всегда соединены ребром, а вершины разной чётности не соединены. Поэтому, если в графе k чётных вершин и l нечётных, то чётные вершины имеют (чётную) степень $k-1$, а нечётные — (нечётную) степень $l - 1$. Это опять же противоречит равенству $k + l = 102$.

Замечание. Разумеется, существуют и другие примеры компании из 101 человека, удовлетворяющей условию.

67. Во всех решениях ниже окружность, описанная около треугольника CEF, обозначается через ω, а её центр — через O.

Первое решение. Внешняя (CD) и внутренняя (CE) биссектрисы угла ACB перпендикулярны. Тогда $\angle DAE = \angle DCE = 90°$, и четырёхугольник $ADCE$ вписан. Поэтому $\angle ADE = \angle ACE$, откуда $\angle BEF = 180° - \angle AED - \angle DEF = 90° - \angle AED = \angle ADE = \angle ACE = \angle ECF$. Значит, ω касается AB (в точке E; рис. 32).

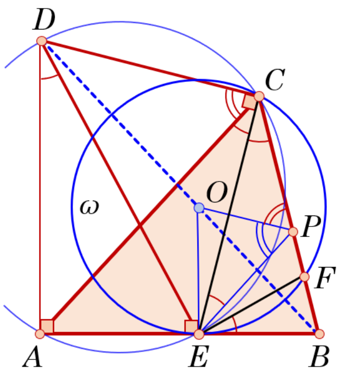


Рис. 32

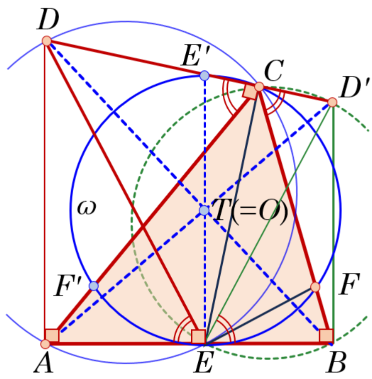


Рис. 33

Выберем на отрезке BC такую точку P, что $PE \parallel AC$. Тогда $\angle PEC = \angle ECA = \angle PCE$, откуда $PC = PE$. Поскольку $OC = OE$, получаем, что PO — биссектриса внешнего угла BPE.

Совершим гомотетию с центром B, переводящую треугольник BPE в BCA. Тогда прямая PO перейдёт в CD, а прямая EO (перпендикулярная AB) — в AD. Значит, точка O перейдёт в D, откуда и следует, что точка O лежит на BD.

Второе решение. Выберем на прямых CD и AC точки D' и F' так, что $\angle ABD' = \angle D'EF' = 90°$ (рис. 33). Как и выше, докажем, что окружность ω касается AB. Аналогично, описанная окружность треугольника CEF' также касается AB в точке E (и тоже проходит через C). Поэтому эти окружности совпадают, то есть F' лежит на ω.

Докажем, что центром ω является точка T пересечения диагоналей BD и AD' трапеции $ADD'B$. Заметим сразу, что из вписанных четырёхугольников $ADCE$ и $BD'CE$ получаются равенства $\angle AED = \angle ACD = \angle BCD' = \angle BED'$, так что прямоугольные треугольники AED и BED' подобны, и $\frac{AE}{BE} = \frac{AD}{BD'} = \frac{DT}{BT}$. Значит, $ET \parallel AD \parallel BD'$.

Пусть TE пересекает DD' в точке E'. Поскольку E' лежит на диаметре ω, проходящем через E, и $\angle ECE' = 90^\circ$, точка E' лежит на ω. Прямая EE' параллельна основаниям трапеции и проходит через точку пересечения диагоналей трапеции; как известно, в этом случае EE' делится точкой T пополам. Поскольку EE' — диаметр ω, получаем $T = O$.

Замечание. После доказательства того, что ω касается AB в точке E, существуют и другие способы продолжения решения. Привелём набросок одного из них.

Нетрудно видеть, что $\angle CEF = \angle CAE = \mu$. Отметим на луче BD точку X так, что $\angle BCX = 90^\circ - \angle CEF = \angle DAC$; тогда $\angle XCD = \angle CDA = \nu$. Применяя теорему синусов, можно получить, что

$$\frac{BX}{XD} = \frac{BC}{CD} \cdot \frac{\cos\mu}{\sin\nu} = \frac{BC}{CD} \cdot \frac{CD}{CA} = \frac{BC}{CA} = \frac{BE}{EA}.$$

Таким образом, точка X лежит на прямых EO и CO, то есть $O = E$ (если эти две прямые не совпадают, то есть $AC \neq BC$).

68. *Ответ:* $a_{2022} = 2022^3 - 1011^3 = 7 \cdot 1011^3$.

Записывая условие при $n = 2022$, $k = 1011$ и при $n = 1011$, $k = 2022$, получаем

$$a_{2022} = a_{2022} - a_{1011} \geqslant 2022^3 - 1011^3 \qquad \text{и}$$
$$-a_{2022} = a_{1011} - a_{2022} \geqslant 1011^3 - 2022^3,$$

то есть $a_{2022} \geqslant 2022^3 - 1011^3 \geqslant a_{2022}$. Отсюда и следует ответ.

Замечание. Последовательность, удовлетворяющая условию, существует, а именно $a_n = n^3 - 1011^3$. Более того, аналогично решению выше несложно показать, что такая последовательность единственна. Однако для решения задачи не требуется ни находить все такие последовательности, ни даже приводить пример такой последовательности.

69. *Ответ: не обязательно.*

Первое решение. Занумеруем вертикали слева направо числами от 1 до 100. Пусть a — верхняя строка квадрата, а b — строка сразу под ней. Пусть в петином разбиении эти строки заняты вертикальными домино $a1 - b1$, $a2 - b2$, $\ldots$, $a98 - b98$ и горизонтальными домино $a99 - a100$, $b99 - b100$. Очевидно, что оставшуюся часть доски можно разбить на домино (например, на горизонтальные), поэтому такое разбиение существует.

Предположим, что существует васино разбиение на домино, удовлетворяющее требованиям задачи. Если в васином разбиении какая-то из клеток $a_1, a_2, \ldots, a98$ занята вертикальным домино, то это — то же домино, что и в петином разбиении, и из этих двух клеток нельзя добраться до остальных. Поэтому в васином разбиении обязательно должны присутствовать домино $a1 - a2$, $a3 - a4, \ldots, a97 - a98$. Аналогично, клетки $a99$ и $a100$ не могут быть накрыты горизонтальными домино, поэтому они накрыты вертикальными домино $a99 - b99$ и $a100 - b100$. Но тогда из четырёх клеток $a99$, $a100$, $b99$, $b100$ нельзя попасть в остальные, противоречие.

Замечание. Существуют и другие варианты петиного разбиения, при которых требуемое невозможно. Например, если обозначить через c строку непосредственно под b, то годится любое разбиение, содержащее следующие пять домино: $a1 - b1$, $a2 - b2$, $a3 - a4$, $b3 - b4$, $c1 - c2$ (такие разбиения существуют).

Второе решение. Предположим, что Васе удалось требуемое. Тогда из каждой клетки выходит один синий и один красный отрезок, при этом они идут в разные клетки — иначе из этих двух клеток нельзя было бы добраться до остальных.

Раскрасим все клетки в шахматном порядке в чёрный и белый цвета, и поставим на каждом синем отрезке стрелку от белой клетки к чёрной, а на красном — от чёрной к белой. Тогда из каждой клетки ведёт ровно одна стрелка, и в неё входит ровно одна. Тогда все клетки разбились на циклы, и, если Васе требуемое удалось, то получился один цикл из всех клеток.

Пусть a — верхняя горизонталь, а z — нижняя. Пусть в петином разбиении присутствуют домино $a1 - a2$ и $z2 - z3$ (такое разбиение возможно, если, например, клетки $z1$ и $z100$ покрыть вертикальными домино, а все остальные домино сделать горизонтальными). Тогда эти отрезки будут ориентированы как $a1 \to a2$ и $z2 \to z3$. Если они находятся в одном цикле, то этот цикл должен пройти от $a2$ к $z2$, а затем от $z3$ к $a1$. Но такие два пути должны иметь общую клетку, что невозможно.

70. Поскольку $AD \parallel CB$, треугольники EAD и ECB подобны, и потому $\frac{BE}{DE} = \frac{BC}{AD}$.

Достроим треугольник BCD до параллелограмма $BCDK$ (см. рис. 34). Тогда треугольники DEF и DBK подобны, поэтому $\frac{DF}{DE} = \frac{DK}{DB}$. Наконец, поскольку $DK = BC$ и $DB = DA$, получаем

$$\frac{DF}{DE} = \frac{DK}{DB} = \frac{BC}{AD} = \frac{BE}{DE},$$

откуда и следует, что $DF = BE$.

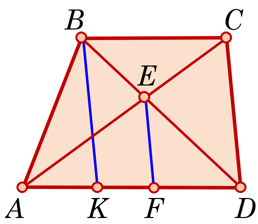


Рис. 34

71. *Ответ:* 180.

Первое решение. *Пример.* Покажем сначала, что при $N = 180$ требуемое возможно. Отметим на окружности 180 точек, разбивающих её на 180 равных дуг величиной по 2° каждая. Величина любой дуги с концами в двух из отмеченных точек выражается чётным числом градусов, поэтому величина любого вписанного в окружность угла, образованного тремя отмеченными точками, выражается натуральным числом градусов. Следовательно, 180 отмеченных точек удовлетворяют условию задачи.

Оценка. Осталось доказать, что $N \leqslant 180$. Любые три отмеченных точки образуют треугольник, поэтому не могут лежать на одной прямой. Считая отмеченные точки расположенными на координатной плоскости, обозначим через A любую из них с максимальной ординатой. Среди оставшихся выберем точки B и C такие, что угол BAC максимален. Из условия задачи следует, что в треугольнике ABC величины углов ABC и ACB не меньше 1°, поэтому величина угла BAC не больше 178°. Ввиду выбора точек B и C остальные $N-3$ отмеченные точки лежат строго внутри угла BAC, и каждый луч с началом в точке A содержит не больше одной из них. Проведя через каждую отмеченную точку внутри угла BAC луч с началом в точке A, получим $N - 3$ различных луча, делящих $\angle BAC$ на $N-2$ угла. Если $N-2 > 178$, то хотя бы один из этих углов имеет величину, меньшую 1°, и является углом некоторого треугольника с вершинами в трёх отмеченных точках, что противоречит условию задачи. Следовательно, $N - 2 \leqslant 178$, то есть $N \leqslant 180$, что и требовалось доказать.

Замечание 1. Описать выбор используемой в решении точки A можно также следующими способами.

1. Рассмотрим вершину A *выпуклой оболочки* системы отмеченных точек. В качестве точек B и C тогда можно взять соседние с A вершины выпуклой оболочки.

2. Рассмотрим *опорную прямую* множества отмеченных точек, то есть такую прямую, что все отмеченные точки лежат по одну сторону от этой прямой, а на самой прямой лежит хотя бы одна отмеченная точка. Эту точку и можно взять за точку A.

Замечание 2. В примере отмеченные точки являются вершинами правильного 180-угольника. Все примеры для $N = 180$ устроены именно таким образом (это несложно вывести, используя рассуждения из доказательства оценки, но конечно, это не требуется в решении).

Второе решение. Приведём другое доказательство оценки. Рассмотрим пару отмеченных точек A, B на наибольшем расстоянии друг от друга. Тогда для любой другой отмеченной точки C сторона AB — наибольшая в треугольнике ABC, поэтому, в частности, угол BAC острый.

Проведя из точки A лучи во все отмеченные точки, получаем, что все эти лучи различны (ибо три отмеченных точки не могут лежать на одной прямой), и каждый составляет с лучом AB острый угол, выражаемый целым числом градусов. Такой угол (если луч не совпадает с AB) может принимать значения от 1° до 89°, поэтому количество таких лучей $N-2$ не превосходит $2 \cdot 89 = 178$. Отсюда $N \leqslant 180$.

Замечание 3. Доказать более слабые оценки $N \leqslant 361$ и даже $N \leqslant 181$ можно, рассматривая любую отмеченную точку A (без какого-то специального выбора) и выходящие из нее лучи в другие отмеченные точки. Действительно, так как угол между любыми двумя такими лучми измеряется целым числом градусов, возможных направлений данных лучей — 360, отсюда $N \leqslant 361$. Кроме того, из любой пары противоположных направлений может присутствовать не более одного, поэтому лучей не более 180, и $N \leqslant 181$.

Замечание 4. Можно доказать оценку несколько по-другому. Рассмотрим угол BAC выпуклой оболочки множества отмеченных точек. Он выражен натуральным числом градусов и меньше 180°, значит, он не превосходит 179°. Далее повторяя рассуждения из решения, получаем, что $N - 2 \leqslant 179$, откуда $N \leqslant 181$.

Если хотя бы один угол выпуклой оболочки не больше 178°, то доказываем оценку $N \leqslant 180$ так же, как в первом решении.

Остается случай, когда все углы выпуклой оболочки равны 179°, или все внешние углы выпуклой оболочки равны 1°. Но сумма внешних углов выпуклого многоугольника равна 360°, поэтому в выпуклой оболочке не менее 360 вершин, тогда $N \geqslant 360$. Но ранее показано, что $N \leqslant 181$ — противоречие.

72. Положим $a = 10^{100}$. Через $s(m)$ обозначим сумму цифр числа m. Отметим простое свойство $s(l)+s(m) \geqslant s(l+m)$, которое сразу видно, если числа l и m сложить в столбик.

Лемма. *Пусть k — натуральное число, и пусть натуральное число m кратно $10^k - 1$. Тогда $s(m) \geqslant 9k$.*

Доказательство. Индукция по m. База $m = 10^k - 1$ очевидна.

Предположим, что $m \geqslant 10^k$, и что утверждение доказано для всех чисел, меньших m. Докажем его и для m. Пусть последние k цифр числа m образуют число v (возможно, с ведущими нулями), а все остальные — число $u > 0$ (иначе говоря, $m = \overline{uv} = 10^k u + v$). Поскольку m делится на $10^k - 1$, то и положительное число $m' = u + v = m - (10^k - 1)u$ также кратно $10^k - 1$. Поэтому $s(m') \geqslant 9k$ по предположению индукции, а тогда и $s(m) = s(u) + s(v) \geqslant s(u + v) = s(m') \geqslant 9k$.

Для решения задачи осталось взять такое k, что $9k \geqslant a$, и заметить, что если $b = 10^k - 1$ и $n \geqslant b$, то $n!$ делится на $10^k - 1$ и, значит, $s(n!) \geqslant 9k \geqslant a$.

Замечание. В доказательстве леммы по сути использован следующий признак делимости на $10^k - 1$. Разобьём десятичную запись числа m на блоки по k цифр (первый блок может быть неполным). Воспринимая эти блоки как обычные числа (возможно, с ведущими нулями), сложим их, получив число m'. Тогда m кратно $10^k - 1$ тогда и только тогда, когда m' делится на $10^k - 1$.

У леммы есть несколько вариаций; например, любое число, делящееся на число $11\ldots1$ (k единиц), имеет сумму цифр, не меньшую k.

73. Совпадает с задачей **63**.

74. Пусть d — абсцисса вершины параболы $y = P(x)$, так что прямая $x = d$ — ось симметрии параболы. Тогда для любых чисел t и s с суммой $2d$ (т.е. таких, что точки t и s симметричны относительно d) выполнено $P(t) = P(s)$. Таким образом, любая тройка попарно различных чисел a, b, c таких, что $a+b+c = 2d$, будет удовлетворять условию задачи. Можно взять, скажем, $a = \frac{2d}{3} - 1$, $b = \frac{2d}{3}$, $c = \frac{2d}{3} + 1$.

75. *Ответ:* 160.

Оценка. Докажем, что оценка $n > 160$ «не работает».

Пусть дан набор из n конфет. Назовем сорт *критическим*, если конфет этого сорта ровно 10 (среди всех данных n конфет).

Пусть у нас k критических сортов, тогда всего конфет не менее $10k$: $n \geqslant 10k$. Уберем по одной конфете каждого критического сорта и организуем группу из оставшихся $n-k$ конфет. Для этой группы нет сорта, представленного ровно 10 конфетами. Кроме того, $n-k \geqslant n-\frac{n}{10}=\frac{9n}{10}>\frac{9\cdot 160}{10}=144$. Значит, в рассматриваемой группе не менее 145 конфет, поэтому условие задачи не выполняется.

Пример. Теперь приведём пример ситуации, в которой у Васи может быть 160 конфет. Пусть у него есть ровно по 10 конфет 16 сортов. Пусть выбрана группа, для которой нет сорта, представленного ровно 10 конфетами. Тогда в эту группу не входит хотя бы одна конфета каждого сорта (иначе говоря, ни один сорт не будет взят полностью), т.е. группа содержит не более $16\cdot 9=144$ конфет, значит, условие задачи выполнено.

Замечание 1. Оценка $n \leqslant 160$ может быть доказана также несколько другим способом. Предположим, что некоторое $n=145+m$ «работает», т.е. существует набор K_0 из n конфет, удовлетворяющий условию задачи. Тогда в наборе K_0 есть в точности 10 конфет некоторого сорта A_0. Уберем конфету a_0 сорта A_0 и рассмотрим группу K_1 из оставшихся $n-1$ конфет. В группе K_1 есть в точности 10 конфет некоторого сорта A_1, при этом сорт A_1 отличен от A_0, так как в K_1 есть ровно 9 конфет сорта A_0. Уберем из K_1 конфету a_1 сорта A_1 и рассмотрим группу K_2 из оставшихся $n-2$ конфет, в котором найдем 10 конфет нового сорта A_3, и т.д., продолжим по шагам убирать по одной конфете и рассматривать группы оставшихся конфет. Так дойдем до группы K_m, состоящей из $|K_m|=145$ конфет. При этом, согласно нашему алгоритму, K_0 содержит по 10 конфет сортов $A_0, \ldots, A_m$, значит $|K_0| \geqslant \geqslant 10(m+1)$. Имеем $145+m \geqslant 10(m+1)$, откуда $m \leqslant 15$ и $n \leqslant 160$.

Замечание 2. Пример при $n=160$ единственный.

76. Достаточно доказать *утверждение*: многочлен $P(x)$ делится на $(x-1)^2$. Действительно, после деления (например, столбиком), в частном получится многочлен $Q(x)$ с целыми коэффициентами, и тогда равенство многочленов $P(x)=(x-1)^2Q(x)$ влечет равенство $P(2022)=2021^2\cdot Q(2022)$, из которого следует утверждение задачи, поскольку $Q(2022)$ — целое число.

Для доказательства утверждения сделаем замену $t=x-1$, положим $R(t)=P(t+1)=a_n(t+1)^n+a_{n-1}(t+1)^{n-1}+\ldots+a_1(t+ + 1)+a_0$ и докажем, что $R(t)$ делится на t^2, т.е. что последние два коэффициента многочлена $R(t)$ равны 0.

Свободный член многочлена R равен

$$R(0) = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_0 = 0.$$

Поскольку в многочлене $(t+1)^k$ коэффициент при t равен k, коэффициент при t многочлена R равен $na_n + (n-1)a_{n-1} + \ldots + a_1$. Из условий $a_{n-k} = a_k$ следует, что удвоенный коэффициент при t равен $(na_n + (n-1)a_{n-1} + \ldots + a_1) + (na_0 + (n-1)a_1 + \ldots + a_{n-1}) = n(a_n + a_{n-1} + \ldots + a_0) = 0$. Тем самым, задача решена.

Замечание. Утверждение о делимости $P(x)$ на $(x-1)^2$ можно доказать другими способами. Например:

1) Можно доказать, что при делении $P(x)$ на $x-1$ мы получаем многочлен $Q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1x + b_0$ такой, что $b_{n-1-k} = -b_k$ при всех k, $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Отсюда последует $Q(1) = 0$, и тогда в силу теоремы Безу $Q(x)$ делится на $(x-1)$.

2) Можно заметить, что $P(1) = 0$ и $P'(1) = 0$.

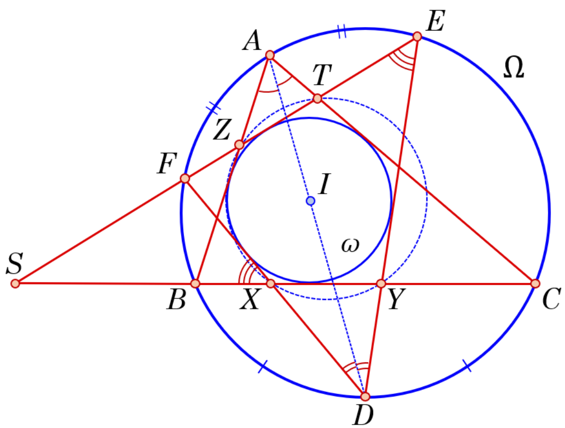


Рис. 35

77. (Рис. 35.) Отметим точку I — центр общей вписанной окружности ω треугольников ABC и DEF. Поскольку D — середина дуги BC, точки A, I, D лежат на одной прямой. Окружность ω вписана в угол FDE, поэтому DI — биссектриса угла FDE, а точка A — середина дуги FE.

Заметим, что четырёхугольник $FEYX$ вписанный. Это слеует из равенства углов:

$$\angle FED = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{FB} + \overset{\frown}{BD}\right) = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{FB} + \overset{\frown}{CD}\right) = \angle FXB.$$

Аналогично, четырёхугольник $BCTZ$ — вписанный.

Если $BC \parallel EF$, то конструкция симметрична относительно прямой AD, и утверждение задачи очевидно. Иначе отметим точку S пересечения прямых FE и BC. Приравнивая произведения отрезков секущих для окружностей Ω, $(BCTZ)$ и $(FEYX)$ (то есть степени точки S относительно этих трёх окружностей), имеем: $SX \cdot SY = SF \cdot SE = SB \cdot SC = SZ \cdot ST$. Доказанное равенство $SX \cdot SY = SZ \cdot ST$ означает, что X, Y, Z, T лежат на одной окружности, что и требовалось доказать.

78. *Ответ: не может.*

Пусть r — остаток меньшего из данных нечётных чисел при делении на 2022, так что r — некоторое нечётное число из множества $\{1, 3, 5, \ldots, 2021\}$. Если $r \leqslant 2017$, то два других остатка — $r+2$ и $r+4$, так что сумма остатков равна $r + (r+2) + (r+4) = 3(r+2)$ — это число составное, так как делится на 3 и больше 3. Отдельно рассмотрим случаи $r = 2019$ и $r = 2021$.

В первом случае остатки данных чисел равны 2019, 2021 и 1. Во втором случае остатки данных чисел равны 2021, 1 и 3. В обоих случаях сумма остатков делится на 3 и больше 3.

Замечание 1. Во всех трёх случаях сумма трёх остатков равна $3(r+2) - 2022k$, где $k \in \{0, 1, 2\}$.

Замечание 2. Если в условии задачи 2022 заменить на другое число (не кратное 3), утверждение задачи может стать неверным. Например, сумма остатков чисел 19, 21, 23 при делении на 20 равна $19 + 1 + 3 = 23$ — простое число.

79. (Рис. 36.) Пусть $\angle ABC = \alpha$, тогда по условию $\angle DAB = 2\alpha$. На продолжении отрезка AB за точку A отметим точку F так, что $AD = AF$. Тогда треугольник AFD равнобедренный, и его углы при основании равны. Так как $\angle FAD = 180^\circ - 2\alpha$, то $\angle AFD = \angle ADF = \alpha$. Поскольку четырехугольник $ABCD$ — вписанный, то $\angle ADC = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - \angle ADF$. Следовательно, точки C, D и F лежат на одной прямой. Тогда $\angle CFB = \alpha = \angle CBF$, поэтому треугольник FCB равнобедренный. Значит, его биссектриса CE совпадает с медианой. Итого,

$BE = EF = AD + AE$, что и требовалось.

Замечание. Возможна и такая вариация решения. Обозначим $\angle ABC = \alpha$, тогда по условию $\angle DAB = 2\alpha$. Четырёхугольник $ABCD$ — вписанный, поэтому $\angle BCD = 180^\circ - \angle DAB = 180^\circ - 2\alpha$. Тогда $\angle BCD + \angle ABC = 180^\circ - \alpha$, лучи BA и CD пересекаются в некоторой точке F, и при этом $\angle BFC = \alpha$. Поскольку $\angle CFB = \alpha = \angle CBF$, треугольник FCB равнобедренный. Значит, его биссектриса CE совпадает с медианой, поэтому $BE = EF = AF + AE$.

Для завершения решения остаётся показать, что $AF = AD$. Это следует из вписанности четырёхугольника $ABCD$, поскольку $\angle ADF = \angle CBF = \alpha$. Значит, треугольник AFD равнобедренный с равными углами $\angle AFD = \angle ADF = \alpha$.

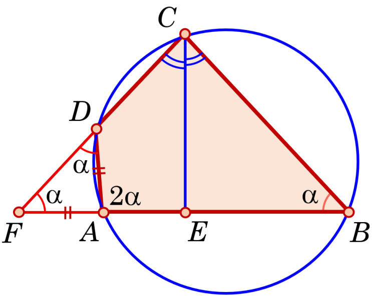


Рис. 36

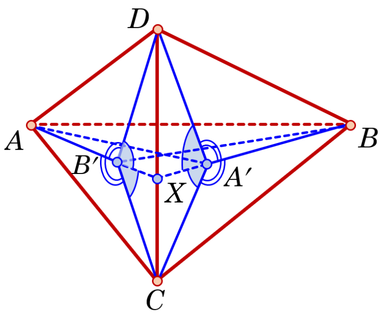


Рис. 37

80. Совпадает с задачей **71**.

81. Совпадает с задачей **62**.

82. Совпадает с задачей **72**.

83. Совпадает с задачей **63**.

84. Совпадает с задачей **74**.

85. (Рис. 37.) Из условия задачи следует, что точки A, A', B, B', лежат в одной плоскости, поэтому прямые BA' и AB' пересекают ребро CD в одной точке X. Из условия следует, что эти прямые являются биссектрисами углов $CA'D$, $CB'D$ соответственно. Отсюда, по свойству биссектрисы, $CA' : A'D = CX : XD = CB' : B'D$, а поскольку $\angle CA'D = \angle CB'D = 120^\circ$, треугольники $CA'D$ и $CB'D$ подобны. Поскольку CD — общая сторона этих треугольников, эти треугольники равны. В этих равных треугольниках равны соответствующие высоты из вершин A' и B'. Это и требовалось доказать.

86. *Ответ:* 102.

Во всех решениях ниже мы рассматриваем граф , в котором вершины — это люди в компании, а два человека соединены ребром, если они дружат.

Рассмотрим 102 вершины, и построим на них следующий граф. Одну вершину x соединим с тремя другими v_1, v_2, v_3. Остальные 98 вершин разобьём на пары и соединим вершины в каждой паре. Получился граф с $98/2+3=52$ рёбрами. При удалении любой вершины удаляется нечётное число рёбер, то есть остаётся также нечётное число. Поэтому компания, описанная в условии, может состоять из 102 человек.

Осталось показать, что не существует такой компании из 103 человек (тогда и компании из более чем 103 человек тоже быть не может). Ниже мы приводим несколько различных способов сделать это; в каждом способе мы предполагаем, от противного, что такая компания нашлась.

Первое решение. Существует всего $n = C_{103}^2 = 51 \cdot 103$ способа выбросить две вершины из 103, оставив 101. Пронумеруем эти способы числами от 1 до n. Пусть a_i — количество рёбер на оставшихся 101 вершинах в i-м способе; по предположению, все числа a_i нечётны, а значит, нечётна и их сумма S (поскольку число n нечётно).

С другой стороны, рассмотрим любое ребро uv. Это ребро учтено в числе a_i ровно тогда, когда вершины u и v не выброшены в i-м способе, то есть когда выброшена какая-то пара из оставшихся 101 вершин. Это происходит в $k = C_{101}^2 = 50\cdot 101$ способах. Итак, каждое ребро учтено в S чётное количество k раз, поэтому S должно быть чётным. Противоречие.

Второе решение. Назовём вершину *чётной*, если её степень чётна, и *нечётной* — иначе. Рассмотрим два случая. *Случай 1.* Пусть общее количество рёбер в графе нечётно. Тогда, выкидывая любую пару вершин, мы должны выкинуть из графа чётное число рёбер (чтобы осталось нечётное число). С другой стороны, если мы выкидываем вершины со степенями d_1 и d_2, то число выкинутых рёбер равно $d_1 + d_2$, если эти вершины не соединены ребром, и d_1+d_2-1, если соединены. Отсюда следует, что вершины одинаковой чётности всегда не соединены ребром, а вершины разной чётности — всегда соединены.

Значит, если в графе k чётных вершин, то общее число рёбер равно $k(103-k)$, то есть чётно. Но мы предполагали, что это количество нечётно, противоречие.

Случай 2. Пусть общее количество рёбер в графе чётно. Аналогично получаем, что вершины одинаковой чётности всегда соединены ребром, а вершины разной чётности не соединены. Поэтому, если в графе k чётных вершин, то число отсутствующих рёбер равно $k(103-k)$, то есть чётно. Поэтому общее число рёбер есть $C_{103}^2 - k(103-k) = 103 \cdot 51 - k(103-k)$, то есть нечётно. Но мы предполагали, что это количество чётно.

Замечание 1. Разумеется, существуют и другие примеры компании из 102 человек, удовлетворяющей условию.

Замечание 2. Существует и такая вариация второго решения.

Рассмотрим произвольные 102 вершины и индуцированный подграф на этих вершинах, пусть в нём k рёбер. Выбрасывая из них произвольную вершину (скажем, степени d), получаем 101 вершину с нечётным количеством рёбер $k-d$. Значит, степень любой вершины в нашем подграфе имеет чётность, отличную от чётности k, то есть степени всех 102 вершин имеют одну и ту же чётность.

Рассмотрим теперь весь граф на 103 вершинах. Назовём вершину *чётной*, если после её удаления остаётся граф, в котором все степени вершин чётны, и *нечётной* — иначе. Тогда две вершины одной чётности соединены с одними и теми же из остальных вершин, а две вершины разной чётности — с наборами вершин, дополняющими друг друга до всего множества из 101 оставшейся вершины. Отсюда несложно выяснить, как и во втором решении, что граф — либо полный двудольный, либо объединение двух полных графов. Далее можно действовать как и в этом решении.

87. *Ответ:* $3 \cdot C_{100}^2 = 14\,850$.

Назовём тройку натуральных чисел (x, y, z), элементы которой принадлежат S, *хорошей*, если

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2(xy + yz + zx) \tag{1}$$

Таким образом, нам надо найти наибольшее возможное количество хороших троек. Выясним, когда тройка хорошая. Перепишем (1) как квадратное уравнение относительно x:

$$x^2 - 2x(y+z) + (y-z)^2 = 0.$$

Решая его, получаем

$$x = (y+z) \pm 2\sqrt{yz} = (\sqrt{y} \pm \sqrt{z})^2,$$

откуда $\sqrt{x} = \pm\sqrt{y} \pm \sqrt{z}$. Иначе говоря, тройка является хорошей тогда и только тогда, когда одно из чисел $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$ и $\sqrt{z}$ равно сумме двух других.

Пусть $s_1 < s_2 < \ldots < s_{100}$ — все элементы множества S. Положим $t_i = \sqrt{s_i}$. Оценим количество хороших троек (x, y, z), в которых z — наибольшее число, то есть $\sqrt{z} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$. Заметим, что при любых i и j, $1 \leqslant i < j \leqslant 100$, есть не более одной такой тройки, в которой $\sqrt{x} = t_i$ и $\sqrt{z} = t_j$ (по этим значениям восстанавливается $\sqrt{y} = \sqrt{z} - \sqrt{x}$). Поэтому оцениваемое количество не превосходит количества таких пар чисел (i, j), то есть C_{100}^2.

Аналогично, количества хороших троек, в которых наибольшими являются x и y, не превосходят C_{100}^2. Поэтому общее количество хороших троек не больше $3 \cdot C_{100}^2$.

Эта оценка достигается, если положить $s_i = i^2$, то есть $t_i = i$: действительно, тогда при любых $i < j$ найдётся хорошая тройка (s_i, s_{j-i}, s_j).

Замечание 1. Можно показать, что для того, чтобы оценка достигалась, необходимо выполнение равенств $t_i = it_1$ при всех i. Поскольку $1 \leqslant t_i \leqslant 100$, приведённый выше пример — единственный.

Замечание 2. Можно показать, что верен следующий факт: равенство $\sqrt{z} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ при натуральных x, y, z возможно лишь тогда, когда отношения x / z и y / z являются квадратами рациональных чисел, то есть когда $x = a^2t$, $y = b^2t$ и $z = c^2t$ при некоторых натуральных a, b, c и t (где $a + b = c$). В приведённом выше решении этот факт не используется.

88. Совпадает с задачей **68**.

89. *Ответ: не может.*

Из условия следует, что x, $y > 1$, поскольку произведение цифр натурального числа не может быть отрицательным. Следовательно, числа n и $n + 1$ не содержат нулей в десятичной записи. Тогда эти числа отличаются лишь последней цифрой, причём у числа $n + 1$ она больше на один. Таким образом, $y > x$. Если $x - 1 > 0$, то, рассуждая аналогично, мы получим, что $y - 1 < x - 1$, это противоречит доказанному выше. Следовательно, $x - 1 = 0$. Тогда $x = 1$, и в десятичной записи числа n все цифры равны 1. Отсюда следует, что в числе $n + 2$ последняя цифра — двойка, а остальные цифры — единицы, поэтому $y = 2$. Значит, $y - 1 = 1$, и число m состоит лишь из единиц. Но тогда число $m + 1$ не содержит нулей в десятичной записи. Однако произведение его цифр равно нулю, противоречие.

90. Совпадает с задачей **62**.

91. (Рис. 38.) Обозначим через O центр окружности, описанной около трапеции $ABCD$. Тогда $\angle COD = 2\angle CAD = \angle PAD + \angle ADP = \angle CPD$. Здесь мы воспользовались тем, что центральный угол вдвое больше вписанного, и что внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних, с ним не смежных. Следовательно, точка O лежит на окружности γ, описанной около треугольника CPD, и так как $OC = OD$, то O — середина дуги CPD. Тогда отрезок ON — диаметр окружности γ, а прямая ON — серединный перпендикуляр к отрезку CD. В частности, середина отрезка CD, обозначим её через S, лежит на отрезке ON. Из сказанного выше, $\angle OCN = 90^\circ = \angle CSN$. Значит, окружность, описанная около треугольника SCN, касается прямой OC, поэтому $OS\cdot ON = OC^2 = OK\cdot OL$. Отметим точку S', симметричную точке S относительно точки O. Тогда $OK \cdot OL = OS' \cdot ON$, поэтому точки S', K, L, N лежат на одной окружности.

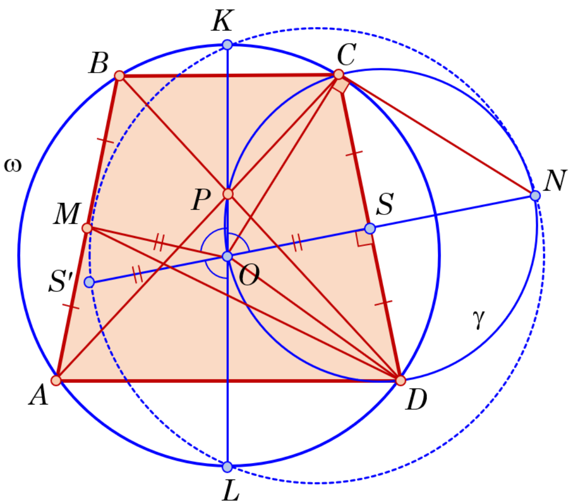


Рис. 38

Теперь заметим, что точки M и S симметричны относительно прямой KL. Значит, $OS' = OS = OM$ и $\angle LOS' = \angle KOS =$

$= \angle KOM$. Таким образом, точки M и S' симметричны относительно серединного перпендикуляра к KL. Следовательно, точки K, M, S' и L лежат на одной окружности. Из сказанного выше, на этой окружности лежит также и точка N, что и требовалось.

92. Первое решение. Заметим, что

$$\frac{a^3}{a^2+b+c} = a - \frac{a(b+c)}{a^2+b+c} \geqslant a - \frac{a(b+c)}{2a\sqrt{b+c}} = a - \frac{\sqrt{b+c}}{2}.$$

Здесь мы оценили знаменатель по неравенству о средних:

$$a^2+b+c \geqslant 2a\sqrt{b+c}.$$

Сложим полученное неравенство с тремя аналогичными. Теперь нам достаточно доказать, что

$$a+b+c+d - \frac{\sqrt{a+b}}{2} - \frac{\sqrt{b+c}}{2} - \frac{\sqrt{c+d}}{2} - \frac{\sqrt{d+a}}{2} \geqslant 4.$$

Поскольку $a+b+c+d = 8$, это равносильно неравенству

$$\frac{\sqrt{a+b}}{2} + \frac{\sqrt{b+c}}{2} + \frac{\sqrt{c+d}}{2} + \frac{\sqrt{d+a}}{2} \leqslant 4.$$

Но из неравенства между средним арифметическим и среднем квадратичным мы получаем, что

$$\frac{\sqrt{a+b}}{2} + \frac{\sqrt{c+d}}{2} \leqslant \sqrt{\frac{(\sqrt{a+b})^2 + (\sqrt{c+d})^2}{2}} = 2,$$

и аналогично,

$$\frac{\sqrt{b+c}}{2} + \frac{\sqrt{d+a}}{2} \leqslant 2.$$

Складывая эти два неравенства, получаем требуемое.

Второе решение. По неравенству Коши-Буняковского

$$\frac{a^3}{a^2+b+c} + \frac{b^3}{b^2+c+d} + \frac{c^3}{c^2+d+a} + \frac{d^3}{d^2+a+b} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{(a^2+b^2+c^2+d^2)^2}{a(a^2+b+c)+b(b^2+c+d)+c(c^2+d+a)+d(d^2+a+b)}.$$

Таким образом, достаточно доказать, что

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)^2 \geqslant 4(a^3+b^3+c^3+d^3+ab+bc+cd+da+2ac+2bd).$$

Заметим, что

$$32 = \frac{(a+b+c+d)^2}{2} = \\ = ab+bc+cd+da+ac+bd+\frac{a^2+c^2}{2}+\frac{b^2+d^2}{2} \geqslant \\ \geqslant ab+bc+cd+da+2ac+2bd,$$

поэтому достаточно проверить, что

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)^2 \geqslant 4(a^3+b^3+c^3+d^3+32). \qquad (2)$$

Сделаем замену $a = 2+x$, $b = 2+y$, $c = 2+z$, $d = 2+t$. Тогда $x+y+z+t = a+b+c+d-8 = 0$ и

$$a^2+b^2+c^2+d^2 = 4\cdot 2^2+2\cdot 2(x+y+z+t)+ \\ +x^2+y^2+z^2+t^2 = 16+x^2+y^2+z^2+t^2,$$

$$a^3+b^3+c^3+d^3 = 4\cdot 2^3+3\cdot 2^2(x+y+z+t)+ \\ +3\cdot 2(x^2+y^2+z^2+t^2)+x^3+y^3+x^3+t^3.$$

Неравенство (2) примет вид

$$\left((x^2+y^2+z^2+t^2)+16\right)^2 \geqslant \\ \geqslant 4\left(x^3+y^3+z^3+t^3+6(x^2+y^2+z^2+t^2)+64\right).$$

После раскрытия и сокращения остаётся доказать, что

$$(x^2+y^2+z^2+t^2)^2+8(x^2+y^2+z^2+t^2) \geqslant 4(x^3+y^3+z^3+t^3).$$

Остаётся заметить, что

$$(x^2+y^2+z^2+t^2)^2+8(x^2+y^2+z^2+t^2) \geqslant \\ \geqslant x^4+y^4+z^4+t^4+4x^2+4y^2+4z^2+4t^2 \geqslant \\ \geqslant 4(x^3+y^3+z^3+t^3).$$

Первое неравенство получается раскрытием скобок: после сокращения в левой его части остаются лишь неотрицательные слагаемые. Второе получается сложением четырёх неравенств о средних вида $p^4 + 4p^2 \geqslant 4p^3$.

93. *Ответ:* $22 + 979 = 1001$.

Заметим, что левая часть не превосходит $99 + 999 = 1098$. Значит, правая часть в силу требования симметричности записи равна 1001.

Первая (а, значит, и третья цифра) второго слагаемого равны 9, иначе сумма чисел в левой части меньше 1000. Осталось определить одну цифру x в первом слагаемом и одну цифру y во втором так, чтобы выполнялось равенство

$$10x + x + 909 + 10y = 1001 \quad \Longleftrightarrow \quad 10(x + y) + x = 92.$$

Отсюда $x + y = 9$ и $x = 2$, поэтому $y = 7$.

94. *Ответ:* 2021.

По условию задачи на склад завезли $n^2 - 4$ упаковок. Это число раскладывается как $(n-2)(n+2)$. В силу того, что это разложение единственное, числа $n-2$ и $n+2$ должны быть простыми. Это выполняется для $n = 45$, при этом $n^2 - 4 = 2021$. Предыдущее такое число получается при $n = 39$, но в $(n - 2)(n + 2) = 37 \cdot 41 = 1517$ году вряд ли существовали картонные упаковки для для сока.

95. *Ответ:* 32 *пресса.*

Обозначим число новых прессов через n. По условию производительность новых станков больше, чем старых, поэтому

$$\frac{5600}{n} > \frac{3969}{n-5} \quad \Longleftrightarrow \quad n \geqslant 18.$$

Число $n - 5$ не делится на 2 и 5, так что и n не делится на 5. Значит, n является чётным делителем числа $5600/5 = 224$, и значит, $n = 2k$, где k — делитель 112, $k \geqslant 9$. Остаются такие варианты:

k	16	14	28	56	112
n	32	28	56	112	224
$n-5$	27	23	51	107	219

Делителем 3969 в последней строке является только число 27, то есть $n - 5 = 27$, и значит, $n = 32$.

96. *Ответ: а)* 120; *б)* 336.

Заметим, что разные рассадки отличаются числом пустых кресел между людьми (и порядком людей слева направо). Сначала рассадим ребят с учётом социальной дистанции, затем уберём по одному креслу между «соседними» людьми. Получим $n-2$ кресла, на которых люди сидят в произвольном порядке. Таким образом, искомое число вариантов рассадки совпадает с количеством размещений троих ребят на $n-2$ кресла, то есть равно $A^3_{n-2} = (n-2)(n-3)(n-4)$.

97. Попробуем разместить фишки так, чтобы условие задачи не было выполнено. Ясно, что никакие три подряд идущие фишки не могут быть одного цвета. Например, среди фишек с номерами 4, 5 и 6 должны быть две белые и одна чёрная или наоборот.

В таблицах указано, цвет каких фишек однозначно определяется, если две заданные фишки одного цвета. Рассмотрим вначале позицию «БЧБ»:

Позиции	1	2	3	4	5	6	7	8	9
				Б	Ч	Б			
4, 6 $\to$ 2 и 8		*Ч*		**Б**	Ч	**Б**		*Ч*	

Итак, на позициях 2, 5, 8 стоят чёрные фишки, противоречие.

Рассмотрим следующую позицию «ББЧ» (позиция «ЧББ» зеркально симметрична). Будем достраивать её по одной фишке так, чтобы условие не выполнялось.

Позиции	1	2	3	4	5	6	7	8	9
				Б	Б	Ч			
4, 5 $\to$ 3			*Ч*	**Б**	**Б**	Ч			
3, 6 $\to$ 9			**Ч**	Б	Б	**Ч**			*Б*
5, 9 $\to$ 7 и 1	*Ч*		Ч	Б	**Б**	Ч	*Ч*		**Б**
6, 7 $\to$ 8	Ч		Ч	Б	Б	**Ч**	**Ч**	*Б*	Б
5, 8 $\to$ 2	Ч	*Ч*	Ч	Б	**Б**	Ч	Ч	**Б**	Б

На позиции 2 не может стоять черная фишка из-за тройки 1, 2, 3. Противоречие.

98. Перенумеруем цвета шляп числами от 1 до 7. Первым свой цвет должна назвать Аня. Она называет такой цвет, чтобы сумма цветов всех трёх шляп делилась на 7. Например, если она видит на подругах шляпы цвета 5 и 7, то она должна назвать цвет 2.

Теперь Варя точно должна знать свой цвет, так как она услышала цвет Ани, видит цвет Гали и знает, что сумма чисел делится на 7. Галя точно также по данной информации определяет цвет своей шляпы. Таким образом, по крайней мере Варя и Галя называют свои цвета правильно.

99. *Ответ:* $1/3$ *от площади шестиугольника.*

Шестиугольник можно разбить на 6 одинаковых правильных треугольников со стороной a, высотой h и площадью S каждый. Заметим, что каждый из закрашенных треугольников имеет сторону длиной $\frac{1}{2}a$. Значит, осталось только найти их высоты. Как можно понять из рисунка 39, они равны $2h$, $\frac{3}{2}h$ и $\frac{1}{2}h$. Значит, площадь закрашенной фигуры $\frac{1}{2}(2+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}) = 2S$, то есть треть от площади шестиугольника.

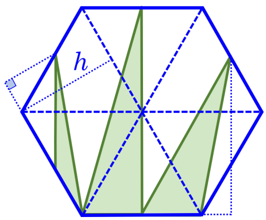


Рис. 39

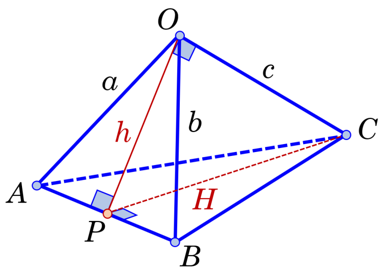


Рис. 40

100. *Ответ:* $2\sqrt{2}$.

Используем формулы суммы и разности синуса и косинуса одного угла:

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\sin 3x - \cos 3x = \sqrt{2}\cos 3\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Каждое из этих двух выражений имеет максимум, равный $\sqrt{2}$, при $x = \pi/4$. Значит, максимальное значение функции $f(x)$ равно $\sqrt{2}+\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

101. *Ответ:* $S = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}$.

Первое решение. Пусть боковые ребра пирамиды равны a, b и c, $AB = x$, h — высота боковой грани, H — высота основания (рис. 40). Имеем $ab = 2S_1$, $bc = 2S_2$, $ca = 2S_3$.

Ребро OC перпенликулярно грани OAB, а значит, и любой прямой на ней. Из треугольника POC получаем, что $H^2 = h^2+c^2$; приравнивая два выражения для площади POC, получаем, что $hx = ab$. Искомая площадь S теперь вычисляется так:

$$2S = xH = x\sqrt{h^2 + c^2} = x\sqrt{(ab/x)^2 + c^2} = \sqrt{a^2b^2 + c^2x^2} =$$
$$= \sqrt{a^2b^2 + c^2(a^2 + b^2)} = \sqrt{(2S_1)^2 + (2S_2)^2 + (2S_3)^2}.$$

Отсюда приходим к ответу.

Второе решение. Пусть x, y, z — длины рёбер основания. По теореме Пифагора:

$$x^2 = a^2 + b^2, \quad y^2 = b^2 + c^2, \quad z^2 = c^2 + a^2.$$

По теореме косинусов $z^2 = x^2+y^2-2xy\cos\gamma$, и значит, $2xy\cos\gamma = x^2 + y^2 - z^2 = 2b^2$. Поскольку $S = \frac{1}{2}xy\sin\gamma$, получаем

$$4S^2 = x^2y^2\sin^2\gamma = x^2y^2(1 - \cos^2\gamma) = (a^2 + b^2)(b^2 + c^2) - b^4 =$$
$$= a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 = 4(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2).$$

Замечание. Доказанное утверждение называется *теоремой де Гуа*, оно является обобщением теоремы Пифагора на случай трёхмерного пространства.

102. *Ответ:* $(1;1)$, $\left(\frac{5+3\sqrt{5}}{2}; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\frac{5-3\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Прибавим к первому уравнению второе, умноженное на 27, получим $x^3 + 9x^2y + 27xy^2 + 27y^3 = 64$. Левая часть представляет собой куб суммы, то есть $(x + 3y)^3 = 64$, и значит, $x + 3y = 4$. Подставим $x = 4 - 3y$ во второе уравнение системы, получаем $y^3 - 2y^2 + 1 = 0$. Разложим левую часть на множители:

$$y^2(y - 1) - (y^2 - 1) = (y - 1)(y^2 - y - 1) = 0.$$

Значит, один из корней — это $y = 1$, два других получим, решив квадратное уравнение $y^2 - y - 1 = 0$.

103. *Ответ:* 200, 200, 200, 200.

Докажем, что все четыре числа *равны*. Предположим обратное, то есть какие-то два из них различны. Возьмём наименьшее из четырёх чисел. Оно строго меньше по крайней мере одного из оставшихся чисел и не больше двух других. Тогда утроенное наименьшее число меньше суммы трёх других чисел. А это противоречит условию, что сумма любых трёх из них не больше утроенного четвёртого. Значит, все четыре числа равны. Поскольку они в сумме составляют 800, каждое равно 200.

Замечание. Возможны и другие решения. Например, пусть a, b, c и d — данные числа, и $a+b+c+d=800$. Тогда $b+c+d=800-a$, и по условию $3a \geqslant b+c+d \iff 3a \geqslant 800-a$, то есть $a \geqslant 200$. Аналогично доказываем, что остальные числа тоже не меньше 200. Значит, сумма всех четырёх чисел не меньше 800. Но эта сумма равна 800, поэтому каждое из чисел равно 200.

104. *Ответ: можно.*

Сумма равноудалённых от концов чисел равна 777 и делится на семь. Поэтому разобьём все числа от 1 до 776 на 388 пар вида $(k, 777-k)$, $1 \leqslant k \leqslant 388$. Сумма чисел в каждой паре делится на 7, и условие задачи выполняется.

105. *Ответ:* 12 *фигурок.*

Отметим на квадрате крестиками 25 клеток, как показано на рисунке 41. Заметим, что каждая фигурка должна содержать две из отмеченных клеток, поэтому таких фигурок получится не более, чем $25 / 2$, то есть не более 12.

Остается привести пример для 12 фигурок (рис. 42):

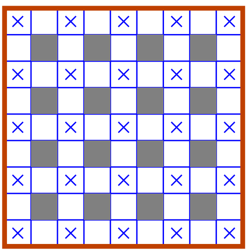


Рис. 41

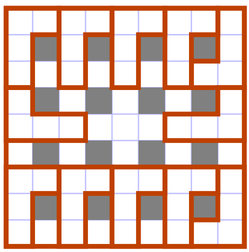


Рис. 42

106. *Ответ:* 5 *медалей.*

Если все игры завершатся вничью, то каждый игрок получит по $8:2=4$ очка, то есть все вместе получат $4 \cdot 9 = 36$ очков.

В любом другом случае сумма всех очков также будет равна 36, так как каждая игра даёт к общей сумме одно очко при любом исходе. Исходя из этого, даже если каждый «медалист» наберёт ровно 6 очков, не более $36 : 6 = 6$ игроков могут получить медали. Но это число меньше чем 6, так как определённое количество очков получено в играх между 3 остальными игроками (не «медалистами»). Значит, не более 5 человек могут получить медали. А это действительно возможно, например: все 5 «медалистов» сыграют вничью между собой (то есть каждый сыграет 4 ничьих и наберёт 2 очка) и каждый из них победит всех «немедалистов», набрав при этом ещё 4 очка.

107. *Ответ:* 60°, 60°, 60°.

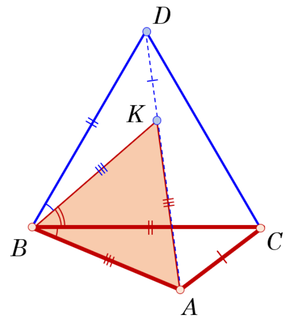


Рис. 43

(Рис. 43.) Отметим на отрезке AD такую точку K, что $AK = AB$, тогда $KD = AD - AK = AD - AB = AC$. Треугольник ABK — равносторонний, поскольку он имеет две равные стороны и один из углов 60°. Поэтому треугольники ABC и KBD равны по двум сторонам и углу между ними, отсюда $\angle BAC = \angle BKD = 120^\circ$. Значит, $BC = BD$ и $\angle DBK = \angle CBA$. Добавив к обеим частям последнего равенства угол KBC, получим $\angle DBC = \angle KBA$. Итак, треугольник DBC — равнобедренный с углом 60° при вершине, и значит, он — равносторонний, все его углы равны 60°.

108. *Ответ:* 1011.

Представим исходное число в виде $2021n + 2022 = 2023(n + 1) - (2n + 1)$. Для делимости на 2023 необходимо, чтобы число $2n+1$ делилось на 2023. Наименьшее натуральное n, при котором это условие выполняется, найдём из уравнения $2n + 1 = 2023$, откуда $n = 1011$.

109. *Ответ: а) нельзя; б) можно.*

а) Если в исходном выражении заменить все минусы на плюсы, получим сумму $S = 2021^2 + 2020^2 + \ldots + 1^2$, в которой 1010 квадратов чётных чисел и 1011 квадратов нечётных чисел, и поэтому S — нечётное число. При замене знака плюс на знак минус перед любым слагаемым вида a^2 сумма S уменьшается на $2a^2$, то есть *останется нечётной.* Значит, число 2022 получить не удастся.

б) Рассмотрим четыре идущих подряд числа и расставим в них знаки следующим образом:

$$(n+3)^2-(n+2)^2-(n+1)^2+n^2 =$$
$$=(n^2+6n+9)-(n^2+4n+4)-(n^2+2n+1)+n^2=4.$$

Итак, любые четыре подряд идущих члена после указанной расстановки знаков могут дать в результате 4, поэтому первые 2020 слагаемых, разбитых на четвёрки, дадут в сумме $505\cdot 4 = 2020$. Оставшееся слагаемое 1^2 со знаком плюс добавляем к этой сумме, что даёт $2020+1=2021$.

110. *Ответ:* 11 *медалей.*

Если все игры завершатся вничью, то каждый игрок получит по $15/2 = 7{,}5$ очков, то есть все вместе получат $\frac{1}{2}\cdot 15\cdot 16 = 120$ очков. В любом другом случае сумма всех очков также будет равна 120, так как каждая игра даёт к общей сумме одно очко при любом исходе. Исходя из этого, даже если каждый «медалист» наберёт ровно 10 очков, не более $120:10=12$ игроков могут получить медали. На самом деле это число меньше чем 12, так как определённое количество очков получено в играх между четырьмя остальными игроками (не «медалистами»). Значит, не более 11 человек могут получить медали. А это действительно возможно, например: все 11 «медалистов» сыграют вничью между собой (то есть каждый сыграет 10 ничьих и наберёт 5 очков) и каждый из них победит всех «немедалистов», набрав при этом ещё 5 очков.

111. *Ответ:* $a=\sqrt{3}+1,\ b=\sqrt{3}-1.$

Воспользуемся тождеством $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$ и условием $ab=2$. Тогда

$$a^2+b^2=(a-b)^2+2^2 \geqslant 4(a-b).$$

Здесь использовано неравенство $t^2+4\geqslant 4t \iff (t-2)^2\geqslant 0$ при $t=a-b$. Знак равенства будет только при $a-b=2$. Применяя условие $ab=2$, приходим к уравнению $a^2-2a-2=0$, и поскольку $a>0$, находим $a=\sqrt{3}+1$, $b=\sqrt{3}-1$.

112. (Рис. 44.) Проведём через точку M прямую, параллельную AB, и пусть она пересекает сторону CD в точке F. В четырёхугольнике $MKCF$ противоположные стороны параллельны, поэтому $MKCF$ — параллелограмм, и значит, $MF = KC$. Поскольку $\angle FMD = \angle BAM$, $\angle FDM = \angle BMA$ и $MD = AM$, треугольники MFD и ABM равны. Значит, $MF = AB$, откуда $AB = KC$. Таким образом, в четырёхугольнике $ABCK$ стороны AB и CK параллельны и равны. Значит, $ABCK$ — параллелограмм, и его стороны BC и AK равны.

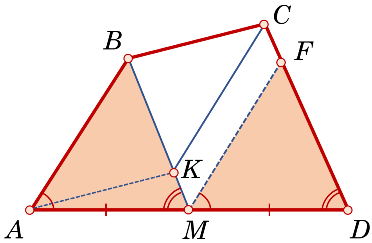


Рис. 44

113. *Ответ:* 250, 250, 250, 250.

Докажем, что все четыре числа *равны*. Предположим обратное, то есть какие-то два из них различны. Возьмём наибольшее из четырёх чисел. Оно строго больше по крайней мере одного из оставшихся чисел и не меньше двух других. Тогда утроенное наибольшее число больше суммы трёх других чисел, то есть оно больше их среднего арифметического. А это противоречит условию, что среднее арифметическое любых трёх чисел не меньше четвёртого.

Значит, все четыре числа равны. Поскольку они в сумме составляют 1000, каждое равно 250.

Замечание. Возможны и другие решения. Например, пусть a, b, c и d — данные числа, и $a + b + c + d = 1000$. Тогда $b + c + d = 1000 - a$, и по условию $3a \leqslant b + c + d \iff 3a \leqslant 1000 - a$, то есть $a \leqslant 250$. Аналогично доказываем, что остальные числа тоже не больше 250. Значит, сумма всех четырёх чисел не больше 1000. Но эта сумма равна 1000, поэтому каждое из чисел равно 250.

114. *Ответ:* -1 *и* 1.

Докажем, что равенство возможно лишь при условии $x^2 = 1$. Действительно, если $x^2 > 1$, то $x^6 > 1$, и знаменатели обеих дробей больше числителей. Поэтому каждая из дробей меньше 1, а их сумма меньше 2. Значит, при $x^2 > 1$ уравнение решений не имеет. Аналогично разбирается случай $x^2 < 1$. Теперь обе дроби будут больше 1, а их сумма больше 2. Значит, уравнение не имеет решений и при $x^2 < 1$.

Таким образом, для выполнения равенства необходимо, чтобы $x^2 = 1$, то есть $x = \pm 1$. При этих значениях сумма обеих дробей равна 2.

115. *Ответ: двумя нулями.*

При $n = 3$ сумма s равна 100. Докажем, что s не может заканчиваться тремя нулями. Для этого достаточно доказать, что s не кратно 8. Для чётного n это очевидно, так как в этом случае число s — нечётное.

Пусть теперь n — нечётное, $n = 2k + 1$, тогда $n^2 = 4(k^2 + k) + 1$. Так как $k^2 + k = k(k + 1)$ — чётное как произведение последовательных чисел, то слагаемое $4(k^2 + k)$ будет кратно 8. Поэтому число n^2 (а значит, и n^4) при делении на 8 даёт остаток 1, а сумма $n^4 + 19$ — остаток 4 (от деления $1 + 19$ на 8).

Итак, число s при делении на 8 имеет остаток 4 при всех чётных n, то есть тремя нулями оканчиваться не может.

Замечание. Возможны и другие решения.

116. *Ответ: может.*

Пусть длины сторон равны n, $n+1$, $n+2$, наименьший угол — α. Тогда угол напротив стороны $n + 2$ равен 2α, и по теореме синусов имеем:

$$\frac{\sin 2\alpha}{n+2} = \frac{\sin\alpha}{n} \quad\Longrightarrow\quad \cos\alpha = \frac{n+2}{2n}.$$

Отсюда по теореме косинусов:

$$n^2 = (n+1)^2 + (n+2)^2 - 2(n+1)(n+2)\cos\alpha.$$

Подставив значение $\cos\alpha$, приходим к равенству $(n+1)(n+2)^2 = n(n^2 + 6n + 5)$, то есть $(n + 1)(n + 2)^2 = n(n + 1)(n + 5)$, и значит, $(n+2)^2 = n(n+5)$, откуда $n = 4$. Таким образом, искомый треугольник существует, его стороны равны 4, 5 и 6.

117. *Ответ: верно.*

Это следует из неравенства $(a + b)(a^3 + b^3) \geqslant (a^2 + b^2)^2$.

Действительно, после раскрытия скобок и взаимного уничтожения слагаемых a^4 и b^4 придём к неравенству $a^3b + ab^3 \geqslant 2a^2b^2$, что равносильно верному неравенству $ab(a-b)^2 \geqslant 0$. По условию $a + b < 10$ и $a^2 + b^2 = 20$, поэтому

$$10 \cdot (a^3 + b^3) > (a + b)(a^3 + b^3) \geqslant (a^2 + b^2)^2,$$

и значит, $10 \cdot (a^3 + b^3) > 20^2 \implies a^3 + b^3 > 40$.

Замечание. Возможно и другое решение. Например, можно воспользоваться неравенством $4(a+b) + (a^3+b^3) \geqslant 4(a^2+b^2)$, которое получается как сумма двух неравенств вида $4a + a^3 \geqslant 4a^2 \iff a(a-2)^2 \geqslant 0$.

118. *Ответ:* 998.

Будем считать вычёркивание первого, третьего, пятого и т.д. чисел по порядку (то есть всех чисел с нечётными порядковыми номерами) одним «вычёркиванием». После первого «вычёркивания» останутся только чётные числа — $2020, 2018, 2016, \ldots, 2$; после второго «вычёркивания» останутся числа $2018, 2014, \ldots, 2$. На каждом шаге будем следить за изменением наибольшего среди оставшихся чисел. Вначале наибольшее — 2021; после первого «вычёркивания» наибольшее среди оставшихся — 2020, на единицу меньшее, чем 2021; после второго «вычёркивания» наибольшее среди оставшихся — 2018, оно меньше, чем 2021, на $1 + 2$; после третьего шага — наибольшее число 2014, которое меньше числа 2021 на $1+2+4$, и так далее. На k-ом шаге наибольшее оставшееся число будет меньше 2021 на величину $1+2+2^2+\ldots+2^{k-1} = 2^k-1$, то есть равно $2021-(2^k-1) = 2022-2^k$. После десятого «вычёркивания» останется единственное число $998 = 2022 - 2^{10}$, так как следующее число $2022 - 2^{11} = -26$ уже меньше 0.

119. *Ответ:* $(0; 1; 2)$ *и* $(-2; -3; -4)$.

Левая часть каждого из уравнений имеет вид $ab + a + b = (a + 1)(b + 1) - 1$. Поэтому добавив единицу к обеим частям каждого уравнения, получим систему

$$\begin{cases} (x+1)(y+1) = 2, \\ (y+1)(z+1) = 6, \\ (z+1)(x+1) = 3. \end{cases}$$

Перемножая полученные равенства, приходим к уравнению:

$$((x+1)(y+1)(z+1))^2 = 36,$$

откуда следует, что $(x+1)(y+1)(z+1)$ равно 6 или -6. Подставим в эти уравнения последовательно значения $(x+1)(y+1)$ из первого уравнения, $(y+1)(z+1)$ — из второго, и наконец, $(z+1)(x+1)$ из третьего уравнения, получим

$$\begin{cases} z+1=\pm 3, \\ x+1=\pm 1, \\ y+1=\pm 2. \end{cases}$$

(Знаки $\pm$ в равенствах соответствуют друг другу.) Отсюда приходим к ответу. Указанные наборы значений x, y и z удовлетворяют исходной системе.

120. *Ответ:* 19 *медалей.*

Если все игры завершатся вничью, то каждый игрок получит по $24:2=12$ очков, то есть все вместе получат $12\cdot 25=300$ очков. В любом другом случае сумма всех очков также будет равна 300, так как каждая игра даёт к общей сумме одно очко при любом исходе. Исходя из этого, даже если каждый «медалист» наберёт ровно 15 очков, не более $300:15=20$ игроков могут получить медали. Но это число меньше чем 20, так как определённое количество очков получено в играх между 5-ью остальными игроками (не «медалистами»). Значит, не более 19 человек могут получить медали. А это действительно возможно, например: все 19 «медалистов» сыграют вничью между собой (то есть каждый сыграет 18 ничьих и наберёт 9 очков) и каждый из них победит всех «немедалистов», набрав при этом ещё 6 очков.

121. К знаменателю каждой дроби применим неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом для трёх чисел. Например, $a^4+b+c \geqslant 3\sqrt[3]{a^4\cdot b\cdot c}$. По условию $abc=1$, и значит, $a^4bc=a^3\cdot(abc)=a^3$. Поэтому

$$a^4+b+c\geqslant 3a \quad\Longrightarrow\quad \frac{a}{a^4+b+c}\leqslant\frac{1}{3}\,.$$

Аналогичным образом доказываются неравенства для каждой из остальных дробей:

$$\frac{b}{b^4+c+a}\leqslant\frac{1}{3}\,,\qquad \frac{c}{c^4+a+b}\leqslant\frac{1}{3}\,.$$

Складывая полученные неравенства, приходим к требуемому.

122. *Ответ:* 90°.

(Рис. 45.) Пусть перпендикуляры пересекаются внутри окружности (случай внешней точки Q рассматривается аналогично). Отметим точку R — вторую точку пересечения прямой DQ с окружностью. Четырёхугольник $PDCQ$ вписан в окружность (он образован двумя прямоугольными треугольниками с общей гипотенузой PQ), поэтому $\angle CDQ = \angle CPQ$, как опирающиеся на одну дугу. По этой же причине $\angle CDQ = \angle CDR = \angle CAR$, и, значит, прямые PQ и AR параллельны, так как соответственные углы равны. Следовательно, искомый угол между прямыми AB и PQ совпадает с углом BAR. Как следует из условия, $\angle BDR = 90^\circ$, и значит, BR является диаметром, поэтому $\angle BAR = 90^\circ$.

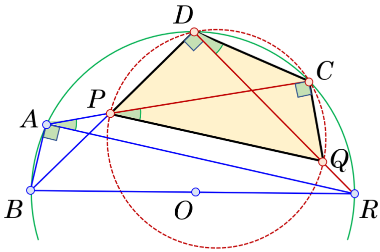


Рис. 45

123. *Ответ: можно, например,* 5, 17, 29 *и* 41.

Указанные четыре числа можно записать в виде $12k+5$, где k принимает значения 0, 1, 2, 3, поэтому сумма любых трёх чисел

$$(12k_1 + 5) + (12k_2 + 5) + (12k_3 + 5) = 12(k_1 + k_2 + k_3) + 15$$

делится на 3. Все числа в наборе нечётные, значит, сумма любых двух делится на 2. Наконец, сумма всех четырёх чисел равна 72 и делится на 4.

Замечание. Можно доказать, что все числа имеют равные остатки при делении на 6.

124. *Ответ: нельзя.*

Предположим, что получилось восемь сумм из последовательных чисел

$$x-3, x-2, x-1, x, x+1, x+2, x+3, x+4.$$

Сумма этих чисел равна $8x+4$, и она должна быть в два раза больше суммы чисел от 1 до 8 (каждое участвует ровно в двух суммах). Тогда

$$8x+4=2\cdot(1+2+\ldots+8)=72, \iff 2x=17.$$

Такого целого числа x нет.

125. *Ответ:* $a=2, b=3, c=5$ *и все наборы, полученные перестановкой этих чисел.*

Предположим, что $a<b<c$, тогда $ab<bc$ и $ac<bc$.

Если $a\geqslant 3$, то $ab+bc+ca<3bc\leqslant abc$, противоречие. Число a — простое, значит, $a=2$, и тогда получаем $2b+2c+bc\geqslant 2bc$, или $0\geqslant bc-2b-2c$. Прибавим 4 к обеим частям и запишем последнее неравенство в виде:

$$4\geqslant(b-2)(c-2).$$

Поскольку $3\leqslant b<c$ и каждый сомножитель в правой части не превосходит 4, неравенство выполняется только для чисел $b=3$, $c=5$.

126. *Ответ:* 22 *рыцаря.*

Из условия задачи следует, что число рыцарей, имеющих по два соседа-рыцаря, не превосходит 10; то же самое можно сказать и про число рыцарей, имеющих по одному соседу-рыцарю. Поэтому число пар рыцарей-соседей друг друга не превосходит $(2\cdot 10+1\cdot 10):2=15$. А поскольку всего за столом имеется 30 пар соседей, то по меньшей мере в $30-15=15$ парах есть люди, рыцарями не являющиеся; число таких людей не меньше, чем $\left[\frac{15}{2}\right]+1=8$.

Приведём пример, показывающий, что за столом может быть в точности $30-8=22$ рыцаря. Пусть сидящие пронумерованы числами от 1 до 30 по часовой стрелке, а рыцарями являются все те, чьи номера отличны от 1, 3, 5, 7, 11, 15, 19 и 23. Тогда все необходимые условия будут выполнены, если № 1 ответит «два», а № 3, 5, 7, 11, 15, 19 и 23 — «ни одного».

127. *Ответ:* $\angle BDC = 45°$.

В данном треугольнике угол ABC равен $180° - 75° - 60° = 45°$. Проведём высоту AH и заметим, что треугольник AHB — равнобедренный, так как $\angle BAH = 90° - 45° = \angle ABH$ (рис. 46). Значит, $AH = BH$. В прямоугольном треугольнике AHC угол HAC равен $75° - 45° = 30°$, поэтому катет HC равен половине гипотенузы AC, то есть равен CD. Таким образом, треугольник HCD — равнобедренный, и $\angle HCD = 120°$, поэтому углы CHD и CDH равны $\frac{1}{2}(180° - 120°) = 30°$. Поскольку $\angle HAD = \angle ADH = 30°$, треугольник AHD также равнобедренный и $BH = AH = DH$, то есть равнобедренным будет и треугольник BHD. По свойству внешнего угла, $\angle HBD = \angle HDB = \frac{1}{2}\angle CHD = 15°$. Следовательно, $\angle BDC = \angle BDH + \angle HDC = 45°$.

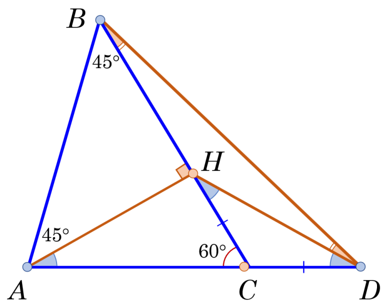


Рис. 46

128. *Ответ: можно, например,* 1, 61, 121, 181 *и* 241.

Указанные пять чисел можно записать в виде $60k + 1$, где k принимает значения 0, 1, 2, 3, 4, поэтому сумма любых трёх чисел

$$(60k_1 + 1) + (60k_2 + 1) + (60k_3 + 1) = 60(k_1 + k_2 + k_3) + 3$$

делится на 3. Аналогично доказывается, что суммы любых четырёх и сумма всех пяти чисел делятся на 4 и на 5 соответственно.

Замечание. Можно доказать, что все числа имеют равные остатки при делении на 12.

129. По условию $2x \leqslant 2 - y^2 - z^2$, и значит, $2x + 2y + 2z \leqslant$

$\leqslant 2-(y^2-2y)-(z^2-2z)$. Выделяя полные квадраты, получим

$$2x+2y+2z \leqslant 4-(y-1)^2-(z-1)^2 \leqslant 4.$$

Таким образом, $2x+2y+2z \leqslant 4 \iff x+y+z \leqslant 2$. Знак равенства только при $y=z=1$ и $x \leqslant 0$.

130. *Ответ:* 8899.

Если n оканчивается не на 9, то суммы цифр чисел n и $n+1$ отличаются на 1 и не могут делиться на 17 одновременно. Пусть $n=\overline{m99\ldots9}$, где в конце стоит k девяток, а число m имеет сумму цифр s и *не оканчивается* на 9. Тогда сумма цифр числа n равна $s+9k$, а сумма цифр числа $n+1$, очевидно, равна $s+1$. По условию эти две суммы делятся на 17, в частности, число $s+1$ кратно 17 $\implies s \geqslant 16$. Наименьшее число m, которое не оканчивается на 9 и у которого сумма цифр 16, равно 88.

Далее, на 17 делится число $s+9k=(s+1)+(9k-1)$. Поскольку первое слагаемое делится на 17, число $9k-1$ тоже кратно 17. Наименьшее значение k, удовлетворяющее этому условию, равно 2, то есть $n=8899$. Суммы цифр каждого из чисел n и $n+1$ делятся на 17.

131. Совпадает с задачей **126**.

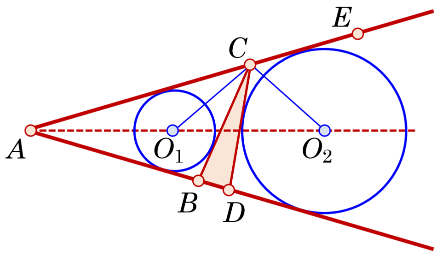


Рис. 47

132. (Рис. 47.) Угол CO_1O_2 является внешним для треугольника ACO_1, поэтому $\angle CO_1O_2=\angle CAO_1+\angle ACO_1=\frac{1}{2}\angle CAB+$ $+\frac{1}{2}\angle ACB$. Поскольку сумма углов CAB и ACB равна $180^\circ-$ $-\angle ABC=\angle CBD$, имеем $\angle CO_1O_2=\frac{1}{2}\angle CBD$.

Далее, пусть E — некоторая точка на продолжении отрезка AC за точку C. Угол ECO_2 — внешний для треугольника ACO_2.

Отсюда $\angle CO_2O_1 = \angle ECO_2 - \angle CAO_2 = \frac{1}{2}\angle ECD - \frac{1}{2}\angle CAD = \frac{1}{2}\angle CDA$.

Таким образом, из равенства $O_1C = O_2C$ следует равенство углов CO_1O_2 и CO_2O_1, а значит, и углов CBD и CDB. Отсюда следует, что треугольник BCD — равнобедренный.

133. *Ответ:* 1 999 999 999.

Среди 9-значных чисел сумма цифр будет наибольшей у числа 999 999 999, она равна 81. Поскольку искомое 10-значное число больше 999 999 999, мы должны подобрать наименьшее число с суммой цифр не меньше, чем 82. Если первая цифра этого числа 1, то сумма остальных цифр не меньше 81, и значит, девять остальных цифр — это девятки.

134. *Ответ:* 15 *шахматистов.*

Если количество участников n, то каждый сыграл $n-1$ партий. Половину партий победитель выиграл и набрал $\frac{1}{2}(n-1)$ очков. Половину партий он сыграл вничью и набрал ещё $\frac{1}{4}(n-1)$ очков. Всего победитель набрал $\frac{1}{2}(n-1) + \frac{1}{4}(n-1) = \frac{3}{4}(n-1)$ очков.

В турнире было сыграно $\frac{1}{2}n(n-1)$ партий. В каждой партии игроки разыграли одно очко, поэтому в сумме набрали соответственно $\frac{1}{2}n(n-1)$ очков. Значит,

$$9 \cdot \frac{3(n-1)}{4} = \frac{n(n-1)}{2} - \frac{3(n-1)}{4},$$

откуда $n = 15$. Итак, в турнире из 15 шахматистов победитель сыграл 14 партий и набрал $7+3,5 = 10{,}5$ очка, остальные набрали $\frac{1}{2} \cdot 15(15-1) - 10{,}5 = 94{,}5$ очка, то есть в 9 раз больше, чем у победителя.

135. *Ответ: ровно один способ,* $2021 = 5 + 7 + 9 + \ldots + 89$.

Пусть $n = a\cdot b$ — составное число, и $1 < a \leqslant b < n$. Попробуем представить n в виде суммы из m последовательных нечётных слагаемых:

$$n = (2k+1) + (2k+3) + \ldots + (2k+2m-1) = m \cdot (2k+m).$$

Поскольку $n = a \cdot b$, одно из решений уравнения $a \cdot b = m\cdot(2k+m)$ имеет вид $a = m$, $b = 2k+m$, и тогда $n = (b-a+1) + (b-a+3) + \ldots + (b+a-1)$.

В частности, для числа $2021 = 43 \cdot 47$ есть только одно решение уравнения $43 \cdot 47 = m(2k+m)$, а именно, $m = 43$, $2k+m = 47$, а значит, и единственный способ записи в виде суммы последовательных нечётных слагаемых: $2021 = 5 + 7 + 9 + \ldots + 89$.

136. *Ответ:* $\max f = \frac{3}{2}$, $\min f = -\frac{3}{2}$.

Для нахождения наибольшего и наименьшего значения оценим выражение $|\,f\,|$, используя свойство абсолютной величины: модуль суммы нескольких чисел не превосходит суммы модулей этих чисел. Поэтому $|\,f\,| \leqslant |\cos x \sin y| + |\cos y \sin z| + |\cos z \sin x|$. Теперь оценим каждое слагаемое с помощью неравенства о средних $|\,ab\,| \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2) \iff 0 \leqslant (|\,a\,| - |\,b\,|)^2$:

$$|\,f\,| \leqslant \tfrac{1}{2}(\cos^2 x + \sin^2 y) + \tfrac{1}{2}(\cos^2 y + \sin^2 z) + \tfrac{1}{2}(\cos^2 z + \sin^2 x).$$

Правая часть неравенства равна $\frac{3}{2}$, поэтому $|\,f\,| \leqslant \frac{3}{2}$, то есть $-\frac{3}{2} \leqslant f \leqslant \frac{3}{2}$. Наибольшее значение $\frac{3}{2}$ достигается, например, при $x = y = z = \pi/4$, наименьшее значение $-\frac{3}{2}$ — при $x = y = z = -\pi/4$.

137. *Ответ:* 20°.

В четырехугольнике $APMT$ угол при вершине A измеряется половиной дуги TCB (рис. 48). Треугольники PMB и CMB равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому $\angle PMB = \angle CMB = \angle AMT$. Угол AMT измеряется полусуммой дуг AT и CB, причём:

$$\tfrac{1}{2}(\overset{\frown}{AT} + \overset{\frown}{CB}) = \tfrac{1}{2}(\overset{\frown}{TC} + \overset{\frown}{CB}) = \tfrac{1}{2}\,\overset{\frown}{TCB}.$$

Отсюда $\angle CMB = \angle BAT$. Таким образом, $\angle PMB = \angle BAT$ и $\angle BAT + \angle PMT = \angle BAT + (180^\circ - \angle PMB) = 180^\circ$. Значит, сумма противоположных углов четырехугольника $APMT$ равна 180°, и значит, $APMT$ — вписанный. По свойству вписанных углов $\angle MPT = \angle MAT = \angle CAT = \angle TBC = \frac{1}{2}\angle ABC = 20^\circ$.

138. *Ответ:* 1 899 999 999.

Среди 9-значных чисел сумма цифр будет наибольшей у числа 999 999 999, она равна 81. Поскольку искомое 10-значное число больше 999 999 999, мы должны подобрать наименьшее число с суммой цифр не меньше, чем 81. Сумма последних восьми цифр искомого числа не больше $9 \cdot 8 = 72$, поэтому первые две цифры в сумме не меньше, чем $81 - 72 = 9$. Так как искомое число наименьшее, его первая цифра равна 1, а вторая — 8. Тогда сумма остальных восьми цифр не меньше 72, и значит, оставшиеся цифры — это девятки.

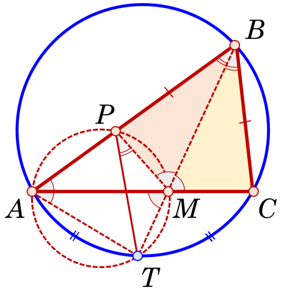


Рис. 48

139. *Ответ:* 21 *шахматист.*

Если количество участников n, то каждый сыграл $n-1$ партий. Половину партий победитель выиграл и набрал $\frac{1}{2}(n-1)$ очков. Половину партий он сыграл вничью и набрал ещё $\frac{1}{4}(n-1)$ очков. Всего победитель набрал

$$\tfrac{1}{2}(n-1)+\tfrac{1}{4}(n-1)=\tfrac{3}{4}(n-1)$$

очков. В турнире было сыграно $\frac{1}{2}n(n-1)$ партий. В каждой партии игроки разыграли одно очко, поэтому в сумме набрали соответственно $\frac{1}{2}n(n-1)$ очков. Значит,

$$13\cdot\frac{3(n-1)}{4}=\frac{n(n-1)}{2}-\frac{3(n-1)}{4},$$

откуда $n=21$. Итак, в турнире из 21 шахматиста победитель сыграл 20 партий и набрал $10+5=15$ очков, остальные набрали $\frac{1}{2}\cdot 21(21-1)-15=195$ очков, то есть в 13 раз больше, чем у победителя.

140. *Ответ:* 18.

Пусть рёбра прямоугольного параллелепипеда — a, b и c. По условию задачи его диагональ равна $\sqrt{a^2+b^2+c^2}=3$, и значит, $a^2+b^2+c^2=9$. Площадь поверхности параллелепипеда равна $f=2(ab+bc+ca)$. Докажем неравенство $ab+bc+ca\leqslant a^2+b^2+c^2$. Действительно, умножим обе части на 2 и запишем его в равносильной форме

$$2ab+2bc+2ca\leqslant 2a^2+2b^2+2c^2 \quad\Longleftrightarrow\quad (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\leqslant 0.$$

Из доказанного неравенства следует, что наибольшее значение функции f не превосходит $2\cdot 9=18$, причём знак равенства возможен только в случае прямоугольного параллелепипеда, у которого все рёбра равны $a=b=c=\sqrt{3}$, то есть для куба с ребром $\sqrt{3}$.

141. *Ответ: наибольшее значение равно* 7*; достигается, например, для* $f(x)=2x^2-4x+1$.

По условию значения $f(x)=ax^2+bx+c$ отрезке $[0;2]$ по модулю не превосходят единицы. В частности, $|\,f(0)\,|\leqslant 1$, $|\,f(1)\,|\leqslant 1$, $|\,f(2)\,|\leqslant 1$, что равносильно системе

$$\begin{cases} |\,c\,|\leqslant 1,\\ |\,a+b+c\,|\leqslant 1,\\ |\,4a+2b+c\,|\leqslant 1.\end{cases}$$

Поскольку модуль суммы чисел не превосходит суммы их модулей, получаем неравенства

$$\begin{aligned} |\,2a\,| &= |\,(4a+2b+c)-2(a+b+c)+c\,|\leqslant\\ &\leqslant |\,4a+2b+c\,|+2\,|\,(a+b+c)\,|+|\,c\,|\leqslant 4,\\ |\,2b\,| &= |\,4(a+b+c)-(4a+2b+c)-3c\,|\leqslant\\ &4\,|\,a+b+c\,|+|\,4a+2b+c\,|+3\,|\,c\,|\leqslant 8,\end{aligned}$$

откуда $|\,a\,|\leqslant 2$, $|\,b\,|\leqslant 4$, и значит, $|\,a\,|+|\,b\,|+|\,c\,|\leqslant 7$.

Для функции $f(x)=2x^2-4x+1$ величина $|\,a\,|+|\,b\,|+|\,c\,|$ в точности равна 7. Кроме того, квадратный трёхчлен $f(x)=2x^2-4x+1=2(x-1)^2-1$ удовлетворяет условию задачи, так как при $x\in[\,0;2\,]$

$$-1=f(1)\leqslant f(x)\leqslant f(0)=f(2)=1.$$

Таким образом, наибольшее значение величины $|\,a\,|+|\,b\,|+|\,c\,|$ при данных условиях равно 7.

142. *Ответ: прямая H_1H_2 делит AC пополам.*

(Рис. 49.) Пусть AD и CE — высоты треугольника ABC. Поскольку биссектрисы внутреннего и внешнего углов перпендикулярны, четырёхугольник HH_2BH_1 — прямоугольник. Диагонали H_1H_2 и BH — диаметры описанной окружности прямоугольника. Эта окружность проходит через точки E и D, так как из этих точек диаметр BH виден под прямым углом. Точка H_1 лежит на биссектрисе вписанного угла EBD, поэтому H_1 — середина дуги ED, не содержащей точки H_2, а так как H_1H_2 — диаметр окружности, то точки H_1 и H_2 также равноудалены от концов отрезка

ED. Другими словами, серединный перпендикуляр к отрезку ED проходит через точки H_1 и H_2. Далее, так как четырёхугольник $AEDC$ является вписанным в окружность с диаметром AC, то серединный перпендикуляр к хорде ED проходит через центр этой новой окружности, то есть через середину отрезка AC. Таким образом, прямая H_1H_2 делит сторону AC пополам.

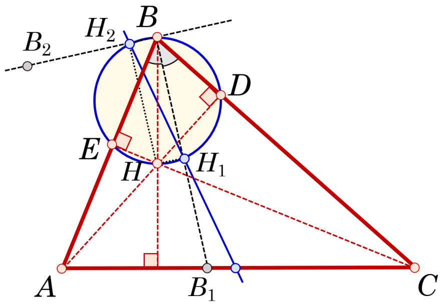


Рис. 49

143. *Ответ: один из способов разрезания на рис.* 50.

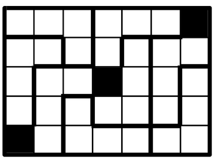


Рис. 50

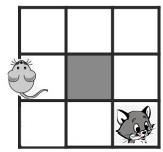


Рис. 51

144. *Ответ: см. рисунок* 51.

Через каждые 8 секунд кот возвращается в стартовую позицию, а через каждые 12 секунд мышь возвращается в стартовую позицию. Следовательно, через 24 секунды картинка совпадет со стартовой, так как 24 делится и на 8, и на 12. Поскольку $2023 = 24 \cdot 84 + 7$, спустя 2023 секунды позиция повторит ту, которая была после седьмой секунды, то есть позицию, показанную на картинке (от последней картинки в условии задачи мышь и кот должны сделать по четыре шага).

145. Каждая пара супругов в сумме съела чётное число мандаринов, поскольку два числа, отличающиеся на 2, имеют одинаковую чётность, и тогда их сумма чётна. Поэтому общее количество съеденных гостями мандаринов чётно, как сумма нескольких чётных чисел.

Аналогично, каждая пара супругов в сумме съела нечётное число апельсинов, поскольку два числа, отличающиеся на 3, имеют разную чётность, и тогда их сумма нечётна. Так как общее число апельсинов равно общему числу мандаринов, то оно чётно. Но сумма нескольких нечётных чисел чётна в том и только в том случае, когда их — чётное количество. Следовательно, супружеских пар было чётное число $2k$, а тогда общее количество гостей равно $4k$, то есть кратно четырём.

146. *Ответ: слева направо: Л, Р, Л, Л, Р, Л.*

Будем называть жителей острова рыцарей и лжецов аборигенами. Первый абориген не может говорить правду, так как тогда все люди, стоящие правее него, — лжецы, но в этом случае пятый абориген говорит правду. Следовательно, первый абориген лжёт.

Тогда второй абориген говорит правду. Отсюда следует, что четвёртый абориген точно лжёт, а тогда и шестой тоже лжёт (левее него уже минимум два лжеца). Поэтому пятый абориген говорит правду, и значит, третий лжёт.

147. *Ответ:* 22 *школьника.*

Оценка. Поскольку персики любит 15 человек, а дыни — 6, есть по крайней мере 9 школьников, которые любят персики, но не любят дыни. Тогда все эти школьники любят сливы, но не любят яблоки. Тогда кроме этих людей есть еще не менее 13 людей, любящих яблоки. Значит, всего людей не менее 22.

Пример. Пусть 6 человек любят дыни, персики и яблоки, 9 человек любят сливы и персики, 2 человека любят сливы и яблоки и 5 человек любят только яблоки. Легко видеть, что при этом общее число людей равно 22, причём все остальные условия задачи выполнены.

148. *Ответ: см. рисунок* 52.

Поскольку площадь каждой фигуры равна 30, каждая часть должна состоять из пяти клеток. Один из возможных примеров приведен на рис. 52.

149. *Ответ:* 66 *кг.*

Обозначим вес Булата в килограммах через x, вес Ильнура — через y. Тогда Амир весит $y+8$, а Данияр — $x+4$. Заметим, что самый тяжёлый — Амир или Данияр, а самый лёгкий — Ильнур или Булат.

Если самый тяжёлый — Данияр, то $x+4 > y+8$, и поэтому $x > y$ и самый лёгкий — Ильнур. В этом случае вес самого тяжёлого и самого лёгкого в сумме $x+4+y$, и он на 4 *кг* меньше суммарного веса двух оставшихся. Противоречие. Значит, самый тяжёлый — Амир.

Пусть Булат — самый легкий. Тогда вместе с Амиром суммарно они весят $x+y+8$, что на 4 *кг* больше чем двое других ребят. Противоречие.

Остается лишь случай, когда самый лёгкий — Ильнур. В таком случае Ильнур и Амир суммарно весят $2y+8$. Из условия задачи следует, что тогда Булат и Данияр в сумме весят $2y+10$. Значит, общий вес всех четверых ребят равен $4y+18=250$, откуда $y=58$. Поэтому Амир весит 66 *кг.*

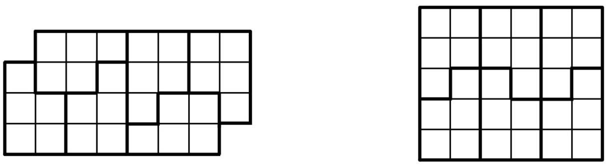


Рис. 52

150. *Ответ: Вова.*

Заметим, что из двоих учеников — Гоши и Димы — кто-то один говорит правду, а другой — лжёт. Если Вова говорит правду, то уже трое детей лгут — Антон, Боря и кто-то один из Гоши и Димы. Но лгущих детей по условию двое, следовательно, Вова лжёт.

В таком случае уже есть двое лгущих — Вова и кто-то один из Гоши и Димы. Поэтому Антон и Боря точно говорят правду. Тогда Гоша лжёт, а, следовательно, Дима говорит правду. Мы определили, кто есть кто.

Осталось понять, кто написал равенство. Боря говорит правду, что ни он, ни Дима этого не делали. А так как Антон говорит правду, то это сделал Вова.

Замечание. Вообще говоря, из того, что Вова лжёт, не следует, что Антон и Боря оба говорят правду. Поэтому напрямую сделать такой вывод, не считая количество лжецов, нельзя.

151. Заметим, что сумма двух последовательных натуральных чисел нечётна (так как это сумма $k + (k+1) = 2k+1$). Кроме того, заметим, что сумма любых трёх подряд идущих чисел делится на 3. Действительно, любые три подряд идущих числа можно представить в виде $n-1$, n и $n+1$, а их сумма равна $3n$. Таким образом, интересными являются в точности нечетные числа, кратные 3 (или числа вида $6k+3$).

Поскольку произведение пяти Колиных чисел является интересным, то оно нечётно. Следовательно, *все* сомножители нечётны. Кроме того, это произведение делится на 3, поэтому хотя бы один из сомножителей должен делиться на 3. Так как он ещё и нечётный, он и является интересным.

152. Оценка. Всего имеется $1 + 2 + \ldots + 10 = 55$ покрытий клеток. Десять клеток, описанных в условии, покрыты в сумме в точности $1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 30$ раз. Остаётся еще $55 - 30 = 25$ покрытий клеток. Следовательно, клеток, покрытых хотя бы пять раз, не более, чем $25 / 5 = 5$.

Пример. Будем считать, что все прямоугольники имеют вид $1 \times n$. Сложим из них прямоугольники площади $15 = 3+4+8$, $14 = 1+6+7$ и $12 = 2+10$. Ещё осталось два прямоугольника площади 5 и 9. Наложим все пять прямоугольников друг на друга так, чтобы у них совпадали крайние левые клетки. Нетрудно проверить, что пример подходит.

153. *Ответ:* 20 *девочек.*

Так как среди любых 33 детей девочек больше половины, то мальчиков среди них меньше половины, то есть не больше 16. Тогда мальчиков всего не больше 16, потому что если бы их было хотя бы 17, могло бы оказаться, что пришло 17 мальчиков и ещё 16 каких-то школьников, и мальчиков уже было бы больше половины.

Так как существует группа из 31 школьника, в которой больше половины мальчиков, то в этой группе минимум 16 мальчиков. Следовательно, их всего ровно 16. Тогда девочек $36 - 16 = 20$.

154. *Ответ: нет, нельзя.*

Предположим, что требуемое возможно. Разделим каждое число от 1 до 1000 на 3 с остатком. Легко видеть, что у нас есть 333 числа, которые делятся на 3 нацело, 333 числа, которые делятся на 3 с остатком 2, и 334 числа, которые делятся на 3 с остатком 1. Заметим, что никакие два числа с остатком 1 не могут входить в одну группу, так как сумма двух таких чисел не делится на 3. Значит, эти числа содержатся в 334 различных группах. Тогда по меньшей мере в одной из этих групп нет чисел, имеющих остаток 2 при делении на 3 (так как таких чисел всего 333). Тогда в этой группе, помимо числа, имеющего остаток 1 при делении на три, должно быть число, кратное трём. Но сумма двух таких чисел не делится на 3. Противоречие.

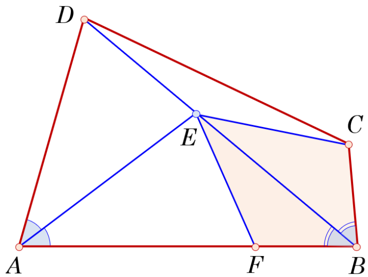


Рис. 53

155. *Ответ:* 420.

Посмотрим на два оставшихся числа. Так как Аня знает сумму всех чисел от 1 до 7 (она равна 28), то эти два оставшихся числа таковы, что по их произведению нельзя определить чётность их суммы. Поэтому их произведение можно представить двумя способами: $ab = xy$, причём числа a и b разной четности, а числа x и y — одной. Тогда ab чётно, поэтому xy чётно, значит одно из них делится на 2, но тогда x и y — оба чётные. Поэтому $xy = ab$ делится на 4, и, следовательно, чётное из чисел a и b равно 4 (других кратных четырём чисел у Ани просто нет). Тогда пара чисел x и y — это обязательно 2 и 6. Их произведение равно 12, следовательно, в паре с числом 4 стоит число 3.

Таким образом, произведение двух оставшихся чисел обязательно равно 12. Следовательно, произведение Сашиных чисел равно $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \,/\, 12 = 420$.

156. (Рис. 53.) Отметим на отрезке AB точку F таким образом, что $AF = AD$, тогда $FB = BC$. Осталось заметить, что треугольники FAE и DAE равны по двум сторонам и углу между ними, как и треугольники FBE и CBE, откуда $ED = EF = EC$.

157. *Ответ: Вася.*

Вася должен после каждого хода Пети двигать тот же камень на 1, если Петя двинул его на 2, и наоборот. При такой игре Вася всегда будет ставить камень на поле, номер которого равен 4, 7, 10 или 13, а Петя никогда не сможет сходить на такое поле. Поскольку в игре возможно только конечное число ходов, Вася победит.

158. *Ответ:* 40.

Так как площадь обеих фигурок равна 5, а сумма чисел, кратных 5, тоже кратна 5, площадь прямоугольника должна делиться на 5. Так как число 5 — простое, длина одной из сторон должна делиться на 5. Так как длины сторон — чётные числа, она должна делиться на 10. Минимальное чётное число равно 2, но прямоугольник 2×10 не подходит, так как фигурка второго вида помещается в нём только в горизонтальном положении, но тогда внутри неё остается одна непокрытая клетка, которую уже невозможно накрыть другими фигурками. Поэтому минимальное возможное значение длины другой стороны — 4. Прямоугольник 4×10 разрезать можно, например, так, как показано на рисунке 54. Следовательно, наименьшая площадь равна 40.

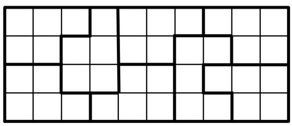


Рис. 54

159. *Ответ:* 4 *года.*

Из условия следует, что до украшения торт весил от 1436 до 1445 граммов, а после украшения — от 1606 до 1615 граммов. Значит, суммарный вес свечей принимает значения от 161 до 179 граммов. Так как вес каждой свечи по отдельности оказывается равным 40 *г*, то одна свеча весит от 36 до 45 граммов. Если Ане меньше 4 лет, то суммарный вес свечей не больше $45 \cdot 3 = 135$ граммов, а если ей больше 4, то суммарный вес свечей не меньше $5 \cdot 36 = 180$ граммов. Ни те, ни другие значения невозможны. Следовательно, Ане ровно 4 года.

160. *Ответ: нет, нельзя.*

Пусть мы выбрали числа n, $n+1$, $n+2$, $n+3$. Тогда набор их попарных сумм $2n+1$, $2n+2$, $2n+3$, $2n+3$, $2n+4$, $2n+5$. Среди этих сумм ровно две чётных: $2(n+1)$ и $2(n+2)$, и поскольку это последовательные чётные числа, ровно одно из них делится на 4. Значит, при разбиении этих чисел на 2 группы произведение в одной из них будет делиться на 4 (где окажется число, кратное 4), а в другой — нет. Итого, равенство верным быть не может.

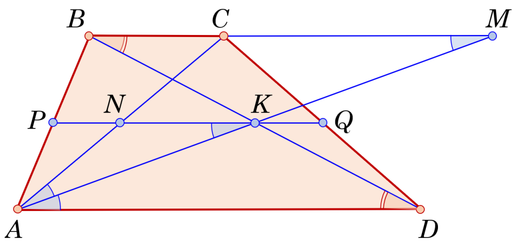


Рис. 55

161. Первое решение. (Рис. 55.) Продолжим биссектрису AK до пересечения с прямой BC в точке M. Тогда углы BMA, MAD и CAM равны, так что $AC = CM$. Кроме того, $\angle BDA = \angle DBM$, $\angle BKM = \angle DKA$ и $KB = KD$, так что треугольники AKD и MKB равны, откуда $BM = AD = 3BC$. Значит, $AC = CM = BM - BC = AD - BC = 2BC$.

Второе решение. Пусть $BC = x$, тогда $AD = 3x$. Проведем среднюю линию PQ. Она равна $\frac{1}{2}(x + 3x) = 2x$. Пусть точка N — середина AC. Тогда средние линии треугольников ABC и BCD равны по $\frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}x$, поэтому $NK = 2x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x = x$. Поскольку средняя линия параллельна основаниям, углы NKA, KAD и KAN равны, поэтому $AN = AK = x$. Следовательно, $AC = 2AN = 2x = 2BC$.

162. Сначала найдём четыре строчки, в которых стоит суммарно не более четырёх ферзей. Если найдутся четыре строчки, в каждой из которых стоит не более одного ферзя, то они подходят. В противном случае, найдутся четыре строчки (а на самом деле хотя бы 5), в каждой из которых ферзей хотя бы два. Тогда в этих четырёх строчках вместе стоит хотя бы 8 ферзей, потому в оставшихся четырёх строчках в сумме максимум 4 ферзя.

Итак, в четырёх найденных строчках стоят максимум четыре ферзя. Поскольку столбцов всего 8, то найдутся четыре столбца, в которых нет ни одного из этих ферзей (эти не более четырёх ферзей занимают не больше, чем четыре столбца). Тогда вместе с выбранными ранее четырьмя строками эти четыре столбца подходят.

163. *Ответ:* 5 *февраля* 2023 *года,* 325 *серий.*

Пусть до 1 апреля осталось n дней, а в аниме N серий. Тогда по условию $N - 2n = 215$ и $N - 5n = 50$. Вычитая из первого уравнения второе, получим, что $3n = 215 - 50 = 165$, то есть $n = 55$. (Можно и не вводить переменные. Просматривая в день на 3 серии больше, Вовочка посмотрит $215 - 50 = 165$ лишних серий, значит, это займёт $165 : 3 = 55$ дней.)

Это время включает в себя 31 день марта и $55 - 31 = 24$ дня февраля. Значит, просмотр начнётся через $28 - 24 = 4$ дня от начала февраля, то есть 5 февраля 2023 года.

В сериале $50 + 5 \cdot 55 = 325$ серий.

164. *Ответ:* 2023 0110.

Пусть в искомом числе $n + 4$ цифры, из которых первые четыре — это цифры $2, 0, 2, 3$. Значит, оно имеет вид $2023 \cdot 10^n + a$, причём $a < 10^n$. Вычтем из него $2022 \cdot 10^n$, тогда полученная разность $b = 10^n + a$ также делится на 2022.

Таким образом, осталось найти число b, запись которого начинается с 1, делящееся на 2022. Выпишем несколько первых чисел, кратных 2022: $0, 2022, 4044, 6066, 8088, 10110, \ldots$. Отсюда следует, что в десятичной записи числа b не менее пяти цифр, то есть $n \geqslant 4$. При этом условии наименьшее значение b равно 10110, так что искомое число равно $10110 + 2022\,0000 = 2023\,0110$.

165. *Ответ: да, можем.*

Из отрезков длиной a, b и c, где $a \geqslant b \geqslant c$, можно сложить треугольник, если $a < b + c$. С учетом условия $a + b + c = 2$ это неравенство можно переписать в виде $a < 2 - a$, что равносильно $a < 1$.

Значит, в исходном наборе все отрезки имеют длины меньше 1. Пусть после обмена получились тройки отрезков $a_1 \geqslant b_1 \geqslant c_1$ и $a_2 \geqslant b_2 \geqslant c_2$. По условию $a_1 \geqslant b_1 + c_1$. Предположим, что и для второй тройки тоже справедливо $a_2 \geqslant b_2 + c_2$. Складывая эти неравенства, получаем, что $a_1 + a_2 \geqslant b_1 + c_1 + b_2 + c_2 = 4 - a_1 - a_2$, откуда $a_1 + a_2 \geqslant 2$. Но это противоречит тому, что все отрезки по длине меньше 1. Значит, наше предположение неверно.

166. *Ответ: а) да; б) нет.*

а) Докажем, что требуемый треугольник существует. Пусть P – основание высоты, которая делится ортоцентром H пополам. Построим произвольный прямоугольный треугольник APH, отложим на луче PH отрезок $HB = PH$. Проведём прямую BR перпендикулярно AH, и пусть C — пересечение BR и AP. Для треугольника ABC точка H является его ортоцентром, причём его высота BP делится пополам в точке H, то есть треугольник ABC — искомый.

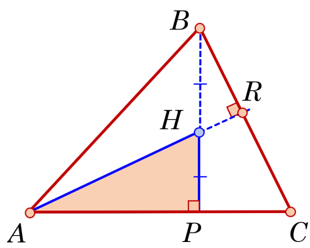


Рис. 56

б) Предположим, что AR также делится точкой H пополам. Тогда треугольники AHP и RBH равны по двум сторонам и углу между ними, но тогда $\angle APH = \angle RBH$, и значит, прямые BR и AP параллельны, чего быть не может.

167. Старший коэффициент квадратного трёхчлена $P(x)$ равен 1, поэтому ветви параболы $y = P(x)$ направлены вверх, и поскольку при $x = q$ квадратный трёхчлен принимает отрицательное значение $P(q)$, значит, у $P(x)$ есть два корня. Имеем

$$P(q) = q^2 + pq + q = q(p + q + 1) = P(0) \cdot P(1) < 0.$$

Значит, в точках 0 и 1 квадратный трёхчлен принимает разные знаки. Тогда в силу непрерывности в промежуточной точке он обращается в 0.

Оба корня не могут лежать внутри $(0;1)$, так как в противном случае оба значения $P(0)$ и $P(1)$ будут неотрицательны.

168. *Ответ:* 35 *учеников.*

Пусть n — число учеников в классе, из них m девочек. Тогда

$$0{,}505n \leqslant m < 0{,}515n.$$

При $n = 2k$ неравенство имеет вид $1{,}01k \leqslant m < 1{,}03k$. Отсюда, в частности, следует, что $m > k$, то есть $m \geqslant k+1$, и тогда $k+1 < 1{,}03k$. Отсюда $1 < 0{,}03k$, и значит, $k \geqslant 34$. Но тогда в классе должно быть не менее 68 учеников, что нереально. Итак, этот случай невозможен, и значит, n — нечётное.

Докажем, что наименьшее значение n, при котором выполняется условие задачи, равно 35. Действительно, аналогичными рассуждениями получаем, что

$$1{,}01n \leqslant 2m < 1{,}03n \quad\Longrightarrow\quad n \geqslant 34.$$

Если $n = 34$, то $34{,}34 \leqslant 2m < 35{,}02$, откуда $2m = 35$, что невозможно. При $n = 35$ имеем неравенства $35{,}35 \leqslant 2m < 36{,}05$, откуда $2m = 36$, то есть $m = 18$, при этом доля девочек равна $18/35 = 0{,}514\ldots$, что соответствует условию задачи.

169. *Ответ:* 18 *лет.*

Пусть год рождения Ивана $\overline{19xy}$, а Вовочки — $\overline{20zt}$. Интересным для Ивана будет год $1900+10x+y+10+x+y$, а для Вовочки — $2000+10z+t+2+z+t$; по условию эти значения равны, то есть $2002+11z+2t = 1910+11x+2y$, откуда $11(x-z)+2(y-t) = 92$ или $11a+2b = 92$, причём числа $a = x-z$ и $b = y-t$ — целые из диапазона от -9 до 9.

Запишем равенство в виде $a = \frac{1}{11}(92-2b)$. Числитель дроби — чётное число от 74 до 110, которое делится на 11. Значит, оно равно 88 или 110. Второй вариант не подходит, так как $a \leqslant 9$. В первом имеем $a = 8$, $b = 2$.

По условию задачи нужно найти разность возрастов

$$\overline{20zt} - \overline{19xy} = 100 - 10(x-z) - (y-t) = 100 - 10a - b = 18.$$

Проверим, реализуется ли этот случай. Например, $8 = 9-1$; $2 = 7-5$. Пусть Иван родился в 1997 году, а Вовочка — в 2015. Для Ивана интересный год — это $1997+1+9+9+7 = 2023$, для Вовочки — $2015+2+0+1+5 = 2023$, при этом Иван старше на $2015-1997 = 18$ лет.

Замечание. Мы не рассмотрели особый случай, когда Иван родился в 2000 году (этот год также относится к 20 веку). В этом случае нтересный год — 2002. Но он не будет интересным ни для родившихся в 2001 году (интересный — 2004), ни, тем более, для последующих годов рождения (интересный год наступает после года рождения).

170. *Ответ:* $x = \sqrt{2}$.

Первое решение. Пусть $[x] = n$, тогда уравнение сводится к равенству $x^2 = n + 1$ с дополнительным ограничением $n \leqslant x < n + 1$. Нам известно значение x^2, поэтому желательно возвести последние неравенства в квадрат. Это возможно, если все его члены неотрицательны.

В силу того, что $x^2 \geqslant 0$ имеем $n + 1 \geqslant 0$, то есть $n \geqslant -1$. Сначала проверим единственное отрицательное значение $n = -1$. В этом случае $x = [x] = 0$, решений нет. Если же теперь $n \geqslant 0$, то неравенство $n \leqslant x$ можно возвести в квадрат:

$$n^2 \leqslant x^2 = n + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \frac{3}{4}.$$

Так как n — целое, отсюда получаем $n \leqslant 1$. Если $n = 0$, то $x^2 = 1$, и значит, $x = 1$ — равенство не выполняется. Если же $n = 1$, то $x^2 = 2$, и значит, $x = \sqrt{2}$.

Второе решение. Введём обозначение $x = [x] + t$, где t — дробная часть числа x, $0 \leqslant t < 1$. Тогда $[x] = x - t$, и уравнение приобретает вид $x^2 - x = 1 - t$. Отсюда, в частности: $0 < x^2 - x \leqslant 1$. Решая эту систему неравенств, получим:

$$x \in \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}; 0\right) \cup \left(1; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right].$$

Если $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leqslant x < 0$, то $[x] = -1$, уравнение сводится к виду $x^2 + 1 = 1$, $x = 0$ — равенство не выполняется.

Если $1 < x \leqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, то $[x] = 1$, уравнение сводится к такому $x^2 - 1 = 1$, и равенство выполняется только для $x = \sqrt{2}$.

171. *Ответ:* *а*) 16; *б*) *да*.

а) Пусть O – точка пересечения диагоналей. Отношение площадей треугольников ABO и OBC равно отношению $AO : OC$.

Аналогичное верно и для треугольников AOD и DOC. Значит, и

$$\frac{S_{ABD}}{S_{BCD}} = \frac{AO}{OC} = \frac{AB}{BC}\,.$$

Последнее равенство следует из свойства биссектрисы угла B. Отсюда находим: $S_{BCD} = \frac{8}{5} S_{ABD} = 16$.

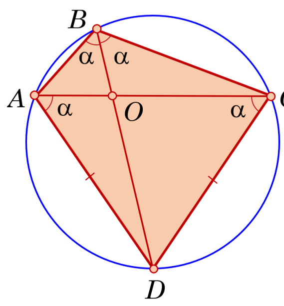


Рис. 57

б) Пусть $\angle ABO = \alpha$, $AB = a$, $BC = b$, $AC = c$. По свойству вписанных углов имеем: $\angle ACD = \angle ABD = \angle CBD = \angle CAD$, и значит, треугольник ADC — равнобедренный, причём

$$AD = CD = \frac{AC/2}{\cos\alpha} = \frac{c}{2\cos\alpha}\,.$$

По теореме Птолемея $c \cdot BD = a \cdot CD + b \cdot AD = \dfrac{(a+b)}{2\cos\alpha} \cdot c$, отсюда находим BD, и тогда

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} a \cdot BD \sin\alpha = \frac{a(a+b)}{4}\,\operatorname{tg}\alpha\,.$$

Эта величина при подходящем α принимает произвольное положительное значение, и значит, равенство $S_{ABD} = 100$ возможно.

172. *Ответ: а) да; б) нет.*

а) Предположим, что Вовочка потерял карточки с числами от 1 до 11. На оставшихся карточках записаны четыре наименьших числа — это 12, 13, 14, 15; сумма значений на них равна $54 > 50$. Значит, в этом случае 50 нельзя набрать никакими четырьмя карточками.

б) Будем подбирать карточки парами так, чтобы сумма в паре была равна 25. Таких пар 12, это $1 + 24$, $2 + 23, \ldots, 12 + 13$. Даже если из 10 пар карточки потеряны, останутся ещё две пары, которые и будут искомыми.

173. *Ответ:* 3 750 *рублей.*

Назовем 4-хнедельный промежуток «месяцем», таких «месяцев» в году 13. Если бы все подаренные Машей купюры были сторублёвыми, сестра получила бы 1300 рублей. Значит, Маша двенадцать раз дарила по 100 рублей и один — 50 рублей. Если в какой-то «месяц» Маша отдала 100 рублей, значит, и в копилке у неё были только сотни. Другими словами, за эти 12 «месяцев» она оставила себе $12 \cdot 300 = 3\,600$ рублей.

Итак, 50-рублёвки могли появиться у Маши только в один месяц из 13. Если за «месяц» в копилку попала только одна, она её подарила в конце месяца, так что её «доход» был по-прежнему 300 рублей.

Если в какой-то «месяц» Маша откладывает не менее двух 50-рублёвых купюр, она отдаёт их сестре в течение последовательных «месяцев», что противоречит условию. Исключение — случай, когда они все пришли в 13-м «месяце», тогда она не успеет их отдать. Итак, в этом случае первые 12 «месяцев» Маша получала по 300 рублей, а в последний могла положить в копилку от нуля до трёх 50-рублёвых купюр, то есть недобрать до 300 рублей максимум 150 рублей.

174. *Ответ: а) да; б) да; в) нет.*

Ясно, что числа a и b во всех равенствах положительны.

а) Запишем условие в виде $\log_2 a \cdot \log_2 b = \log_2 a + \log_2 b$, то есть произведение чисел $\log_2 a$ и $\log_2 b$ равно их сумме. В качестве примера можно взять числа $\log_2 a = \log_2 b = 2$, для которых исходное равенство сводится к очевидному $2 \cdot 2 = 2 + 2$, причём $a = b = 4$.

б) Исходное равенство сводится к соотношению $ab = a + b$, которое выполняется, например, для чисел $a = b = 2$.

в) Каждое из двух равенств имеет вид $xy = x + y$, которое можно переписать так: $(x-1)(y-1) = 1$. Значит,

$$\begin{cases} (\log_2 a - 1)(\log_2 b - 1) = 1, \\ (a-1)(b-1) = 1. \end{cases}$$

Из первого равенства следует, что числа $\log_2 a - 1$ и $\log_2 b - 1$ имеют одинаковый знак, то есть либо они оба положительны, либо оба отрицательны.

В первом случае $a > 2$ и $b > 2$, и значит, числа $a - 1$ и $b - 1$ больше 1. Но тогда произведение таких чисел также больше 1, то есть второе равенство системы невозможно, противоречие.

Во втором случае $0 < a < 2$ и $0 < b < 2$, и значит, числа $a-1$ и $b-1$ по абсолютной числе меньше 1. Но тогда и произведение таких чисел по абсолютной величине < 1, что опять противоречит второму равенству системы.

Итак, оба равенства системы не могут выполняться одновременно.

175. *Ответ:* а) $\min g(x) = a$, $\max g(x) = b$; б) $\min g(x) = -b$, $\max g(x) = -a$.

а) По условию

$$g(x) = \frac{x^3 - 1}{x^6 + 1} = f(x^3).$$

Величина x^3 принимает все действительные значения от $-\infty$ до $+\infty$, поэтому множество значений функции $g(x)$ совпадает с множеством значений $f(x)$.

б) Имеем

$$f(-x) = \frac{-x-1}{x^2+1} = -\frac{x+1}{x^2+1} = -g(x).$$

то есть $g(x) = -f(-x)$. Значит, функция $g(x)$ принимает все возможные значения от $-b$ до $-a$.

176. Прямые AB и A_1B_1 пересекаются в точке A_2, лежащей в обеих плоскостях $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, то есть на их общей прямой (рис. 58). То же верно для точек A_2, B_2, C_2, получающихся как пересечения одноименных рёбер. Значит, все эти точки должны лежать на одной прямой, что не выполняется.

Замечание. Если зафиксировать, например, точки A_1, B_1, C_1, то можно построить изображение вершины D_1 как результат пересечения прямых A_1B_2 и A_2C_1.

177. *Ответ:* а) *да;* б) *нет.*

а) Рассмотрим формулу $F = a \star a$. Если $\star$ — вычитание, то выражение F тождественно равно 0. Если же $\star$ — умножение, то $F = 0$ при $a = 0$. Поэтому выражение $F = (a \star a) * (a \star a)$ равно 0 при любом смысле знаков $\star$ и $*$. Действительно, если $\star$ — вычитание, то $F = 0 \cdot 0 = 0$. Если же $\star$ — умножение, то $*$ — вычитание, и тогда $F = a \cdot a - a \cdot a = 0$.

Итак, формула $F = (a \star a) * (a \star a)$ при любых a, $\star$ и $*$ принимает значение 0.

б) Предположим, что переменные a, b, … принимают чётные значения. Тогда $a \star b$ и $a * b$ также являются чётными. Поэтому при чётных значениях переменных *любая* формула имеет чётное значение, и значит, не может принимать значение 1.

178. Рассмотрим момент, когда бегун с диагонали AC находится в точке O пересечения диагоналей. Если второй бегун в этот момент не находится в точке B или D, расстояние между бегунами будет меньше половины диагонали, и задача решена. В противном случае будем считать для определённости, что второй бегун в этот момент находится в точке B, а первый движется из A в C.

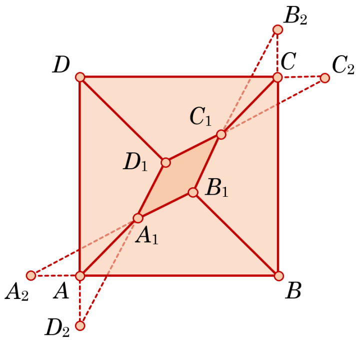


Рис. 58

Поскольку скорости бегунов равны, в момент, когда первый добежит до середины E отрезка OC, второй будет в середине F отрезка BO, и расстояние $EF < EO + OF = \frac{1}{2}AC$, что и требовалось.

179. Назовём натуральное число *белым*, если оно делится на квадрат какого-нибудь простого числа, и *чёрным* в противном случае. Скажем, что число a_i *обслуживает* число из списка

$$p_1p_2^3,\ p_2p_3^3,\ \ldots,p_{99}p_{100}^3,\ p_{100}p_1^3, \tag{3}$$

если оно даёт его в произведении с каким-либо a_j. Очевидно, что при этом одно из чисел a_i, a_j — белое, а другое — чёрное. Так как белое число может обслуживать не более одного числа из списка (3), *белых чисел среди* a_i *не менее* 100. Кроме того, если чёрное число обслуживает число $p_{k-1}p_k^3$, то оно равно p_{k-1}, p_k или $p_{k-1}p_k$, и потому может обслуживать не более двух чисел из списка (3). Значит, чёрных чисел среди a_i не менее 50. Таким образом, $k \geqslant 100 + 50 = 150$, что и требовалось доказать.

180. *Ответ:* 162.

Назовём центром «уголка» клетку, которая граничит по сторонам с двумя другими его клетками. Рассмотрим любой квадрат

2×2, находящийся в нашей таблице. В нём содержится 4 «уголка». При этом хорошими из них могут быть только те, в центрах которых находятся два наибольших числа из тех, что находятся в нашем квадрате 2×2. Так как каждый «уголок» находится в каком-либо квадрате 2×2, отсюда следует, что хороших уголков в нашей таблице не больше половины от их общего числа, равного 4×81, так как всего в нашей таблице имеется 81 квадрат размером 2×2 (например, потому, что левые верхние клетки всех таких квадратов образуют квадрат 9×9). Итак, мы доказали, что хороших уголков не больше, чем $4 \cdot 81/2 = 162$.

Приведём пример, когда их ровно 162. Покрасим клетки таблицы в два цвета в шахматном порядке, и произвольным образом поставим на чёрные клетки числа от 51 до 100, а на белые — числа от 1 до 50. В этом случае в каждом квадрате 2×2 будет ровно два хороших уголка с центрами в чёрных клетках.

181. *Ответ:* 2.

Пусть прямая, проходящая через точку E параллельно AL, пересекает прямые BC и BA в точках P и Q соответственно. Из подобия треугольников ABL и QBP имеем

$$\frac{PQ}{AL} = \frac{BE}{BX} = \frac{BE}{AL},$$

откуда $PQ = BE$. В силу параллельности прямых AL и PQ имеем $\angle AQE = \angle XAE = \angle AEQ$, откуда $AE = AQ$. Кроме того, из равенства $AX = XE$ следует, что $\angle AEB = \angle AEX = \angle XAE$, откуда $\angle AEB = \angle AQE$. Таким образом, треугольники AQP и AEB равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $AP = AB$ и $\angle BAE = \angle PAQ = 2\angle CBA$, откуда и получаем ответ.

182. *Ответ:* 198.

Пусть подряд стоят числа a, b, c, d, e. Если $a > c$, то $a + b > b + c$, откуда $cd > de$, то есть $c > e$. Продолжая это рассуждение, получим, что каждое число больше числа, идущего по часовой стрелке через одно от него. Но тогда, записав цепочку из 98 таких неравенств, начиная с какого-то числа a, получим, что $a > a$ — противоречие. Значит, все 99 расставленных чисел равны одному и тому же числу a, такому, что $2a = a^2$, откуда $a = 2$, а искомая сумма равна $2 \cdot 99 = 198$.

183. *Ответ: нельзя.*

Допустим, можно. С девятки должно начинаться хотя бы одно слагаемое, иначе все девятки будут в разряде единиц, и сумма будет оканчиваться на 1. Это слагаемое не меньше 90, а каждое из остальных — не меньше 19. Поэтому их сумма не меньше $90 + 8 \cdot 19 = 242 > 240$. Противоречие.

184. Пусть $\angle BAD = \angle BCD = 2\alpha$, а биссектриса AE пересекает прямую BC в точке K. Тогда $\angle BAK = \angle KAD = \alpha = \angle FCB$. Следовательно, биссектрисы углов A и C параллельны. Пусть O — середина отрезка BF. Так как по условию она лежит на AE, а $AE \parallel CF$, OK — средняя линия треугольника BFC (*).

Обозначим через M точку пересечения биссектрисы CF и прямой AD и заметим, что треугольники ABK и CDM равны, так как $AB = CD$, $\angle MCD = \angle KAB = \alpha$, $\angle ABK = \angle CDM = 180^\circ - 2\alpha$. Значит, расстояние от точки D до прямой CF равно расстоянию от точки B до прямой AE, а вместе с ним, в силу (*) — расстоянию между прямыми AE и CF. Следовательно, средняя линия треугольника DEA лежит на прямой CF, откуда и вытекает утверждение задачи.

Замечание. Доказательство станет заметно короче, если использовать симметричность параллелограмма относительно его центра.

185. *Ответ:* 4.

Если одна из сторон прямоугольника чётна, от него можно по средней линии отрезать прямоугольник вдвое меньшей площади. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда обе стороны нечётны. В этом случае $|a - b|$ чётно.

Если $|a - b| = 0$, то $a = b = 2n + 1$, половина площади прямоугольника равна $2n^2 + 2n + 0{,}5$, и мы можем вырезать из него прямоугольник $2n \times (n + 1)$ с площадью $2n(n + 1)$, почти равной числу $2n^2 + 2n + 0{,}5$.

Если $|a - b| = 2$, то $a = 2n + 1$, $b = 2n - 1$, половина площади прямоугольника равна $2n^2 - 0{,}5$, и мы можем вырезать из него прямоугольник $2n \times n$ почти равной площади $2n^2$.

Таким образом, $|a - b| \geqslant 4$. Полагая $a = 2n + 3$, $b = 2n - 1$, получаем прямоугольник, половина площади которого равна $2n^2 + 2n - 1{,}5$. Почти равны ей целочисленные площади $2n^2 + 2n - 1$ и $2n^2 + 2n - 2$. При $n = 3$ имеем $2n^2 + 2n - 1 = 23$, $2n^2 + 2n - 2 =$

$22 = 2 \cdot 11$.

Простые числа 23 и 11 больше сторон получающегося при $n = 3$ прямоугольника 9×5, поэтому вырезать из него по линиям сетки прямоугольник, площадь которого почти равна половине его площади, невозможно. Таким образом, минимальное возможное значение $|a - b|$ равно 4.

186. Пусть число после первого укорачивания равно n^2, а после третьего — m^4. Тогда $100m^4$ отличается от n^2 только двумя последними цифрами, то есть

$$100 \geqslant n^2 - (10m^2)^2 = (n - 10m^2)(n + 10m^2) \geqslant 0.$$

Так как по условию $m^4 \geqslant 1000$, то $10m^2 > 100$, что возможно только если $n = 10m^2$. Значит, вторая и третья цифры исходного числа — нули, и куб k^3, получающийся после третьего укорачивания, оканчивается на 0. Следовательно, четвёртая и пятая цифры исходного числа — тоже нули, и после пятого укорачивания мы получим число $(k/10)^3 = (n/100)^2$. Поскольку в разложение числа, являющегося одновременно точным квадратом и точным кубом, все простые множители входят в степенях, кратных 6, это число является точной шестой степенью.

187. *Ответ: тот, кто ходит первым.*

Пусть первого игрока зовут Петей, а второго — Васей. Первым ходом Петя уберёт из кучки 101 один камень, а оставшиеся разделит на кучки из 1 (про которую можно забыть) и 99 камней. Теперь докажем более общий факт: *если на столе лежат кучки из $2k$ и $2k-1$ камней, то проигрывает тот, чья очередь ходить.*

Пусть соперник Пети Вася сделал ответный ход в кучку из $2k - 1$ камней или разделил кучку $2k$ на две, взяв из неё больше одного камня. Тогда у него получились кучки из a и b камней, где $a + b \leqslant 2k - 2$. Следующим ходом Петя создаёт две такие же кучки, получит позицию a, a, b, b и выиграет, делая ходы, симметричные ходам первого.

Пусть Вася возьмёт один камень из кучки $2k$ и разделит её на кучки из a и b камней. Тогда числа a и b будут разной чётности. Пусть a чётно. Тогда Петя из кучки в $2k - 1$ камней получит кучки из $a - 1$ и b камней (что возможно, так как $a \geqslant 2$), после чего мысленно разделяет игру на две: одну на паре равных кучек b, b, где он побеждает, делая ходы, симметричные ходам первого, и вторую — на паре кучек a, $a-1$, где он снова применяет стратегию, описанную выше.

Таким образом, у второго всегда есть возможность сделать ход, и он побеждает в силу того, что всего в игре можно сделать не больше 200 ходов.

188. *Ответ: нет, не обязательно.*

Первое решение. Между двумя моментами встречи каждый мальчик проехал половину асфальтового и половину песчаного участков, и они затратили на это поровну времени. Значит, на всю дорожку каждый из них затратил вдвое больше времени, то есть тоже поровну.

Второе решение. Нарисуем графики движения мальчиков по дорожке: на горизонтальной оси отмечаем время t, на вертикальной — положение y мальчика, считая от начала дорожки.

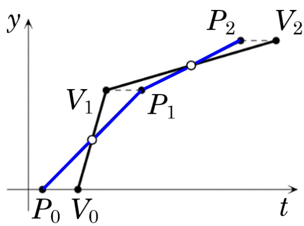


Рис. 59

Пусть P_0, P_1, P_2 – точки, соответствующие старту Пети, моменту, когда он перешёл с асфальтового участка на песчаный, и его финишу; пусть V_0, V_1, V_2 — аналогичные точки для Васи. Тогда графики движения мальчиков — это ломаные $P_0P_1P_2$ и $V_0V_1V_2$, при этом отрезки P_0V_0, P_1V_1 и P_2V_2 горизонтальны (рис. 59).

По условию, середины отрезков P_0P_1 и V_0V_1 совпадают, откуда $P_0V_0P_1V_1$ — параллелограмм. Аналогично, $P_1V_1P_2V_2$ — параллелограмм. Значит, отрезки P_0V_0, V_1P_1 и P_2V_2 параллельны и равны. Поэтому между моментами финиша Пети и Васи прошло столько же времени, сколько и между моментами их старта; отсюда и следует ответ.

189. *Ответ: нельзя.*

Многоугольник, у которого площадь (измеренная в *см*^{2}) численно равна периметру (измеренному в *см*), назовём *хорошим.*

Заметим, что исходный треугольник — хороший: он прямоугольный с катетами 5 *см* и 12 *см*, поэтому его площадь равна 30 *см*^{2} и численно совпадает с его периметром, равным $5+12+13 = 30$ *см*.

Если какой-то многоугольник П разбит на хорошие многоугольники, то площадь П, равная сумме площадей всех многоугольников разбиения, совпала бы численно с суммой периметров многоугольников разбиения. Но сумма этих периметров больше периметра П (на удвоенную сумму длин общих частей границ многоугольников разбиения). Получаем, что площадь П больше его периметра.

Значит, никакой хороший многоугольник, в том числе данный треугольник, нельзя разрезать на несколько (больше одного) хороших многоугольников.

190. *Ответ:* $2n-1$.

Заметим, что в каждой вертикали и каждой горизонтали стоит ровно по одной ладье.

Покажем сначала, что все $2n$ ладей не могли попасть в одну часть. Пусть A, B, C, D — угловые клетки доски (в порядке обхода против часовой стрелки, рис. 60). Из симметрии, A и C должны принадлежать разным частям, как и B и D. Это значит, что либо A и B, либо A и D лежат в одной части, а остальные две клетки — в другой.

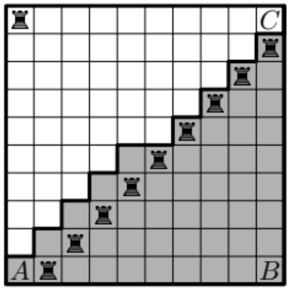


Рис. 60

Пусть для определённости A и B лежат в части I. Тогда все граничные клетки между ними также должны лежать в части I; действительно, если какая-то такая клетка X лежит в части II, то в ней же лежит какой-то путь из X в C, а в части I лежит какой-то путь из A в B; но эти пути должны иметь общую клетку, что невозможно.

Значит, вся горизонталь между клетками A и B лежит в части I, то есть в ней должна быть хотя бы одна ладья. Аналогично, в части II тоже есть целая горизонталь (между C и D), а значит, есть ладья. Отсюда и следует требуемое.

Осталось привести пример, когда в одной из частей расположено $2n-1$ ладей. Один из возможных примеров устроен так. Рассмотрим диагональ квадрата; в одну часть попадут клетки ниже неё, а также нижняя половина самой диагонали; остальные клетки попадут во вторую часть. Расставим $2n-1$ ладью в клетки непосредственно под диагональю; тогда они окажутся в одной части. Оставшуюся ладью поставим в пересечение оставшихся строки и столбца. На рис. 60 указан такой пример при $n=5$.

191. Первое решение. Предположим противное, $b > c$, и значит, $b \geqslant c+1$. Из делимости $abc+1$ на $ab-b+1$ следует, что число

$$b(ac-a+1) = (abc+1) - (ab-b+1)$$

кратно $ab-b+1$. Поскольку числа b и $ab-b+1 = b(a-1)+1$ взаимно просты, получаем, что $ac-a+1$ делится на $ab-b+1$. Ясно, что $ac-a+1 > 0$, поэтому либо $ac-a+1 = ab-b+1$, либо $ac-a+1 \geqslant 2(ab-b+1)$.

В первом случае имеем $b = a(b-c+1)$ и, значит, b делится на a, что невозможно по условию. Во втором случае получаем

$$ac-a \geqslant 2b(a-1)+1 > 2b(a-1) > 2c(a-1),$$

то есть $ac < 2c-a < 2c$. Это значит, что $a < 2$, то есть $a = 1$. Однако это также невозможно, ибо тогда снова b делится на a.

Второе решение. Опять же предположим противное. Поскольку $abc+1$ делится на $ab-b+1$, то и

$$bc-c+1 = (abc+1) - c(ab-b+1)$$

тоже кратно $ab-b+1$, то есть $bc-c+1 = k(ab-b+1)$ при некотором натуральном k. Иначе говоря,

$$0 = (bc-c+1) - k(ab-b+1) = b(c-ka+k) - (k+c-1). \quad (4)$$

Значит, $k+c-1$ делится на b. По нашему предположению, $c < b$. С другой стороны, поскольку $a > 1$ (иначе b делится на a), имеем

$$bc-c+1 = c(b-1)+1 < b^2 < b(b+1) \leqslant b(b(a-1)+1),$$

откуда $k < b$. Значит, $0 < k+c-1 < 2b$, и потому $k+c-1 = b$.

Теперь (4) переписывается в виде $0 = b(c-ka+k) - b$, то есть $c-ka+k-1 = 0$. Но тогда $ka = k+c-1 = b$, то есть b делится на a. Это невозможно.

192. Обозначим окружности с диаметрами AB и CD через ω_1 и ω_2 соответственно. Заметим, что точка S лежит на отрезке MN.

Пусть прямые CS и DS пересекают l в точках P и Q соответственно (рис. 61). Поскольку CD — диаметр ω_2, имеем $\angle PSQ = \angle CSD = 90°$. В прямоугольном треугольнике PSQ отрезок SM — высота, поэтому $\angle MSP = 90° - \angle SPM = \angle SQP$. С другой стороны, поскольку $NS = NC$, имеем $\angle SCD = \angle CSN = \angle MSP$. Итак, $\angle SCD = \angle MSP = \angle SQP$, то есть точки P, Q, C и D лежат на одной окружности γ'.

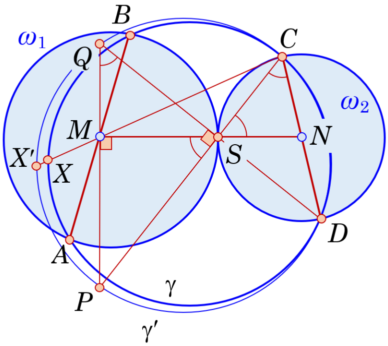


Рис. 61

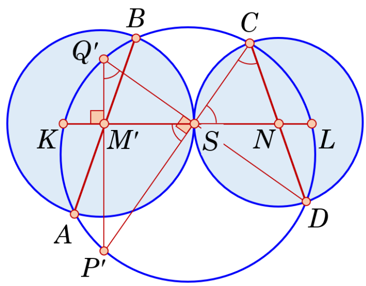


Рис. 62

Пусть теперь прямая MC пересекает окружности γ и γ' в точках X и X' соответственно (точка M лежит на отрезках CX и CX'). Тогда $MC \cdot MX = MA \cdot MB = MS^2$, поскольку M — центр окружности ω_1. С другой стороны, $MC \cdot MX' = MP \cdot MQ = MS^2$; последнее равенство опять же вытекает из того, что SM — высота в прямоугольном треугольнике PSQ. Значит, $MC \cdot MX = MS^2 = MC \cdot MX'$, то есть $X = X'$. Но точка X отлична от C и D, так как M не лежит на CD; значит, окружности γ и γ' имеют три общих точки C, D, X, то есть они совпадают. Поэтому P лежит на γ, что и требовалось доказать.

Замечание 1. Решение можно было бы завершить многими разными способами. Например, равенства $MP \cdot MQ = MS^2 = MA \cdot MB$ означают, что точки P, Q, A и B лежат на одной окружности δ. Тогда либо окружности γ, γ' и δ совпадают, либо это три разных окружности. Во втором случае радикальные оси этих трёх окружностей должны пересекаться в одной точке или быть параллельными; но эти радикальные оси — это прямые PQ, AB и CD, и для них эти утверждения неверны.

Рассуждение выше имеет недостаток: оно не проходит в случае, когда точки P, Q, A и B лежат на одной прямой. Этот случай легко разобрать отдельно (тогда прямая MN проходит через центр окружности γ, $AB \parallel CD$ и $AC \perp BD$).

Замечание 2. Существуют и другие решения, идейно схожие с приведённым выше. Например, можно рассуждать так.

Пусть лучи CS и DS пересекают γ повторно в точках P' и Q' (рис. 62). Пусть $M' = P'Q' \cap MN$. Тогда $\angle DQ'P' = \angle DCS = \angle CSN = \angle M'SP'$, откуда $MN \perp P'Q'$. Тогда SM' — высота в прямоугольном треугольнике, и $M'P' \cdot M'Q' = M'S^2$. С другой стороны, если прямая MN пересекает γ в точках K и L, то $M'K \cdot M'L = M'P' \cdot M'Q' = M'S^2$. Однако, как нетрудно проверить, на отрезке KL есть только две точки X такие, что $XK \cdot XL = XS^2$, и это точки $X = M$ и $X = N$. Значит, $M' = M$, что и требовалось доказать.

193. *Ответ: нет.*

Предположим противное. Пусть S_{m+1} делится на 2^s, но не делится на 2^{s+1}; тогда $s \geqslant 2$. Это значит, что среди чисел $1, 2, \ldots, m+1$ есть число a, делящееся на 2^s. Но тогда число $a/2$ уже не превосходит m и делится на 2^{s-1}; значит, и S_m делится на 2^{s-1}. Поэтому S_{m+1}/S_m не может делиться на степень двойки, бóльшую первой.

Замечание. Можно показать, что $S_{m+1} > S_m$ только тогда, когда число $m+1$ является степенью некоторого простого числа p; в этом случае отношение S_{m+1}/S_m будет равно p.

194. *Ответ:* $d = 7$.

Докажем, что $d \geqslant 7$. Все числа с доски разбиваются на цепочки чисел вида $a, a+1, a+2, \ldots, a+t$ так, что числа из разных цепочек не отличаются ровно на 1. Такое разбиение нетрудно построить, соединив любые два числа, отличающиеся на 1, отрезком и рассмотрев полученные ломаные.

Пусть получилось k цепочек, в которых $n_1, n_2, \ldots, n_k$ чисел соответственно (некоторые цепочки могут состоять из одного числа). В цепочке из n_i чисел есть ровно $n_i - 1$ пара чисел, отличающихся на 1. Поэтому общее количество единиц в тетрадке равно

$$(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \ldots + (n_k - 1) = (n_1 + n_2 + \ldots + n_k) - k = 99 - k,$$

откуда $k = 99 - 85 = 14$. Значит, в одной из цепочек не меньше, чем $99 / 14$ чисел, то есть не меньше 8 чисел. Разность наибольшего и наименьшего чисел в такой цепочке не меньше $8 - 1 = 7$.

Осталось привести пример, в котором $d = 7$. Такой пример дают, например, числа

$$0 = \frac{0}{14}, \frac{1}{14}, \frac{2}{14}, \ldots, \frac{98}{14} = 7,$$

Действительно, в этом примере $d = 7$, и ровно для первых 85 из этих чисел в наборе есть число, на единицу большее.

Замечание. Приведённый пример — не единственный. Все возможные оптимальные примеры устроены так: есть ровно одна цепочка из 8 чисел (от a до $a+7$), а также 13 цепочек, каждая — из 7 чисел; все числа этих остальных цепочек должны располагаться между a и $a+7$.

195. Первое решение. Совершим гомотетию с центром A и коэффициентом 2. При этой гомотетии точки M и N переходят в B и C соответственно; пусть точки K и P переходят соответственно в K' и P' (рис. 63). Тогда достаточно доказать, что четырёхугольник $ABP'K'$ описан. Мы докажем, что он описан около вписанной окружности ω треугольника ABC. Три стороны четырёхугольника уже касаются ω, поэтому достаточно доказать, что её касается $P'K'$.

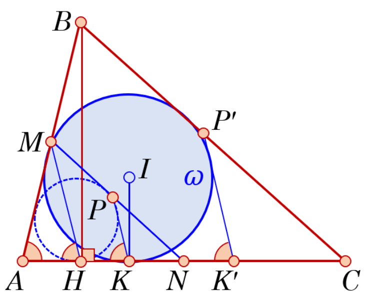


Рис. 63

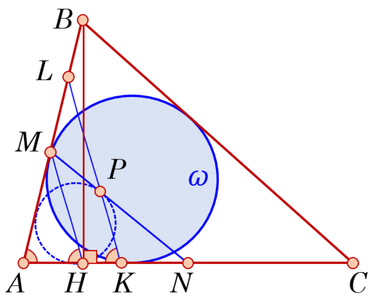


Рис. 64

Пусть I — центр ω. Тогда $KK' = AK$, поэтому A и K' симметричны относительно KI. Далее заметим, что $\angle P'K'A = \angle PKA = \angle MHA$. Но MH — медиана в прямоугольном треугольнике AHB, поэтому $\angle MHA = \angle MAC$. Значит, $\angle P'K'A = \angle BAC$. Значит, и прямые AB и $K'P'$ также симметричны относительно KI; поскольку одна из них касается ω, то и другая тоже. Это и требовалось доказать.

Замечание. У приведённого решения есть несколько вариаций. Например, похожими рассуждениями можно показать, что в четырёхугольнике $AMPK$ биссектрисы трёх углов A, M и K проходят через одну точку — середину отрезка AI. Отсюда следует, что эта середина — центр искомой вписанной окружности.

Второе решение. Пусть прямая PK пересекает прямую AB в точке L (рис. 64). Как и в решении выше, получаем, что $\angle AKL = \angle AHM = \angle LAK$, откуда $LA = LK$.

Мы докажем, что окружности, вписанные в треугольники AKL и AMN, совпадают (тогда это и будет вписанная окружность четырёхугольника $AMPK$). Так как обе окружности вписаны в угол BAC, для этого достаточно показать, что они касаются прямой AB в одной и той же точке. Как известно, расстояния от A до точек касания этих окружностей с AB равны соответственно $\frac{1}{2}(AL + AK - KL)$ и $\frac{1}{2}(AM + AN - MN)$. Значит, нам надо доказать, что $AL + AK - KL = AM + AN - MN$, или что $ML - KL = KN - MN$.

Обозначим полупериметр треугольника ABC через p; пусть $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Имеем $ML - KL = (AL - AM) - KL = -AM = -2c$. С другой стороны, $KN - MN = (AN - AK) - MN = \frac{1}{2}b - (p-a) - \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}(a+b) - p = -\frac{1}{2}c$, откуда и следует искомое равенство.

196. *Ответ:* $m = 1$.

Первое решение. Докажем сначала, что $m = 1$ удовлетворяет требованиям задачи. Заметим, что $ab + c = ab + c(a+b+c) = (c+a)(c+b)$. Следовательно,

$$\sqrt{\frac{ab}{c+ab}} + \sqrt{\frac{bc}{a+bc}} + \sqrt{\frac{ca}{b+ca}} =$$

$$= \sqrt{\frac{ab}{(c+a)(c+b)}} + \sqrt{\frac{bc}{(a+b)(a+c)}} + \sqrt{\frac{ca}{(b+c)(b+a)}} =$$

$$= \frac{\sqrt{ab}\,\sqrt{a+b} + \sqrt{bc}\,\sqrt{b+c} + \sqrt{ca}\,\sqrt{c+a}}{\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}}.$$

Значит, осталось доказать неравенство

$$\sqrt{ab}\,\sqrt{a+b} + \sqrt{bc}\,\sqrt{b+c} + \sqrt{ca}\,\sqrt{c+a} \geqslant \sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Возведем это неравенство в квадрат; оно примет вид

$$\begin{aligned} ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+2\sqrt{ab^2c\,(a+b)(b+c)}\,+\\ +\,2\sqrt{bc^2a\,(b+c)(c+a)}+2\sqrt{ca^2b\,(c+a)(a+b)}\geqslant\\ \geqslant a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2+2abc. \end{aligned}$$

После сокращения слева останется сумма корней, а справа — $2abc$. Но любой из корней не меньше, чем abc; действительно, например, $\sqrt{ab^2c\,(a+b)(b+c)} \geqslant \sqrt{ab^2c\cdot ac} = abc$. Отсюда и следует требуемое.

Осталось доказать, что при любом $m>1$ неравенство выполнено не всегда; достаточно это сделать при $1<m<3$. Пусть $m=1+2t$ при $0<t<1$. Положим $a=b=\frac{1}{2}(1-t^2)$ и $c=t^2$. Тогда $a+b+c=1$, однако

$$\sqrt{\frac{ab}{c+ab}}+\sqrt{\frac{bc}{a+bc}}+\sqrt{\frac{ca}{b+ca}}<\sqrt{\frac{ab}{ab}}+\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ca}{b}}=1+2t=m.$$

Второе решение. Приведём другое доказательство того, что $m=1$ подходит. Для этого докажем, что если a — наибольшее из чисел a,b,c, то верно даже неравенство

$$\sqrt{\frac{ab}{c+ab}}+\sqrt{\frac{ca}{b+ca}}\geqslant 1.$$

Обозначим $t=1/a$, $\mu=b/c$; заметим, что $1>a\geqslant\frac{1}{3}$, поэтому $1<t\geqslant 3$. Левая часть неравенства выше переписывается как

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{ab}{c+ab}}+\sqrt{\frac{ca}{b+ca}}=\sqrt{\frac{1}{1+c/(ab)}}+\sqrt{\frac{1}{1+b/(ac)}}=\\ =\frac{1}{\sqrt{1+t/\mu}}+\frac{1}{\sqrt{1+t\mu}}. \end{aligned}$$

Значит, нам достаточно доказать, что

$$\sqrt{1+t/\mu}+\sqrt{1+t\mu}\geqslant\sqrt{(1+t/\mu)(1+t\mu)}.$$

Возводя это неравенство в квадрат, получаем

$$1+t/\mu+1+t\mu+2\sqrt{(1+t/\mu)(1+t\mu)}\geqslant 1+t/\mu+t\mu+t^2;$$

после сокращения подобных слагаемых получаем, что нам достаточно доказать неравенство

$$2\sqrt{(1+t/\mu)(1+t\mu)} \geqslant t^2 - 1 = (t-1)(t+1).$$

Наконец, это неравенство вытекает из неравенств $2 \geqslant t-1$ (поскольку $t \leqslant 3$) и

$$(1+t/\mu)(1+t\mu) = 1 + t^2 + t\,(\mu + 1/\mu) \geqslant 1 + t^2 + 2t = (t+1)^2,$$

где мы применили неравенство о средних.

197. Ясно, что результат нажатия нескольких переключателей не зависит от того, в каком порядке эти нажатия были произведены — количество переключений каждой лампочки не зависит от этого порядка. В частности, можно считать, что Петя использовал каждый переключатель не более одного раза.

Весь куб разбивается на 100 *слоёв*, параллельных красной грани. Каждый переключатель на некрасной грани переключает лампочки в одном слое, а каждый переключатель на красной грани — по лампочке во всех 100 слоях.

После действий Пети найдётся слой, в котором включено $d \leqslant k/100$ лампочек — назовём один такой слой *главным*. Пусть $\mathcal{V}$ — набор из d переключателей на красной грани, связанных со включёнными лампочками в главном слое. Мы докажем, что Вася сможет погасить все лампочки, использовав с красной грани ровно эти переключатели.

Запустим несколько другой процесс, начиная с того же исходного положения. Пусть $\mathcal{P}$ — набор переключателей с красной грани, использованных Петей, а $\mathcal{Q}$ — набор использованных им переключателей с некрасных граней, связанных с главным слоем. Пусть Петя применит $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$, а затем Вася применит $\mathcal{V}$. После действий Пети в главном слое будут гореть те же d лампочек, что и раньше, а значит, после действий Вася все лампочки в главном слое будут погашены. Если теперь Вася применит в каждом из остальных слоёв наборы переключателей с некрасных граней, аналогичные $\mathcal{Q}$, то все лампочки будут погашены.

Пусть теперь Петя применит все остальные переключатели (с некрасных граней!), которые он применял исходно, а Вася применит их ещё по разу. Все лампочки по-прежнему будут погашены. При этом в новом процессе Петя применил ровно те же переключатели, что и в исходном, а Вася использовал лишь переключатели набора $\mathcal{V}$ с красной грани (и какие-то — с остальных граней). Значит, если в исходном процессе Вася совершит те же действия, которые он сделал в новом, он добьётся требуемого.

198. *Ответ: можно.*

Один из многих возможных примеров показан на рис. 65.

1	2	9	10	20	90	
1	2	0	0	0	0	3
0	0	4	0	0	0	4
0	0	5	0	0	0	5
0	0	0	10	20	0	30
0	0	0	0	0	40	40
0	0	0	0	0	50	50

Рис. 65

199. Совпадает с задачей **189**.

200. Предположим противное, и пусть в множестве всех школьников есть различные 30-элементные подмножества $A_1, A_2, \ldots, A_{50}$ (множества участников каждой олимпиады) такие, что пересечение любых 30 из них непусто, а пересечение всех — пусто.

Пусть среди множеств A_1, $A_2, \ldots, A_{50}$ нашлись два множества B и C, имеющие $k \leqslant 28$ общих элементов x_1, $x_2, \ldots, x_k$. Для каждого элемента x_i среди множеств A_1, $A_2, \ldots, A_{50}$ найдём подмножество D_i, не содержащее x_i (такое подмножество D_i найдётся, иначе x_i — общий элемент множеств A_1, $A_2, \ldots, A_{50}$). (Заметим, что среди подмножеств D_i могут быть совпадающие.) Тогда пересечение не более 30 подмножеств B, C, $D_1, \ldots, D_k$ — пусто. Это противоречит нашему предположению (к данным подмножествам можно добавить ещё несколько, чтобы стало 30 подмножеств, при таком добавлении пересечение остается пустым).

Значит, указанных двух множеств B и C не найдётся. Тогда пересечение любых двух из множеств A_1, $A_2, \ldots, A_{50}$ содержит в точности 29 элементов. Пусть $A_1 \cap A_2 = \{y_1, y_2, \ldots, y_{29}\}$, так что $A_1 = \{z_1, y_1, y_2, \ldots, y_{29}\}$, $A_2 = \{z_2, y_1, y_2, \ldots, y_{29}\}$.

Найдём подмножество (пусть, для определённости, это подмножество — A_3), не содержащее y_1. Так как $|\,A_1 \cap A_3\,| = |\,A_2 \cap A_3\,| = 29$, то A_3 обязано содержать все элементы $z_1, z_2, y_2, y_3, \ldots, y_{29}$. Этих элементов 30 (все они различны), поэтому

$$A_3 = \{z_1,\ z_2,\ y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_{29}\}.$$

Рассмотрим любое подмножество A_i из подмножеств $A_4, \ldots, A_{50}$. Предположим, что A_i содержит элемент, лежащий вне 31-элементного множества $K = \{z_1, z_2, y_1, y_2, \ldots, y_{29}\} = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. Тогда A_i должно пересекаться с каждым из подмножеств A_1, A_2, A_3 по одному и тому же 29-элементному подмножеству множества K. Но $|\,A_1 \cap A_2 \cap A_3\,| = 28$, значит, такого 29-элементного подмножества не существует — противоречие. Отсюда делаем вывод, что все множества A_1, $A_2, \ldots, A_{50}$ являются подмножествами множества K. Но в множестве K количество 30-элементных подмножеств равно $31 < 50$. Получаем противоречие, завершающее решение задачи.

201. Из условия следует, что $(abc + 1) - (ab - b + 1) = abc - ab + b = b(ac - a + 1)$ делится на $ab - b + 1$. Заметим, что b и $ab - b + 1 = (a - 1)b + 1$ взаимно просты, отсюда получаем, что $ac - a + 1$ делится на $ab - b + 1$.

Далее замечаем, что $0 < ac - a + 1 < 2(ab - b + 1)$. Действительно, $2(ab-b+1) = (2a-2)b+2 > (2a-2)c+2 = ac+(a-2)c+2 \geqslant ac + 2 > ac - a + 1$. Значит, делимость $ac - a + 1$ на $ab - b + 1$ возможна только в случае равенства $ac - a + 1 = ab - b + 1$.

Имеем $a(c - 1) = ac - a = ab - b = (a - 1)b$. Видим, что $(a-1)b$ делится на a, но так как $a-1$ и a взаимно просты, отсюда следует, что b делится на a, что и требовалось доказать.

Замечание. Приводить примеры чисел, удовлетворяющих условию, в решении не требуется. Но из решения несложно получить даже полное описание всех троек, удовлетворяющих условию: $(a, b, c) = (a, ma, (a - 1)m + 1)$, где $a > 1$, $m > 1$ — произвольные натуральные числа.

202. Заметим, что $PQ \parallel CD$, так что PQ — средняя линия прямоугольного треугольника AHD. Значит, PQ пересекает гипотенузу AH в её середине M, так что $MA = MD = MH$ (рис. 66).

Имеем $\angle MDH = \angle MHD$, а поскольку $MH \perp BC$ и $HD \perp CD$, имеем также $\angle MHD = \angle BCD$. Получаем равенство

$$\angle MDH = \angle BCD,$$

из которого следует касание прямой MD и окружности (BCD) в точке D. Отсюда $MD^2 = MP \cdot MQ$ (по теореме о произведении отрезков секущей).

Далее, $MA^2 = MP \cdot MQ$. Значит, треугольники AMP и QMA

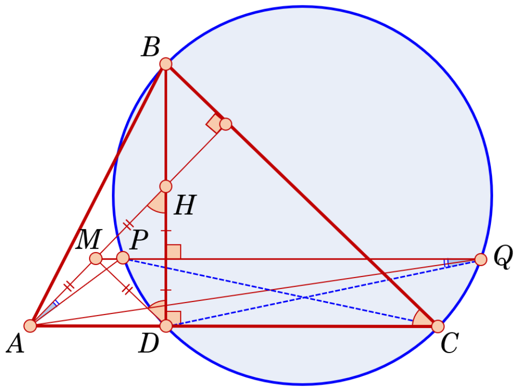


Рис. 66

подобны (угол AMQ общий и $MA\,/\,MP = MQ\,/\,MA$). Отсюда $\angle MQA = \angle MAP$, поэтому $\angle MPA + \angle MQA = \angle MPA + \angle MAP = \angle HMQ = 90^\circ - \angle MHD = \angle CBD$. Итак, $\angle APB + \angle AQB = \angle CBD$, и, поскольку $\angle APB + \angle AQB = (\angle MPA + \angle MQA) + (\angle MPB + \angle MQB)$, для завершения решения остаётся убедиться, что

$$\angle MPB + \angle MQB = 180^\circ - \angle CBD.$$

Для определённости далее считаем, что P лежит между M и Q. Имеем $\angle MPB + \angle MQB = 180^\circ - (\angle BPQ - \angle PQB)$. Так как $PQ \parallel CD$, то дуги PD и CQ равны, а значит, опирающиеся на них вписанные углы равны. Тогда

$$\begin{aligned}\angle BPQ - \angle PQB = \angle BDQ - \angle PCB = \\ = (\angle BDC - \angle QDC) - (\angle DCB - \angle DCP) = \\ = \angle BDC - \angle DCB = 90^\circ - \angle DCB = \angle CBD,\end{aligned}$$

что завершает доказательство.

Замечание. Можно доказать, что H – это ортоцентр треугольника BPQ.

203. Совпадает с задачей **193**.

204. Пусть $\overline{x_i y_i z_i}$ — десятичная запись трехзначного числа

a_i. Подставим в левую часть уравнения $x = 1000$:

$$a_9 \cdot 1000^9 + a_8 \cdot 1000^8 + \ldots + a_1 \cdot 1000 + a_0 =$$
$$= \overline{x_9y_9z_9\underbrace{0000\ldots0}_{27 \text{нулей}}} + \overline{x_8y_8z_8\underbrace{0\ldots0}_{24 \text{нуля}}} + \ldots + \overline{x_1y_1z_1000} + \overline{x_0y_0z_0} =$$
$$= \overline{x_9y_9z_9x_8y_8z_8\ldots x_0y_0z_0}.$$

Таким образом, после подстановки вместо звёздочки 30-значного числа $\overline{x_9y_9z_9x_8y_8z_8\ldots x_0y_0z_0}$ получится уравнение, имеющее корень 1000.

205. Первое решение. Поскольку AM — биссектриса угла LAN, отрезки LM и MN равны как хорды, стягивающие равные дуги (рис. 67). Теперь достаточно доказать, что $CM = LM$ (тогда $CM = LM = MN$, значит, CNL — прямоугольный треугольник, и NM — его медиана, проведенная из прямого угла).

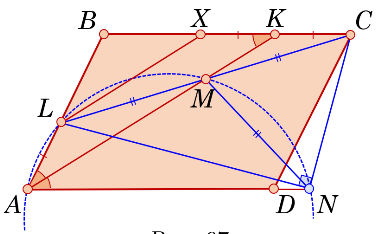


Рис. 67

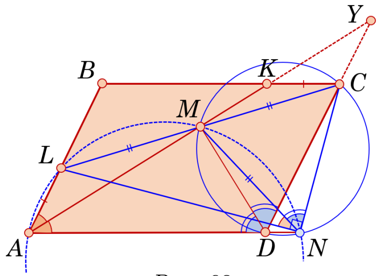


Рис. 68

Так как $\angle BKA = \angle NAK = \angle BAK$, треугольник ABK — равнобедренный (симметричный относительно серединного перпендикуляра к AK). Отметим на стороне BK точку X так, что $LX \parallel AK$. Из симметрии треугольника ABK имеем $KX = AL$. Тогда имеем $KX = CK$ и $MK \parallel LX$, значит, MK — средняя линия треугольника CLX, значит, $CM = LM$, что завершает решение.

Второе решение. Пусть $\angle BAD = 2\alpha$.

Заметим, что DM — биссектриса угла ADC. Действительно, продолжим AK до пересечения с CD в точке Y (рис. 68). Тогда, используя подобия треугольников AML и YMC, AYD и KYC, имеем $AM/MY = AL/YC = CK/YC = AD/DY$. Из полученного равенства $AM/MY = AD/DY$ вытекает, что DM — биссектриса треугольника ADY. Отсюда $\angle MDC = \frac{1}{2}\angle ADC = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\alpha) = 90^\circ - \alpha$.

Из вписанности $ALMN$ имеем $\angle CMN = \angle LAD$, а из параллельности $AB \,||\, CD$ следует $\angle LAD = \angle CDN$. Поэтому $\angle CMN = \angle CDN$, значит, четырёхугольник $CMDN$ — вписанный. Отсюда $\angle MNC = \angle MDC = 90^\circ - \alpha$.

Из вписанности $\angle LNM = \angle LAM = \alpha$, поэтому $\angle LNC = \angle MNC + \angle LNM = 90^\circ$, что и требовалось доказать.

206. *Ответ:* $3k - 1$.

Пронумеруем столбы от 1 до n вдоль дороги и примем за 1 расстояние между соседними столбами. Пару одноцветных столбов, между которыми нет других столбов того же цвета, будем называть *хорошей*.

Оценка. Пусть n столбов покрашены так, что условие задачи выполнено. Пусть n_i — количество столбов i-го цвета (далее считаем, что $n_i \geqslant 1$, то есть все цвета присутствуют, иначе можно увеличить n, добавить столб нового цвета в конец). Пусть a_i и b_i — номера первого и последнего столбов i-го цвета.

Всего у нас есть $t = (n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \ldots + (n_k - 1) = (n_1 + n_2 + \ldots + n_k) - k = n - k$ хороших пар столбов. Поскольку все расстояния между столбами в хороших парах различны, наименьшее из этих расстояний не меньше 1, следующее — не меньше 2, и так далее. Так, для суммы S расстояний во всех хороших парах получаем оценку $S \geqslant 1 + 2 + \ldots + t = \frac{1}{2}t(t + 1)$.

С другой стороны, сумма всех расстояний для i-го цвета равна $b_i - a_i$. Поэтому $S = (b_1 + \ldots + b_k) - (a_1 + \ldots + a_k)$. Сумма $b_1 + \ldots + b_k$ не превышает суммы k самых больших среди номеров $1, 2, \ldots, n$, а сумма $a_1 + \ldots + a_k$ не меньше, чем сумма k наименьших среди номеров $1, 2, \ldots, n$, поэтому $S \leqslant (n + (n-1) + \ldots + (n - k + 1)) - (1 + 2 + \ldots + k) = k(n - k) = kt$.

Итак, $t(t+1) \leqslant S \leqslant kt$; откуда $t \leqslant 2k - 1$ и $n = k + t \leqslant 3k - 1$.

Пример. Годится, например, покраска

$$1, 2, \ldots, k-1, k, k, k-1, \ldots, 2, 1, 2, 3, \ldots, k-1, k.$$

Здесь для цвета 1 единственная хорошая пара, и расстояние между столбами в ней равно $2k - 1$. Для всех остальных цветов есть две хорошие пары, при этом для цвета 2 имеем расстояния $2k - 3$

и 2, для цвета 3 — расстояния $2k-5$ и 4, и так далее, для цвета k — расстояния 1 и $2k-2$.

Замечание. Существуют и другие, более сложные примеры. Например, можно первые k столбов покрасить в цвета $1, 2, \ldots, k$, а дальше столб с номером $k+s$, где $s = 2^p(2q-1)$, окрасить в цвет q (скажем, для $k = 8$ покраска будет выглядеть так: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 1, 1, 2, 1, 3, 2, 4, 1, 5, 3, 6, 2, 7, 4, 8$). Возможно индуктивное описание подходящих примеров.

207. Докажем, что $(x-y)\sqrt{3x^2+y^2} \geqslant (x-y)(x+y) = x^2-y^2$. Если $x \geqslant y$, то $x-y \geqslant 0$ и $\sqrt{3x^2+y^2} \geqslant \sqrt{x^2+2xy+y^2} = x+y$. Если же $x \leqslant y$, то $x-y \leqslant 0$ и $\sqrt{3x^2+y^2} \leqslant \sqrt{x^2+2xy+y^2} = x+y$.

Складывая доказанное $(x-y)\sqrt{3x^2+y^2} \geqslant x^2-y^2$ с аналогичными неравенствами

$$(y-z)\sqrt{3y^2+z^2} \geqslant y^2-z^2, \quad (z-x)\sqrt{3z^2+x^2} \geqslant z^2-x^2,$$

получаем требуемое.

208. *Ответ: нельзя.*

Предположим, такие три числа a, b, c найдутся. Поскольку a кратно $b+c$, сумма $a+(b+c) = 2023$ также кратна $b+c$, из чего следует, что $b+c$ нечётно. Значит, $b-c+1$ — чётное число, и нечётное число $b+c$ не может на него делиться.

209. *Ответ:* $-a_1, -a_2, -a_3$.

Первое решение. Так как многочлен $(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)-b$ имеет старший коэффициент 1 и корни c_1, c_2, c_3, то $(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)-b = (x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)$. Подставим $-x$ в последнее равенство вместо x, получим

$$(-x-a_1)(-x-a_2)(-x-a_3)-b = (-x-c_1)(-x-c_2)(-x-c_3),$$

что равносильно $(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)+b = (x+c_1)(x+c_2)(x+c_3)$. Из полученного равенства получаем, что тремя корнями уравнения $b = (x+c_1)(x+c_2)(x+c_3)$ являются числа $-a_1, -a_2, -a_3$.

Второе решение. По теореме Виета выполняются следующие соотношения:

$$c_1+c_2+c_3 = a_1+a_2+a_3,$$
$$c_1c_2+c_2c_3+c_3c_1 = a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1,$$
$$c_1c_2c_3 = a_1a_2a_3-b.$$

Эти же равенства можно переписать следующим образом:

$$(-a_1)+(-a_2)+(-a_3)=(-c_1)+(-c_2)+(-c_3),$$
$$a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1=c_1c_2+c_2c_3+c_3c_1,$$
$$-a_1a_2a_3=-c_1c_2c_3-b,$$

из чего следует, что числа $-a_1, -a_2, -a_3$ являются корнями уравнения $(x+c_1)(x+c_2)(x+c_3)-b=0$.

Замечание. Если в первое уравнение подставить вместо x числа c_1, c_2 и c_3, то из полученных трёх равенств $(c_1-a_1)(c_1-a_2)(c_1-a_3)=b$, $(c_2-a_1)(c_2-a_2)(c_2-a_3)=b$ и $(c_3-a_1)(c_3-a_2)(c_3-a_3)=b$ непосредственно не следует, например, что $(-a_1+c_1)(-a_1+c_2)(-a_1+c_3)=b$.

210. Совпадает с задачей **200**.

211. *Ответ: не могла.*

Первое решение. Докажем, что для любой пары $(x;y)$, записанной на доске, число $2x-y$ делится на 7.

Действительно, для пары $(1;2)$ число $2\cdot 1-1=0$ делится на 7.

Пусть для пары $(a;b)$ число $2a-b$ делится на 7. Тогда для пары $(-a;-b)$ число $2\cdot(-a)-(-b)=-(2a-b)$ делится на 7, и для пары $(-b;a+b)$ число $2\cdot(-b)-(a+b)=-a-3b=3(2a-b)-7a$ делится на 7.

Пусть для пар $(a;b)$, $(c;d)$ числа $2a-b$, $2c-d$ делятся на 7. Тогда для пары $(a+c;b+d)$ число $2(a+c)-(b+d)=(2a-b)+(2c-d)$ делится на 7.

Так как для пары $(2022;2023)$ число $2\cdot 2022-2023=2021$ не делится на 7, эта пара на доске появиться не может.

Второе решение. Будем к каждой паре $(a;b)$ на доске дописывать третье число $c=-a-b$. Тогда сумма чисел в каждой тройке будет равна нулю, а правила дописывания новых пар будут такими: если на доске записана тройка $(a;b;c)$, то можно дописать тройки $(-a;-b;-c)$ и $(-b;-c;a)$, а если записаны тройки $(a;b;c)$ и $(d;e;f)$, то можно дописать тройку $(a+d;b+e;c+f)$ — назовём эту тройку *суммой* троек $(a;b;c)$ и $(d;e;f)$. Также для тройки $(a;b;c)$ и целого числа k обозначим через $k\cdot(a;b;c)$ тройку $(ka;kb;kc)$.

Докажем, что все тройки, появляющиеся на доске, имеют вид

$$(a;b;c)=k\cdot(1;2;-3)+l\cdot(2;-3;1)+m\cdot(-3;1;2) \qquad (5)$$

с целыми k, l и m. В начальный момент это верно:

$$(1;2;-3) = 1 \cdot (1;2;-3) + 0 \cdot (2;-3;1) + 0 \cdot (-3;1;2).$$

Теперь достаточно показать, что из троек, имеющих вид (5), также получаются лишь такие тройки. Для операции взятия суммы троек это очевидно. Для остальных операций это тоже несложно проверить: если $(a;b;c)$ имеет вид (5), то

$$(-a;-b;-c) = (-k)\cdot(1;2;-3) + (-l)\cdot(2;-3;1) + (-m)\cdot(-3;1;2),$$
$$(-b;-c;-a) = (-m)\cdot(1;2;-3) + (-k)\cdot(2;-3;1) + (-l)\cdot(-3;1;2).$$

Утверждение доказано. Предположим теперь, что на доске появилась тройка $(2022;2023;-4045)$, то есть она имеет вид (5). Тогда имеем

$$2022 = k + 2l - 3m \quad \text{и} \quad 2023 = 2k - 3l + m.$$

Выражая из первого равенства $k = 2022 - 2l + 3m$ и подставляя во второе, получаем $2023 = 2 \cdot 2022 - 7l + 7m$, то есть $7(m-l) = 2023 - 2 \cdot 2022 = -2021$. Однако это невозможно, поскольку 2021 не делится на 7.

Замечание. Можно показать, что указанными операциями получаются все тройки, имеющие вид (5). Также можно заметить, что $(-3;1;2) = -(1;2;-3) - (2;-3;1)$, так что в формуле (5) можно обойтись без третьего слагаемого.

Аналогичное решение можно получить и без дописывания третьего числа к паре (однако оно будет выглядеть менее естественно). Именно, можно доказать, что все пары, появляющиеся на доске в исходном процессе, имеют вид

$$(a;b) = k \cdot (1;2) + l \cdot (2;-3) \tag{6}$$

с целыми k и l. Заметим здесь, что если пара $(a;b)$ имеет вид (6), то

$$(-b;a+b) = l \cdot (1;2) + (l-k) \cdot (2;-3).$$

212. Пусть P — такая точка на луче HE, что $PB \perp BC$ (рис. 69). Докажем, что точки C, O и P лежат на одной прямой.

В самом деле, по теореме Менелая для треугольника ADE и прямой CMB имеем

$$\frac{EC}{CD} \cdot \frac{DM}{MA} \cdot \frac{AB}{BE} = 1.$$

Поскольку прямые PB, AH и OM параллельны между собой (они все перпендикулярны прямой BC), имеем $AB/BE = HP/PE$, а также $DM/MA = DO/OH$. Значит,

$$\frac{EC}{CD} \cdot \frac{DO}{OH} \cdot \frac{HP}{BE} = 1,$$

из чего следует, что точки C, O и P лежат на одной прямой по теореме Менелая для треугольника EDH. Значит, точка P диаметрально противоположна точке C в окружности ω. Аналогично, если Q — точка пересечения перпендикуляра к прямой BC, проходящего через точку C, и прямой HF, то точка Q диаметрально противоположна точке B. Из этого следует, что $\angle EXC = \angle PXC = 90°$, и, аналогично, $\angle FYB = \angle QYB = 90°$.

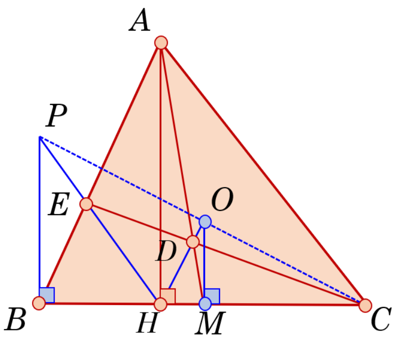


Рис. 69

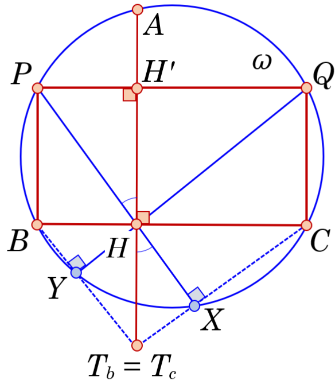


Рис. 70

Обозначим через H', T_b и T_c точки пересечения прямой AH соответственно с прямыми PQ, BY и CX (рис. 70). Заметим, что треугольники HXT_c и $HH'P$ подобны как прямоугольные с вертикальными острыми углами. Значит, $HT_c/HX = HP/HH'$, или $HT_c = HX \cdot HP/HH' = HB \cdot HC/HH'$. Аналогично, $HT_b = HB \cdot HC/HH'$. Значит, прямые BY и CX пересекают прямую AH в одной и той же точке, что и требовалось доказать.

213. Совпадает с задачей **193**.

214. *Ответ: не всегда.*

Возьмём прямоугольник размера 5×15, половина площади которого равняется 37,5. Для того, чтобы условие выполнялось, из данного прямоугольника необходимо вырезать прямоугольник площади 37 или 38. Таких прямоугольников всего три: 1×37, 1×38 и 2×19. Заметим, что длинная сторона каждого из таких прямоугольников не меньше 19. С другой стороны, диагональ исходного прямоугольника равняется $\sqrt{250}$, но $\sqrt{250} < \sqrt{256} = 16 < 19$, поэтому ни один из таких прямоугольников вырезать из прямоугольника 5×15 нельзя.

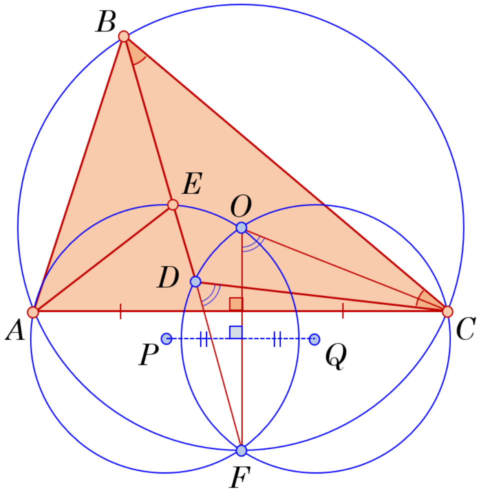


Рис. 71

215. Обозначим вторую точку пересечения биссектрисы угла ABC с окружностью, описанной около треугольника ABC, через F (рис. 71). Тогда точка F — середина дуги AC, поэтому OF — серединный перпендикуляр к хорде AC. Поскольку вписанный угол вдвое меньше центрального, опирающегося на ту же дугу, то $\angle FOC = 2\angle FBC$.

С другой стороны, так как $BD = DC$, то $\angle DCB = \angle CBD$, а тогда $\angle CDF = \angle DCB + \angle DBC = 2\angle DBC = 2\angle FBC$ как внешний к треугольнику BCD. Таким образом, $\angle FOC = \angle FDC$, поэтому точка F лежит на окружности, описанной около треугольника COD. Рассуждая аналогично, мы получаем, что $\angle AOF = 2\angle ABF = \angle AEF$, и точка F лежит и на окружности, описанной около треугольника AOE. Значит, точки P и Q — центры описанных окружностей треугольников AOF и COF, а эти треугольники симметричны относительно OF. Получается, что точки P и Q также симметричны относительно OF. Следовательно, либо точки P и Q лежат на прямой AC, либо P, Q, A, C — вершины равнобокой трапеции, а потому лежат на одной окружности.

216. Положим $d = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$. Теперь заметим, что

$$\left|\frac{b}{a} - \frac{b}{c}\right| + \left|\frac{c}{a} - \frac{c}{b}\right| + |\,bc+1\,| = |\,bd+1\,| + |\,cd+1\,| + |\,bc+1\,|.$$

Если $d = 0$, то два из этих слагаемых равны 1, и тем самым сумма не меньше, чем 2. В противном случае числа a, b, d отличны от нуля. Значит, какие-то два из них одного знака, а тогда их произведение положительно, и соответствующее слагаемое больше 1. Поскольку два других слагаемых неотрицательные, то общая сумма больше 1.

217. Докажем индукцией по n, что в любом связном графе, содержащем $2n$ вершин, их можно покрасить в красный и синий цвета таким образом, что число рёбер с разноцветными концами (будем называть такие рёбра разноцветными) будет превосходить число рёбер с одноцветными концами (будем называть такие рёбра одноцветными) хотя бы на n — из этого будет следовать утверждение задачи. База $n = 1$ тривиальна, докажем переход.

Предположим, в графе с $2n$ вершинами найдётся пара вершин, соединённых ребром, при удалении которых граф не теряет связность; обозначим эти вершины через u и v. Покрасим оставшиеся вершины таким образом, чтобы число разноцветных рёбер было хотя бы на $n-1$ больше числа одноцветных рёбер — так можно сделать по предположению индукции. Заметим, что вершины u и v теперь можно покрасить таким образом, что разность между количествами разноцветных и одноцветных рёбер увеличится. В самом деле, без ограничения общности будем считать, что если вершины u и v не имеют обе чётные степени, то вершина u имеет нечётную степень. Тогда покрасим вершину u в цвет, который имеет меньшинство её соседей (в случае равенства покрасим в любой цвет), а затем покрасим таким же образом вершину v. Очевидно, при каждой покраске требуемая разность не уменьшилась, и хотя бы при одной покраске у соответствующей вершины было нечётное число покрашенных соседей, то есть разность при этой покраске увеличилась. Поскольку до покраски вершин u и v разность между числом разноцветных рёбер и числом одноцветных рёбер была не меньше $n-1$, после этой покраски она стала не меньше n.

С другой стороны, если в графе найдётся пара висячих вершин, то, очевидно, при их удалении граф по-прежнему не теряет связность, и тем же самым алгоритмом можно покрасить весь остальной граф, а затем и эти висячие вершины, таким образом, что разность между количествами разноцветных и одноцветных рёбер будет не меньше n. Докажем, что в любом связном графе хотя бы с тремя вершинами или найдутся две смежные вершины, при удалении которых граф останется связным, или найдутся две висячие вершины.

В самом деле, рассмотрим произвольное остовное дерево этого графа и подвесим его за любую не висячую вершину. Пусть v — наиболее удалённая от корня висячая вершина этого дерева, а u — предок этой вершины. Обозначим потомков этого предка через $v_1, \ldots, v_k$. Заметим, что вершины $v_1, \ldots, v_k$ являются висячими в рассматриваемом остовном дереве. Рассмотрим несколько случаев.

Случай 1. Среди вершин $v_1, \ldots, v_k$ есть пара вершин, соединённых ребром в исходном графе. Тогда при удалении этих двух вершин остовное дерево (а значит, и сам исходный граф) сохраняет связность.

Случай 2. Среди вершин $v_1, \ldots, v_k$ есть пара вершин, являющихся висячими в исходном графе. Значит, в исходном графе есть хотя бы две висячие вершины.

Случай 3. Среди вершин $v_1, \ldots, v_k$ есть не больше одной вершины, являющейся висячей в исходном графе. Без ограничения общности, будем считать, что если такая вершина есть, то это вершина v_1. Тогда переподвесим каждую из вершин $v_2, \ldots, v_k$ к любому из её соседей, отличных от u: поскольку эти вершины не являются висячими в исходном графе, такой сосед всегда найдётся. После всех переподвешиваний вершины u и v_1 можно будет удалить из графа, и остовное дерево останется связным — а значит, и сам граф.

Поскольку хотя бы один из случаев имеет место, и в каждом из них в графе есть или пара смежных вершин, при удалении которых граф остаётся связным, или пара висячих вершин, переход индукции доказан.

Замечание. Неравенство из задачи является точным: в частности, в полном графе на $2n$ вершинах соответствующая разность не может быть строго больше n.

218. *Ответ:* $(3, 2, 5)$, $3^2 - 2^2 = 5$.

Число $r = p^2 - q^2 = (p-q)(p+q)$ не будет простым, если $p - q > 1$. Значит, $p - q = 1$, то есть два простых числа q и $p = q+1$ — соседние натуральные числа. Это возможно лишь для чисел $q = 2$, $p = 3$, при этом $r = 5$ — простое число.

219. *Ответ: а) да; б) нет.*

а) Пусть, например, у Вовочки было по 9 двоек и пятёрок, их сумма равна 63. Тогда троек и четвёрок вместе у него $30 - 9 - 9 = 12$, на них приходится сумма 37. Если бы каждая из оставшихся оценок была тройкой, сумма была бы 36. «Лишняя» единица — от того, что одну тройку заменили на четвёрку.

Итак, один из примеров оценок каждого типа — 9, 11, 1, 9, причём $9 + 11 + 1 + 9 = 30$ и $9 \cdot 2 + 11 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 9 \cdot 5 = 100$.

Возможны и другие решения.

б) Соберем в пары оценки $(2; 5)$ и $(3; 4)$. В силу того, что троек по условию больше, чем четвёрок, некоторые тройки останутся без пары. Пусть таких пар будет n, тогда $n < 15$, и значит, число непарных троек будет $(30 - 2n)$. Сумма оценок в каждой паре равна 7, значит, сумма всех оценок равна $7n + 3 \cdot (30 - 2n) = 90 + n < 90 + 15 = 105$.

220. *Ответ: они равны.*

Одно из трёх чисел a, b, c будет *наибольшим*, одно — *наименьшим*, и какое-то одно из них — *промежуточным*, даже если между ними есть совпадения.

Из трёх чисел $\max(a, b)$, $\max(b, c)$, $\max(c, a)$ два будут равны наибольшему числу, а одно — промежуточному. Число $\max(a, b, c)$ равно наибольшему из чисел a, b, c. Поэтому первая сумма равна *промежуточному* числу.

Повторяя рассуждения, аналогично доказывается, что вторая сумма B также равна промежуточному числу. Значит, $A = B$.

221. *Ответ: нет.*

Рассмотрим три произвольных луча. Они образуют три угла, причём либо сумма всех трёх равна 360°, либо бо́льший из них равен сумме двух других. Сумма любых трёх из заданных углов не превосходит $150^\circ + 90^\circ + 70^\circ = 310^\circ$. С другой стороны, угол 150° не равен сумме никаких двух из заданных. Противоречие.

222. *Ответ:* 14.

Пусть длины сторон треугольника равны a, b, c и $a \leqslant b \leqslant c$. Самая большая сторона треугольника меньше суммы двух других, поэтому она имеет длину меньше половины периметра, то есть $c \leqslant 11$. С другой стороны, $23 = a + b + c \leqslant 3c$, и значит, $8 \leqslant c$ (так как c — целое). Разберём все возможные случаи:

а) $c = 11$, $a + b = 12$. Значит, a принимает значения от 1 (и тогда $b = c = 11$ до 6 (и тогда $a = b = 6$), всего 6 вариантов.

б) $c = 10$, $a + b = 13$. Значит, a принимает значения от 3 (и тогда $b = c = 10$ до 6 (и тогда $b = 7$), всего 4 варианта.

в) $c = 9$, $a + b = 14$. Значит, a принимает значения от 5 (и тогда $b = c = 9$ до 7 (и тогда $a = b = 7$), всего 3 варианта.

г) $c = 8$, $a + b = 15$. Значит, a принимает значения от 7 (и тогда $b = c = 8$ до 7 (и тогда $b = 8$), всего 1 вариант.

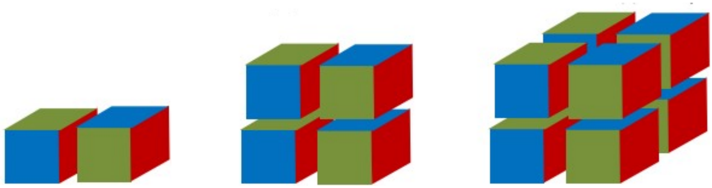


Рис. 72

223. *Ответ: нет.*

Заметим, что раскраска грани повторяет раскраску параллельного ей сечения. Если, скажем, на передней грани есть (соседние) синий и зеленый кубики, то склеены они красной стороной. Будем считать, что они в нижнем ряду (рис. 72). Значит, «сверху» у них зелёная и синяя стороны. Прикладываем к ней кубики, они могут быть склеены только красной стороной. То же верно для тех, которые «сзади» и «сзади сверху». Но тогда второе сечение всё красное, как и две параллельные ему грани, противоречие.

224. *Ответ: целое от* 47 *до* 52.

Пусть Вовочка получил k двоек и k пятёрок, m четверок и $m+x$ троек ($x>0$), и пусть S — сумма его оценок за все контрольные. По условию задачи имеем:

$$\begin{cases} k+m+(m+x)+k=15, \\ 2k+3(m+x)+4m+5k=S, \end{cases} \iff \begin{cases} 15-2(k+m)=x, \\ 7(k+m)+3x=S. \end{cases}$$

Все числа m, k, x — положительные целые, поэтому из первого уравнения: $x=15-2(k+m)\geqslant 1$, и значит, $k+m\leqslant 7$. Исключая x из системы уравнений, получим $S=45+(k+m)\leqslant 52$. С другой стороны, $k\geqslant 1$ и $m\geqslant 1$, поэтому $S\geqslant 47$.

Можно показать, что все указанные значения S реализуются. Например, так: Вовочка получает по одной двойке и пятёрке, $59-S$ троек (это число лежит в диапазоне от 7 до 12) и $S-46$ четвёрок (число лежит в диапазоне от 1 до 6, то есть их меньше, чем троек).

225. Обозначим корни многочлена через x_1 и x_2. По теореме Виета $a=-(x_1+x_2)$ и $b=x_1x_2$. Значит,

$$a+b+1=x_1x_2-(x_1+x_2)+1=(x_1-1)(x_2-1).$$

В силу того, что корни x_i по модулю больше 2, скобки не равны 0 или ± 1, то есть число $a+b+1$ — составное.

226. *Ответ: наибольший угол равен* 120°.

Пусть самый большой из углов — $\angle AOB$. Если какой-то луч OC лежит вне этого угла, он образует с OA и OB углы, в сумме превосходящие 180°, но таких среди заданных углов нет. Значит, два других луча лежат внутри угла AOB, каждый разбивает его на два угла. Значит, $\angle AOB$ можно двумя способами представить в виде суммы пары углов из заданного списка. Попарные суммы углов равны 70°, 80°, 90°, 100°, 110°, 120°, 120°, 130°, 140°, 160°. Среди них только угол 120° повторяется дважды.

Этот вариант реализуется. Например, как показано на рисунке 73.

227. Пусть h_1, h_2 — высоты треугольников ABC и ADC, проведённые к основанию AC. Для определенности будем считать, что $h_1\leqslant h_2$. Площади этих треугольников равны

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot h_1, \qquad S_{ADC}=\frac{1}{2}AC\cdot h_2.$$

Проведём прямую l, параллельную AC, равноудаленно от вершин B и D. Пусть она пересекает сторону CD в точке M. Покажем, что прямая AM — искомая (рис. 74).

Действительно, высота треугольника AMC равна $\frac{1}{2}(h_2 - h_1)$, поэтому $S_{AMC} = \frac{1}{2}(S_{ADC} - S_{ABC})$, значит,

$$S_{ABCM} = S_{ABC} + \frac{1}{2}(S_{ADC} - S_{ABC}) = \frac{1}{2}(S_{ADC} + S_{ABC}) = S_{ABCD}.$$

Идея решения основана на том, что площадь четырехугольника $ABCM$ пропорциональна сумме высот треугольников ABC и ACM, то есть «высоте» четырехугольника $ABCM$, отмеряемой перпендикулярно AC. Значит, половина площади достигается на половине этой «высоты».

Замечание. Аналогично можно поделить четырехугольник лучами, выходящими из A, на любое количество равновеликих частей.

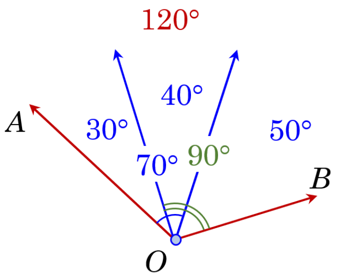


Рис. 73

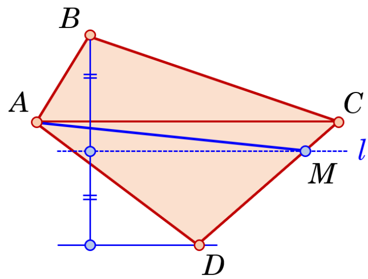


Рис. 74

228. Заметим, что в классе из n человек не более чем $2n$ «угощений», то есть все школьники не более чем $4n$ раз выступают в ролях «угощающих» и «угощаемых». По принципу Дирихле найдётся школьник, «связанный угощением» не более чем с 4 одноклассниками. Назовём такого школьника «*интровертом*». Если убрать из класса «интроверта» и всех, с кем он связан, в классе останется не менее 21 ученика. Если мы найдём среди них пятерых попарно «неугощающих», то, добавив «интроверта», получим искомую группу из 6 человек.

Итак, задача свелась к поиску 5 человек из 21. Аналогичными рассуждениями сводим её к поиску 4 человек из 16; 3 из

11; 2 из 6 и, наконец, 1 из 1. Последнее очевидно, так как никто не угощает сам себя.

229. *Ответ:* 64.

Пусть среди кумиров школы оказались команды $A_1, A_2, \ldots, A_k$, а школьники пронумерованы числами 1, 2, $\ldots$, 2023.

Построим таблицу, в клетках которой запишем номера общих фанатов каждой пары команд (рис. 75). Ясно, что таблица будет симметричной относительно главной диагонали. Все номера, стоящие выше диагонали, различны (повторяющийся номер соответствовал бы двум парам команд, то есть не менее, чем трём из них). Значит, в таблице содержится не менее $1+2+\ldots+(k-1) = \frac{1}{2}k(k-1)$ элементов.

Итак, $\frac{1}{2}k(k-1) \leqslant 2023$, откуда $k \leqslant 64$. Эта же таблица даёт и пример, так как можно считать фанатами i-й команды всех школьников, номера которых стоят в соответствующей строке.

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_1		1	2	4	7	$\ldots$
A_2	1		3	5	8	$\ldots$
A_3	2	3		6	9	$\ldots$
A_4	4	5	6		10	$\ldots$
A_5	7	8	9	10		$\ldots$
A_6	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	

Рис. 75

230. *Ответ: а) 11 учеников; б) на 1.*

а) Пусть x — количество школьников в кружке. Поскольку каждый высказался об остальных $(x-1)$ школьниках, общее число ответов равно $x \cdot (x-1) = 50 + 60$, откуда $x = 11$.

б) Пусть среди 11 школьников было a отличников и b хулиганов, тогда $a + b = 11$. Подсчитаем, сколько было ответов «хулиган». Его дал каждый из a отличников про каждого из b хулиганов, и таких ответов было ab. Столько же было ответов «хулиган» от каждого из b хулиганов про каждого из a отличников. Всего было дано $2ab = 60$ ответов «хулиган», то есть $ab = 30$.

Зная сумму и произведение, находим сами числа a и b —

это 5 и 6. По условию отличников было меньше, чем хулиганов, значит, $a = 5$, $b = 6$, и $b - a = 1$.

231. *Ответ:* $x = 99$.

Каждый сомножитель, входящий в произведение, раскладывается как разность квадратов, поэтому уравнение можно записать в виде

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{50}{99},$$

или

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{x-1}{x}\right)\cdot\frac{x+1}{x}=\frac{50}{99},$$

то есть $\dfrac{x+1}{2x}=\dfrac{50}{99} \iff x = 99.$

232. *Ответ:* 1221.

Обозначим Васины числа через

$$n-5, n-4, \ldots, n, \ldots, n+4, n+5,$$

а пропущенные числа — через k и $k+1$. Тогда сумма Васиных чисел равна $S = 11n$, и по условию $S - k - (k+1) = 1000$.

Какие значения может принимать сумма двух пропущенных чисел $k + (k+1) = 2k+1$? Сумма двух наименьших чисел равна $(n-5)+(n-4) = 2n-9$, а сумма двух наибольших — $(n+4) + (n+5) = 2n+9$, поэтому

$$2n - 9 \leqslant 2k + 1 \leqslant 2n + 9.$$

С другой стороны, $2k+1 = S-1000$, поэтому $2n-9 \leqslant 11n-1000 \leqslant 2n+9$. Отсюда $111 \leqslant n \leqslant 112$, то есть $n = 111$ или $n = 112$. Из равенства $11n - (2k+1) = 1000$ следует, что n — нечётное число. Значит, $n = 111$ и $S = 11n = 11\cdot 111 = 1221$, а пропущенные числа — 110 и 111.

233. *Ответ: верно.*

Количество различных вариантов покупки набора из открытки и конверта равно $10 \cdot 10 = 100$. Наименьшая цена такого набора — $40+10 = 50$ рублей, а наибольшая — $99+49 = 148$ рублей.

Значит, количество вариантов различных возможных цен за один набор равно $148-50+1=99$. Поскольку это число меньше 100, по принципу Дирихле найдутся два набора из открытки и конверта одинаковой стоимости, при этом стоимости открыток и конвертов в этих наборах будут разными.

234. *Ответ:* 75°.

Опустим из точки A перпендикуляр AN к прямой KM (рис. 76). Тогда углы ABK и KAN равны 30°. Прямоугольные треугольники ABK и ANK имеют общую гипотенузу AK и два равных угла, поэтому они равны, и значит, $AB=AN=AD$. Прямоугольные треугольники ANM и ADM также равны, поскольку имеют общую гипотенузу AM и равные катеты AN и AD. Отсюда $\angle NAM=\angle MAD=\frac{1}{2}(90^\circ-30^\circ-30^\circ)=15^\circ$, и значит, в прямоугольном треугольнике ANM угол AMN равен $90^\circ-15^\circ=75^\circ$.

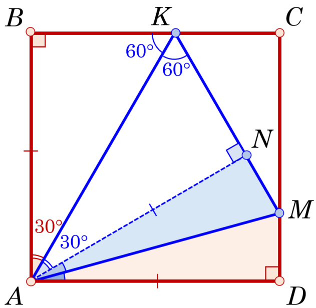


Рис. 76

235. *Ответ:* а) 13 *учеников;* б) *на* 3.

а) Пусть x — количество школьников в кружке. Поскольку каждый высказался об остальных $(x-1)$ школьниках, общее число ответов равно $x\cdot(x-1)=76+80$, откуда $x=13$.

б) Пусть среди 13 школьников было a отличников и b хулиганов, тогда $a+b=13$. Подсчитаем, сколько было ответов «хулиган». Его дал каждый из a отличников про каждого из b хулиганов, и таких ответов было ab. Столько же было ответов «хулиган» от каждого из b хулиганов про каждого из a отличников. Всего было дано $2ab=80$ ответов «хулиган», то есть $ab=40$.

Зная сумму и произведение, находим сами числа a и b — это 5 и 8. По условию отличников было меньше, чем хулиганов, значит, $a=5$, $b=8$, и $b-a=3$.

236. *Ответ:* 1183.

Обозначим Васины числа через

$$n-6, n-5, \ldots, n, \ldots, n+5, n+6,$$

а пропущенные числа — через k и $k+1$. Тогда сумма Васиных чисел равна $S=13n$, и по условию $S-k-(k+1)=1000$.

Какие значения может принимать сумма двух пропущенных чисел $k + (k + 1) = 2k + 1$? Сумма двух наименьших чисел равна $(n - 6) + (n - 5) = 2n - 11$, а сумма двух наибольших — $(n + 5) + (n + 6) = 2n + 11$, поэтому

$$2n - 11 \leqslant 2k + 1 \leqslant 2n + 11.$$

С другой стороны, $2k+1 = S-1000$, поэтому $2n-11 \leqslant 13n-1000 \leqslant 2n + 11$. Отсюда $90 \leqslant n \leqslant 91$, то есть $n = 90$ или $n = 91$. Из равенства $13n - (2k + 1) = 1000$ следует, что n — нечётное число. Значит, $n = 91$ и $S = 13n = 13 \cdot 91 = 1183$, а пропущенные числа — 91 и 92.

237. Пусть $|b| \neq |a|$. Тогда $b + a \neq 0$, и данное уравнение $(a + b)x^2 + 4abx + ab(a + b) = 0$ — квадратное. При этом

$$\tfrac{1}{4}D = 4a^2b^2 - ab(a + b)^2 = -ab(a - b)^2 \neq 0.$$

Значит, уравнение не может иметь ровно одно решение, что противоречит условию.

238. *Ответ: при* $k = 15$.

Пусть цифры расставлены по кругу требуемым образом. Если исключить 0, то остальные девять цифр разбиваются на три группы из трёх подряд идущих цифр. По условию сумма цифр в каждой группе не превосходит k, поэтому сумма всех цифр (включая ноль) не превосходит $3k$. С другой стороны, сумма всех цифр равна $0 + 1 + 2 + \ldots + 9 = 45$. Итак, $45 \leqslant 3k$, и значит, $k \geqslant 15$.

Пример требуемой расстановки цифр для $k = 15$:

$$- 0 - 9 - 5 - 1 - 8 - 4 - 3 - 7 - 2 - 6 - .$$

239. *Ответ:* $140°$.

(Рис. 77.) Обозначим через P середину BC. Угол между касательной BP и хордой BM измеряется половиной дуги, которую стягивает эта хорда, поэтому $\angle MBP = \angle BAM$. В треугольниках BMP и ABP имеются две пары равных углов: $\angle MBP = \angle BAP$ и $\angle BPM = \angle BPA$. Значит, эти треугольники подобны, и поскольку $BP = PC$, получаем

$$\frac{AP}{BP} = \frac{BP}{PM} \iff \frac{AP}{PC} = \frac{PC}{PM}.$$

Отсюда следует подобие треугольников CMP и ACP, а из него равенство углов MCP и CAP. Таким образом, $\angle BMC = 180° -$ $- \angle MBC - \angle MCB = 180° - \angle MBP - \angle MCP = 180° - \angle BAP -$ $- \angle CAP = 180° - 40° = 140°$.

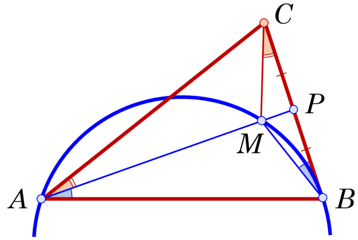


Рис. 77

240. *Ответ:* 18.

Пусть a и b, c и d — пары чисел, записанных на противоположных сторонах квадрата. Тогда $ac + cb + bd + da = 77$ или $(a+b)(c+d) = 77$. Все рассматриваемые числа — натуральные, поэтому значение каждой из скобок не меньше двух. Число 77 можно разложить на два множителя, каждый из которых не меньше двух, единственным образом: $77 = 7 \times 11$. Следовательно, $a + b$ и $c + d$ равны 7 и 11 (в каком-то порядке), поэтому сумма чисел, записанных на сторонах квадрата, равна $a+b+c+d = 7+11 = 18$.

241. *Ответ:* -1 *или* $1/2$.

Прибавим 1 к каждой дроби, тогда получим

$$\frac{a+b+c}{b+c} = \frac{a+b+c}{c+a} = \frac{a+b+c}{a+b} = M + 1.$$

Последние равенства выполняются при $a + b + c = 0$, причём сумма любых двух чисел (в силу ОДЗ) не равна нулю. Если же $a + b + c \neq 0$, то $b + c = c + a = a + b$, откуда $a = b = c$. В первом случае величина M равна -1, во втором — $M = 1/2$.

242. *Ответ: при* $k = 26$.

Пусть цифры расставлены по кругу требуемым образом. Если исключить 0, то остальные двенадцать чисел разбиваются на три группы из четырёх подряд идущих чисел. По условию сумма чисел в каждой группе не превосходит k, поэтому сумма всех чисел (включая ноль) не превосходит $3k$. С другой стороны, сумма всех чисел равна $0+1+2+\ldots+12 = 78$. Итак, $78 \leqslant 3k$, и значит, $k \geqslant 26$.

Пример требуемой расстановки цифр для $k = 26$:

$$-0-12-6-7-1-11-5-8-2-10-4-9-3-.$$

243. Воспользуемся тем, что при неотрицательных a и b выполняется неравенство $\sqrt{a^2+b^2} \leqslant a+b$. В этом легко убедиться, возведя в квадрат обе части этого неравенства. Применим его к каждому слагаемому левой части:

$$\sqrt{x^2+(2-y)^2} \leqslant x+(2-y),$$
$$\sqrt{y^2+(2-z)^2} \leqslant y+(2-z),$$
$$\sqrt{z^2+(2-x)^2} \leqslant z+(2-x).$$

Сложим эти неравенства и получим требуемое неравенство. Знак равенства достигается, например, при $x = y = z = 0$ (или $x = y = z = 2$).

244. *Ответ:* 1 : 1.

Первое решение. (Рис. 78.) Проведём высоты AA_1 и BB_1 в треугольнике ABC, тогда около четырёхугольника AB_1A_1B можно описать окружность. Поскольку AB — диаметр этой окружности и $\angle AMB = 90°$, точка M также лежит на этой окружности. Докажем, что M — середина высоты, то есть $CM : MC_1 = 1 : 1$.

Рассмотрим точку M_1 окружности, симметричную M относительно диаметра AB. Так как прямоугольные треугольники AC_1H и CA_1H подобны, то $AH : CH = C_1H : A_1H$. Следовательно, $CH \cdot C_1H = AH \cdot A_1H = MH \cdot M_1H$ (последнее равенство следует из свойства отрезков хорд окружности).

Пусть $C_1H = x$ и $MH = y$, тогда, по условию, $CH = 3x$ и $M_1H = M_1C_1 + C_1H = MC_1 + C_1H = MH + C_1H + C_1H = y + 2x$. Получим уравнение $3x^2 = y(y+2x) \Leftrightarrow y^2 + 2xy - 3x^2 = 0$. Решая его как квадратное относительно переменной y, получим, что $y = x$ или $y = -3x$. Второе равенство невозможно, значит, $MH = C_1H = x$, отсюда $CM = CH - MH = 2x = MC_1$, то есть M — середина CC_1.

Второе решение. (Рис. 79.) Воспользуемся известным фактом: точки, симметричные точке пересечения высот относительно сторон, лежат на описанной окружности треугольника ABC.

Пусть точка E симметрична ортоцентру H относительно AB. Тогда $EC_1 = HC_1 = x$, $MH = a$, $AC_1 = y$, $BC_1 = z$.

Из прямоугольных треугольников AC_1M и BC_1M получим, что $AM^2 = y^2 + (x + a)^2$, $BM^2 = z^2 + (x + a)^2$. Кроме того, для отрезков пересекающихся хорд AB и CE окружности справедливо равенство $AC_1 \cdot BC_1 = CC_1 \cdot EC_1$, то есть $yz = 4x^2$. Из прямоугольного треугольника AMB: $AM^2 + BM^2 = AB^2$, то есть $y^2 + z^2 + 2(x+a)^2 = (y+z)^2$. Отсюда $(x+a)^2 = yz = 4x^2$, и значит, $x + a = 2x$, $x = a$. Таким образом, $CM : MC_1 = 1 : 1$.

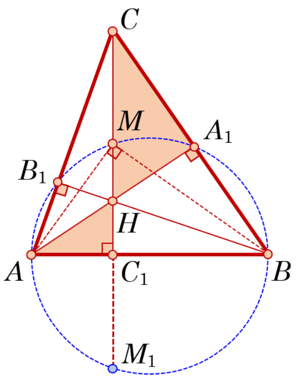


Рис. 78

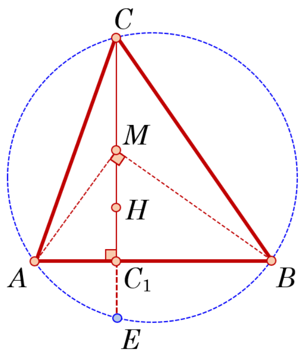


Рис. 79

245. *Ответ: а*) 15 *учеников; б*) *на* 5.

а) Пусть x — количество школьников в кружке. Поскольку каждый высказался об остальных $(x - 1)$ школьниках, общее число ответов равно $x \cdot (x - 1) = 110 + 100$, откуда $x = 15$.

б) Пусть среди 15 школьников было a отличников и b хулиганов, тогда $a + b = 15$. Подсчитаем, сколько было ответов «хулиган». Его дал каждый из a отличников про каждого из b хулиганов, и таких ответов было ab. Столько же было ответов «хулиган» от каждого из b хулиганов про каждого из a отличников. Всего было дано $2ab = 100$ ответов «хулиган», то есть $ab = 50$.

Зная сумму и произведение, находим сами числа a и b — это 5 и 10. По условию отличников было меньше, чем хулиганов, значит, $a = 5$, $b = 10$, и $b - a = 5$.

246. *Ответ:* 2001.

Первое решение. Любой делитель числа 10^{1000} имеет вид

2^m5^n, где $0 \leqslant m \leqslant 1000$ и $0 \leqslant n \leqslant 1000$, и он не будет делителем числа 10^{999}, только если $m = 1000$ или $n = 1000$. При $m = 1000$ число n может принимать все значения от 0 до 1000, всего 1001 вариант. Аналогично для $n = 1000$. При таком подсчёте вариант $m = n = 1000$ мы учтём дважды. Значит, всего подходящих делителей имеется $1001 + 1001 - 1 = 2001$.

Второе решение. Известно, что у числа 2^m5^n ровно $(m + 1)(n + 1)$ делителей. В частности, число $10^n = 2^n5^n$ имеет $(n + 1)(n+1) = (n+1)^2$ делителей. Значит, искомое число делителей равно $(n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1$, где $n = 1000$.

247. *Ответ: все числа равны* $1/\sqrt{99^3}$ *или все числа равны* $-1/\sqrt{99^3}$.

Пусть записаны числа a_1, a_2, …, a_{100}. Докажем, что все числа равны друг другу.

Установим, например, что $a_1 = a_2$. Предположим $a_1 > a_2$; по условию $(a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{100})^3 > (a_1 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{100})^3$. Неравенство $x^3 > y^3$ равносильно $x > y$, поэтому

$$a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{100} > a_1 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{100} \iff a_2 > a_1,$$

противоречие. Следовательно, все числа a_i одинаковы. Обозначим число, записанное на каждой карточке, через x. Тогда $(99x)^3 = x$. Так как $x \neq 0$, то $99^3x^2 = 1$, и значит, $x = \pm 1/\sqrt{99^3}$.

248. Преобразуем числитель каждой дроби, используя тождество $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 + ab + b^2) - 2ab(a + b)$, а затем воспользуемся очевидным неравенством $a^2 + ab + b^2 \geqslant 3ab$:

$$\frac{a^3 + b^3}{a^2 + ab + b^2} = a + b - \frac{2ab(a + b)}{a^2 + ab + b^2} \geqslant a + b - \frac{2ab(a + b)}{3ab} = \frac{1}{3}(a + b).$$

Применяя эти рассуждения к каждому слагаемому, приходим к неравенству

$$\frac{a^3 + b^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3 + c^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3 + a^3}{c^2 + ca + a^2} \geqslant \frac{2}{3}(a + b + c).$$

Используя условие $a + b + c \geqslant 3$, приходим к требуемому утверждению.

249. Совпадает с задачей **244**.

Оглавление